



تحلیل تنش‌های بین لایه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌گذاری متعامد تحت بارگذاری شعاعی

عیسی احمدی*

استادیار، آزمایشگاه مکانیک محاسباتی، مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

* زنجان، صندوق پستی، ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱، i_ahmadi@znu.ac.ir

چکیده

هدف این مقاله مدل‌سازی پوسته استوانه‌ای بسته کامپوزیتی و محاسبه میدان تنش، مخصوصاً تنش‌های برون صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با طول محدود تحت بارگذاری شعاعی می‌باشد. برای فرمول‌بندی مسئله از تئوری لایه‌ای بر مبنای جابه‌جایی بهره‌گیری شده است. با در نظر گرفتن فرم میدان جابه‌جایی مناسب برای پوسته استوانه‌ای کامل، فرمول‌بندی تئوری لایه‌ای برای مسئله استخراج شده است. ابتدا میدان کرنش پوسته در تئوری لایه‌ای به‌دست آمده و سپس با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل معادلات حرکت حاکم بر استوانه در تئوری لایه‌ای و شرایط مرزی متناسب برای آن استخراج شده است. معادلات حاکم بر مسئله به تعداد دلخواهی معادله دیفرانسیل کوپل بر حسب توابع جابه‌جایی تبدیل شده است. با تعریف متغیر مناسب، حل تحلیلی برای معادلات پوسته کامپوزیتی متعامد ارایه شده و شرایط مرزی در لبه‌های پوسته اعمال شده است. در قسمت نتایج عددی، پوسته کامپوزیتی متعامد از جنس کربن-اپوکسی با لایه‌گذاری متقارن و نامتقارن که تحت بارگذاری فشار داخلی یا خارجی است بررسی شده است. ابتدا همگرایی تنش‌ها نسبت به تعداد لایه‌های عددی در تئوری لایه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است و سپس توزیع میدان تنش و مخصوصاً تنش‌های بین لایه‌ای در نزدیکی لبه‌های استوانه ارایه شده است و توزیع تنش‌های بین لایه‌ای عمودی و برشی در لایه مرزی نزدیک به لبه‌ها مطالعه شده است. ملاحظه شد که لایه‌گذاری تاثیر زیادی در اندازه و نحوه توزیع تنش‌های بین لایه‌ای دارد. همچنین مشاهده شد که اندازه بیشینه تنش بین لایه‌ای عمودی در لبه‌های آزاد پوسته از مقدار فشار داخلی اعمال شده به استوانه بزرگتر است و اندازه تنش بین لایه‌ای برشی در حدود اندازه فشار اعمالی می‌باشد.

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۴/۱

پذیرش: ۹۴/۶/۱۷

کلیدواژگان:

تنش‌های بین لایه‌ای
 پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی
 تئوری لایه‌ای
 لایه‌گذاری متعامد

Analysis of interlaminar stresses in cross-ply composite cylinders subjected to radial loads

Isa Ahmadi*

Center of Computational Mechanics, Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

*P.O.B. 45371-38791, Zanjan, Iran, i_ahmadi@znu.ac.ir

Keywords

Interlaminar Stresses
 Laminated Composite Cylinder
 Layer-wise Theory
 Cross-ply layer stacking

Abstract

In this study, the stress field and specially the interlaminar stresses in a composite cylinder with finite length which is subjected to radial load are studied. The displacement based layer-wise theory (LWT) of Reddy is used for formulation and solution of a composite cylinder which is subjected to internal and external pressure. The principle of minimum total potential energy is used to derive the governing equations and the appropriate boundary conditions (BC) for the problem. The governing equations of the problem include a set of coupled ordinary differential equations in the terms of the unknown displacement functions of the mathematical surfaces in the LWT. A set of new variables are defined and the governing equations of the problem are solved analytically. The free edge boundary conditions are considered in the analysis. In the numerical results, the distribution of the interlaminar stresses and in-plane stresses in the symmetric and un-symmetric laminated composite cylinders which are subjected to internal or external pressure are presented. It is seen that the layer stacking has important effect on the distribution and magnitude of the interlaminar stresses in the cylinder. It is observed that the maximum value of the interlaminar normal stresses in the free edge of the cylinder is bigger than the applied radial pressure and the interlaminar shear stress is in the order of the applied pressure.

Please cite this article using:

Ahmadi, I., "Analysis of interlaminar stresses in cross-ply composite cylinders subjected to radial loads", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 43-54, 2015.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

۱- مقدمه

پیشرفت سریع علم و تکنولوژی در دهه‌های اخیر نیاز به مواد جدید با خواص متنوع را بیش از پیش آشکار کرده است. از جمله این مواد جدید می‌توان به انواع مواد کامپوزیتی، مواد تابعی و مواد هوشمند اشاره کرد. مواد کامپوزیتی و مخصوصاً مواد کامپوزیتی تقویت رشته‌ای به علت خواصی چون استحکام به وزن بالا، سفتی به وزن بالا، عمر خستگی بالا و خواص جهت‌دار و بعضی ویژگی‌های دیگر مانند مقاومت به خوردگی مورد توجه فراوان قرار گرفته و استفاده از آنها در صنایع مختلف گسترش یافته است. در این میان پوسته‌های استوانه‌ای در کاربردهای متنوعی مانند انواع مخازن تحت فشار، صنایع پتروشیمی، انتقال آب و صنایع هوافضا کاربرد فراوان دارد. با وجود مزایایی که برای این مواد شمرده شد، استفاده از آنها مشکلاتی نیز داشته است که یکی از مهمترین این مشکلات آن است که سازه‌های کامپوزیتی تحت بارهای کمتر از باری که تئوری‌های معمولی برای آنها پیش‌بینی می‌کند دچار جدایش لایه‌ها در لبه‌های سازه شده که در نهایت منجر به از کارافتادگی سازه می‌شود. طبق پژوهش‌های انجام شده این پدیده به علت بوجود آمدن تنش‌های برون صفحه‌ای در سازه‌های کامپوزیتی و افزایش شدید این تنش‌ها در نزدیکی لبه‌های سازه اتفاق می‌افتد. تنش‌های برون صفحه‌ای در مواد ایزوتروپ نیز به علت ناپیوستگی مادی در نزدیکی لبه‌ها بوجود می‌آید، ولی در مواد کامپوزیتی به علت ناپیوستگی مادی و عدم تطابق خواص الاستیک لایه‌های مجاور، تنش‌های برون صفحه‌ای دارای مقدار و اهمیت بیشتری است و ممکن است باعث جدایش لایه‌ها شود و مخصوصاً اینکه استحکام سازه‌های کامپوزیتی در راستای عمود بر لایه‌گذاری در مقایسه با سایر جهات بسیار کوچک است. بطور کلی تنش‌های برون صفحه‌ای در سرتاسر سازه کامپوزیتی وجود دارد ولی مقدار آن در سطح مشترک لایه‌های مجاور و در نزدیکی لبه‌ها افزایش می‌یابد و از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود و به این علت این تنش‌ها با عنوان تنش‌های بین لایه‌ای نیز شناخته می‌شوند. مقدار تنش‌های بین لایه‌ای در ناحیه‌ای در نزدیکی لبه‌های سازه به شدت افزایش می‌یابد و به این علت جدایش لایه‌ها از لبه‌ها اتفاق می‌افتد. به این ناحیه، لایه مرزی^۱ اطلاق می‌شود. بنابراین بررسی دقیق میدان تنش سه بعدی و مخصوصاً تنش‌های بین لایه‌ای در لایه مرزی دارای اهمیت فراوان می‌باشد. همچنین مقدار و جهت تنش‌های برون صفحه‌ای تحت تاثیر عواملی از جمله خواص مکانیکی لایه‌ها، ترتیب لایه‌گذاری، زاویه الیاف لایه‌ها و پارامترهای هندسی قرار دارد. نتایج تحقیقات نشان می‌دهد که تئوری‌های ساده تک‌لایه معادل مانند تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی هر چند قادر به محاسبه خواص کلی سازه‌های کامپوزیتی می‌باشد ولی این تئوری‌ها قادر به پیش‌بینی وضعیت سه بعدی و پیچیده تنش در نواحی لایه مرزی که یک پدیده موضعی است نمی‌باشد و باید از تئوری‌های دقیق‌تر و کامل‌تری برای این منظور استفاده کرد. محققان مختلف تحقیقات متنوعی برای محاسبه و پیش‌بینی تنش‌های برون صفحه‌ای و پدیده لایه مرزی انجام داده‌اند مروری اجمالی بر کارهای پیشین محققان در مورد بررسی و محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای آورده شده است. کانت و سامیناتان [۱] در سال ۲۰۰۰ مروری بر کارهای پیشین محققان در مورد تنش‌های برون صفحه‌ای در ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی ارائه کردند. در سال ۱۹۷۰ پایپ و پاگانو [۳،۲] از روش تفاضلات محدود بهره جستند و با حل شکل کاهش یافته معادلات الاستیسیته توانستند نتایج عددی برای تنش‌های برون صفحه‌ای در ورق‌های متقارن و متوازن بدست

آوردند. در سال ۱۹۷۱ پایپ و دانیل [۴] نشان دادند که در ورق‌های کامپوزیتی اثر لایه مرزی به ناحیه مرزی که ضخامت آن تقریباً برابر ضخامت ورق می‌باشد محدود می‌شود. همچنین تانگ و لوی [۵] با استفاده از تئوری لایه مرزی تنش‌های برون صفحه‌ای را در ورق‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی محاسبه نمودند. سپس هسو و هراکویچ [۶] پدیده اثر لایه مرزی را با استفاده از تکنیک اغتشاشات برای ورق‌های کامپوزیتی زاویه‌دار مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و چو [۸،۷] با استفاده از تابع پتانسیل تنش لکینتسکی به بررسی اثر لایه مرزی در ورق‌های متقارن و متوازن پرداختند. از روش المان محدود نیز برای مطالعه لایه مرزی در ورق‌های کامپوزیتی استفاده شده است [۹-۱۲]. در سال ۲۰۰۰، چو و کیم [۱۳] با ارائه یک روش جدید تنش‌های برون صفحه‌ای را در ورق‌های کامپوزیتی تحت بار کششی، خمشی، پیچشی و بارگذاری حرارتی مورد بررسی قرار دادند. آنها از اصل کار مجازی مکمل و روش کانتروپج توسعه یافته استفاده نمودند. شو و سولداتوس [۱۴] توزیع تنش در ورق‌های لایه‌ای زاویه‌دار را تحت خمش استوانه‌ای و تحت شرایط مختلف مرزی محاسبه نمودند. نثیر و بهرامی [۱۵] با استفاده از تئوری لایه‌ای^۲ (LWT) به محاسبه اثر لایه مرزی در ورق‌های متعامد عمومی تحت بارگذاری کششی پرداختند. سروساتانی و سروساتانی [۱۶] از تئوری لایه‌ای برای محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی با لایه‌گذاری دلخواه استفاده نمود. کاپور و همکاران [۱۷] تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های کامپوزیتی و ساندویچی را با استفاده از روش المان محدود بررسی کردند. سنوک و سانگ [۱۸] از یک روش ترکیبی کلی جزئی برای بررسی و تعیین توزیع تنش‌های درون صفحه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی استفاده کردند. یزدانی و همکاران [۱۹] با استفاده از روش پرتابی به مطالعه لبه آزاد در ورق کامپوزیتی متعامد پرداختند. افشین و طاهری بهروز [۲۰] تنش‌های بین لایه‌ای در تیر کامپوزیت روی بستر کامپوزیتی تحت بارگذاری جانبی را با تئوری لایه‌ای مورد بررسی قرار دادند.

در زمینه پوسته‌های کامپوزیتی، رن [۲۱] یک حل دقیق الاستیسیته برای پوسته‌های استوانه‌ای لایه‌ای چند لایه تحت خمش استوانه‌ای بدست آورد. چادهوری [۲۲] یک روش نیمه تحلیلی برای پیش‌بینی توزیع تنش برشی بین لایه‌ای در پوسته‌های ضخیم کامپوزیتی ارائه کرد. او در تحلیل خود فرض کرد که در راستای جانبی پوسته انبساط ناپذیر است و تنش برشی در لایه‌های مختلف برابر است. کانت و منون [۲۳] با استفاده از فرمولبندی المان محدود C₀ و روش تفاضلات محدود به محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده با الیاف پرداختند. آنها از المان چهارگوش ۹ گره‌ای پوسته با ۹ درجه آزادی برای هر گره استفاده کردند. جینگ و تزنگ [۲۴] با استفاده از تئوری الاستیسیته به تحلیل پانل کامپوزیتی طولی تحت بارگذاری عرضی یکنواخت (خمش استوانه‌ای) پرداختند و تنش‌های برون صفحه‌ای را محاسبه نمودند. بویتنوت و همکاران [۲۵] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به تخمین تنش‌های برون صفحه‌ای و بررسی شکست در پانل‌های استوانه‌ای با شرایط مرزی گیردار که تحت فشار داخلی قرار گرفته‌اند پرداختند. آنها از تغییرات در راستای طول صرفنظر کرده و مساله را بصورت یک بعدی حل نمودند. شو [۲۶] برای محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای در پوسته‌های کامپوزیتی از یک تئوری مرتبه سوم برشی استفاده کرد. عده‌ای از محققان به منظور ارضای دقیق شرایط پیوستگی تنش‌های برشی در مرز بین لایه‌ها از معادله تغییراتی ترکیبی ریسر برای محاسبه

2. Layerwise Theory

1. Boundary Layer^۱

برای یک نقطه مادی روی استوانه که در مختصات تغییر شکل نیافته در نقطه (x, θ, z) قرار دارد مولفه‌های جابجایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی به ترتیب با توابع u, v, w نشان داده می‌شود. فرض می‌شود که بار مکانیکی وارد شده بر پوسته از نوع فشار یکنواخت شعاعی است که می‌تواند بر سطح داخلی و یا خارجی استوانه اعمال شود. با توجه به اینکه بارگذاری وابسته به مختصه محیطی، θ نمی‌باشد برای این مساله میدان جابجایی پوسته وابسته به مختصه محیطی نمی‌باشد و می‌توان میدان جابجایی پوسته را بصورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u(x, z) \\ v(x, \theta, z) &= v(x, z) \\ w(x, \theta, z) &= w(x, z) \end{aligned} \quad (1)$$

همچنین رابطه بین مختصه محلی z و مختصه شعاعی r بصورت رابطه $r=R(1+z/R)$ بدست می‌آید که در آن شعاع متوسط پوسته است. برای پوسته‌های نازک که برای آنها نسبت z/R در مقایسه با ۱ کوچک است از این نسبت صرف‌نظر می‌شود. در اینصورت مولفه‌های کرنش-جابجایی پوسته با توجه به روابط مربوط به کرنش‌های کوچک در مختصات استوانه‌ای از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} = \frac{w}{R}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۱- فرمول‌بندی تئوری لایه‌ای

در تئوری لایه‌ای فرض می‌شود که لمینیت کامپوزیتی از تعداد لایه فرضی تشکیل شده است که به هر کدام از این لایه‌ها، لایه‌عددی^۲ یا لایه‌ریاضی^۳ گفته می‌شود. طبق این فرض اگر تعداد لایه‌های عددی در یک لمینیت برابر با N باشد، با در نظر گرفتن سطوح بالایی و پایینی لمینیت، در کل تعداد $N+1$ سطح در لمینیت وجود خواهد داشت که به ترتیب از شماره ۱ تا $N+1$ شماره‌گذاری می‌شود و به آنها سطوح عددی یا سطوح ریاضی گفته می‌شود. در تئوری لایه‌ای ردی تابع جابجایی سطح عددی k ام پوسته کامپوزیتی در راستای x, θ, z به عنوان توابع مجهول در نظر گرفته می‌شود و به ترتیب با $U_k(x), V_k(x), W_k(x)$ نشان داده می‌شوند. بر اساس تئوری لایه‌ای، میدان جابجایی پوسته کامپوزیتی در نقاط بین سطوح عددی با توجه به فرم میدان جابجایی (۱) بصورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$\begin{aligned} u(x, z) &= U_k(x) \Phi_k(z) \\ v(x, z) &= V_k(x) \Phi_k(z) \quad k = 1, \dots, N + 1 \\ w(x, z) &= W_k(x) \Phi_k(z) \end{aligned} \quad (3)$$

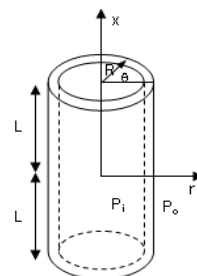
که در رابطه فوق $\Phi_k(z)$ تابع درون‌یاب لاگرانژی است که مقدار جابجایی در نقاط داخلی لایه‌ها را بر اساس مقدار جابجایی سطوح فوقانی و تحتانی آن لایه بیان می‌کند که بصورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

تنش‌های برون‌صفحه‌ای استفاده کردند [۲۸، ۲۷]. حسین [۲۹] از یک مدل المان محدود اصلاح شده برای محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای در پانل ضخیم با انحنا در دو راستا استفاده کرد. تانو و طبیعی [۳۰] با اضافه کردن ترم‌های تنش عمودی جانبی در تئوری مرتبه اول و مرتبه بالا به بررسی تنش بین لایه‌ای در پوسته کامپوزیتی پرداخت. افشین و همکاران [۳۱] به مطالعه اثر لایه‌مرزی در پنل‌های ساندویچی تحت بار جانبی پرداختند. محمودآبادی و همکاران [۳۲] به بررسی ناپایداری دینامیکی پنل‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری لایه‌ای مرتبه اول برشی و روش نوار محدود اسپلاین پرداختند.

برای محاسبه تنش‌های لبه آزاد در پوسته استوانه‌ای بسته کامپوزیتی در تحقیقات پیشین مقاله‌ای یافت نشده است و کارهای انجام گرفته بر روی استوانه‌های کامپوزیتی بطور عمده با شرایط مرزی ساده بوده است که از روش‌های نیمه تحلیلی برای حل استفاده شده است. در این مقاله تنش‌های بین لایه‌ای و پدیده لایه مرزی در پوسته استوانه‌ای کامل با طول محدود از جنس کامپوزیت لایه‌ای که تحت بارگذاری شعاعی و شرایط مرزی آزاد می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است و برای اولین بار تئوری لایه‌ای برای مدلسازی و حل این مساله مورد استفاده قرار گرفته است. ابتدا با در نظر گرفتن یک فرم کلی برای میدان جابجایی و با استفاده از تئوری لایه‌ای ردی، کرنش‌ها بر حسب ترم‌های جابجایی بدست آمده و سپس با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل معادلات تعادل حاکم بر مساله استخراج شده است. معادله‌های تعادل بر حسب مولفه‌های جابجایی استخراج گردیده و با استفاده از تعریف متغیرهای جدید، معادلات حاکم دکوپله شده و حل تحلیلی برای آنها ارائه گردیده است. در نهایت با اعمال شرایط مرزی در لبه‌های استوانه حل معادلات کامل گردیده است. سپس میدان تنش و مخصوصاً تنش‌های برون صفحه‌ای در استوانه مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲- مدل‌سازی

پوسته استوانه‌ای بسته که از تعداد دلخواه لایه‌های کامپوزیتی ساخته شده است مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود که طول پوسته استوانه‌ای برابر با $2L$ ، شعاع متوسط آن R و ضخامت پوسته برابر با h می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که لایه‌های کامپوزیتی در پوسته استوانه‌ای بصورت کامل به یکدیگر متصل شده است. محور مختصات استوانه‌ای r, θ, z بر روی محور استوانه در وسط طول استوانه طوری قرار گرفته است که محور x در راستای طول استوانه منطبق بر محور استوانه است بطوری که لبه‌های پوسته در $x = \pm L$ قرار دارند و محور r راستای شعاعی را نشان می‌دهد. همچنین فرض می‌شود که محور مختصات محلی z در راستای r بر لایه میانی^۱ پوسته استوانه‌ای منطبق می‌باشد بطوری که سطوح داخلی و خارجی پوسته به ترتیب در مختصات $z = h/2$ و $z = -h/2$ قرار دارند.



شکل ۱ استوانه کامپوزیتی لایه‌ای و محورهای مختصات انتخاب شده

2. Numerical layer
3. Mathematical layer

1. Mid surface

اندیس متفاوت باشند مقدار تابع برابر با صفر است. همچنین شرایط مرزی در $x = \pm L$ نیز از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$M_x^k = 0 \text{ or } \delta U_k = 0$$

$$M_{x\theta}^k = 0 \text{ or } \delta V_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N + 1$$

$$R_x^k = 0 \text{ or } \delta W_k = 0 \quad (11)$$

برای حل مساله روابط (۱۱) باید بر حسب مولفه‌های جابجایی نوشته شود. برای این منظور رابطه ساختاری تنش و کرنش بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\{\sigma\}^{(k)} = [C]^{(k)}\{\varepsilon\}^{(k)} \quad (12)$$

که در آن $\{\sigma\}$ ماتریس تنش و $\{\varepsilon\}$ ماتریس کرنش بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{\theta z}, \sigma_{xz}, \sigma_{x\theta}\}^T \quad (13)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{xz}, \gamma_{x\theta}\}^T \quad (14)$$

در روابط فوق بالانویس T به معنی ترانپوز ماتریس می‌باشد. همچنین ماتریس سفتی الاستیک برای لایه k ام بصورت زیر است.

$$[C]^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (15)$$

که در آن اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب نشان دهنده راستای x ، θ و z در مساله می‌باشند. با جایگذاری از روابط کرنش-جابجایی (۶) در رابطه تنش-کرنش (۱۲) و سپس قرار دادن نتیجه حاصل در رابطه (۸) و (۹)، نتیجه‌های نیرو بصورت زیر بدست می‌آید.

$$(M_x^k, M_\theta^k, N_z^k) = (D_{11}^{kj}, D_{12}^{kj}, D_{13}^{kj})U_j' + \left(\frac{D_{12}^{kj}}{R} + B_{13}^{kj}, \frac{D_{22}^{kj}}{R} + B_{23}^{kj}, \frac{B_{23}^{kj}}{R} + A_{33}^{kj} \right) W_j \quad (16)$$

$$M_{x\theta}^k = D_{66}^{kj} V_j' \quad (17)$$

که در آن ماتریس‌های صلبیت لمینیت طبق روابط زیر تعریف می‌شود.

$$(A_{pq}^{kj}, B_{pq}^{kj}, D_{pq}^{kj}) = \sum_{i=1}^N \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{C}_{pq}^{(i)} (\Phi_k' \Phi_j', \Phi_k \Phi_j', \Phi_k \Phi_j) dz \quad (18)$$

همچنین نتیجه‌های R_x^k ، R_θ^k ، Q_x^k و Q_θ^k بر حسب توابع ترم‌های جابجایی از روابط زیر بدست می‌آید.

$$(R_x^k, Q_x^k) = (B_{55}^{kj}, A_{55}^{kj})U_j + (D_{55}^{kj}, B_{55}^{kj})W_j' \\ (R_\theta^k, Q_\theta^k) = \left(B_{44}^{kj} - \frac{D_{44}^{kj}}{R}, A_{44}^{kj} - \frac{B_{44}^{kj}}{R} \right) V_j \quad (19)$$

حال با جایگذاری از روابط (۱۶) و (۱۹) در رابطه (۱۰)، معادلات حرکت بر حسب توابع مولفه‌های جابجایی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$D_{11}^{kj} U_j'' + \left(\frac{1}{R} D_{12}^{kj} + B_{13}^{kj} - B_{55}^{kj} \right) W_j' - A_{55}^{kj} U_j = 0 \quad (20)$$

$$D_{66}^{kj} V_j'' + \left(-A_{44}^{kj} + \frac{1}{R} (B_{44}^{kj} + B_{44}^{kj}) - \frac{1}{R^2} D_{44}^{kj} \right) V_j = 0 \quad (21)$$

همچنین رابطه تعادل در راستای Z بصورت رابطه (۲۲) بدست می‌آید.

$$\Phi_k = \begin{cases} 0 & z \leq z_{k-1} \\ \Psi_{k-1}^2(z) & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \Psi_k^2(z) & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad (4)$$

که در آن z_k مختصه z سطح عددی k ام می‌باشد و $\Psi_k^i(z)$ در آن $i=1,2$ بالا نویس است تابع درونیاب لاگرانژی محلی خطی در لایه k ام نامیده می‌شود و بصورت زیر بدست می‌آید که h_k ضخامت لایه عددی k ام است.

$$\psi_k^1(z) = \frac{(z_{k+1} - z)}{h_k}, \quad \psi_k^2(z) = \frac{(z - z_k)}{h_k} \quad (5)$$

با توجه به رابطه (۳) و (۵) ملاحظه می‌شود که در تئوری لایه‌ای جابجایی در لایه k ام بصورت خطی از مقدار جابجایی سطح k ام تا جابجایی سطح $k+1$ ام درونیابی می‌شود. حال با جایگذاری از رابطه (۳) در رابطه کرنش-جابجایی (۲)، مولفه‌های کرنش در تئوری لایه‌ای بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon_x = \Phi_k U_k', \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \Phi_k W_k, \quad \varepsilon_r = \Phi_k' W_k$$

$$\gamma_{xr} = \Phi_k W_k' + \Phi_k' U_k, \quad \gamma_{x\theta} = \Phi_k V_k' \quad (6)$$

$$\gamma_{\theta r} = \Phi_k' V_k - \frac{1}{R} \Phi_k V_k$$

که در رابطه فوق علامت پرایم روی تابع $\Phi_k(z)$ نشان دهنده مشتق این تابع نسبت به z و علامت پرایم روی توابع $U_k(x)$ ، $V_k(x)$ و $W_k(x)$ نشان دهنده مشتق این توابع نسبت به متغیر x می‌باشد.

۲-۲- استخراج معادلات حرکت

برای استخراج معادلات حرکت حاکم بر پوسته از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استفاده می‌شود که بصورت زیر بیان می‌شود [۳۳].

$$\Pi \delta = \delta U + \delta W = 0 \quad (7)$$

که δU تغییرات انرژی کرنشی و δW قرینه کار نیروهای خارجی می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳) و (۶) و استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل معادلات تعادل حاکم بر مساله استخراج می‌شود. برای سهولت، نتیجه‌های تنش در تئوری لایه‌ای در فرمول‌بندی δU بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$(M_x^k, M_{x\theta}^k, M_\theta^k, R_\theta^k, R_x^k) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_{x\theta}, \sigma_\theta, \sigma_{\theta z}, \sigma_{xz}) \Phi_k dz \quad (8)$$

$$(Q_x^k, Q_\theta^k, N_z^k) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_z) \Phi_k' dz \quad (9)$$

حال با بکارگیری روابط (۸) و (۹) و استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل و استفاده از قضیه اساسی حساب تغییرات معادلات تعادل حاکم بر مساله بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{dM_x^k}{dx} - Q_x^k = 0 \\ \frac{dM_{x\theta}^k}{dx} - Q_\theta^k + \frac{1}{R} R_\theta^k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N + 1 \\ \frac{dR_x^k}{dx} - N_z^k - \frac{1}{R} M_\theta^k + \delta_{kl} P_l - \delta_{k(N+1)} P_o = 0 \quad (10)$$

که در روابط فوق P_i فشار وارد بر سطح داخلی استوانه و P_o فشار وارد بر سطح خارجی استوانه است و δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است که اگر مقدار دو اندیس i و j در آن با یکدیگر برابر باشند مقدار تابع برابر ۱ و اگر مقدار دو

۳- نتایج عددی

در این قسمت توزیع تنش در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بسته که تحت بار فشاری از سمت داخل و خارج قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج عددی از توزیع تنش‌ها در استوانه کامپوزیتی از جنس کربن-اپوکسی (Carbon/Epoxy) با لایه‌گذاری متقارن و نامتقارن ارایه شده است. خواص مکانیکی لایه‌های کربن-اپوکسی در جدول ۱ آمده است. شعاع متوسط استوانه برابر با R و نسبت شعاع به ضخامت برابر $R/h=50$ در نظر گرفته شده است. در نتایج عددی پوسته کامپوزیتی ۴ لایه با لایه‌گذاری‌های $s[90/0]$ ، $s[0/90]$ و $[90/0/90/0]$ مورد بررسی قرار گرفته است که زاویه صفر نشان دهنده الیاف در راستای محوری و زاویه 90 نشان دهنده الیاف محیطی است. ضخامت لایه‌های فیزیکی در لمینیت با t_k نشان داده می‌شود و فرض شده است ضخامت لایه‌های فیزیکی در لمینیت با همدیگر برابر می‌باشد. فشار داخلی وارد بر استوانه برابر با P_i و فشار خارجی P_0 در نظر گرفته شده و میدان تنش ناشی از آن و مخصوصاً پدیده لایه مرزی در لبه‌های $x=\pm L$ مورد بررسی قرار گرفته است. ضخامت پوسته برابر با h و طول آن برابر با Δh در نظر گرفته شده است.

۳-۱- بررسی همگرایی نتایج

در تئوری لایه‌ای، لایه‌های فیزیکی در لمینیت به تعداد مشخصی لایه عددی تقسیم‌بندی می‌شود. تعداد لایه‌های عددی در هر لایه فیزیکی با p نشان داده می‌شود. اگر تعداد تقسیمات همه لایه‌ها با یکدیگر برابر باشد در اینصورت تعداد کل لایه‌های عددی لمینیت برابر با $N=M \times p$ خواهد بود که M تعداد لایه‌های فیزیکی موجود در لمینیت است. دقت نتایج روش لایه‌ای مخصوصاً در پیش‌بینی تنش‌های برون صفحه‌ای به تعداد تقسیمات عددی استفاده شده در حل مساله بستگی دارد. لذا ابتدا برای اطمینان از همگرایی نتایج عددی نسبت به افزایش تعداد تقسیمات عددی و بررسی تعداد لایه عددی لازم برای بدست آوردن دقت لازم، مقدار تنش برون صفحه‌ای عمودی σ_z در چند نقطه از لبه پوسته $s[90/0]$ بر حسب افزایش تعداد لایه‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض شده است که پوسته تحت فشار داخلی به اندازه $P_i=1\text{MPa}$ قرار گرفته است. در شکل ۲ مقدار تنش برون صفحه‌ای عمودی σ_z در لبه آزاد پوسته در $x=L$ بر حسب تعداد لایه‌های عددی در هر لایه فیزیکی، p آمده است تا تنش پیش‌بینی شده بر حسب افزایش تعداد لایه‌های عددی در هر لایه مورد مطالعه قرار گیرد. این جدول مقدار تنش σ_z در لبه $x=L$ در نقاط $z=0$ ، $z=-t_k$ و $z=t_k$ را نشان می‌دهد که این نقاط محل تماس لایه‌های فیزیکی در پوسته می‌باشد. در شکل ۲ ملاحظه می‌شود که در $z=0$ با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار تنش σ_z ابتدا تغییرات نوسانی کوچکی کرده است و سپس با افزایش p ، مقدار تنش در این نقطه افزایش یافته و به مقدار 0.6611MPa همگرا شده است. ولی ملاحظه می‌شود در نقاط $z=\pm t_k$ با افزایش تعداد لایه‌های عددی مقدار تنش σ_z بطور پیوسته افزایش یافته و به مقدار مشخصی همگرا نشده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی لایه‌های کربن-اپوکسی (T300/5208) [۲۴]

E_1 (GPa)	$E_2=E_3$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12}=\nu_{13}$	ν_{23}
۱۲۶	۹/۸	۴/۷	۴/۲۶	۰/۲۸	۰/۱۵

واضح است که در پوسته $s[90/0]$ نقاط $z=\pm t_k$ لبه آزاد در سطح مشترک بین دو لایه با زاویه‌های متفاوت را نشان می‌دهد و $z=0$ سطح

$$D_{55}^{kj} + W_j'' + \left(B_{55}^{kj} - B_{13}^{jk} - \frac{1}{R} D_{12}^{kj} \right) U' + \left(-A_{33}^{kj} - \frac{1}{R} (B_{23}^{jk} + B_{23}^{kj}) - \frac{1}{R^2} D_{22}^{kj} \right) W_j + \delta_{k1} P_i - \delta_{k(N+1)} P_0 = 0 \quad (22)$$

هر کدام از معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) شامل $N+1$ معادله است. ملاحظه می‌شود که معادله (۲۱) مجموعه معادلات همگن است که با روابط (۲۰) و (۲۲) کوپل نمی‌باشند و جداگانه قابل حل می‌باشد. برای سهولت حل، معادلات بصورت ماتریسی نوشته می‌شود. برای این منظور ماتریس‌های $\{\xi\}$ و $\{\eta\}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\xi\} = \{U' W\}^T, \{\eta\} = \{U' W\}^T \quad (23)$$

$$U = \{U_1, U_2, \dots, U_{N+1}\} \\ U' = \{U'_1, U'_2, \dots, U'_{N+1}\} \quad (24)$$

با استفاده از تعریف (۲۳)، روابط (۲۰) و (۲۲) بصورت زیر قابل بیان است.

$$\{\xi\}'' = [A] \{\eta\} \\ \{\eta\}'' = [B] \{\xi\} + \{F_1\} P_i + \{F_2\} P_0 \quad (25)$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های $[A]$ ، $[B]$ ، $\{F_1\}$ و $\{F_2\}$ در پیوست آمده است. با ترکیب دو رابطه فوق، معادله زیر بدست می‌آید.

$$\{\xi\}'' = [C] \{\xi\} + [A] \{\eta\} + \{F_1\} P_i + \{F_2\} P_0 \quad (26)$$

$$[C][U] = [U][\Lambda^2] \quad (27)$$

می‌توان نشان داد که پاسخ معادله (۲۶) بصورت زیر است.

$$\{\xi\} = [U][\cosh(\Lambda x)]\{K_1\} + [U][\sinh(\Lambda x)]\{K_2\} \\ - [B]^{-1}[F] \\ \{\eta\} = [B][U][\Lambda]^{-1}[\cosh(\Lambda x)]\{K_1\} \\ + [B][U][\Lambda]^{-1}[\sinh(\Lambda x)]\{K_2\} \quad (28)$$

که در رابطه فوق

$$\{F\} = \{F_1\} P_i + \{F_2\} P_0 \quad (29)$$

و $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ هر کدام دارای $2(N+1)$ ثابت انتگرال‌گیری هستند که با اعمال شرایط مرزی بدست می‌آید.

۳-۲- شرایط مرزی

برای تکمیل حل مساله شرایط مرزی مساله در لبه‌های آن در $x=\pm L$ باید به پاسخ بدست آمده اعمال شود تا ثابت‌های مجهول انتگرال‌گیری $\{K_1\}$ و $\{K_2\}$ در روابط (۲۸) بدست آید. تعداد $4(N+1)$ ثابت مجهول با اعمال همین تعداد شرط مرزی در لبه‌های پوسته بدست می‌آید. برای لبه آزاد شرایط مرزی حاکم بر لبه‌ها بصورت زیر می‌باشد.

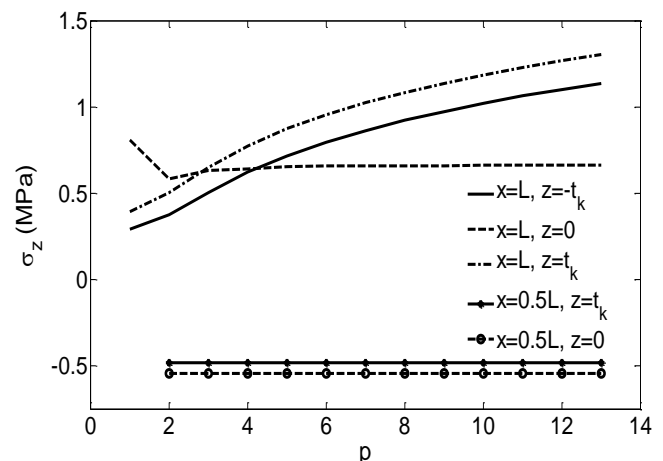
$$M_x^k = 0 \quad (1-30)$$

$$R_x^k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (2-30)$$

$$M_{x\theta}^k = 0 \quad (3-30)$$

شرط مرزی (۳-۳۰) و معادله (۲۱) با توجه به معادله (۱۶) یک مجموعه معادله همگن با شرایط مرزی همگن را ایجاد می‌کند که جواب آن بدیهی و برابر صفر است. همچنین اعمال شرایط مرزی (۱-۳۰) و (۲-۳۰) در لبه‌ها در $x=\pm L$ به روابط (۲۸) شامل تعداد $4(N+1)$ معادله خواهد بود که با اعمال آنها ثوابت انتگرال‌گیری بدست می‌آید.

مشترک بین دو لایه مشابه (با خواص یکسان) است. ملاحظه می‌شود که در پیش‌بینی تئوری لایه‌ای در سطح مشترک $0/90^\circ$ و $90/0^\circ$ مقدار تنش σ_z در لبه آزاد همگرا نشده است. ولی در سطح $Z=0$ همگرایی صورت گرفته است. از روند افزایش تنش‌ها در نقاط $Z=\pm t_k$ مشاهده می‌شود که در لبه آزاد پوسته مقدار تنش عمودی σ_z در سطح مشترک لایه‌ها با خاصیت (زاویه) متفاوت با افزایش تعداد لایه‌ها به مقدار مشخصی همگرا نمی‌شود و با افزایش تعداد لایه‌ها افزایش می‌یابد و گمان می‌رود که در این نقطه تنش σ_z دارای تکینگی است که در تحقیقات انجام شده توسط محققان پیشین به این موضوع اشاره شده است هر چند که با استفاده از حل عددی نمی‌توان این موضوع را اثبات کرد ولی مشاهده می‌شود که حل لایه‌ای نیز همگرایی تنش در این نقاط را نشان نمی‌دهد. با دقت در مقادیر تنش برون صفحه‌ای σ_z در شکل ۲ ملاحظه می‌شود که مقدار این تنش در لبه آزاد در سطح تماس لایه‌ها با زاویه‌های متفاوت ($Z=\pm t_k$) از مقدار فشار داخلی وارده بر پوسته (1MPa) بزرگتر است. برای بررسی بیشتر در مورد همگرایی نتایج نسبت به افزایش تعداد لایه‌های عددی بکار رفته در تئوری لایه‌ای مقدار تنش σ_z در نواحی دورتر از لبه آزاد در مقطع $x=L/2$ برای نقاط $Z=0, Z=t_k$ در شکل ۲ آمده است. با مقایسه همگرایی در مقطع $x=L$ و مقطع $x=L/2$ ملاحظه می‌شود که مقدار تنش‌ها در این مقطع با افزایش تعداد لایه‌ها با نرخ بالایی همگرا شده است. لذا نتیجه می‌شود که در نواحی دورتر از لبه آزاد با افزایش تعداد لایه‌های عددی تنش‌ها با نرخ بالایی همگرا شده است و عدم همگرایی فقط برای لبه آزاد و سطح تماس لایه‌های با خواص متفاوت است. برای نواحی دیگر با افزایش تعداد لایه‌های عددی همگرایی تنش‌ها با نرخ بسیار خوبی صورت گرفته است. ملاحظه می‌شود برای نقاط دور از لبه افزایش تعداد لایه‌های عددی تاثیر قابل توجهی در مقدار تنش نداشته است و تئوری لایه‌ای حتی با تعداد کم لایه عددی با دقت بالایی مقدار تنش‌های برون صفحه‌ای را در دور از لبه‌ها پیش‌بینی کرده است که نشان می‌دهد افزایش تعداد لایه‌ها برای بدست آوردن تنش‌ها در پوسته در دور از لبه‌ها ضرورت بالایی ندارد، ولی برای بالا بردن دقت در پیش‌بینی مقدار تنش‌های برون صفحه‌ای در نزدیکی لبه‌ها لازم است تعداد لایه‌های عددی در تئوری لایه‌ای افزایش یابد.

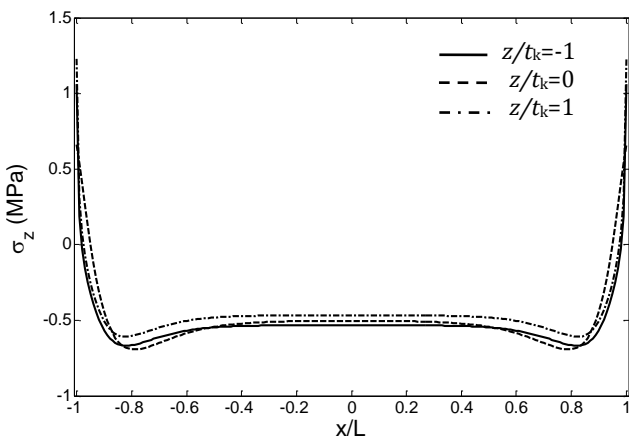


شکل ۲ بررسی همگرایی تنش برون صفحه‌ای نسبت به افزایش تعداد لایه‌های عددی

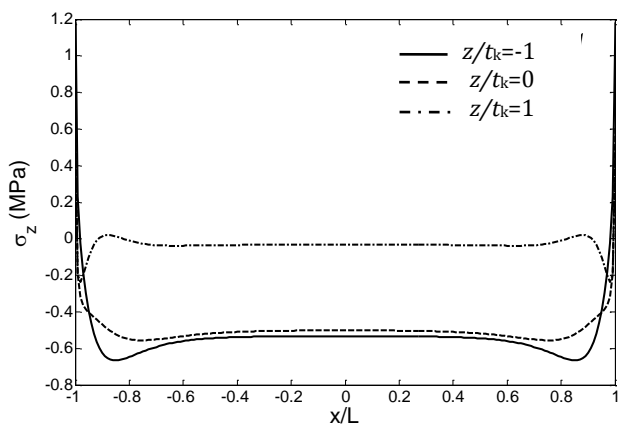
۲-۳- مقایسه نتایج تئوری لایه‌ای با نتایج روش المان محدود

در روش لایه‌ای مساله فقط در راستای ضخامت با در نظر گرفتن لایه‌های عددی گسسته‌سازی می‌شود لذا در این روش گسسته‌سازی در راستای درون

برای بررسی اثر تغییر لایه‌گذاری در توزیع تنش‌های برون صفحه‌ای، توزیع تنش σ_z بر حسب x در پوسته نامتقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] در شکل ۶ آمده است. با مقایسه نمودارهای ۳، ۵ و ۶ ملاحظه می‌شود که توزیع و اندازه تنش برون صفحه‌ای عمودی در پوسته استوانه‌ای به شدت متأثر از ترتیب چینش لایه‌ها در لمینیت می‌باشد. توزیع تنش برشی برون صفحه‌ای σ_{xz} در سطح مشترک لایه‌های مجاور در پوسته [۹۰/۰/۹۰/۰] و [۹۰/۰]s به ترتیب در شکل ۷ و شکل ۸ آمده است. در این نمودارها ملاحظه می‌شود که تنش برشی دور از لبه‌ها در حوالی وسط استوانه، $x=0$ برابر صفر است ولی با دور شدن از وسط استوانه و با نزدیک شدن به لبه تنش برشی برون صفحه‌ای رشد کرده و در نزدیکی لبه به مقدار حداکثر خود می‌رسد و سپس همانگونه که انتظار می‌رود در لبه آزاد به سمت صفر کاهش می‌یابد. در لایه‌گذاری متقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] مقدار تنش برشی در دو سطح $Z=t_k$ و $Z=-t_k$ تقریباً قرینه می‌باشد و در سطح میانی، $Z=0$ مقدار این تنش تقریباً برابر با صفر است. در شکل ۸ همانگونه که انتظار می‌رود در پوسته با لایه‌گذاری نامتقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] مقدار تنش برشی در لایه میانی $Z=0$ برابر صفر نمی‌باشد و دارای مقدار قابل مقایسه با سطوح دیگر است. ملاحظه می‌شود که در سطوح مشترک $Z=\pm t_k$ حداکثر مقدار تنش برشی در نزدیکی لبه برای لایه‌گذاری نامتقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] به حدود ۰/۹MPa رسیده است. با مقایسه شکل ۴ با شکل ۷ نتیجه می‌شود که توزیع تنش برشی σ_{xz} در پوسته با لایه‌گذاری [۰/۹۰]s از نظر اندازه تفاوت قابل ملاحظه‌ای با توزیع تنش برشی در لایه‌گذاری [۹۰/۰]s ندارد ولی علامت تنش برشی σ_{xz} در این دو لایه‌گذاری با یکدیگر متفاوت است.

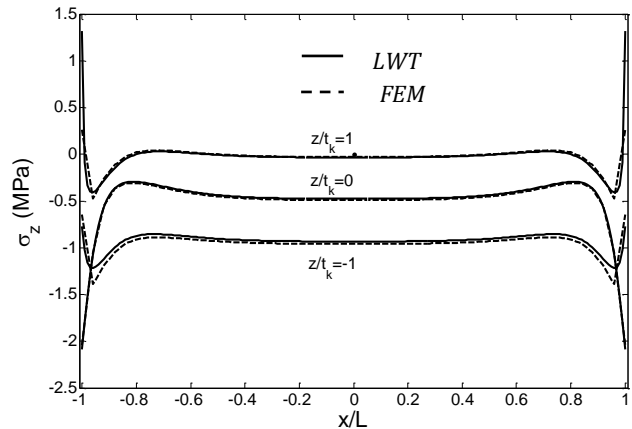


شکل ۵ توزیع تنش σ_z در سطوح مشترک لایه‌های مجاور پوسته [۹۰/۰]s

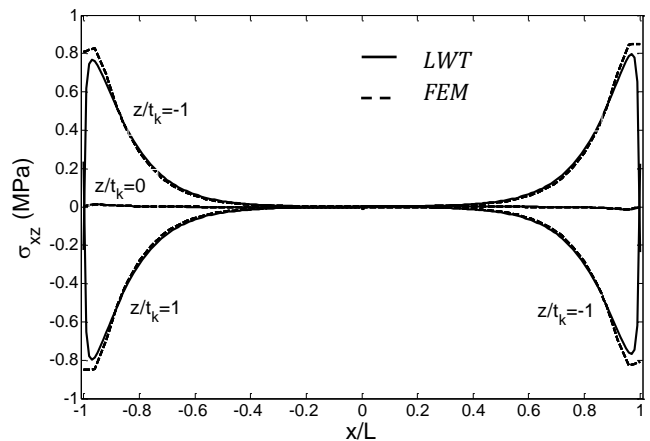


شکل ۶ توزیع تنش σ_z در سطوح لایه‌های مجاور پوسته [۹۰/۰/۹۰/۰]s

شده است که نشان می‌دهد تئوری لایه‌ای با تعداد کمتر تقسیمات عددی نتایج بسیار خوبی را ارائه می‌کند. در $Z=0$ تنش برشی در لایه‌گذاری متقارن بسیار کوچک است.



شکل ۳ مقایسه توزیع تنش σ_z در سطوح مشترک لایه‌های مجاور پوسته [۰/۹۰]s، تئوری لایه‌ای و المان محدود

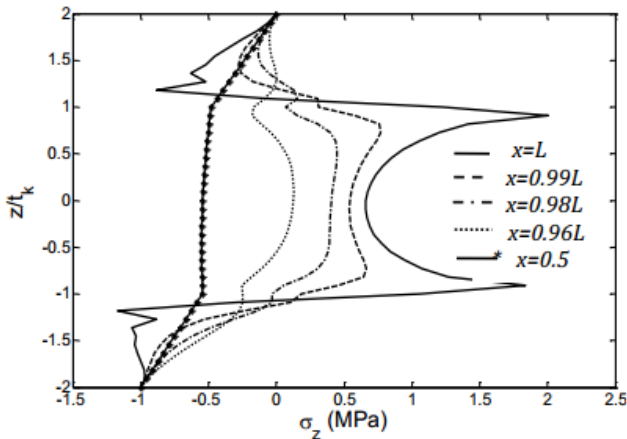


شکل ۴ مقایسه توزیع تنش σ_{xz} در سطوح مشترک لایه‌های مجاور پوسته [۰/۹۰]s، تئوری لایه‌ای و المان محدود

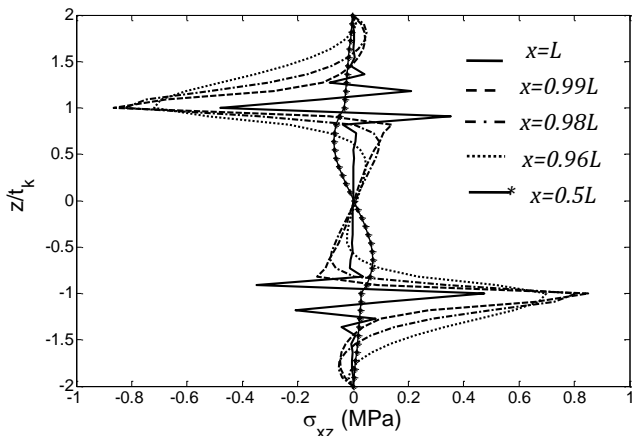
۳-۳- بارگذاری فشاری داخلی

با توجه به اطمینان از درستی نتایج، در ادامه توزیع تنش‌های برون صفحه‌ای و درون صفحه‌ای در استوانه متقارن و نامتقارن مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا پوسته با لایه‌گذاری متقارن [۹۰/۰]s تحت بار فشاری داخلی $P_i=1\text{MPa}$ در نظر گرفته شده است. توزیع تنش برون صفحه‌ای عمودی σ_z بر حسب مختصه طولی x در سطوح مشترک لایه‌های فیزیکی در سطوح $Z/t_k=\pm 1$ و همچنین در $Z/t_k=0$ در شکل ۵ آمده است. در شکل ۵ ملاحظه می‌شود که مقدار تنش σ_z در نزدیکی لبه‌های آزاد با سرعت بالایی رشد کرده و در لبه به مقدار حداکثر خود افزایش یافته است. همانگونه که ملاحظه می‌شود تنش عمودی برون صفحه‌ای در قسمت‌های داخلی پوسته دورتر از لبه‌ها به علت فشار داخلی دارای علامت منفی است ولی در نزدیکی لبه مقدار آن افزایش یافته و از فشاری به کششی تبدیل شده است. این تنش کششی در لبه می‌تواند منجر به جدایش لایه‌های پوسته در لبه شود. در شکل ۱ ملاحظه شد که برای لایه‌گذاری [۰/۹۰]s مقدار تنش σ_z در $Z=0$ و $Z/t_k=-1$ فشاری است.

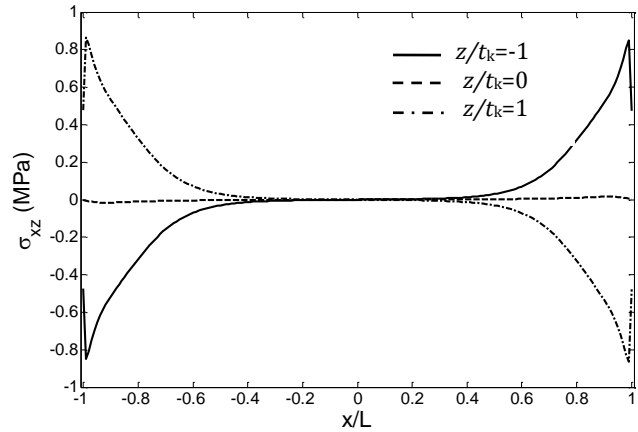
ای عمودی کاهش یافته است و در نواحی دورتر در $x=0.5L$ توزیع تنش در هر لایه تقریباً خطی است و مقدار آن نیز در مقایسه با نواحی مرزی بسیار پایین‌تر است. توزیع تنش برشی σ_{xz} نسبت به ضخامت پوسته Z در لبه آزاد و در نواحی نزدیک لبه در شکل ۱۰ آمده است. در این شکل مشاهده می‌شود که در $x=L$ که لبه آزاد پوسته می‌باشد صفر بودن تنش برشی σ_{xz} در نواحی دورتر از نقاط $Z/t_k=\pm 1$ (سطح مشترک لایه‌های $0.90/0$ و $0.90/0$) با دقت بالایی ارضا می‌شود ولی در نواحی نزدیک به نقاط $Z/t_k=\pm 1$ که $x=L$ که سطح تماس دو لایه مجاور با زاویه متفاوت الیاف دقیقاً در لبه آزاد است مقدار تنش برشی دچار نوسانات سریعی حول نقطه صفر می‌شود که نشان می‌دهد در این نقاط مقدار تنش به عدد مشخصی همگام نشده است. در شکل ۹ ملاحظه می‌شود در نواحی نزدیک لبه آزاد ($x=0.99L, x=0.98L, x=0.96L, x=0.90L$ و ...) در نزدیکی سطوح مشترک لایه‌های با زاویه غیر یکسان ($Z/t_k=\pm 1$) تنش برشی قابل توجهی وجود دارد و با دور شدن از لبه ($x=0.5L$) مقدار تنش برشی دچار کاهش می‌شود. این رفتار در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که در $Z=\pm 2t_k$ مقدار تنش برشی صفر است که نشان می‌دهد تئوری لایه‌ای در سطح داخلی و خارجی شرط مرزی تنش برشی را ارضا کرده است. توزیع تنش σ_z در نزدیکی لبه آزاد برای لایه‌گذاری $s[0.90]$ و $s[0.90/0.90]$ بر حسب Z در شکل ۱۱ و ۱۲ آمده است. مقایسه شکل ۹، ۱۱ و ۱۲ تفاوت بین توزیع و اندازه تنش عمودی در لایه‌گذاری‌های مختلف را نشان می‌دهد.



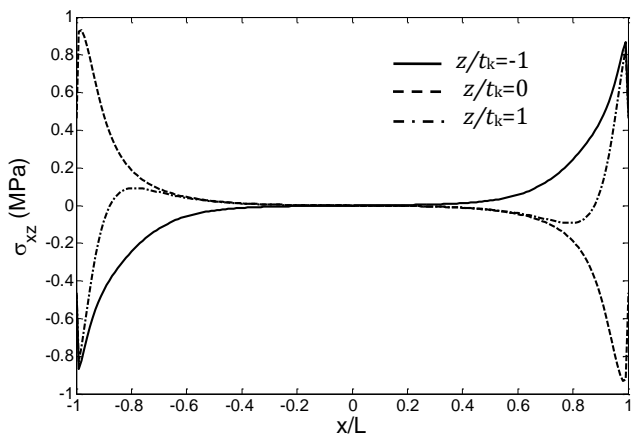
شکل ۹ توزیع تنش عمودی σ_z نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته $s[0.90]$



شکل ۱۰ توزیع تنش برشی σ_{xz} نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته $s[0.90]$



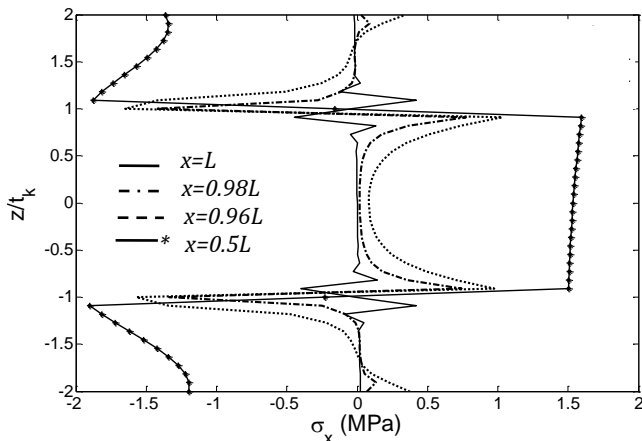
شکل ۷ توزیع تنش σ_{xz} در سطوح لایه‌های مجاور پوسته $s[0.90]$



شکل ۸ توزیع تنش σ_{xz} در سطوح لایه‌های مجاور پوسته $s[0.90/0.90]$

برای بررسی بیشتر، توزیع تنش σ_z نسبت به ضخامت پوسته در لبه آزاد $x=L$ و در نزدیکی‌های لبه آزاد در پوسته $s[0.90]$ در شکل ۹ نسبت به مختصه Z نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که مقدار σ_z در سطح داخلی پوسته ($Z/t_k=\pm 2$) که فشار داخلی اعمال می‌شود از -1MPa که مقدار فشار داخلی اعمالی می‌باشد شروع شده و به مقدار صفر در سطح آزاد خارجی پوسته رسیده است که نشان می‌دهد در تئوری لایه‌ای تنش عمودی برون صفحه‌ای شرایط مرزی روی سطوح فوقانی و تحتانی را با دقت و درستی پیش‌بینی می‌کند. در شکل ۹ ملاحظه می‌شود که مقدار تنش σ_z دقیقاً در لبه آزاد $x=L$ با نزدیک شدن به سطح مشترک بین لایه 90° داخلی با لایه صفر میانی افزایش یافته و مقدار آن از حالت فشاری به کششی تغییر پیدا کرده است. در لبه $x=L$ مقدار حداکثر تنش کششی در سطح $Z=-t_k$ نبوده و مقدار حداکثر آن تقریباً در $Z=-0.91t_k$ اتفاق افتاده است که دارای مقدار بیشینه برابر با حدود 1.836MPa می‌باشد. همچنین مقدار تنش عمودی در لبه آزاد بین لایه صفر میانی و 90° خارجی دارای یک مقدار حداکثر دیگر است که در نقطه $Z=0.91t_k$ اتفاق افتاده است و مقدار آن برابر با 2.005MPa می‌باشد. سپس دوباره تنش به حالت فشاری تبدیل شده و در نهایت در سطح $Z=2t_k$ که سطح خارجی پوسته است به صفر رسیده است که نشان دهنده دقت بالای تئوری لایه‌ای در پیش‌بینی تنش‌های برون صفحه‌ای است. همچنین ملاحظه می‌شود که با دور شدن از لبه آزاد مقدار تنش برون صفحه

در نواحی نقاط $z = \pm t_k$ برابر با صفر است ولی در این نقاط مقدار تنش محوری حول نقطه صفر نوسان می‌کند.

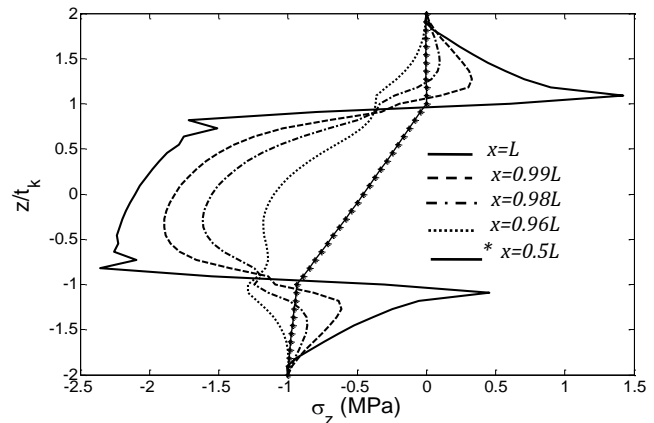


شکل ۱۴ توزیع تنش محوری σ_x نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته، $[0.8/0]_s$

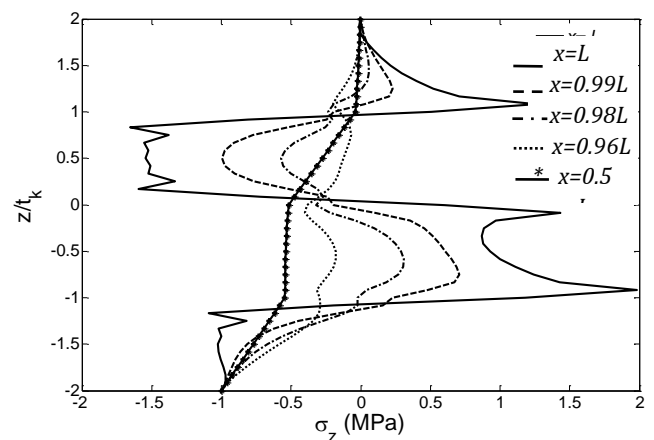
ملاحظه می‌شود که به علت اختلاف در ضریب پواسون جانبی-محوری لایه‌ها، تنش محوری قابل توجهی در نواحی داخلی پوسته دور از لبه‌ها وجود آمده است. واضح است که انتگرال این تنش در ضخامت پوسته مقدار نیروی محوری وارد شده بر پوسته است که برای پوسته با لبه آزاد انتگرال تنش محوری باید برابر با صفر باشد. انتگرال گیری از تنش محوری نشان می‌دهد که مقدار نیروی محوری برابر با $0.9N$ بدست می‌آید که در مقایسه با نیروی ناشی از تنش $1MPa$ واقعا ناچیز است و این مطلب گواهی دیگر بر دقت بالای روش لایه‌ای در پیش‌بینی مقدار تنش می‌باشد. توزیع تنش محیطی σ_θ در جداره پوسته $[90/0]_s$ در شکل ۱۵ آمده است. ملاحظه می‌شود که مقدار تنش محیطی در نزدیکی لبه و در نقاط دور از لبه بسیار به یکدیگر نزدیک است و اثر لایه مرزی بر تنش محوری قابل توجه نمی‌باشد. مقدار تنش محیطی در لایه‌های محیطی (۹۰) بسیار بزرگتر از مقدار این تنش در لایه‌های محوری است. با توجه به اینکه R/h برای استوانه برابر با ۵۰ انتخاب شده است ملاحظه می‌شود که مقدار تنش محیطی در لایه‌های محیطی برابر با حدود $40MPa$ است و مقدار تنش محیطی در لایه‌های محوری برابر با حدود $4MPa$ است. مقدار حداکثر تنش برون صفحه‌ای برای این لایه گذاری حدود $2MPa$ بدست آمد. لذا ملاحظه می‌شود که مقدار تنش برون صفحه ای حدود ۵ درصد تنش محیطی در لایه‌های محیطی و حدود ۵۰ درصد تنش محیطی در لایه‌های محوری است. با توجه به اینکه استحکام در کششی راستای الیاف برای این کامپوزیت حدود $2000MPa$ و استحکام کششی عمود بر الیاف حدود $40MPa$ (حدود ۲ درصد استحکام راستای الیاف) است لذا نقش مهم تنش‌های برون صفحه‌ای در بوجود آوردن شکست در پوسته‌های کامپوزیتی بوضوح قابل تشخیص است.

۴-۳- بارگذاری فشاری خارجی

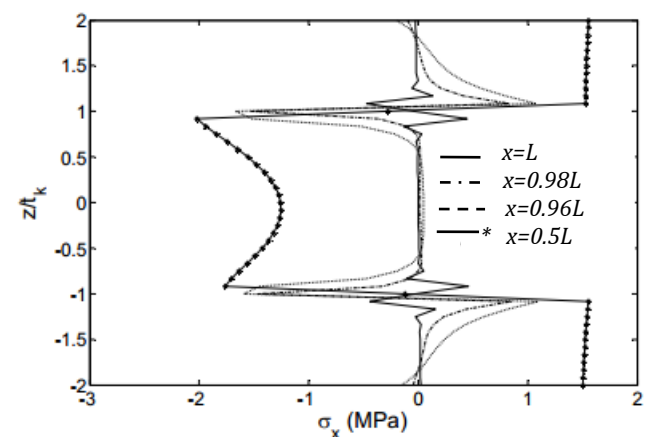
در این قسمت پوسته استوانه‌ای بسته با لایه گذاری نامتقارن تحت بار فشاری از سمت خارج استوانه مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج مربوط به توزیع تنش برون صفحه‌ای با نتایج برای بار فشاری داخلی مقایسه شده است. توزیع تنش عمودی σ_z در پوسته استوانه‌ای $[90/0/90/0]_s$ تحت بارگذاری فشاری خارجی به اندازه $P_0=1MPa$ در شکل ۱۶ آورده شده است. همچنین توزیع



شکل ۱۱ توزیع تنش عمودی σ_z نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته $[0/90]_s$



شکل ۱۲ توزیع تنش عمودی σ_z نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته $[90/0/90/0]_s$



شکل ۱۳ توزیع تنش محوری σ_x نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته $[90/0]_s$

توزیع تنش درون صفحه‌ای محوری σ_x در لبه و نواحی نزدیک لبه و همچنین در $x=0.5L$ برای پوسته با لایه‌گذاری متقارن $[90/0]_s$ و $[0/90]_s$ که تحت فشار داخلی $P_i=1MPa$ قرار دارد در شکل ۱۳ و ۱۴ آمده است. واضح است که مقدار تنش محوری در لبه آزاد باید برابر با صفر باشد. همانگونه که در شکل ۱۲ ملاحظه می‌شود دقیقاً در لبه $x=L$ مقدار تنش بجز

با مقایسه شکل ۱۲ با شکل ۱۷ ملاحظه می‌شود که حداکثر تنش عمودی در این پوسته برای بارگذاری فشار داخلی حدود ۲MPa و برای بارگذاری فشاری خارجی حدود ۳MPa است. تفاوت توزیع تنش برای بارگذاری داخلی و خارجی از مقایسه شکل ۶ با شکل ۱۶ و همچنین مقایسه شکل ۱۱ با شکل ۱۷ قابل ملاحظه می‌شود. ملاحظه می‌شود که شرایط مرزی مربوط به در سطوح داخلی و خارجی استوانه برای این نوع بارگذاری نیز با دقت بالایی ارضا شده است.

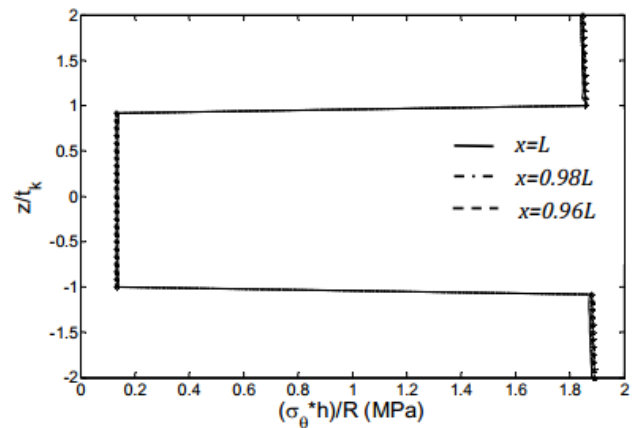
۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله فرمول‌بندی تئوری لایه‌ای برای پوسته استوانه‌ای بسته کامپوزیتی با استفاده از تئوری لایه‌ای بر مبنای جابجایی ارایه شده است. توزیع تنش‌های برون صفحه‌ای و درون صفحه‌ای در پوسته متقارن و نامتقارن متعامد تحت بار فشار داخلی و خارجی مورد بررسی قرار گرفته است و اثر لایه مرزی در توزیع تنش‌ها مورد تأکید قرار گرفته است. ملاحظه شده است که مقدار پیش‌بینی شده برای تنش برون صفحه‌ای در لبه آزاد پوسته در محل تماس دولایه با زاویه متفاوت با افزایش تعداد لایه‌های عددی در تئوری لایه‌ای افزایش یافته است ولی در سایر نقاط مقدار تنش‌ها با افزایش تعداد لایه‌های عددی در تئوری لایه‌ای به سرعت همگرا شده است. برای بررسی و مقایسه دقت نتایج در تئوری لایه‌ای با نتایج روش المان محدود، نتایج روش تئوری لایه‌ای با نتایج حاصل از مدلسازی متقارن محوری المان محدود مقایسه شده است. ملاحظه شده است که در حین انطباق بسیار خوب بین نتایج تئوری لایه‌ای با نتایج روش المان محدود، دقت تئوری لایه‌ای در شرایط مرزها را در سطوح داخلی و خارجی پوسته برای تنش‌های برون صفحه‌ای ارضا می‌کند. در لایه‌گذاری s [۹۰/۰] مقدار حداکثر تنش عمودی برون صفحه‌ای کششی در مرزهای آزاد برابر حدود ۲ برابر فشاری داخلی است و در $Z=0.91t_k$ اتفاق افتاده است و تنش برون صفحه‌ای عمودی فشاری حدود ۱/۰۵ برابر فشار داخلی است. در لایه گذاری s [۰/۹۰] مقدار تنش برون صفحه‌ای عمودی کششی حدود ۱/۴۵ برابر فشار داخلی و مقدار تنش عمودی برون صفحه‌ای فشاری حدود ۲/۳ برابر فشار داخلی است. این اعداد برای لایه گذاری نامتقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] برای تنش عمودی فشاری حدود ۱/۵- برابر و برای تنش کششی حدود دو برابر فشار داخلی است. مقدار حداکثر تنش برشی برون صفحه‌ای برای لایه‌گذاری s [۹۰/۰] و s [۰/۹۰] حدود ۰/۸۵ برابر فشار داخلی است و برای لایه‌گذاری نامتقارن [۹۰/۰/۹۰/۰] مقدار حداکثر تنش برشی برون صفحه‌ای حدوداً برابر با مقدار فشار داخلی است. بطور کلی تغییر جای لایه‌ها مقدار تنش‌های برون صفحه‌ای را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین مقدار تنش محیطی ناشی از فشار داخلی در لبه‌ها نسبت به نقاط دور از لبه تفاوت قابل توجهی ندارد. در لایه‌گذاری s [۹۰/۰] تحت بار فشار داخلی، در لایه محیطی تنش محوری کششی برابر با ۱/۵ برابر فشار داخلی است و در لایه محوری تنش محوری فشاری با حداکثر حدود ۲ برابر فشار داخلی ایجاد می‌شود که با توجه به اینکه لایه محیطی در جهت محوری استحکام قابل توجهی ندارد باید مورد توجه قرار گیرد.

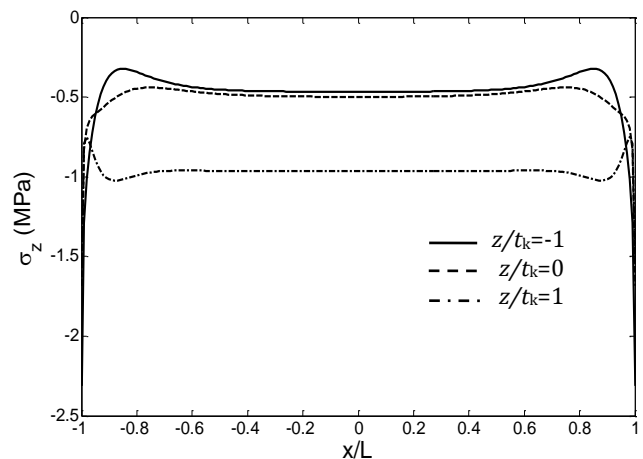
۵- پیوست

ماتریس‌های صلبیت تئوری لایه‌ای در رابطه (۱۸) برای پوسته بصورت روابط (۳۱) و (۳۲) بدست می‌آید که h_k ضخامت لایه عددی k ام است.

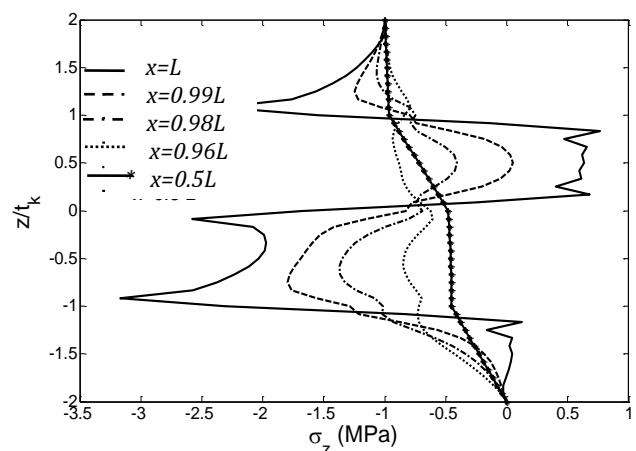
تنش عمودی σ_z نسبت به ضخامت پوسته Z برای این پوسته در شکل ۱۶ آمده است. در شکل ۱۷ ملاحظه می‌شود که مقدار تنش عمودی از ۱MPa- در سطح خارجی شروع شده و به مقدار صفر در سطح داخلی پوسته می‌رسد.



شکل ۱۵ توزیع تنش عمودی σ_0 نسبت به ضخامت در لبه و نواحی لایه مرزی پوسته [۹۰/۰]s



شکل ۱۶ توزیع تنش σ_z در سطوح مشترک بین لایه‌های مجاور پوسته [۹۰/۰/۹۰/۰] تحت فشار خارجی



شکل ۱۷ توزیع تنش σ_z در ضخامت در پوسته [۹۰/۰/۹۰/۰] تحت فشار خارجی

- [9] A.S.D. Wang, F.W. Crossman, "Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates," J. Compos. Mater, Vol. 11, pp. 92-106, 1977.
- [10] Wang, A.S.D. and Crossman, F.W., "Edge Effects on Thermally Induced Stresses in Composite Laminates," J. Compos. Mater, Vol. 11, pp. 300-312, 1977.
- [11] Whitcomb, J.D. and Raju, I.S. and Goree, J.G., "Reliability of the Finite Element Method for Calculating Free Edge Stresses in Composite Laminates," Comput Struct, Vol. 15, No. 1, pp.23-37, 1982.
- [12] Murthy, P.L.N., and Chamis, C.C., "Free-edge Delamination: Laminare Width and Loading Conditions Effects," J Comp Technol Res, Vol. 11 No. 1, pp. 15-22, 1989.
- [13] Cho, M. and Kim , H.S., "Iterative Free-Edge Stress Analysis of Composite Laminates under Extension, Bending, Twisting and Thermal Loadings," Int J Solids Struct, Vol. 37, No. 3, pp. 435-59, 2000.
- [14] Shu, X.P. and Soldators, KP, "Cylindrical Bending of Angle-Ply Laminates Subjected to Different Sets of Edge Boundary Conditions," Int J Solids and Struct, Vol. 37, pp.4285-4307, 2000.
- [15] Nosier, A. and Bahrami , A. "Interlaminar Stresses in Antisymmetric Angle-Ply laminates," Composite Struct. Vol. 78, pp.18-33, 2007.
- [16] Sarvestani, H. Y. and Sarvestani, M. Y., "Interlaminar Stress Analysis of General Composit Laminates," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, pp. 958-967, 2011
- [17] Kapoor, H. and Kapania, R.K., S.R. Soni, "Interlaminar Stress Calculation in Composite and Sandwich Plates in NURBS Isogeometric Finite Element Analysis," Compos Struct, Vol.107, pp.537-548, 2013
- [18] J. Seok Ahn, K.-Sung Woo, "Interlaminar Stress Distribution of Laminated Composites Using the Mixed-Dimensional Transition Element," J compos Mater, Vol. 48, pp. 3-20, 2014
- [19] Yazdani , M. and Rezghi , M. and Khalili Lanji, M.R. and Moomivand , B., "Analysis of Free Edge Stresses in a Cross-Ply Composite Plate by Applying Shooting Method," In Persian, Modares Mech Eng, Vol. 13, No. 9, pp. 1-11, 2013
- [20] Afshin M. and Taheri-Behrooz, F., "Interlaminar Stresses of Laminated Composite Beams Resting on Elastic Foundation Subjected to Transverse Loading," Computational Materials Science, Vol.96, pp. 439-447, 2015
- [21] Ren, J.G., "Exact Solution for Laminated Cylindrical Shell in Cylindrical Bending," Composite science and Technology, Vol. 29, pp. 168-187, 1987.
- [22] Chaudhuri, R.A., "On the Prediction of Interlaminar Stresses in a Thick Laminated General Shell," Int. J. Solids Struct, Vol. 26, No. 5-6, pp. 499-510, 1990.
- [23] Kant, T. and Menon, M.P., "Estimation of Interlaminar Stresses in Fiber Reinforced Composite Cylindrical Shells," Computers & Structures, Vol. 38, No. 2, pp.131-147, 1991.
- [24] Jing, H.G. and Tzeng, K.G., "Elasticity Solution for Laminated Anisotropic Cylindrical Panels in Cylindrical Bending," Composite Structures, Vol. 30, No.3, pp.307-317, 1995.
- [25] Boitnot, R.L. and Starnes, J.H.Jr. and Johnson, E.R., "Nonlinear Response and Failure of Pressurized Composite Curved Panels," Journal of Aerospace Engineering, Vol. 8, No. 3, pp.129-138, 1995.
- [26] Shu, X.P., "A Refined Theory of Laminated Shells with Higher-Order Transverse Shear Deformation," Int. J. Solids Struct, Vol. 34, No. 6, pp.673-683, 1997.
- [27] Jing, H. and Tzeng ,K., "Analysis of Thick Laminated Anisotropic Cylindrical Shells Using a Refined Shell Theory," Int. J. Solids Struct, Vol. 32, No. 10, pp. 1459-1476, 1995.
- [28] Carrera, E., "Multilayered Shell Theories Accounting for Layerwise Mixed Description," Part1: AIAA Journal, Vol. 37, No. 9, pp. 1117-1124, 1999.
- [29] Hossain, S.J., "A Finite Element Formulation for the Analysis of Laminated Composite Shells," Comput. Struct, Vol. 82, No. 20-21, pp. 1623-1638, 2004.
- [30] Tanov, R. and Tabiei , A., "Adding Transverse Normal Stresses to Layered Shell Finite Elements for the Analysis of Composite Structures," Composite Struct, Vol. 76, No. 4, pp. 338-344, 2006.
- [31] Afshin, M. and Sadighi , M. and Shakeri ,M., "Free Edge Effects in a Cylindrical Sandwich Panel with a Flexible Core and Laminated Composite Face Sheets," Mechanics of Composite Materials, Vol. 46, No. 5, pp.787-808, 2010.
- [32] Mahmoudabadi, M.R., Ovesy H.R. and Fazilati J., "Dynamic Instability Analysis of Composite Cylindrical Panels Using the First Order Shear Deformation Layerwise Theory and Spline Finite Strip Method," In Persian, Journal of Science and Ttechnology of Composites, Vol. 1, pp. 61-74, 2014.
- [33] Reddy, J. N., "Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics," Jhon Wiley & Sons, 2002
- [34] Even Barbero, J., "Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus," CRC Press, pp.102, 2013.

$$\left(A_{pq}^{kj}, B_{pq}^{kj} \right) = \begin{cases} \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2} & \text{if } j=l \\ \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_{k-1}} + \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{h_k}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{2} + \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2} & \text{if } j: \\ \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{h_k}, \frac{\bar{C}_{pq}^{(k)}}{2} & \text{if } j=k+ \\ (0,0) & \text{if } j < k-1 \text{ or } j > k \end{cases} \quad (31)$$

$$D_{pq}^{kj} = \begin{cases} h_{k-1} \frac{\bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{6} & \text{if } j=k-1 \\ \frac{h_{k-1} \bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{3} + \frac{h_k \bar{C}_{pq}^{(k-1)}}{3} & \text{if } j=k \\ \frac{h_{k-1} \bar{C}_{pq}^{(k)}}{6} & \text{if } j=k+1 \\ 0 & \text{if } j < k-1 \text{ or } j > k+1 \end{cases} \quad (32)$$

ماتریس [A] در رابطه (۲۵) از رابطه زیر بدست می‌آید

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_{11} &= D_{11}^{-1} A_{55}, \quad a_{12} = D_{11}^{-1} \left(B_{55} - B_{13} - \frac{1}{R} D_{12} \right), \\ a_{21} &= 0, \quad a_{22} = [I] \end{aligned} \quad (34)$$

همچنین ماتریس [B] در رابطه (۲۵) از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

در رابطه فوق

$$\begin{aligned} b_{11} &= [I], \quad b_{12} = [0] \quad b_{21} = D_{55}^{-1} \left(B_{13} - B_{55} - \frac{1}{R} D_{12} \right), \\ b_{22} &= D_{55}^{-1} \left(A_{33} + \frac{1}{R} (B_{23} + B_{23}^T) + \frac{1}{R^2} D_{22} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

همچنین ماتریس ستونی {F1} و {F2} در (۲۵) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= \left\{ \{0\}^T, -RD_{55}^{-1} \{A_1\} \right\}^T \\ \{F_2\} &= \left\{ \{0\}^T, -RD_{55}^{-1} \{A_2\} \right\}^T \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن {A1} و {A2} بردارهای ستونی N+1 تایی بوده که سطر اول

{A1} برابر ۱- و سطر آخر {A2} برابر ۱ و بقیه مولفه‌های آن صفر است.

۶- منابع

- [1] Kant, T. and Swaminathan, K., "Estimation of Transverse/Interlaminar Stresses in Laminated Composites-a Selective Review and Survey of Current Developments," Composite Struct, Vol. 49, pp. 65-75, 2000.
- [2] Pipes, R.B. and Pagano, N.J., "Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension," J. Compos. Mater, Vol. 4, pp. 538-548, 1970.
- [3] Pipes, R.B. and Pagano, N.J., "Interlaminar Stresses in Composite Laminates- an approximate Elasticity Solution," Journal of Applied Mechanics, Vol. 4, pp. 668-672, 1974.
- [4] Pipes, R.B. and Daniel Moire, I.M., "Analysis of the Interlaminar Shear Edge Effect in Laminated Composites," J. Compos. Mater, Vol. 5, pp. 255-59, 1971.
- [5] Tang, S. and Levy, A., "A boundary layer theory-part II: Extension of Laminated Finite Strip," J. Compos. Mater, Vol. 9, pp. 42-52, 1975.
- [6] Hsu, P.W., and Herakovich, C.T., "Edge effects in angle-ply composite laminate," J. Compos. Mater, Vol. 11, pp. 422-28, 1977.
- [7] Wang, S.S. and Choi, I., "Boundary-Layer Effects in Composite Laminates. Part I: Free-edge Stress Singularities," ASME J. Appl. Mech, Vol. 49, pp. 541-548, 1982.
- [8] Wang, S.S. and Choi, I., "Boundary-Layer Effects in Composite Laminates, Part II: Free-edge Stress Solutions and Basic Characteristics," ASME J. Appl. Mech, Vol. 53, pp.744-750, 1986.

