



تحلیل ضربه سرعت پایین پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چند لایه فلز-الیاف هسته انعطاف پذیر بر مبنای تئوری مرتبه بالای پوسته‌های ساندویچی

پیوند عباس پور¹، امید رحمانی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان

* زنجان، صندوق پستی 38791-45371، omid.rahmani@znu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

دریافت:

پذیرش:

کلیدواژگان

پوسته استوانه‌ای ساندویچی،

چند لایه فلز-الیاف،

هسته فوم،

حل الاستیسیته،

ضربه سرعت پایین

در این مطالعه، رفتار ضربه‌ای پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه چندلایه فلز-الیاف (FML) و هسته انعطاف‌پذیر تحت بارگذاری ضربه سرعت پایین به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. برای توسعه مدل ریاضی، از اصل همیلتون در چارچوب تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی استفاده شده، معادلات حاکم استخراج و در محیط نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی گردیده‌اند. در این مدل‌سازی، رفتار رویه‌ها بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و میدان جابه‌جایی هسته با تکیه بر تئوری سه‌بعدی الاستیسیته، بدون استفاده از ساده‌سازی‌های متداول، در نظر گرفته شده است. همچنین، توزیع‌های غیرخطی تنش و کرنش در ضخامت هسته به‌عنوان روابط مکمل وارد مدل شده و اثرات غیرخطی هندسی و تغییرشکل‌های برشی درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای لحاظ گردیده‌اند تا توصیف دقیق‌تری از پاسخ ضربه‌ای حاصل شود. بدین ترتیب، تاریخچه زمانی نیروی تماس با داده‌های موجود در مطالعات پیشین مقایسه و اعتبارسنجی شده است. علاوه بر این، در یک تحلیل پارامتری، اثر عوامل کلیدی نظیر ضخامت و مدول الاستیسیته هسته، جرم، سرعت و شعاع ضربه‌زننده بر رفتار ضربه‌ای سیستم بررسی گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که این پارامترها نقش تعیین‌کننده‌ای در بیشینه نیروی تماس، میزان تغییرشکل پوسته‌های ساندویچی دارند.

Low-velocity impact response of cylindrical sandwich shells with metal-fiber laminated faces and a compliant core based on a higher-order sandwich shell theory

Peyvand Abbaspour¹, Omid Rahmani^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

* P.O.B. 38791-45371, Zanjan, Iran, omid.rahmani@znu.ac.ir

Keywords

Cylindrical sandwich shell,
Metal-fiber laminated (FML),
Foam core
Elasticity solution
Low-velocity impact

Abstract

In this study, the low-velocity impact response of a cylindrical sandwich shell with metal-fiber laminated (FML) face sheets and a compliant core is analytically investigated. The governing equations are derived using Hamilton's principle within the framework of a higher-order sandwich shell theory and implemented in MATLAB for numerical computation. In the developed model, the face sheets are modeled based on the classical shell theory, while the displacement field of the core is described according to the three-dimensional elasticity theory without employing common simplifying assumptions. Moreover, nonlinear distributions of stresses and strains through the core thickness are incorporated as complementary relations, and both geometric nonlinearity and in-plane/out-of-plane shear deformations are included to achieve a more accurate description of the impact response. The time history of the contact force is validated against available results from previous studies, demonstrating good agreement. Furthermore, a parametric analysis is performed to assess the influence of key parameters such as the core thickness and elastic modulus, as well as the impactor mass, velocity, and radius on the impact behavior of the system. The results reveal that these parameters play a crucial role in determining the peak contact force and the overall deformation of the sandwich shells.

1- مقدمه

سازه‌های ساندویچی و کامپوزیتی به دلیل وزن کم، استحکام ویژه بالا و قابلیت مطلوب ذخیره‌سازی انرژی الاستیک، کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوافضا، نظامی و حمل‌ونقل یافته‌اند. با این حال، وجود هسته‌های نسبتاً ضعیف و رویه‌های نازک، این سازه‌ها را در برابر بارگذاری‌های ضربه‌ای، به ویژه ضربه سرعت پایین، آسیب‌پذیر می‌سازد. چنین بارگذاری‌هایی می‌توانند منجر به بروز انواع آسیب‌های درون‌لایه‌ای و بین‌لایه‌ای شده و کاهش قابل توجهی در عملکرد مکانیکی سازه ایجاد کنند. از این رو، تحلیل رفتار دینامیکی این سازه‌ها تحت شرایط ضربه، از چالش‌های مهم در طراحی مهندسی به‌شمار می‌رود [1].

یکی از راهکارهای مؤثر برای افزایش مقاومت ضربه‌ای، بهره‌گیری از رویه‌های چندلایه‌ی فلز-الیاف¹ در کنار هسته‌های فومی است. چنین ترکیبی، با ایجاد هم‌افزایی بین خواص فلز و کامپوزیت، ضمن حفظ وزن کم سازه، موجب بهبود استحکام و سفتی خمشی می‌شود. همچنین، مهار گسترش ترک توسط رویه‌ها و کاهش تمرکز تنش به واسطه هسته فومی، عملکرد مناسب این پوسته‌های ساندویچی را تحت بارگذاری ضربه‌ای تضمین می‌کند [2, 3].

در تحلیل سازه‌های مرکب، معمولاً از تئوری‌های تک‌لایه‌ای² برای بیان روابط کرنش-جابجایی استفاده می‌شود. این رویکردها با اعمال فرضیات مناسب در خصوص توزیع تغییرشکل در راستای ضخامت، مدل سه‌بعدی پیچیده‌ی ورق‌ها و پوسته‌ها را به مدلی دوبعدی ساده‌تر تبدیل می‌کنند. از مهم‌ترین این تئوری‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک لایه‌ای³، تئوری مرتبه‌ی اول تغییر شکل برشی⁴ و تئوری مرتبه‌ی بالای تغییر شکل برشی⁵ اشاره کرد [4]. مدل‌های تحلیلی، از جمله سیستم‌های جرم-فنر چند درجه آزادی، ابزار مؤثری برای شبیه‌سازی ضربه، بررسی تاریخچه نیرو-زمان و پیش‌بینی مکانیزم‌های آسیب هستند. ترکیب تئوری‌های مرتبه بالای تغییر شکل برشی با اصل همپلتون نیز امکان استخراج معادلات حاکم و تحلیل دقیق پاسخ دینامیکی تیرها و پوسته‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را فراهم می‌کند.

مطالعات مرتبط با پاسخ ضربه‌ای سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی از دهه‌های گذشته مورد توجه قرار گرفته‌اند. ویتنی و پاگانو [5] با بهره‌گیری از تئوری کلاسیک لایه‌ای، پاسخ دینامیکی ورق‌های ارتوتروپیک تحت بارگذاری گسترده را بررسی کردند و مبنای مهمی برای تحلیل‌های بعدی فراهم نمودند. در ادامه، پژوهشگران دیگری همچون فراستیگ و همکاران [6] با استفاده از تئوری‌های مرتبه‌بالا، رفتار خمشی و ارتعاشی تیرها و پوسته‌های ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر را مطالعه کردند. در حوزه‌ی بارگذاری ضربه‌ای، میشل و همکاران [7] و نیز اسلان و همکاران [8] با ارائه‌ی مدل‌های جرم-فنر ساده‌شده، امکان پیش‌بینی تاریخچه‌ی نیرو-زمان و تغییرشکل ورق‌های کامپوزیتی تحت ضربه‌ی سرعت پایین را فراهم کردند. رحمانی و همکاران [9] با بهره‌گیری از تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌ی ساندویچی، ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر را مدل‌سازی کردند و تأثیر پارامترهای هندسی بر پاسخ دینامیکی آن‌ها را بررسی نمودند. در دهه‌ی اخیر، مطالعات متعددی بر روی عملکرد ضربه‌ای سازه‌های ساندویچی با هسته‌های فومی و رویه‌های چندلایه‌ی فلز-الیاف صورت گرفته است. عزیز و همکاران [10] پاسخ دینامیکی پوسته‌های ساندویچی مخروطی و تاریخچه‌ی نیروی تماسی را با استفاده از مدل جرم-فنر-دمپر سه‌درجه‌آزادی و روش دیفرانسیل کوادراچر⁶ تحلیل کردند و اثر پارامترهای فیزیکی و هندسی را بر پاسخ ضربه

بررسی نمودند. همچنین، ملک‌زاده فرد و همکاران [11] پاسخ ورق‌های ساندویچی با رویه‌ی الیاف-فلز تحت ضربه‌ی سرعت پایین را با ضربه‌زننده‌ی صلب استوانه‌ای و بر اساس قانون برخورد اصلاح‌شده مطالعه کردند. آن‌ها با بهره‌گیری از اصل حداقل انرژی پتانسیل و مدل موازنه‌ی انرژی، یک حل تحلیلی برای تعیین پارامترهای مجهول تماس در قانون برخورد غیرخطی هر تیز ارائه دادند و حداکثر نیروی برخورد را با مدل جرم-فنر دوجره‌آزادی پیش‌بینی نمودند که اهمیت اثر پارامترهای هندسی و فیزیکی در پاسخ دینامیکی سازه‌های ساندویچی را نشان داد. کیکو و همکاران [12] پاسخ ضربه سرعت پایین در چندلایه‌های شیشه/کربن را تحت ضربه‌زننده‌های با هندسه متفاوت بررسی کردند. نتایج نشان داد ضربه‌زننده لبه‌تیز ترک و لایه‌لایه‌شدگی ایجاد می‌کند، در حالی که ضربه‌زننده نیم‌کروی تغییرشکل ماندگار بیشتری به وجود می‌آورد. تحلیل‌های عددی در آباکوس این نتایج را تأیید کرد. در ادامه، کارلیو و همکاران [13] عملکرد ضربه‌ای چندلایه‌های فلز-الیاف ترموپلاستیک ساخته‌شده از الیاف آرامید/پلی‌پروپیلن و الیاف آلومینیوم را بررسی کردند و نتایج آن‌ها نشان داد که آرایش لایه‌ای مناسب (سه لایه آلومینیوم و چهار لایه کامپوزیت) بیشترین ذخیره‌سازی انرژی الاستیک و بالاترین آستانه‌ی نفوذ را فراهم می‌کند. همچنین، ژو و همکاران [14] نشان دادند پانل‌های ساندویچی چندلایه با هسته فومی و رویه‌های کامپوزیتی، نسبت به نمونه‌های تک‌لایه با جرم مشابه، مقاومت و ذخیره‌سازی انرژی بالاتری دارند و بهینه‌سازی سفتی رویه فوقانی ذخیره‌سازی انرژی الاستیک را افزایش می‌دهد. پنگ و همکاران [15] نشان دادند که انرژی ضربه، ارتفاع هسته فومی و زاویه برخورد تأثیر قابل توجهی بر الگوی آسیب و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک پانل‌های ساندویچی کامپوزیتی دارند، در حالی که توالی لایه‌های رویه اثر چندانی بر مقاومت ضربه‌ای ندارد و هسته فومی نقش اصلی را در ذخیره‌سازی انرژی الاستیک ایفا می‌کند. در همین راستا، شاه‌پویی و همکاران [16] پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی خمیده الیاف-فلز با هسته انعطاف‌پذیر تحت ضربه کم‌سرعت را تحلیل کردند و تأثیر زاویه انحنا، ضخامت و مدول هسته، و جرم و سرعت ضربه‌زننده بر جابه‌جایی شعاعی و تاریخچه نیروی تماس را بررسی نمودند.

سانگ و همکاران [17] رفتار ضربه‌ای با سرعت پایین سازه‌های ساندویچی موج‌دار تقویت‌شده با فوم و لایه‌های فلز-الیاف تحت سه سطح انرژی و دو جهت ضربه‌ی جلویی و پشتی به صورت تجربی و عددی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که پرشدگی فومی و جهت اعمال ضربه تأثیر قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی و ظرفیت تحمل بار دارند. افزون بر این، پژوهش‌های اخیر نشان داده‌اند که انتخاب جنس و معماری هسته تأثیر تعیین‌کننده‌ای در عملکرد نهایی سازه دارد. برای مثال، فنگ و همکاران [18] رفتار مکانیکی ضربه‌ای سازه‌های ساندویچی با هسته‌های فومی و چوب‌پنبه‌ای را به صورت تجربی و عددی بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که هسته‌ی چوب‌پنبه‌ای به‌عنوان جایگزینی پایدار برای فوم پلی‌استایرن، مقاومت ضربه‌ای بالاتری فراهم کرده و الگوی آسیب مشابهی با تمرکز اولیه در محل ضربه و گسترش تدریجی در هسته و رویه زیرین نشان می‌دهد. همچنین، ژانگ و همکاران [19] با تمرکز بر آسیب‌های لایه‌لایه‌شدگی و روش‌های تعمیر در سازه‌های ساندویچی با هسته‌ی لانه‌زنبوری، نشان دادند که چنین آسیب‌هایی می‌تواند به شدت عملکرد سازه را کاهش داده و ضرورت توسعه‌ی روش‌های ترمیمی مؤثر را برجسته کند. از سوی دیگر، یانگ و همکاران [20] رفتار

⁴ First-order Shear Deformation Theory

⁵ Higher-order Shear Deformation Plate Theory

⁶ Differential Quadrature Method

¹ Fibre Metal Laminate

² Equivalent Single Layer Theory

³ Classical Lamination Theory

دقت پیش‌بینی پاسخ دینامیکی پوسته‌های ساندویچی تحت بارگذاری ضربه سرعت پایین را به‌طور قابل‌توجهی افزایش می‌دهد. بنابراین، پژوهش حاضر ضمن پر کردن خلأ موجود در ادبیات، مبنایی مناسب برای بهینه‌سازی طراحی و ارتقای مقاومت ضربه‌ای چنین سازه‌هایی ارائه می‌دهد.

2- تحلیل ضربه سرعت پایین پوسته ساندویچی استوانه‌ای بر پایه تئوری مرتبه‌بالا

در این پژوهش، پوسته استوانه‌ای ساندویچی با دو لایه رویه‌ای از جنس چندلایه فلز-الیاف و یک هسته‌ی انعطاف‌پذیر مرکزی مورد بررسی قرار گرفته است. هندسه‌ی سازه با پارامترهایی همچون ضخامت کلی h ، طول L ، عرض a ، شعاع میانی هسته R ، ضخامت هسته h_c ، ضخامت رویه بالایی d_t و ضخامت رویه پایینی d_b تعریف می‌شود. نمای سه‌بعدی و دستگاه مختصات در شکل 1 نشان داده شده است. رفتار دینامیکی چنین سازه‌هایی به‌واسطه‌ی اندرکنش پیچیده‌ی میان رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته‌ی انعطاف‌پذیر، نیازمند مدلی پیشرفته است. انعطاف‌پذیری هسته موجب بروز جابجایی‌های نسبی میان لایه‌ها، تمرکز تنش‌های موضعی و تغییر شکل‌های غیرهمگن در ضخامت می‌شود؛ پدیده‌هایی که پیش‌بینی آن‌ها با تئوری‌های کلاسیک پوسته‌ها امکان‌پذیر نیست.

افزون بر این، روش‌های تحلیلی متداول غالباً با ساده‌سازی‌های بیش از حد در توصیف میدان جابجایی هسته، قادر به بازتاب دقیق اثرات مرتبه‌بالا، رفتارهای موضعی و حتی تغییر شکل‌های غیرخطی نیستند. برای غلبه بر این محدودیت‌ها، در پژوهش حاضر از تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی² بهره گرفته شده است. ویژگی بارز این رویکرد آن است که هیچ محدودیت پیش‌فرضی بر میدان جابجایی هسته اعمال نمی‌شود و اثرات مرتبه‌بالا به‌صورت طبیعی از حل معادلات سه‌بعدی الاستیسیته حاصل می‌گردند. همچنین، تمامی مؤلفه‌های تنش و جابجایی در اجزای مختلف سازه، از جمله سهم تنش‌های برشی و نرمال در نواحی اتصال، به‌طور کامل در فرمول‌بندی لحاظ شده‌اند. معادلات حاکم بر اساس اصل همپلتون و در قالب یک رویکرد انرژی استخراج گردیده‌اند.

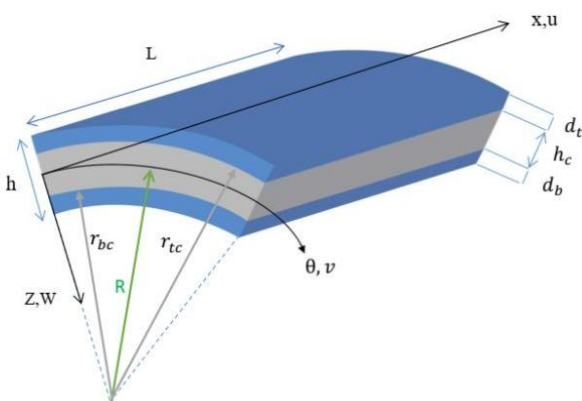


Fig. 1 Geometric characteristics of the cylindrical sandwich shell

شکل 1 مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای ساندویچی بدین ترتیب، چارچوبی دقیق و نظام‌مند برای تحلیل ضربه‌ی سرعت پایین پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های فلز-الیاف و هسته‌های انعطاف‌پذیر

ضربه‌ای پانل‌های ساندویچی با هسته‌ی فومی و رویه‌های کارال¹ را مطالعه کردند و نشان دادند که استفاده از کارال در رویه‌ها می‌تواند ظرفیت ذخیره‌سازی انرژی الاستیک و مقاومت کلی سازه در برابر ضربه را ارتقا دهد. مطالعات تکمیلی نیز بر اهمیت ویژگی‌های فیزیکی هسته و ترکیب مواد رویه تأکید کرده‌اند. به‌عنوان نمونه، ژو و همکاران [21] اثر چگالی هسته‌های فومی بر پاسخ ضربه‌ای پانل‌های ساندویچی را بررسی کردند و نشان دادند که افزایش چگالی هسته موجب افزایش سختی و بهبود ذخیره‌سازی انرژی الاستیک می‌شود. آذرافزا و همکاران [22] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با گشودگی مستطیلی را به‌صورت تحلیلی و عددی بررسی کردند و نشان دادند که افزایش ابعاد گشودگی موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود. ملکزاده و همکاران [23] مدلی تحلیلی برای پیش‌بینی پاسخ دینامیکی ورق‌های ساندویچی با رویه‌های فلز-الیاف تحت ضربه سرعت پایین ارائه کردند و نشان دادند که مقاومت ضربه‌ای این سازه‌ها مستقل از تغییرات سرعت و جرم ضربه‌زننده است. امیراشجعی و همکاران [24] با بهره‌گیری از مکانیک آسیب در نرم‌افزار آباکوس، مدل عددی ضربه‌ی کم‌سرعت در کامپوزیت‌های کربن/اپوکسی را بررسی کردند و نشان دادند که مدل پیشنهادی توانایی مناسبی در پیش‌بینی رفتار کلی سازه دارد. اندرسون و همکاران [25] مدل‌سازی برخورد جرم‌های مختلف با پانل‌های ساندویچی کامپوزیتی را با لحاظ کردن سختی تماس و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک ناشی از آسیب انجام دادند که منجر به ارائه مدلی پیش‌بینانه برای نیروی اوج تماس و مدت‌زمان تماس در پانل‌های فومی شده است. داور و همکاران [26] پاسخ ضربه عرضی سرعت پایین در پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه چندلایه فلز-الیاف و هسته مدرج تابعی را تحلیل کردند و اثر پارامترهای سازه‌ای کلیدی بر تاریخچه نیروی تماس و رفتار ضربه را بررسی نمودند. رزقی ملکی و همکاران [27] سازه‌های ساندویچی با رویه‌های بازالت/اپوکسی و هسته چوب‌پنبه را تحت خمش سه‌نقطه‌ای و ضربه سرعت پایین بررسی کردند و نشان دادند که این ترکیب ضمن افزایش ظرفیت ذخیره‌سازی انرژی الاستیک و مقاومت اولیه خمشی، رفتار قابل‌قبولی در برابر آسیب ضربه‌ای ارائه می‌دهد.

با مرور مطالعات پیشین مشخص می‌شود که پژوهش‌های موجود درباره رفتار ضربه‌ای سازه‌های ساندویچی عمدتاً به صفحات تخت یا تیرها محدود بوده و بررسی جامع پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی اندک است. در مطالعات محدود پوسته‌ها نیز اغلب فرض‌هایی مانند ساده‌سازی میدان جابجایی هسته و یکسان فرض کردن خیز رویه‌ها اعمال شده است که مکانیزم‌های واقعی شکست نظیر لایه‌لایه‌شدگی و کمانش موضعی را نادیده می‌گیرند و دقت تحلیل را کاهش می‌دهند. نوآوری اصلی پژوهش حاضر در ارائه چارچوبی تحلیلی است که بدون محدودیت پیش‌فرض بر میدان جابجایی هسته و با بهره‌گیری از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و اصل همپلتون، تغییرشکل‌های مرتبه‌بالا را به‌صورت طبیعی استخراج می‌کند. بدین ترتیب، مؤلفه‌های جابجایی هسته انعطاف‌پذیر در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی محاسبه می‌شوند و برخلاف تئوری‌های مهندسی رایج، هیچ پیش‌فرضی درباره نحوه توزیع آن‌ها اعمال نشده است. تغییرات این مؤلفه‌ها در راستای شعاع پوسته به‌صورت غیرخطی بوده و به پارامترهایی مانند تنش‌های برشی هسته، جابجایی رویه‌های بالایی و پایینی و مدول‌های الاستیسیته و برشی هسته وابسته است.

این رویکرد امکان بررسی دقیق مکانیزم‌های شکست، تحلیل سیستماتیک اثر هندسه و توزیع لایه‌ها، و مطالعه پارامتری خواص سازه را فراهم می‌آورد و

² High Order Sandwich Panel Theory

¹ Carbon Fibre Reinforced Aluminium Laminates

$$\begin{aligned} u_i(x, \theta, z, t) &= u_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{xxi} \\ v_i(x, \theta, z, t) &= v_{0i}(x, \theta, t) + z_i \beta_{\theta\theta i} \quad (i=b, a) \\ w_i(x, \theta, z, t) &= w_{0i}(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

در روابط فوق u_{0i} ، v_{0i} و w_{0i} جابجایی‌ها در صفحه میانی رویه‌ها به ترتیب در جهات طولی x و محیطی θ ، شعاعی Z و β_{xxi} و $\beta_{\theta\theta i}$ به ترتیب مولفه‌های چرخش رویه‌ها حول محورهای θ و x می‌باشند. که در آن $(i=b, a)$ به ترتیب معرف رویه بالایی و پایینی می‌باشند. معادلات سینماتیکی کرنش‌ها در رویه‌های بالایی و پایینی با فرض کرنش‌های رویه‌ها به صورت ε_{xxi} ، $\varepsilon_{\theta\theta i}$ و $\gamma_{x\theta i}$ و انحنای رویه‌ها به صورت k_{xxi} ، $k_{\theta\theta i}$ و $k_{x\theta i}$ در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxi} &= \varepsilon_{xx0i} + z_i k_{xxi} \\ \varepsilon_{\theta\theta i} &= \varepsilon_{\theta\theta 0i} + z_i k_{\theta\theta i} \\ \gamma_{x\theta i} &= \gamma_{x\theta 0i} + z_i k_{x\theta i} \end{aligned} \quad (2)$$

در این روابط، کرنش‌های موجود در صفحه میانی و معادلات متناظر با انحنای رویه‌ها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx0i} &= u_{0i,x} \\ k_{xxi} &= \beta_{xxi,x} \\ \varepsilon_{\theta\theta 0i} &= (v_{0i,\theta} + w_i) / r_i \\ k_{\theta\theta i} &= \beta_{\theta\theta i,\theta} / r_i \\ \gamma_{x\theta 0i} &= v_{0i,x} + (u_{0i,\theta} / r_i) \\ k_{x\theta i} &= \beta_{\theta\theta i,x} + (\beta_{xxi,\theta} / r_i) \\ \beta_{xxi} &= -w_{i,x} \\ \beta_{\theta\theta i} &= (v_{0i} - w_{i,\theta}) / r_i \end{aligned} \quad (3)$$

همچنین، روابط میان کرنش و جابجایی در ناحیه هسته‌ای پوسته استوانه‌ای ساندویچی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rrc} &= w_{c,x} \\ \gamma_{\theta rc} &= v_{c,r} + (w_{c,\theta} - v_c) / r \\ \gamma_{xrc} &= w_{c,x} + u_{c,r} \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین، شرایط پیوستگی میدان جابجایی در فصل مشترک رویه‌ها و هسته و به‌طور کامل در مرز رویه فوقانی هسته و رویه تحتانی هسته اعمال شده‌اند. این شرایط در قالب روابط (5) و (6) بیان می‌شوند:

توسعه یافته است. این چارچوب قادر است اثرات هندسی و مکانیکی اجزا را بدون اتکا به فرضیات ساده‌ساز بازتاب داده و زمینه‌ای مطمئن برای بررسی پارامترهای مؤثر بر پاسخ ضربه‌ای فراهم سازد.

1-2- فرضیات، برتری‌ها و محدودیت‌های مدل

سازه مورد مطالعه یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی شامل رویه‌های چندلایه فلز-الیاف نازک و یک هسته انعطاف‌پذیر است که در آن، پیوستگی کامل بین رویه‌ها و هسته فرض شده است. برخورد مورد بررسی در محدوده سرعت‌های پایین رخ داده و تحلیل دینامیکی در چارچوب الاستیسیته خطی و پیش از آغاز تسلیم ماده تا آستانه شروع آسیب و ورود به ناحیه تغییرشکل پلاستیک انجام می‌پذیرد. ضربه‌زننده به‌صورت ایزوتروپیک و با جهت عمود بر سطح پوسته مدل شده و سفتی آن در مقایسه با سازه ساندویچی بزرگ فرض می‌شود. تحلیل دینامیکی بر اساس فرض تغییرمکان‌های کوچک انجام شده و اثرات دما، اصطکاک و رطوبت بر خواص مواد لحاظ نشده است.

یک مدل ترکیبی برای تحلیل پاسخ دینامیکی سازه‌های ساندویچی تحت ضربه سرعت پایین مبتنی بر تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر ارائه شده است. تعداد پژوهش‌های ضربه سرعت پایین انجام شده بر پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته انعطاف‌پذیر بسیار کم است و مطالعه‌ای با دید ضربه سرعت پایین روی پوسته استوانه‌ای ساندویچی (FML/Core/FML) صورت نگرفته است. مطالعه تأثیر نیرو بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساندویچی و در کل تحلیل پارامتری و بررسی اثر عوامل کلیدی نظیر ضخامت و مدول الاستیسیته هسته، جرم، سرعت و شعاع ضربه‌زننده بر رفتار ضربه‌ای سیستم نشان می‌دهد این پارامترها نقش تعیین‌کننده‌ای در بیشینه نیروی تماس، میزان تغییرشکل پوسته‌های ساندویچی دارند.

با وجود نتایج قابل قبول حاصل از این تحقیق، برخی محدودیت‌ها در چارچوب مدل‌سازی و تحلیل وجود دارد که می‌تواند مبنای مطالعات آتی قرار گیرد. در پژوهش حاضر، تمرکز بر تحلیل رفتار دینامیکی پوسته‌های ساندویچی در محدوده ضربه سرعت پایین و تا آستانه آغاز آسیب بوده است. توسعه معادلات حاکم استخراج‌شده این امکان را فراهم می‌سازد تا در تحقیقات آینده، بهینه‌سازی پاسخ دینامیکی پوسته‌ها تحت انواع شرایط بارگذاری مکانیکی مورد بررسی قرار گیرد. در نظر گرفتن اثرات حرارتی و وابستگی خواص مواد به دما می‌تواند زمینه‌ساز مطالعه رفتار کوپل‌شده مکانیکی-حرارتی در پوسته‌های ساندویچی باشد. از سوی دیگر، گسترش مدل حاضر به منظور لحاظ کردن رفتار پلاستیک مصالح و به‌کارگیری معیارها و تئوری‌های پیشرفته آسیب، امکان بررسی پاسخ سازه در شرایط ضربه سرعت بالا و تحلیل فرآیند گسترش آسیب را فراهم خواهد کرد.

2-2- مدل‌سازی سینماتیکی کرنش-جابجایی و استخراج معادلات تعادل

در چارچوب مدل‌سازی تحلیلی، رویه‌های پوسته‌ای ساندویچی استوانه‌ای به‌صورت پوسته‌های الاستیک چندلایه‌ی نازک در نظر گرفته شده‌اند. این مدل‌سازی بر پایه‌ی مفروضات لاو-کیرشهف انجام شده است؛ مفروضاتی که امکان توصیف دقیق رفتار خمشی و غشایی در تئوری‌های کلاسیک پوسته‌ها و صفحات نازک را فراهم می‌سازند و مبنای توسعه روابط سینماتیکی و معادلات تعادل در این مطالعه قرار گرفته‌اند. جابجایی رویه‌ها در راستای طولی (x) ، محیطی (θ) و شعاعی (z) به صورت زیر می‌باشد [1]:

$$\begin{aligned}
 u_c(r, \theta, x, t) &= [u_{ct}(\theta, x, t) - u_{cb}(\theta, x, t)] \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + u_{cb}(\theta, x, t) \\
 v_c(r, \theta, x, t) &= [v_{ct}(\theta, x, t) - v_{cb}(\theta, x, t)] \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + v_{cb}(\theta, x, t) \\
 w_c(r, \theta, x, t) &= [w_{ct}(\theta, x, t) - w_{cb}(\theta, x, t)] \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} + w_{cb}(\theta, x, t)
 \end{aligned} \quad (9)$$

انرژی جنبشی پوسته ساندویچی تابعی از مؤلفه‌های سرعت و شتاب آن است. زمانی که بارگذاری به صورت یکنواخت و گسترده اعمال شود، میدان جابجایی در جهت ضخامت هسته را می‌توان با دقت قابل قبول خطی فرض کرد؛ در مقابل، بارهای متمرکز یا موضعی موجب شکل‌گیری توزیع غیرخطی در ضخامت هسته می‌شوند. با توجه به گستردگی و یکنواختی بارگذاری‌های دینامیکی مورد بررسی، فرض خطی بودن میدان‌های سرعت و شتاب برای برآورد انرژی جنبشی کاملاً توجیه‌پذیر و دقیق است.

شایان ذکر است که این تقریب تنها در محاسبه انرژی جنبشی اعمال شده و به منظور حفظ دقت تحلیلی، توزیع‌های غیرخطی واقعی حاصل از حل صریح معادلات تعادل هسته، به‌عنوان شرایط مکمل معادلات حاکم، در مدل لحاظ گردیده‌اند (بخش 4-2).

همچنین، با لحاظ شرایط سازگاری میان لایه‌ها (روابط 5 و 6) در رابطه (9) و با استناد به رابطه (3)، توزیع مؤلفه‌های شتاب در راستای ضخامت هسته به‌صورت روابط زیر مدل‌سازی می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_c &= \ddot{u}_{0t} \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{u}_{0b} \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \\
 &\ddot{w}_{t,x} k_t r_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_{b,x} k_b r_b \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} - 1 \right) \\
 \ddot{v}_c &= \ddot{v}_{0t} (1 - k_t) \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \\
 &\ddot{v}_{0b} (1 + k_b) \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \\
 &\ddot{w}_{t,\theta} k_t r_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_{b,\theta} k_b r_b \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} - 1 \right) \\
 \ddot{w}_c &= \ddot{w}_t \left(\frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right) + \ddot{w}_b \left(1 - \frac{r-r_{bc}}{r_{tc}-r_{bc}} \right)
 \end{aligned} \quad (10)$$

که در این روابط:

$$k_i = \frac{d_i}{2r_i} \quad (i = t, b) \quad (11)$$

3-2- فرمول‌بندی معادلات حاکم

معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی پوسته‌ی ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ای بر اساس اصل همیلتون استخراج شده است. در این رویکرد، کمینه‌سازی تابع لاگرانژ $L=U+V-T$ در یک سیستم تغییرشکل‌یافته، زمینه‌ی فرمول‌بندی دقیق معادلات حرکت و شرایط مرزی را فراهم می‌کند. در این چارچوب، T ، U و V به ترتیب انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و کار نیروی خارجی پوسته

$$\begin{aligned}
 u_c(r=r_{tc}) &= u_{0t} - (d_t/2)\beta_{\theta\theta t} \\
 v_c(r=r_{tc}) &= v_{0t} - (d_t/2)\beta_{\theta\theta t} \\
 w_c(r=r_{tc}) &= w_{0t}
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 u_c(r=r_{bc}) &= u_{0b} + (d_b/2)\beta_{xxb} \\
 v_c(r=r_{bc}) &= v_{0b} + (d_b/2)\beta_{\theta\theta b} \\
 w_c(r=r_{bc}) &= w_{0b}
 \end{aligned} \quad (6)$$

در این روابط d_i ($i=t,b$) ضخامت رویه‌های پوسته می‌باشد. روابط ساختاری در هسته پوسته ساندویچی عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rrc} &= E_c \varepsilon_{rrc} \\
 \tau_{xrc} &= G_{xc} \gamma_{xrc} \\
 \tau_{\theta rc} &= G_{\theta c} \gamma_{\theta rc}
 \end{aligned} \quad (7)$$

در نهایت، با ادغام و جایگذاری روابط معرفی‌شده، معادلات حاکم بر رویه‌های کامپوزیتی در چارچوب تئوری کلاسیک فرمول‌بندی و استخراج می‌شوند [2].

$$\begin{bmatrix} N_{xxi} \\ N_{\theta\theta i} \\ N_{x\theta i} \\ M_{xxi} \\ M_{\theta\theta i} \\ M_{x\theta i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} & A_{16i} \\ A_{12i} & A_{22i} & A_{26i} \\ A_{16i} & A_{26i} & A_{66i} \\ B_{11i} & B_{12i} & B_{16i} \\ B_{12i} & B_{22i} & B_{26i} \\ B_{16i} & B_{26i} & B_{66i} \\ D_{11i} & D_{12i} & D_{16i} \\ D_{12i} & D_{22i} & D_{26i} \\ D_{16i} & D_{26i} & D_{66i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxi} \\ \varepsilon_{\theta\theta i} \\ \gamma_{x\theta i} \\ k_{xxi} \\ k_{\theta\theta i} \\ k_{x\theta i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $M_{kl,i}$ و $N_{kl,i}$ منته‌های تنش و گشتاور، $A_{mn,i}$ سفتی کششی که N ها را به کرنش‌های ناشی از تغییر شکل در لایه میانی و $D_{mn,i}$ سفتی خمشی که M ها را به انحناهای ایجاد شده در لایه میانی مرتبط می‌سازد. از آنجا که $B_{mn,i}$ ، M ها را به کرنش‌های موجود در لایه میانی و N ها را به انحناهای موجود در لایه میانی مرتبط می‌کند، به آن کوپلینگ خمش-کشش می‌گویند [1].

رفتار هسته مطابق با مدل پیشنهادی و بر اساس مطالعات پیشین برای هسته‌های انعطاف‌پذیر، به‌ویژه هسته‌های فومی، در نظر گرفته شده است [6]. در این رویکرد، هسته تنها مقاومت در برابر تنش‌های برشی عرضی دارد و اثر تنش‌های برشی درون‌صفحه‌ای نادیده گرفته می‌شود، امری که با توجه به مدول الاستیسیته پایین و سفتی خمشی ناچیز فوم نسبت به رویه‌ها، دقت مناسبی را فراهم می‌آورد. هسته به‌صورت ماده‌ای با رفتار الاستیک خطی و در محدوده تغییر شکل‌های کوچک مدل‌سازی شده است. با این حال، قابلیت تغییر ارتفاع و ایجاد انحنا غیرخطی در صفحات عرضی آن پس از اعمال بار نیز در مدل لحاظ شده است. قابل توجه است که در جهت ضخامت هسته، هیچ محدودیت پیش‌فرضی بر میدان جابجایی اعمال نشده و با فرض تغییرات خطی مؤلفه‌های جابجایی در ضخامت، روابط تحلیلی زیر قابل استخراج هستند:

در عبارات زیر انتگرال برابر صفر قرار داده می‌شود. (بیوست الف). با انجام این کار پس از مرتب سازی خواهیم داشت:

معادله اول ضرایب $\delta u_{0t} = 0$

$$-r_t N_{x,x}^t - N_{x\theta,\theta}^t + r_{tc} \tau_{xrc} (r = r_{tc}) + r_t I_{0t} \ddot{u}_{0t} + k_1 \ddot{u}_{0t} + k_2 \ddot{u}_{0b} + k_1 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_2 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \quad (16)$$

معادله دوم ضرایب $\delta u_{0b} = 0$

$$-r_b N_{x,x}^b - N_{x\theta,\theta}^b + r_{bc} \tau_{xrc} (r = r_{bc}) + r_b I_{0b} \ddot{u}_{0b} + k_2 \ddot{u}_{0t} + k_3 \ddot{u}_{0b} + k_2 (d_t / 2) \ddot{w}_{t,x} + k_3 (d_b / 2) \ddot{w}_{b,x} = 0 \quad (17)$$

معادله سوم ضرایب $\delta v_{0t} = 0$

$$-N_{\theta,\theta}^t - M_{\theta,\theta}^t / r_t + r_{tc} (1 - k_t) \tau_{\theta rc} (r = r_{tc}) + (r_t I_{0t} + I_{2t} / r_t) \ddot{v}_{0t} + (1 - k_t)^2 k_1 \ddot{v}_{0t} + (1 - k_t)(1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b} + (k_t(1 - k_t)k_1 - I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta} - k_b(1 - k_t)k_2 \ddot{w}_{b,\theta} + r_t N_{x\theta,x}^t - M_{x\theta,x}^t = 0 \quad (18)$$

معادله چهارم ضرایب $\delta v_{0b} = 0$

$$-N_{\theta,\theta}^b - M_{\theta,\theta}^b / r_t - r_{bc} (1 + k_b) \tau_{\theta rc} (r = r_{bc}) + (r_b I_{0b} + I_{2b} / r_b) \ddot{v}_{0b} + (1 - k_t)(1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0t} + (1 + k_b)^2 k_3 \ddot{v}_{0b} + k_t(1 + k_b) k_2 \ddot{w}_{t,\theta} - (k_b(1 + k_b) k_3 + I_{2b} / r_b) \ddot{w}_{b,\theta} - r_b N_{x\theta,x}^b - M_{x\theta,x}^b = 0 \quad (19)$$

معادله پنجم ضرایب $\delta w_{0t} = 0$

$$N_{\theta}^t - M_{\theta,\theta\theta}^t / r_t - r_t M_{x,xx}^t - 2M_{x\theta,x\theta}^t - r_{tc} k_t \tau_{\theta rc,\theta} (r = r_{tc}) + r_{tc} \sigma_{rrc} (r = r_{tc}) - r_{tc} (d_t / 2) \tau_{xrc,x} (r = r_{tc}) + k_2 \ddot{w}_b + (r_t I_{0t} + k_1) \ddot{w}_t - (k_t(1 - k_t)k_1 +) \ddot{v}_{0t,\theta} - k_t(1 + k_b) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} - (k_t^2 k_1 + I_{2t} / r_t) \ddot{w}_{t,\theta\theta} + k_t k_2 k_b \ddot{w}_{b,\theta\theta} - k_1 (d_t / 2) \ddot{u}_{0t,x} - k_2 (d_t / 2) \ddot{u}_{0b,x} - k_1 (d_t / 2)^2 \ddot{w}_{t,xx} - k_2 (d_t d_b / 2) \ddot{w}_{b,xx} + r_t I_{2t} \ddot{w}_{t,xx} + r_t q_r^t = 0 \quad (20)$$

معادله ششم ضرایب $\delta w_{0b} = 0$

استوانه‌ای ساندویچی را نشان می‌دهند و t پارامتر زمان در بازه $[t_1, t_2]$ است. اپراتور تغییرات با نماد δ نمایش داده شده است [1]:

$$\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \delta(U + V - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta T) dt = 0 \quad (12)$$

در این رابطه تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی به صورت رابطه (13) بیان می‌شود که در آن $\ddot{u}_i, \ddot{v}_i, \ddot{w}_i$ ($i = t, b, c$) مولفه‌های شتاب رویه‌ها و هسته در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند.

$$\delta T = \int_{V_t} \rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t) dV_t + \int_{V_b} \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \ddot{v}_b \delta v_b + \ddot{w}_b \delta w_b) dV_b + \int_{V_c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{v}_c \delta v_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dV_c \quad (13)$$

تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی مطابق رابطه (14) قابل محاسبه است.

$$\delta U = \int_{V_t} (\sigma_{xxt} \delta \varepsilon_{xxt} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) dV_t + \int_{V_b} (\sigma_{xxb} \delta \varepsilon_{xxb} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) dV_b + \int_{V_c} (\tau_{xrc} \delta \gamma_{xrc} + \tau_{\theta rc} \delta \gamma_{\theta rc} + \sigma_{rrc} \delta \varepsilon_{rrc}) dV_c \quad (14)$$

که در این روابط $(\sigma_{xxt}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{x\theta})$, ($i = t, b$) مؤلفه‌های تنش صفحه‌ای در راستای محوری، محیطی و برشی عرضی معرف تنش‌های موجود در رویه‌های فوقانی و تحتانی و $(\varepsilon_{xxt}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{x\theta})$ کرنش‌های موجود در رویه‌های فوقانی و تحتانی می‌باشند. همچنین $(\sigma_{xrc}, \sigma_{\theta rc}, \tau_{rrc}, \gamma_{xrc}, \gamma_{\theta rc}, \varepsilon_{rrc})$ نمایانگر مؤلفه‌های تنش شعاعی و برش عرضی، و نیز کرنش‌های مؤثر در ناحیه هسته‌ی میانی سازه می‌باشند.

تغییرات کار نیروهای خارجی را میتوان به شکل زیر نمایش داد:

$$\delta V = \int_{\theta_0}^{L\theta_1} \int_{\theta_0} (q_r^t r_t \delta w_t + q_r^b r_b \delta w_b) dx d\theta \quad i = t, b \quad (15)$$

که در این رابطه مؤلفه شعاعی جابجایی رویه‌ها w_i و q_r^i بارهای عمودی اعمالی بر رویه‌های بالایی و پایینی پوسته می‌باشند.

پس از محاسبه عبارت‌های مربوطه $\delta U, \delta T, \delta V$ روابط (13)، (14) و (15) در اصل همیلتون رابطه (12)، امکان استخراج معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای ساندویچی فراهم می‌آید. همانطور که پیش‌تر بیان شد، فرایند به‌دست‌آوردن معادلات حاکم، از طریق اعمال اصل کمینه‌سازی تابع لاگرانژ L برای سیستم تغییرشکل‌یافته، یعنی $\delta L = 0$ ، انجام می‌پذیرد. در این راستا، از روابط سینماتیکی رابطه (4)، شرایط سازگاری رابطه (5 و 6) و روابط مربوط به نیروها و ممان‌های داخلی رابطه (8) استفاده شده است. بنابراین مجموع کل ضرایب عبارت‌های $\delta u_{0t}, \delta u_{0b}, \delta v_{0t}, \delta v_{0b}, \delta w_{0t}, \delta w_{0b}, \delta u_c, \delta v_c, \delta w_c$

$$w_b = \tilde{w}_b \text{ or } (1/r_t)M_{\theta,\theta}^b - 2M_{x\theta,x}^b - (I_{2b}/r_b)\ddot{v}_{0b} - r_b I_{2b} w_{b,x} + r_b k_b \tau_{\theta rc}^b + k_b (1-k_t) k_2 \ddot{v}_t - k_b (1+k_b) k_3 \ddot{v}_b + (k_b^2 k_1 - k_t k_b k_2) w_{t,\theta} = 0 \quad (29)$$

$$w_{i,\theta} = \tilde{w}_{i,\theta} \text{ or } M_{\theta}^i = 0 \quad (30)$$

$$w_c = \tilde{w}_c \text{ or } \tau_{\theta rc} = 0 \quad (31)$$

شرایط مرزی رویه‌ها در $x=0,L$ و $i=t,b$:

$$u_{0i} = \tilde{u}_{0i} \text{ or } r_i N_x^i = 0 \quad (32)$$

$$v_{0i} = \tilde{v}_{0i} \text{ or } r_i N_{x\theta}^i + M_{x\theta}^i = 0 \quad (33)$$

$$w_i = \tilde{w}_i \text{ or } r_i M_{x,x}^i + r_i (d_i/2) \tau_{xrc}^i = 0 \quad (34)$$

$$w_{i,x} = \tilde{w}_{i,x} \text{ or } M_x^i = 0 \quad (35)$$

$$w_{i,\theta} = \tilde{w}_{i,\theta} \text{ or } M_{x\theta}^i = 0 \quad (36)$$

و همچنین:

$$w_c = \tilde{w}_c \text{ or } \tau_{xrc} = 0 \quad (37)$$

$$N_{\theta}^b - M_{\theta,\theta\theta}^b / r_b - r_b M_{x,xx}^b - 2M_{x\theta,x\theta}^b - r_{bc} k_b \tau_{\theta r,\theta} (r = r_{bc}) + r_{bc} \sigma_{rrc} (r = r_{bc}) - r_{bc} (d_b/2) \tau_{xrc,x} (r = r_{bc}) + k_2 \dot{w}_t + (r_b I_{0b} + k_3) \ddot{w}_b - k_b (1-k_t) k_2 \ddot{v}_{0b,\theta} + (k_b (1+k_b) k_3 + I_{2b}/r_b) \ddot{v}_{0b,\theta} - (k_b^2 k_3 + I_{2b}/r_b) \ddot{w}_{b,\theta\theta} + k_b k_2 k_b \ddot{w}_{t,\theta\theta} - k_3 (d_b/2) \ddot{u}_{0b,x} - k_2 (d_b/2) \ddot{u}_{0t,x} - k_3 (d_b/2)^2 \ddot{w}_{b,xx} - k_2 (d_b d_b/2) \ddot{w}_{t,xx} + r_b I_{2b} \ddot{w}_{b,xx} + r_b q_r^b = 0 \quad (21)$$

و سه معادله آخر ضرایب $\delta u_c = 0$, $\delta v_c = 0$, $\delta w_c = 0$:

$$\tau_{\theta rc} + (r \tau_{\theta rc})_{,r} = 0 \quad (22)$$

$$(r \tau_{xrc})_{,r} = 0 \quad (23)$$

$$\tau_{\theta rc,\theta} + r \tau_{xrc,x} + (r \sigma_{rrc})_{,r} = 0 \quad (24)$$

در این روابط:

$$I_{ij} = \int \rho_i z_i^j dz, \quad k_i = d_i / 2r_i \\ k_1 = \rho_c t_c (3r_{tc} + r_{bc}) / 12, \\ k_2 = \rho_c t_c (r_{tc} + r_{bc}) / 12, \\ k_3 = \rho_c t_c (r_{tc} + 3r_{bc}) / 12 \quad (25)$$

همچنین با در نظر گرفتن روابط (15) تا (24)، در کنار استخراج معادلات حرکت بار دیگر مجموع کل ضرایب عبارت‌های δw_c , δv_c , δu_c , δw_{0b} , δv_{0t} , δu_{0t} در عبارات زیر انتگرال یگانه برابر صفر قرار داده می‌شود و شرایط مرزی مربوط به رویه‌ها و هسته پوسته ساندویچی استوانه‌ای (شکل 1) نیز به دست می‌آیند.

شرایط مرزی رویه‌ها در $\theta = \theta_0, \theta_1$ و $i=t,b$:

$$u_{0i} = \tilde{u}_{0i} \text{ or } N_{x\theta}^i = 0 \quad (26)$$

$$v_{0i} = \tilde{v}_{0i} \text{ or } N_{\theta}^i + \frac{1}{r} M_{\theta}^i = 0 \quad (27)$$

$$w_t = \tilde{w}_t \text{ or } (1/r_t)M_{\theta,\theta}^t - 2M_{x\theta,x}^t - (I_{2t}/r_t)\ddot{v}_{0t} - r_t I_{2t} w_{t,x} + r_t k_t \tau_{\theta rc}^t + k_t (1-k_t) k_1 \ddot{v}_t + (k_t^2 k_1 - k_t k_b k_2) w_{t,\theta} = 0 \quad (28)$$

4-2- تعیین میدان جابجایی در هسته پوسته استوانه‌ای ساندویچی و استخراج روابط تکمیلی

به منظور استخراج دقیق معادلات حاکم بر رفتار پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی، لازم است میدان جابجایی در ناحیه‌ی هسته با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی خارج صفحه و سازگاری آن با رویه‌ها به درستی فرمول‌بندی شود. در این راستا، توزیع مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای شعاعی، محیطی و محوری به گونه‌ای تعریف می‌شود که پیوستگی کرنش و تنش در مرزهای مشترک بین هسته و رویه‌ها برقرار گردد. سپس با استفاده از روابط سازگاری و تعادل، معادلات تکمیلی مرتبط با تغییرشکل و توزیع تنش در هسته استخراج می‌گردد تا مبنای تدوین روابط کلی سازه فراهم شود. در این رویکرد، هیچ‌گونه فرض اولیه‌ای بر شکل تابع جابجایی هسته اعمال نمی‌شود؛ بلکه میدان جابجایی به‌طور دقیق و با حل معادلات سه‌بعدی الاستیسیته، مبتنی بر یک مشتق‌پذیری نظری اصلی استخراج می‌گردد. این روش دقت تحلیلی بالایی ارائه می‌دهد و مبنایی معتبر برای مدل‌سازی واقع‌گرایانه رفتار سازه فراهم می‌کند (پیوست ب).

مولفه جابجایی شعاعی در راستای ضخامت با در نظر گرفتن روابط ساختاری مربوط به هسته پوسته ساندویچی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$w_c = w_b + \tau_{\theta,\theta} / E_c (I/r_{bc} - I/r + k_0 \\ \ln(r/r_{bc}) / \ln(r_{bc}/r_{tc})) - (r - r_{bc} \\ + (r_{bc} - r_{tc}) \ln(r/r_{bc}) / \ln(r_{bc}/r_{tc})) \\ \tau_{x,x} / E_c + (w_b - w_t) (\ln(r/r_{bc}) / \\ \ln(r_{bc}/r_{tc})), \\ k_0 = (r_{tc} - r_{bc}) / r_{tc} r_{bc} \quad (38)$$

روابط (39) و (40) که معرف مؤلفه‌های شعاعی جایجایی در هسته و حاصل از حل دقیق معادلات تعادل هستند، با جای‌گذاری در چارچوب مدل-سازي، منجر به استخراج معادلات مکمل به صورت زیر می‌گردند:

$$(r_t / r_b)(I + k_b)v_{0b} + (k_t - I)v_{0t} + (I - (r_t / r_b))(I + k_b)w_{0b} - k_t w_{t,\theta} + (I/2)(r_t^2 - r_b^2) / r_b^2 r_t)) (\tau_\theta / G_c \theta) + (\tau_{\theta,\theta\theta} / E_c)((-r - r_{bc})^2 / 2r_b^2 r_t) + k_\theta(I - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t)) - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta})((I - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t) + (\tau_{x,x\theta} / E_c)((r_b - r_t)(I + \ln(r_t / r_b) - r_t / r_b)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) + r_b - r_t + r_t \ln(r_t / r_b)) = 0 \quad (43)$$

$$(r_t / r_b)(I + k_b)v_{0b} + (k_t - I)v_{0t} + (I - (r_t / r_b))(I + k_b)w_{0b} - k_t w_{t,\theta} + (I/2)(r_t^2 - r_b^2) / r_b^2 r_t)) (\tau_\theta / G_c \theta) + (\tau_{\theta,\theta\theta} / E_c)((-r - r_{bc})^2 / 2r_b^2 r_t) + k_\theta(I - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t)) - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta})((I - (r_t / r_b) + \ln(r_t / r_b)) / \ln(r_b / r_t) + (\tau_{x,x\theta} / E_c)((r_b - r_t)(I + \ln(r_t / r_b) - r_t / r_b)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) + r_b - r_t + r_t \ln(r_t / r_b)) = 0 \quad (44)$$

در نهایت، شش معادله‌ی اولیه‌ی ارائه‌شده در روابط (16) تا (21)، به همراه دو معادله‌ی مکمل حاصل از اعمال شرایط سازگاری در فصل مشترک لایه‌ها روابط (43) و (44)، مجموعه‌ی کامل معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار پوسته‌ی ساندویچی را تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب، با اتکا بر تئوری کلاسیک پوسته برای رویه‌ها و بهره‌گیری از حل تحلیلی معادلات سه‌بعدی الاستیسیته در ناحیه‌ی هسته، روابط جامع حاکم بر پاسخ دینامیکی پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی با هسته‌ای نرم و انعطاف‌پذیر استخراج می‌شود. در گام پایانی، معادلات حاکم به‌صورت فشرده و در چارچوب یک فرم ماتریسی بازنویسی می‌شوند، که در آن، بردار Q نمایانگر نیروهای اعمالی و بردار X بیانگر پارامتر-های مجهول مورد نظر در تحلیل مسئله است:

$$[\tilde{M}]\{\ddot{X}\} + [\tilde{K}]\{X\} = \{Q\} \quad (45)$$

$$X^T = \{u_{0t} u_{0b} v_{0t} v_{0b} w_t w_b \tau_\theta \tau_x\}$$

یکی از روش‌های مؤثر در تحلیل پاسخ دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری ضربه‌ای با سرعت پایین، استفاده از بسط سری دوگانه فوریه است. در این روش، هر جمله سری به‌صورت حاصل‌ضرب تابعی مثلثاتی که شرایط مرزی را برآورده می‌کند در ضریبی وابسته به زمان بیان می‌شود. برای تحلیل دینامیکی پوسته استوانه‌ای ساندویچی با تکیه‌گاه ساده، مؤلفه‌های جایجایی با انتخاب توابع مناسب مطابق شرایط مرزی داخلی و خارجی رویه‌ها تعیین می‌شوند تا قیود هندسی و بارهای مرزی ارضا شوند و پاسخ ارتعاش آزاد استخراج گردد.

از طریق اعمال روابط ساختاری و معادلات کرنش-جایجایی در هسته (7) و (4) و با در نظر گرفتن مقدار محاسبه شده برای w_c ، مؤلفه u_c و v_c تغییرمکان، در بخش میانی هسته انعطاف‌پذیر پانل استوانه‌ای ساندویچی به‌صورت زیر تعیین می‌گردند:

$$u_c = u_{0b} + (r_{bc} - r - d_b / 2)w_{b,x} + (\tau_x / G_{cx}) \ln(r / r_{bc}) - (\tau_{\theta,x\theta} / E_c)(r / r_{bc} - 1 + \ln(r_{bc} / r)) + k_0(r_{bc} + r(\ln(r / r_{bc}) - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) + ((r^2 + r_{bc}^2) / 2 - r r_{bc} + (r_{bc} - r_{ic})(r_{bc} + r \ln(\frac{r}{r_{bc}} - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x})(r_{bc} + r(\ln(\frac{r}{r_{bc}} - 1)) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) \quad (39)$$

$$v_c = (r / r_{bc})(I + k_b)v_{0b} + (I - (r / r_{bc}))(I + k_b)w_{b,\theta} + I/2((r^2 - r_{bc}^2) / r_{bc}^2 r) \tau_\theta / G_c \theta + \tau_{\theta,\theta\theta} / E_c((-r - r_{bc})^2 / 2) + k_\theta(I - r / r_{bc} + \ln(r / r_{bc})) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta})((I - r / r_{bc} + \ln(r / r_{bc})) / \ln(r_{bc} / r_{ic})) + \tau_{x,x\theta} / E_c((r_{bc} - r_{ic})(I + \ln(r / r_{bc}) - r / r_{bc})) / \ln(r_{bc} / r_{ic}) + r_{bc} - r + r \ln(r / r_{bc}) \quad (40)$$

با حل معادلات الاستیسیته، مؤلفه‌های جایجایی در هسته نرم و انعطاف‌پذیر پوسته‌ی ساندویچی در سه جهت طولی، محیطی و شعاعی مستقیماً استخراج می‌شوند. برخلاف تئوری‌های کلاسیک مهندسی که بر فرض‌های از پیش تعیین‌شده توزیع میدان جایجایی مبتنی‌اند، در این روش هیچ ساده‌سازی اولیه‌ای اعمال نمی‌شود. برای ارتقای دقت مدل‌سازی، توزیع‌های غیرخطی حاصل از حل تحلیلی معادلات تعادل هسته به‌عنوان معادلات مکمل لحاظ گردیده‌اند. تحلیل نتایج نشان می‌دهد که تغییرات مؤلفه‌های جایجایی در راستای شعاعی غیرخطی بوده و تابعی از تنش‌های برشی موجود در هسته، میدان جایجایی رویه‌های فوقانی و تحتانی و پارامترهای مکانیکی مانند مدول‌های یانگ و برشی هسته است. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، به‌منظور ارتقای دقت مدل‌سازی، توزیع‌های غیرخطی به‌دست‌آمده از حل تحلیلی معادلات تعادل هسته به‌عنوان معادلات مکمل در چارچوب تحلیل لحاظ شده‌اند.

همچنین، توزیع‌های غیرخطی حاصل از حل تحلیلی معادلات تعادل هسته به‌عنوان شرایط مکمل در چارچوب مدل لحاظ شده‌اند تا دقت پیش‌بینی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی ارتقا یابد. بر این اساس، دو معادله کلیدی که توانایی توصیف جامع رفتار سازه را دارند، به‌صورت زیر استخراج می‌شوند. برای محاسبه نتایج دقیق‌تر، قیود سازگاری حاکم بر مؤلفه‌های u_c و v_c مطابق با رابطه (5) و با اعمال شرط مرزی بیان‌شده ($r = r_{ic}$)، به شرح زیر لحاظ شده‌اند.

$$u_c(r = r_{ic}) = u_{0t} + (d_t / 2)w_{t,x} \quad (41)$$

$$v_c(r = r_{ic}) = v_{0t} - (d_t / 2)(v_{0i} - w_{i,\theta}) / r_i \quad (42)$$

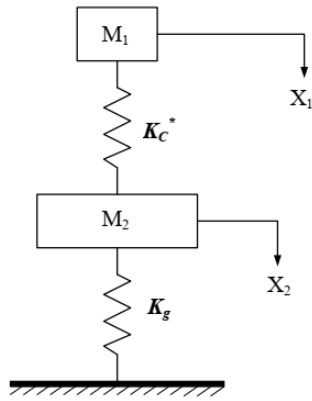


Fig. 2 Spring-mass model of the sandwich shell and impactor system

شکل 2 مدل جرم-فنر پوسته ساندویچی و ضربه‌زننده

در این مدل، M_1 و M_2 به ترتیب بیانگر جرم مؤثر ضربه‌زننده و پوسته ساندویچی، K_c^* معرف سفتی تماس خطی شده و K_g نشان‌دهنده سفتی کلی سازه می‌باشند. با استناد به مدل ارائه‌شده و بر اساس قانون دوم نیوتن [2]، می‌توان معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی جرم-فنر نمایش داده‌شده در شکل (2) را به صورت تحلیلی فرموله کرد. در این معادلات، $X_1(t)$ و $X_2(t)$ به ترتیب بیانگر جابجایی ضربه‌زننده و پوسته ساندویچی هستند. مقادیر این جابجایی‌ها با اعمال شرایط اولیه مشخص شده بر روی سیستم دینامیکی، قابل محاسبه و تحلیل می‌باشند.

$$M_2 \ddot{x}_2 + (k_g + k_c^*)x_2 - k_c^*x_1 = 0 \quad (48)$$

$$M_1 \ddot{x}_1 - k_c^*x_2 + k_c^*x_1 = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} x_1(t=0) &= 0, x_2(t=0) = 0, \\ \dot{x}_1(t=0) &= V_0, \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

سفتی معادل پوسته استوانه‌ای ساندویچی در حالت خاص که ضربه در وسط پوسته رخ می‌دهد (مدل فرکانس پایه) از رابطه (51) بدست می‌آید. که در آن M_{sand} جرم مؤثر هدف و ω_{11} فرکانس طبیعی مربوط به پوسته استوانه‌ای ساندویچی بوده که با تکیه بر تحلیل ایستایی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با هسته عرضی انعطاف‌پذیر و بهره‌گیری از روش تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی استخراج گردیده است (روابط 47).

$$K_g = M_{sand} \omega_{11}^2 \quad (51)$$

در پی حل معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی و با جایگزینی مقادیر $X_1(t)$ و $X_2(t)$ در روابط به‌دست‌آمده، و انجام ساده‌سازی‌های مناسب، فرمول‌بندی تحلیلی فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت رابطه (52) حاصل می‌گردد. شکل مدهای ارتعاشی و مقادیر ثابت متناظر نیز به صورت روابط (53) و (54) تعریف می‌شوند:

$$X = \begin{bmatrix} u_{0t}(\theta, x) \\ u_{0b}(\theta, x) \\ v_{0t}(\theta, x) \\ v_{0b}(\theta, x) \\ w_t(\theta, x) \\ w_b(\theta, x) \\ \tau_\theta(\theta, x) \\ \tau_x(\theta, x) \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} C_{ut} \sin(n\pi\theta / \alpha_0) \cos(m\pi x / L) \\ C_{ub} \sin(n\pi\theta / \alpha_0) \cos(m\pi x / L) \\ C_{vt} \cos(n\pi\theta / \alpha_0) \sin(m\pi x / L) \\ C_{vb} \cos(n\pi\theta / \alpha_0) \sin(m\pi x / L) \\ C_{wt} \sin(n\pi\theta / \alpha_0) \sin(m\pi x / L) \\ C_{wb} \sin(n\pi\theta / \alpha_0) \sin(m\pi x / L) \\ C_{\tau\theta} \cos(n\pi\theta / \alpha_0) \sin(m\pi x / L) \\ C_{\tau x} \sin(n\pi\theta / \alpha_0) \cos(m\pi x / L) \end{bmatrix} e^{j\omega t} \quad (46)$$

$$\alpha_0 = a / R$$

در رابطه مذکور $C_{ut}, C_{ub}, C_{vt}, C_{vb}, C_{wt}, C_{wb}, C_{\tau\theta}, C_{\tau x}$ ضرایب سری‌های فوریه معرف مؤلفه‌های جابجایی و تنش‌های برشی در هسته‌ی سازه می‌باشند. با جایگذاری توابع انتخاب‌شده در فرم ارتعاشی معادله (45)، دستگاهی از معادلات جبری برای مقادیر مختلف شاخص‌های مود (m و n) حاصل می‌گردد. این مجموعه معادلات را می‌توان به صورت ماتریسی بازنویسی کرده و به شکل زیر ارائه نمود:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 M + K)C &= 0 \\ C^T &= \{C_{ut} C_{ub} C_{vt} C_{vb} C_{wt} C_{wb} C_{\tau\theta} C_{\tau x}\} \end{aligned} \quad (47)$$

بدین ترتیب، مسأله ارتعاش آزاد پوسته به صورت یک مسأله مقدار ویژه استاندارد فرموله می‌شود. با حل این مسأله، مقادیر فرکانس طبیعی متناظر با ضرایب مودال مختلف m و n استخراج می‌گردند. در این رابطه، M و K به ترتیب معرف ماتریس‌های سفتی و جرم متقارن سیستم هستند.

3- مدل‌سازی نیروی تماس تحت بارگذاری ضربه سرعت پایین در پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای

در این مطالعه، پاسخ ضربه‌ای پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای با بهره‌گیری از یک مدل تحلیلی دو درجه آزادی مبتنی بر سیستم جرم-فنر مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور تعیین پارامترهای ناشناخته‌ی تماس در چارچوب قانون برخورد غیرخطی هرتز، از اصل همپلتون و موازنه انرژی استفاده شده و یک حل تحلیلی برای توصیف رفتار تماس ارائه گردیده است. در این چارچوب، بیشینه نیروی تماس با استفاده از یک الگوریتم تکراری مبتنی بر مدل دو درجه آزادی محاسبه می‌شود. مدل دینامیکی ضربه شامل جرم‌های معادل برای ضربه‌زننده و پوسته ساندویچی و همچنین فنرهای معادل برای سفتی تماس و سفتی کلی سازه است (شکل 2).

بین نیروی تماس معادل و میزان تغییرشکل موضعی ناشی از نفوذ مدل سازی گردیده است. این رابطه به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$K_c^* = K_c^n F_{\max}^{\frac{n-1}{n}} \quad (58)$$

در این رابطه، F_{\max} حداکثر نیروی تماس را نشان می‌دهد که با بهره‌گیری از مدل موازنه انرژی و روش تکراری محاسبه می‌شود. با توجه به فرضیات رفتار شبه‌استاتیکی، انرژی جنبشی اولیه پرتابه با صرف نظر از اثرات غشایی و آسیب‌های ساختاری معادل مجموع انرژی‌های ناشی از فرو رفتگی موضعی و تغییرشکل کلی سازه است. بنابراین، در زمان رسیدن به تغییرشکل ماکزیمم، انرژی ضربه‌زننده به صفر رسیده و تمامی انرژی جنبشی اولیه صرف تغییرشکل سازه می‌گردد. جابجایی ضربه‌زننده نیز برابر مجموع فرو رفتگی ایجادشده در پوسته و خیز کلی ناشی از برخورد می‌باشد.

$$w = \alpha_c + w_g = \left(\frac{F}{K_c}\right)^n + \frac{F}{K_g} \quad (59)$$

بنابراین کار انجام شده توسط ضربه زننده برابر است با:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^w F d_w = Fw - \\ &= \int_0^F w d_F = Fw - \int_0^F \left(\left(\frac{F}{K_c}\right)^n + \frac{F}{K_g} \right) d_F \\ &= \frac{F^2}{2K_g} + \frac{1}{(n+1)} \frac{F^{1+\frac{1}{n}}}{K_c^n} \end{aligned} \quad (60)$$

بر اساس مدل موازنه انرژی، با در نظر گرفتن این نکته که تمام کار انجام شده توسط ضربه‌زننده مستقیماً به تغییرشکل پوسته و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک توسط آن تبدیل می‌شود، می‌توان رابطه‌ی تعادل انرژی بین ضربه‌زننده و پوسته را استخراج نمود. این رابطه امکان محاسبه پارامترهای کلیدی سیستم، از جمله حداکثر نیروی تماس و جابجایی ناشی از برخورد، را فراهم می‌آورد.

$$\frac{F_{\max}^2}{2K_g} + \frac{F_{\max}^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)K_c^n} = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad (61)$$

در این روش، نخست نیروی اولیه برخورد با بهره‌گیری از مدل موازنه انرژی تعیین می‌شود، که در آن انرژی جنبشی پرتابه به انرژی تغییرشکل موضعی و کلی سازه تبدیل می‌گردد. پس از آن، سفتی تماس خطی‌شده مطابق رابطه (58) محاسبه و در تابع تحلیلی نیروی تماس رابطه (55) جاگذاری می‌شود تا نیروی برخورد براساس مدل جرم-فنر به دست آید. مقادیر حاصل از دو روش موازنه انرژی و مدل جرم-فنر مقایسه می‌شوند و در صورت تحقق شرط همگرایی، محاسبات خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت، حلقه تکرار ادامه می‌یابد تا همگرایی کامل برقرار شود. این رویه تضمین می‌کند که نیروی برخورد محاسبه‌شده با دقت بالا و بر اساس تعادل انرژی و خواص دینامیکی سازه به دست آید.

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_g + k_c^*}{M_2} + \frac{k_c^*}{M_1} \right) \pm \\ &\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_g + k_c^*}{M_2} - \frac{k_c^*}{M_1} \right)^2 + \frac{k_c^{*2}}{M_1 M_2}} \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{k_c^*}{k_c^* - \omega_1^2 M_1} \\ \Delta_2 &= \frac{k_c^*}{k_c^* - \omega_2^2 M_1} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \frac{V}{\omega_1 (\Delta_2 - \Delta_1)} \\ \bar{\Delta}_2 &= \frac{V}{\omega_2 (\Delta_1 - \Delta_2)} \end{aligned} \quad (54)$$

در نهایت، با استفاده از روابط معرفی شده، تابع تحلیلی نیروی تماس بین ضربه‌زننده و سازه هدف استخراج شده و به شکل رابطه (55) بیان می‌گردد. این تابع امکان بررسی دقیق پاسخ دینامیکی سیستم تحت تأثیر ضربه را فراهم می‌کند و پایه‌ای برای محاسبه حداکثر نیروی تماس و تحلیل رفتار ارتعاشی ارائه می‌نماید.

$$\begin{aligned} F_c^*(t) &= K_c^* (x_1 - x_2) = K_c^* [\bar{\Delta}_1 (\Delta_1 - I) \sin \omega_1 t \\ &+ \bar{\Delta}_2 (\Delta_2 - I) \sin \omega_2 t] \end{aligned} \quad (55)$$

برای محاسبه نیروی تماس، از قانون برخورد هرگز استفاده می‌شود که به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد. در این رابطه، F نمایانگر نیروی تماس بین ضربه‌زننده و سازه و α_c میزان تغییر شکل نسبی دو جسم در محل برخورد را نشان می‌دهد. در چارچوب تئوری تماس هرگز K_c سفتی تماس برای سازه‌های ساندویچی به صورت ویژه‌ای فرموله می‌گردد. افزون بر این، در بیان نمایی قانون هرگز، مقدار توان را می‌توان برابر با 1.5 در نظر گرفت. در این معادلات، مقادیر R_i و R_s به ترتیب بیانگر شعاع انحنای ضربه‌زننده و شعاع انحنای سازه‌ی ساندویچی هستند، در حالی که E_i و E_s به‌عنوان مدول‌های الاستیسیته مواد در نظر گرفته می‌شوند. همچنین E و R به ترتیب معرف مدول یانگ معادل و شعاع انحنای معادل در مدل تماس می‌باشند.

$$F = K_c \alpha_c^n \quad (56)$$

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{4}{3} E R^2 \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} \\ \frac{1}{E} &= \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \end{aligned} \quad (57)$$

با توجه به غیرخطی بودن قابل توجه معادله (56)، استخراج یک حل تحلیلی بسته برای نیروی تماس بسیار دشوار و غیرعملی است. بر همین اساس، در چارچوب روش حاضر، سفتی تماس مؤثر K_c^* معرفی شده و رابطه‌ای خطی

4- بحث و بررسی نتایج

در این پژوهش، پاسخ ضربه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های چندلایه فلز-الیاف و هسته فوم مورد بررسی دقیق قرار گرفته است. به منظور ارزیابی نقش نوع تقویت‌کننده در بهبود مقاومت ضربه سه نوع شناخته شده و پرکاربرد در صنایع پیشرفته، شامل چندلایه‌های آلومینیوم-آرامید¹، آلومینیوم-کربن² و آلومینیوم-شیشه³ در تحلیل‌ها لحاظ گردیده‌اند. این انتخاب با هدف پوشش طیف متنوعی از رفتارهای مکانیکی الیاف آرامید، کربن و شیشه انجام شده است که هر یک نقش متفاوتی در بهبود مقاومت ضربه‌ای و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک سازه ایفا می‌کنند. چیدمان لایه‌ها نیز به صورت هفت‌لایه نامتقارن با آرایش (Al,90,0,core,0,90,Al) در نظر گرفته شده است که بیانگر یک ترکیب مهندسی شده میان لایه‌های فلزی و تقویت‌های الیافی در جهات مختلف می‌باشند. برای بررسی دقیق اثرات هندسی، نسبت‌های بدون بعد پوسته به صورت $R=2$ ، $h_c/h_t=10$ ، $h/a=0.1$ در نظر گرفته شده است. ضربه‌زنده‌ای از جنس فولاد با سر نیم کره به قطر 25.4 میلی متر و جرم 1.8 کیلوگرم با سرعت 1 متر بر ثانیه به رویه بالایی پوسته وارد شده است. خواص مکانیکی مرتبط با هر سه نوع لایه فلز-الیاف در جدول 2 ارائه شده است. مدل‌سازی تماس و انتقال انرژی بین ضربه‌زننده و پوسته با استفاده از تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی و در نظر گرفتن رفتار سه‌بعدی هسته فوم انجام شده تا اثرات غیرخطی تغییرشکل‌ها و تمرکز تنش‌ها به‌طور کامل بازتاب یابد.

یافته‌های حاصل بیانگر آن است که ویژگی‌های مکانیکی و هندسی، شامل نوع تقویت‌کننده، چگالی هسته، نسبت ضخامت‌ها و آرایش لایه‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در شکل‌گیری تاریخچه نیروی تماس، بیشینه بار ضربه‌ای دارند. به‌طور کلی، نتایج این پژوهش می‌تواند مبنای ارزشمندی برای طراحی بهینه پوسته‌های ساندویچی با رویه‌های فلز-الیاف در مواجهه با بارگذاری ضربه‌ای بوده و نشان‌دهنده توان بالای مدل تحلیلی توسعه‌یافته در پیش‌بینی رفتار واقعی این سازه‌ها است.

جدول 2 ویژگی‌های مکانیکی مواد هسته فوم، آلومینیوم، کربن/اپوکسی، شیشه/اپوکسی و آرامید/اپوکسی [1, 22]

Table 2 Mechanical properties of the foam core material, aluminum, carbon/epoxy, glass/epoxy, and aramid/epoxy [1, 22].

دانسیته kg/m^3	مدول برشی (GPa)	ضریب پواسون	مدول یانگ E_{22} (GPa)	مدول یانگ E_{11} (GPa)	
150	0.024	0.3	0.1	0.1	هسته
2700	28	0.33	72.4	72.4	آلومینیوم
1600	7.17	0.28	10.3	181	رویه کربن/ اپوکسی
1800	4.14	0.26	8.27	38.6	رویه گلاس/ اپوکسی
1460	2.3	0.34	5.5	76	رویه آرامید/اپوکسی

جهت ارزیابی میزان دقت و کارایی مدل ارائه شده، پاسخ پوسته ساندویچی استوانه‌ای تحت بارگذاری ضربه سرعت پایین با بهره‌گیری از کدنویسی انجام شده در محیط نرم افزار متلب، مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی روابط تحلیلی ارائه شده، نتایج مدل پیشنهادی با داده‌های موجود در منبع [25] برای پانل ساندویچی با رویه‌ی کامپوزیتی تقویت‌شده با الیاف کربن و هسته‌ی فومی مقایسه شده است (شکل 3). پیکربندی لایه‌چینی به صورت (0/90/0/core/0/90/0) در نظر گرفته شده و خواص مکانیکی مربوط به لایه‌های رویه و هسته به صورت جداگانه در جدول 1 معرفی شده‌اند. در آزمایش مرجع، ضربه‌زننده‌ای با سر نیم کره به شعاع 7.12 میلی متر و جرم 8.1 کیلوگرم با سرعت 2 متر بر ثانیه به سازه وارد شده و نمودار نیروی تماس بر حسب زمان در شکل 2 گزارش گردیده است. تحلیل نتایج نشان می‌دهد که مدل حاضر همخوانی مناسبی با داده‌های تجربی و عددی موجود دارد و قادر است رفتار تماس را با دقت مطلوب پیش‌بینی نماید. مقدار بیشینه نیروی تماس به دست آمده برابر با 3316 kg/s بوده که تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی داشته و صرفاً اختلاف ناچیزی در مدت زمان تماس در رویداد ضربه مشاهده می‌شود.

جدول 1 مشخصات رویه ساندویچی با هسته فوم [25]

Table 1 Specifications of the sandwich face sheets with a foam core [25]

دانسیته (kg/m^3)	مدول برشی (GPa)	ضریب پواسون	مدول یانگ (GPa)	
110	70	0.286	0.18	هسته
$\rho=1151$	$G_{12}=3.16$	$\nu_{12}=0.06$	$E_{11}=54$	رویه
	$G_{13}=3.16$	$\nu_{13}=0.313$	$E_{12}=54$	
	$G_{23}=1.87$	$\nu_{23}=0.313$	$E_{33}=4.84$	

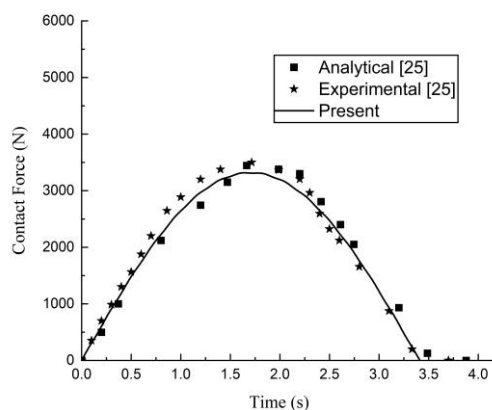


Fig. 3 Variation of contact force vs. time in a composite sandwich shell with thin face sheets and a foam core

شکل 3 روند تغییرات نیروی تماس بر حسب زمان در پوسته ساندویچی کامپوزیتی با رویه‌های نازک و هسته فوم

³ Glass Fibre Reinforced Aluminum Laminate

¹ Aramid Fibre Reinforced Aluminum Laminate

² Carbon Fibre Reinforced Aluminium Laminates

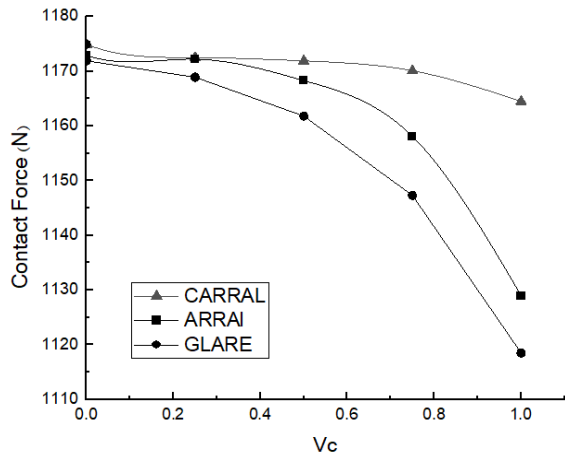


Fig. 4 Variation of the peak impact force with the face sheet volume fraction

شکل 4 تغییرات بیشینه نیروی ضربه برحسب کسر حجمی رویه‌ها

علاوه بر این، نتایج نشان‌دهنده برهم‌کنش بین نوع الیاف و کسر حجمی نیز هستند. به‌ویژه در مقادیر بالای کسر حجمی الیاف، تفاوت عملکرد میان سه نوع الیاف آشکارتر می‌شود؛ به‌طوری‌که بیشترین کاهش در مقدار بیشینه نیروی ضربه برای نمونه‌ی گلاس/اپوکسی با کسر حجمی برابر با یک مشاهده شده است. در حالی‌که بیشترین مقدار این نیرو به نمونه‌ی کربن/اپوکسی با کسر حجمی صفر اختصاص دارد. این امر بیانگر حساسیت بالای پاسخ ضربه‌ای سازه‌های کامپوزیتی به ترکیب انتخابی الیاف و میزان کسر حجمی است و اهمیت طراحی بهینه در انتخاب نوع تقویت‌کننده و مقدار کسر حجمی را دوچندان می‌سازد.

در ادامه، تأثیر افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه (hc/hf) بر بیشینه نیروی ضربه (F_{max}) در پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های گلاس و هسته فومی در جدول 4 ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت هسته با کاهش تدریجی F_{max} همراه است که می‌توان آن را به کاهش سفتی خمشی کلی سازه نسبت داد. با افزایش ضخامت هسته، سهم رویه‌های کامپوزیتی در تحمل بار متمرکز ضربه کاهش یافته و انرژی وارده عمدتاً در قالب تغییرشکل‌های برشی و فشاری در هسته فوم مستهلک می‌شود. این فرآیند منجر به کاهش ظرفیت انتقال نیروی لحظه‌ای به سازه و در نهایت افت مقدار بیشینه نیروی ثبت‌شده می‌گردد.

مقایسه بین سه نوع الیاف نیز روند مشابهی را نشان می‌دهد، به‌گونه‌ای که ساختار کربن/اپوکسی در تمامی نسبت‌ها بالاترین مقادیر F_{max} را به دلیل مدول یانگ بیشتر و سفتی بالاتر ارائه می‌دهد، در حالی‌که آرامید/اپوکسی و به‌ویژه گلاس/اپوکسی مقادیر پایین‌تری را ثبت کرده‌اند که ناشی از مدول کمتر و انعطاف‌پذیری بیشتر آن‌ها است. با این حال، با افزایش (hc/hf) ، اختلاف بین سه نوع الیاف کاهش یافته و در نسبت‌های بالاتر (برای مثال $hc/hf=30$) مقادیر نیرو به یکدیگر نزدیک می‌شوند که این امر نشان‌دهنده کاهش نقش مکانیکی رویه‌ها و غالب شدن تأثیر هسته در تعیین پاسخ ضربه‌ای سازه است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در حالت پیاده‌سازی تئوری کلاسیک به دلیل عدم توانایی مدل‌سازی دقیق هسته مقدار این اختلاف نسبت به تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی بیشتر دیده می‌شود.

به‌منظور ارائه‌ی شفاف و جامع از نتایج، مقادیر بیشینه نیروی ضربه برای هر سه حالت هم در قالب جدول 3 و هم به‌صورت نمودار در شکل 4 گزارش شده‌اند. جدول 3 مقادیر عددی دقیق را در اختیار قرار می‌دهد و امکان مقایسه کمی و ارجاع مستقیم را فراهم می‌سازد، در حالی‌که شکل 4 روند کلی تغییرات و تفاوت‌های نسبی میان نمونه‌ها را برجسته می‌نماید. ترکیب این دو روش ارائه، علاوه بر تضمین دقت داده‌ها، تفسیر بهتر رفتار ضربه‌ای سازه را امکان‌پذیر ساخته است.

نتایج به‌دست‌آمده از جدول و نمودار نشان می‌دهد که نوع الیاف تقویت‌کننده و همچنین میزان کسر حجمی کامپوزیت تأثیر چشمگیری بر مقدار بیشینه نیروی ضربه دارند. نخست، بررسی اثر نوع الیاف بیانگر آن است که با تغییر جنس تقویت‌کننده از کربن/اپوکسی به آرامید/اپوکسی و سپس به گلاس/اپوکسی، مقدار بیشینه نیروی ضربه کاهش می‌یابد. این روند مستقیماً به تفاوت در ویژگی‌های مکانیکی ذاتی الیاف باز می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که الیاف کربن با داشتن مدول الاستیسیته و سفتی بالاتر، توانایی بیشتری در تحمل بار ضربه‌ای دارند، در حالی‌که الیاف آرامید و به‌ویژه الیاف گلاس به علت سفتی پایین‌تر، مقاومت کمتری در برابر ضربه نشان می‌دهند.

نتایج نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک لایه‌ای (CLT) به دلیل نادیده گرفتن تغییرشکل برشی عرضی هسته فومی، منجر به برآورد بیشتر بیشینه نیروی تماس می‌شود. همان‌گونه که در جدول 3 مشاهده می‌شود، در مدل حاضر مقدار بیشینه نیروی ضربه پیش‌بینی‌شده توسط تئوری کلاسیک لایه‌ای بیشتر از مقدار متناظر به‌دست‌آمده از تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی (HSAPT) است.

از سوی دیگر، تغییرات کسر حجمی کامپوزیت نیز الگوی نزولی در بیشینه نیروی ضربه ایجاد می‌کند. با افزایش کسر حجمی الیاف، ضربه‌زننده با لایه‌های متراکم‌تر و سفت‌تر سازه درگیر می‌شود، که این پدیده انتقال سریع‌تر بار و تمرکز بالاتر تنش‌های موضعی را در پی داشته و در نهایت باعث کاهش مقدار بیشینه نیروی ضربه ثبت‌شده می‌شود. بنابراین، هرچند افزایش کسر حجمی به‌طور معمول به بهبود خواص مکانیکی عمومی کامپوزیت‌ها منجر می‌گردد، در شرایط بارگذاری ضربه‌ای می‌تواند اثری معکوس بر بیشینه نیروی تحمل‌شده ایجاد کند.

جدول 3 اثر کسر حجمی رویه‌های فلز-الیاف بر بیشینه نیروی ضربه در پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته فوم

Table 3 Effect of the metal-fiber face sheet volume fraction on the peak impact force in a foam core sandwich cylindrical shell.

کسر حجمی کامپوزیت	بیشینه نیروی ضربه					
	گلاس/اپوکسی		آرامید/اپوکسی		کربن/اپوکسی	
	روش تئوری	روش حاضر	روش تئوری	روش حاضر	روش تئوری	روش حاضر
0	1339.8	1171.9	1340.9	1172.9	1342.6	1174.9
0.25	1338.7	1168.9	1340.1	1172.2	1341.9	1172.5
0.5	1337.5	1161.8	1339.5	1168.3	1341.0	1171.9
0.75	1335.2	1147.3	1338.4	1158.1	1340.3	1170.1
1	1330.1	1118.5	1332.5	1129.0	1338.7	1164.5

این روند بیانگر آن است که انتخاب چگالی هسته می‌تواند نقش دوگانه‌ای در افزایش سفتی سازه و بهبود ذخیره‌سازی انرژی الاستیک ایفا کند؛ به گونه‌ای که هسته‌های متراکم موجب ارتقای صلبیت کلی سامانه شده و هسته‌های سبک‌تر کارایی بیشتری در کاهش شدت اوج نیرو و افزایش میرایی از خود نشان می‌دهند.

در فرآیند مدل‌سازی، معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون و در چارچوب تئوری مرتبه‌بالای پوسته‌های ساندویچی استخراج شده و میدان جابه‌جایی هسته بر مبنای تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، بدون بهره‌گیری از ساده‌سازی‌های مرسوم، مدل‌سازی گردیده است. بدین ترتیب، توزیع غیرخطی جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها در راستای ضخامت هسته به‌طور دقیق در نظر گرفته شده و امکان بازنمایی واقع‌بینانه‌تری از انعطاف‌پذیری و تغییرشکل‌های برشی فراهم آمده است. این رویکرد پیشرفته موجب شده تا پاسخ ضربه‌ای سازه برای هسته‌های با چگالی متفاوت، به‌صورت متمایز و نزدیک‌تر به رفتار واقعی پیش‌بینی شود؛ امری که در مدل‌های کلاسیک مبتنی بر فرضیات خطی و ساده‌سازی‌های محدودکننده به‌ندرت قابل دستیابی است.

از سوی دیگر، بر اساس نتایج حاصل، مدول الاستیسیته هسته نقش کلیدی در تعیین شدت و مدت زمان نیروی تماس ایفا می‌کند (شکل 6). مشاهده می‌شود که افزایش سفتی هسته، منجر به افزایش محسوس در مقدار نیروی تماس و در عین حال کاهش بازه زمانی تماس می‌گردد. این روند نشان می‌دهد که هسته‌های سفت‌تر، صلبیت کلی سامانه را ارتقا داده و مقاومت بیشتری در برابر تغییرشکل لحظه‌ای فراهم می‌آورند، در حالی که هسته‌های انعطاف‌پذیرتر، با افزایش مدت زمان تماس، امکان جذب تدریجی‌تر انرژی و کاهش شدت اوج نیرو را فراهم می‌سازند.

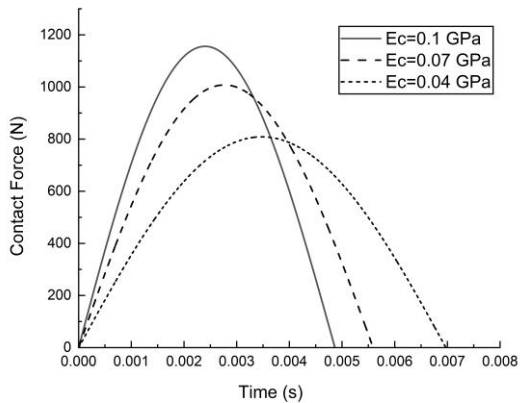


Fig. 6 Variation of the contact force vs. time with changes in the core's modulus of elasticity

شکل 6 سیر تغییرات نیروی تماس بر حسب زمان با تغییر مدول الاستیسیته هسته

همچنین با توجه به نتایج ارائه شده در شکل 7 مشاهده می‌شود، لایه‌های آلومینیومی با وجود نقش نسبتاً محدود در تغییر نیروی تماس، قادرند توزیع تنش و کرنش را در لایه‌های سطحی بهینه ساخته و از تمرکز بیش‌ازحد تنش در ناحیه تماس جلوگیری نمایند.

این ویژگی منجر به ارتقای مقاومت موضعی سازه در برابر بروز ترک‌های سطحی، فرورفتگی و سایر آسیب‌های ناشی از ضربه می‌شود، در حالی که تغییر محسوسی در مدت زمان تماس یا میزان ذخیره‌سازی انرژی الاستیک ایجاد نمی‌کند.

در مجموع، این نتایج اهمیت انتخاب ضخامت مناسب هسته در کنار نوع الیاف به‌کار رفته را در طراحی بهینه پنل‌های ساندویچی برجسته می‌سازد؛ به طوری که در نسبت‌های پایین h_c/h_f ، رویه‌ها نقش تعیین‌کننده داشته و استفاده از الیاف با مدول یانگ بالاتر نظیر کربن موجب افزایش چشمگیر مقاومت ضربه‌ای می‌شود، در حالی که در نسبت‌های بالاتر، افزایش ضخامت هسته باعث کاهش سفتی و افت بیشینه نیروی ضربه می‌گردد، حتی اگر رویه‌ها از الیاف سفت‌تر ساخته شده باشند. این نتایج ناشی از مدل‌سازی دقیق هسته بر پایه تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و اصل همیلتون است، که در آن توزیع غیرخطی جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت لحاظ شده و انعطاف‌پذیری هسته و بیشینه نیروی ضربه سازه به‌صورت واقع‌بینانه‌تر نسبت به مدل‌های کلاسیک پیش‌بینی می‌شود.

نتایج حاصل از تاریخچه نیروی تماس در شکل 5 نشان می‌دهد که تغییر چگالی هسته اثر قابل توجهی بر رفتار ضربه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی دارد. به‌طور مشخص، استفاده از هسته‌های فومی با چگالی بالا منجر به تحمل مقادیر بالاتری از نیروی تماس در بازه زمانی کوتاه‌تر می‌گردد، در حالی که هسته‌های با چگالی پایین با افزایش مدت زمان تماس، نیروی کمتری را تجربه نموده و انرژی ضربه را به‌صورت تدریجی‌تری جذب می‌کنند.

جدول 4 روند تغییرات بیشینه نیروی ضربه با افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه پوسته ساندویچی

Table 4 Effect Variation of the peak impact force with the increase in the core-to-face thickness ratio of the sandwich shell.

$\frac{h_c}{h_f}$	بیشینه نیروی ضربه					
	کربن/اپوکسی		آرامید/اپوکسی		گلاس/اپوکسی	
	روش	تئوری	حاضر	تئوری	روش	تئوری
10	1170.1	1340.6	1158.1	1338.2	1147.3	1335.4
15	1146.1	1308.9	1139.3	1307.3	1130.6	1304.4
20	1133.1	1292.5	1129.2	1289.5	1122.4	1287.2
25	1124.7	1281.7	1122.6	1278.7	1117.0	1277.3
30	1118.8	1274.6	1117.7	1271.4	1113.0	1269.1

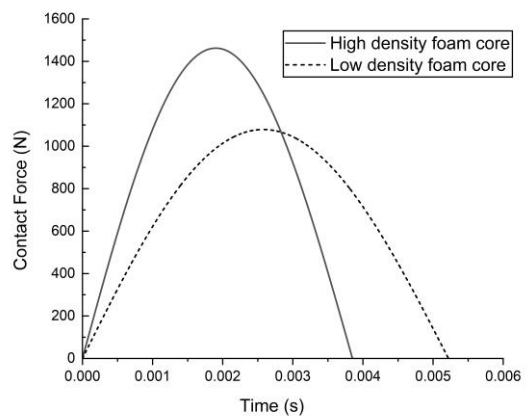
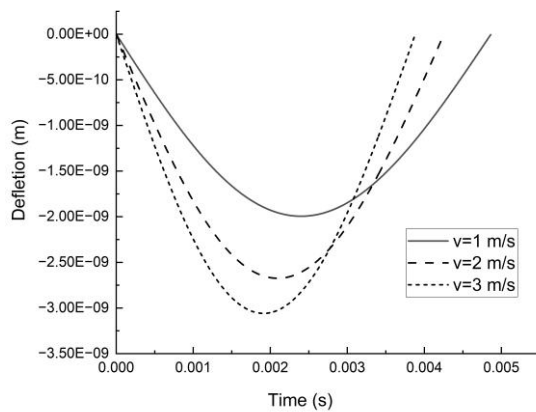


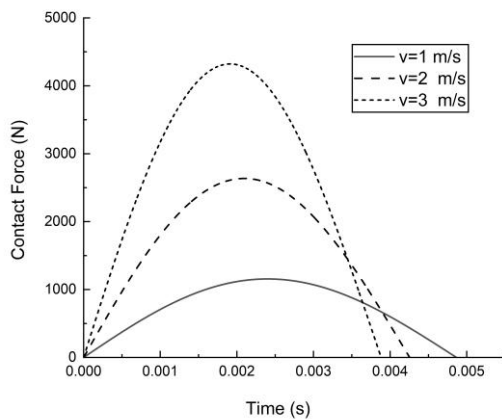
Fig. 5 Variation of the contact force versus time for the shell under different core densities.

شکل 5 سیر تغییرات نیروی تماس بر حسب زمان وارد بر پوسته با تغییر چگالی هسته

بر این، بررسی سطح زیر منحنی نیرو-زمان و روند تغییرات خیز نشان می‌دهد که ذخیره‌سازی انرژی الاستیک کلی در نمونه‌ی مورد نظر با افزایش سرعت ضربه رشد قابل توجهی دارد که همراه با تغییر در مکانیسم‌های شکست نظیر خردشدگی موضعی هسته یا جدایش بین لایه‌ها مشاهده می‌شود. به‌طور کلی، نتایج دو نمودار مکمل یکدیگر بوده و نشان می‌دهند که در پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های گلار و هسته فوم، افزایش سرعت ضربه علاوه بر افزایش بیشینه نیروی تماس و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک، منجر به خیز بیشتر سازه و تشدید فرآیندهای آسیب می‌گردد. این امر اهمیت انتخاب بهینه‌ی چیدمان لایه‌ها و ویژگی‌های هسته را در طراحی سازه‌های ساندویچی برای کاربردهای حساس نظیر هوافضا و خودروسازی برجسته می‌سازد.



(a-الف)



(b-ب)

Fig. 8 Analytical impact response under different impactor velocities: (a) central deflection of the top face sheet and (b) time history of contact force

شکل 8 پاسخ تحلیلی ضربه بر اساس سرعت‌های مختلف ضربه‌زننده: (الف) خیز مرکزی رویه فوقانی و (ب) سیر زمانی تغییرات نیروی تماس

همچنین نمودار خیز مرکزی در شکل 9 (الف) نشان می‌دهد که با افزایش جرم ضربه‌زننده، مقدار بیشینه خیز نیز افزایش می‌یابد. برای مقدار جرمی 1.8، حداکثر خیز کمتر از مقادیر 2.3 و 2.8 است. این رفتار قابل انتظار است، زیرا

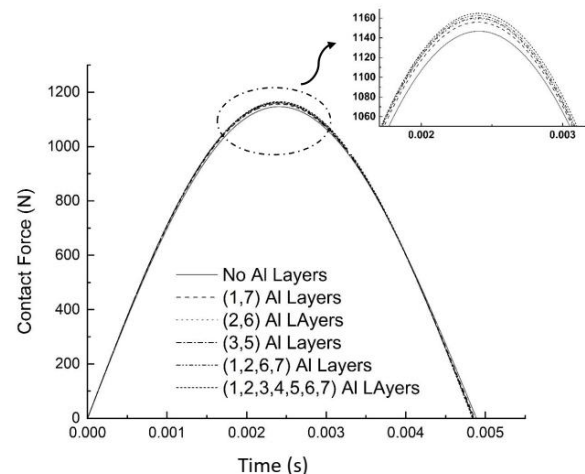


Fig. 7 Variation of the contact force vs. time with the stacking sequence of aluminum layers

شکل 7 سیر تغییرات نیروی تماس بر حسب زمان با تغییر اثر ترتیب چیدمان لایه‌های آلومینیوم

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که آرایش لایه‌های آلومینیومی به‌طور مستقیم بر پارامترهای کلی پاسخ نیرو-زمان اثرگذار نیست، اما نقش تکمیلی و تعیین‌کننده‌ای در بهبود یکپارچگی سازه و افزایش دوام موضعی در برابر آسیب‌های ناشی از ضربه ایفا می‌نماید.

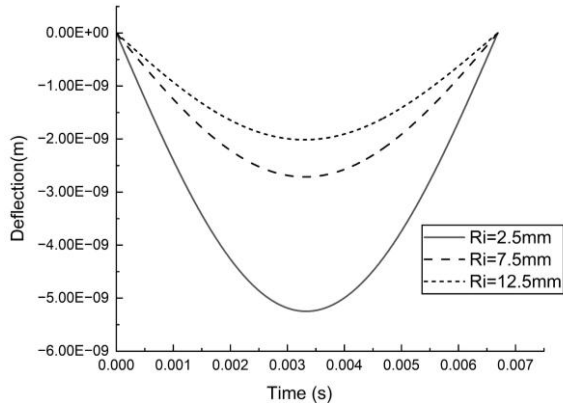
نکته حائز اهمیت آن است که چنین روندهای متمایزی تنها با بهره‌گیری از مدل‌سازی دقیق بر مبنای تئوری مرتبه بالای پوسته‌های ساندویچی و در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی هسته بر اساس الاستیسیته سه‌بعدی قابل دستیابی است. در این رویکرد، توزیع غیرخطی جابه‌جایی و کرنش در راستای ضخامت هسته به‌صورت کامل لحاظ شده و از ساده‌سازی‌های متداول در مدل‌های کلاسیک اجتناب گردیده است. این ویژگی موجب می‌شود پاسخ ضربه‌ای پیش‌بینی‌شده، هم در حالت هسته‌های با مدول متفاوت و هم در شرایط تغییر آرایش لایه‌های فلزی، به رفتار واقعی سازه نزدیک‌تر باشد. چنین دقتی در مدل‌سازی، مزیتی اساسی برای ارزیابی و طراحی بهینه پوسته‌های ساندویچی در کاربردهای دینامیکی به شمار می‌آید.

در این قسمت، بررسی همزمان نمودارهای نیرو-زمان و خیز-زمان با سرعت‌ها و جرم‌ها و شعاع‌های مختلف ضربه‌زننده برای پوسته استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های گلار و هسته فوم انجام شده است. در شکل 8 نشان می‌دهد که افزایش سرعت اولیه ضربه‌زننده اثر قابل توجهی بر هر دو پاسخ مکانیکی سازه دارد.

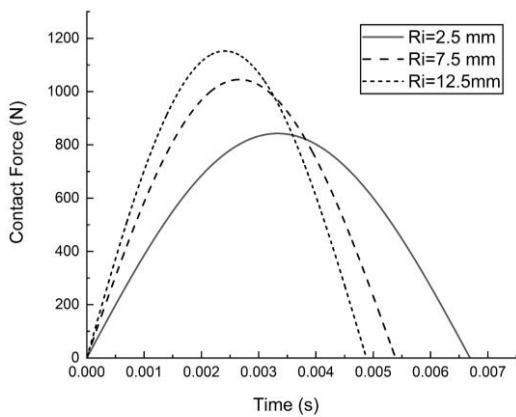
از یک سو، با افزایش سرعت از 1 به 3، مقدار بیشینه نیروی تماس از حدود 1000 نیوتن به بیش از 4000 نیوتن افزایش یافته است که بیانگر رشد محسوس سفتی مؤثر و مقاومت لحظه‌ای پوسته در برابر نفوذ می‌باشد. از سوی دیگر، نتایج خیز-زمان نشان می‌دهد که با افزایش سرعت، دامنه تغییرمکان منفی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش یافته و کمترین مقدار خیز در کوتاه‌ترین بازه زمانی رخ داده است.

این روند حاکی از آن است که پوسته در سرعت‌های بالاتر ضمن تحمل نیروی تماس بزرگ‌تر، دچار تغییرشکل‌های شدیدتری نیز می‌شود. همچنین، زمان رسیدن به بیشینه نیرو کاهش یافته و با زمان وقوع بیشینه خیز همبستگی بالایی دارد که وابستگی رفتار سازه به نرخ بارگذاری را آشکار می‌سازد. علاوه

می‌تواند در طراحی پوسته‌های ساندویچی تحت ضربه‌های سرعت پایین برای پیش‌بینی مقاومت و رفتار دینامیکی آنها مفید باشد. بررسی نتایج و مقایسه شکل 10 نشان می‌دهد که با افزایش شعاع ضربه‌زننده از 2.5 به 12.5 میلی‌متر، مقدار بیشینه نیروی تماس به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته و هم‌زمان خیز کلی پوسته در محل ضربه کاهش می‌یابد.



(الف-ا)



(ب-ب)

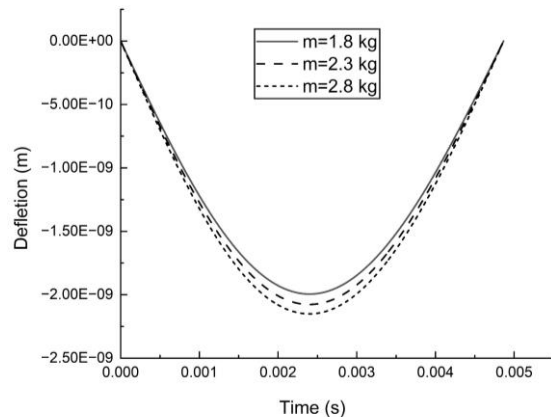
Fig. 9 Analytical response at the impact point for varying impactor radii: (a) central deflection of the top face sheet and (b) time history of contact force

شکل 10 پاسخ تحلیلی در نقطه ضربه بر اساس تغییرات شعاع ضربه‌زننده (الف)

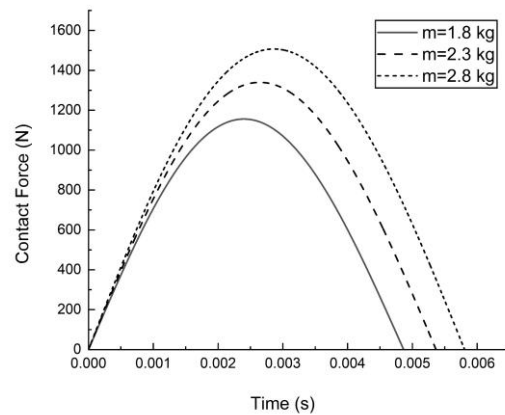
خیز مرکزی رویه فوقانی و (ب) سیر زمانی تغییرات نیروی تماس

این روند رفتاری نشان می‌دهد که در حالت استفاده از نوک‌های تیزتر، پاسخ سازه عمدتاً ناشی از فرورفتگی موضعی بوده و بخش عمده انرژی ضربه در ناحیه تماس جذب می‌گردد؛ به همین دلیل بیشینه نیروی کمتری ثبت می‌شود. در مقابل، با افزایش شعاع و توزیع بار بر سطح وسیع‌تر، سهم تغییرشکل‌های خمشی و سراسری پوسته در مکانیزم پاسخ افزایش یافته و سفتی مؤثر سیستم تقویت می‌شود. این پدیده منجر به افزایش قابل توجه نیروی بیشینه و کاهش محسوس جابجایی کلی می‌گردد، که نشانگر گذار از کنترل موضعی به کنترل خمشی/سراسری در رفتار دینامیکی پوسته است.

جرم بیشتر باعث افزایش انرژی منتقل شده به پوسته می‌شود و در نتیجه تغییر شکل بیشتری در رویه فوقانی ایجاد می‌کند. همچنین، مشاهده می‌شود که زمان رسیدن به بیشینه خیز با افزایش جرم ضربه‌زننده کمی افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده افزایش مدت زمان تماس بین ضربه‌زننده و پوسته است. شکل 9 (ب) نیز نشان می‌دهد همانند نمودار خیز، با افزایش جرم ضربه‌زننده، بیشینه نیروی تماس نیز افزایش می‌یابد. این امر بیانگر این است که نیروی وارد شده بر سطح پوسته تحت تأثیر جرم ضربه‌زننده به‌طور مستقیم افزایش می‌یابد. به علاوه، افزایش جرم سبب می‌شود که منحنی نیروی تماس پهن‌تر شود، که نشان‌دهنده مدت زمان طولانی‌تر تماس بین ضربه‌زننده و پوسته است.



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 8 Analytical impact response for different impactor masses: (a) central deflection of the top face sheet and (b) time history of contact force

شکل 9 پاسخ تحلیلی ضربه بر اساس جرم‌های مختلف ضربه‌زننده: (الف) خیز

مرکزی رویه فوقانی و (ب) سیر زمانی تغییرات نیروی تماس

به عبارت دیگر، جرم بیشتر باعث می‌شود انرژی بیشتری به پوسته منتقل شود و پاسخ دینامیکی آن با زمان بیشتری ادامه یابد. با توجه به این دو نمودار، می‌توان نتیجه گرفت که جرم ضربه‌زننده نقش مهمی در تعیین شدت و مدت پاسخ دینامیکی پوسته ساندویچی دارد. افزایش جرم باعث افزایش بیشینه خیز و نیروی تماس و همچنین طولانی‌تر شدن زمان پاسخ می‌شود، که این اطلاعات

7- نتیجه گیری

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که بیشینه‌ی نیروی ضربه به‌شدت تحت تأثیر نوع الیاف تقویت‌کننده و کسر حجمی کامپوزیت قرار دارد. با تغییر الیاف از کربن/اپوکسی به آرامید/اپوکسی و گلاس/اپوکسی، مقدار نیروی بیشینه کاهش می‌یابد که ناشی از افت سفتی مؤثر سازه است. همچنین افزایش کسر حجمی الیاف منجر به کاهش بیشینه‌ی نیروی ضربه شده و برهم‌کنش هم‌زمان این دو پارامتر، اهمیت طراحی بهینه‌ی ترکیب الیاف و کسر حجمی را در بهبود پاسخ ضربه‌ای سازه برجسته می‌سازد.

افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه (hc/hf) در پوسته‌های ساندویچی با رویه‌های گلار و هسته فومی، منجر به کاهش تدریجی بیشینه‌ی نیروی ضربه (Fmax) می‌شود که ناشی از کاهش سفتی خمشی و افزایش سهم هسته در ذخیره‌سازی انرژی الاستیک است. نوع الیاف نیز تأثیر قابل‌توجهی دارد، به‌گونه‌ای که کربن/اپوکسی بالاترین Fmax را ارائه می‌دهد، در حالی که آرامید/اپوکسی و گلاس/اپوکسی مقادیر کمتری دارند؛ با افزایش hc/hf، تفاوت عملکرد میان الیاف کاهش یافته و نقش هسته غالب می‌شود.

مطالعه خواص پوسته استوانه‌ای نشان می‌دهد که چگالی و مدول الاستیسیته هسته، تأثیر قابل‌توجهی بر رفتار ضربه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی دارند. هسته‌های با چگالی و سفتی بالاتر منجر به افزایش بیشینه‌ی نیروی تماس و کاهش مدت زمان تماس می‌شوند، در حالی که هسته‌های سبک‌تر و انعطاف‌پذیرتر انرژی ضربه را به‌صورت تدریجی جذب کرده و شدت اوج نیرو را کاهش می‌دهند. لایه‌های آلومینیومی، با وجود اثر محدود بر مقدار نیروی تماس، توزیع تنش و کرنش در سطح رویه را بهینه ساخته و از تمرکز تنش و آسیب‌های موضعی جلوگیری می‌کنند. مدل‌سازی هسته بر اساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و اصل همپلتون، بدون ساده‌سازی‌های مرسوم و با لحاظ توزیع غیرخطی جابجایی‌ها و کرنش‌ها در راستای ضخامت، امکان بازنمایی دقیق انعطاف‌پذیری، تغییرشکل‌های برشی و پاسخ متمایز سازه برای هسته‌های با خواص متفاوت را فراهم می‌آورد؛ امری که در مدل‌های کلاسیک به‌ندرت قابل‌دستیابی است.

در بررسی پارامترهای مربوط به ضربه زننده ملاحظه می‌گردد که افزایش سرعت ضربه منجر به افزایش قابل‌توجه بیشینه‌ی نیروی تماس و ذخیره‌سازی انرژی الاستیک در پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌های گلار و هسته فوم می‌شود. هم‌زمان، دامنه خیز افزایش یافته و زمان رسیدن به بیشینه نیرو کاهش می‌یابد، که بیانگر وابستگی رفتار سازه به نرخ بارگذاری و تشدید تغییرشکل‌ها و مکانیسم‌های آسیب است. این یافته‌ها اهمیت طراحی بهینه‌ی چیدمان لایه‌ها و خواص هسته را در کاربردهای حساس نظیر هوافضا و خودروسازی برجسته می‌سازد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش جرم ضربه‌زننده موجب افزایش بیشینه‌ی خیز و نیروی تماس و همچنین طولانی‌تر شدن مدت پاسخ دینامیکی پوسته می‌گردد. از سوی دیگر، افزایش شعاع ضربه‌زننده منجر به افزایش قابل‌توجه بیشینه‌ی نیروی تماس و کاهش خیز کلی سازه می‌شود که بیانگر انتقال مکانیزم پاسخ از فرورفتگی موضعی به تغییرشکل‌های خمشی و سراسری است. این یافته‌ها وابستگی شدید پاسخ ضربه‌ای پوسته‌های ساندویچی به مشخصات هندسی و جرمی ضربه‌زننده را آشکار می‌سازد.

در مجموع، می‌توان نتیجه گرفت که بهره‌گیری از لایه‌های آلومینیوم-شیشه (GLARE) با توجه به تعادل میان مقاومت، ذخیره‌سازی انرژی الاستیک و دوام، گزینه‌ای کارآمد برای ارتقای عملکرد سازه‌های ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ای سرعت پایین به شمار می‌آید.

8- پیوست الف

با بهره‌گیری از روابط بخش (1-2) و اعمال اصل همپلتون معادلات حرکت پوسته ساندویچی استوانه‌ای استخراج می‌گردد. به عنوان مثال برای رویه بالایی با جاگذاری مولفه‌های کرنش از روابط (3) و (2) در رابطه (12) عبارت انتگرالی جمله اول تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^l \int_0^{\theta_1} \int_0^{\frac{h}{2}} (\rho_t r_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{v}_t \delta v_t + \ddot{w}_t \delta w_t)) dz dx d\theta \quad (1-f)$$

با انتگرال‌گیری جز به جزء نسبت به زمان داریم:

$$\rho_t r_t \left(\int_0^l \int_0^{\theta_1} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{0t}(x, \theta, z, t) - z \left(\frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} w_{0t}(x, \theta, z, t) \right) (x, \theta, t) \right) \right. \\ \left. (\delta u_{0t}(x, \theta, z, t) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta w_{0t}(x, \theta, z, t) (x, \theta, t)) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{0t} \right) \right. \\ \left. (x, \theta, z, t) + \frac{z \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{0t}(x, \theta, z, t) - \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial \theta} w_{0t}(x, \theta, z, t) (x, \theta, t) \right)}{r_t} \right) \\ \left. (\delta v_{0t}(x, \theta, z, t) + \frac{z (\delta v_{0t}(x, \theta, t) - \frac{\partial}{\partial \theta} \delta w_{0t}(x, \theta, z, t) (x, \theta, t))}{r_t} \right) + \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_{0t}(x, \theta, z, t) \right) \delta w_{0t}(x, \theta, z, t) \right) dz dx d\theta \quad (2-f)$$

به‌طور مشابه، برای رویه پایینی پوسته ساندویچی استوانه‌ای نیز روابط متناظر حاصل می‌شوند. با اعمال شرایط سازگاری، جاگذاری روابط (6)، (5) و روابط (3) در معادلات (10) و (9) عبارت انتگرالی جمله سوم تغییرات انرژی جنبشی برای هسته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho_c \int_0^l \int_0^{\theta_1} \int_0^{\frac{r_c}{2}} ((B \ddot{u}_{0b} + (1-B) \ddot{u}_{0b} + k_t r_t B \ddot{w}_{t,x} + k_b r_b (B - \\ I) \ddot{w}_{b,x}) (\delta u_{0b} + (1-B) \delta u_{0b} + k_t r_t B \frac{\partial}{\partial x} (\delta w_t) + \\ k_b r_b (B-1) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w_b)) + ((1-k_t) B \ddot{v}_{0t} + (1+k_b) (1- \\ B) \ddot{v}_{0b} + k_t B \ddot{w}_{t,\theta} - k_b (1-B) \ddot{w}_{b,\theta}) ((1-k_t) B \delta v_{0t} + \\ (1+k_b) (1-B) \delta v_{0b} + k_t B \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta w_t) - k_b (1-B) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ (\delta w_b)) + (B \ddot{w}_t + (1-B) \ddot{w}_b) (B \delta w_t + (1- \\ B) \delta w_b)) r dr d\theta dx dt \\ B = B(r) = \frac{r - r_{bc}}{r_{tc} - r_{bc}} \quad (3-f)$$

و همچنین عبارت انتگرالی تغییرات انرژی پتانسیل برای رویه بالایی با جاگذاری مولفه‌های کرنش از روابط (2) و (3) در رابطه (14) به دست می‌آید: تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با ε_{xxt} :

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \tau_{\theta rc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \gamma_{\theta rc}) dr d\theta dx =$$

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \tau_{\theta rc}(x, \theta, r, t) \cdot (\delta(\frac{\partial v}{\partial r}) +$$

$$\delta(\frac{1}{r_c} \frac{\partial w}{\partial \theta}) - \delta(\frac{v}{r})) dr d\theta dx \quad (الف-8)$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با σ_{rrc} در هسته:

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \sigma_{rrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \varepsilon_{rrc}) dr d\theta dx =$$

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \sigma_{rrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta(\frac{\partial w}{\partial r})) dr d\theta dx \quad (الف-9)$$

9- پیوست ب

برای تحلیل دقیق میدان جابجایی و توزیع تنش در هسته‌ی پوسته استوانه‌ای ساندویچی با استفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی، ابتدا از حل معادلات (22) و (23) توزیع تنش‌های برشی در هسته مطابق روابط زیر فرموله می‌گردد:

$$\tau_{\theta rc}(r, \theta, x) = \frac{\tau_{\theta}(\theta, x)}{r^2} \quad (ب-1)$$

$$\tau_{xrc}(r, \theta, x) = \frac{\tau_x(\theta, x)}{r} \quad (ب-2)$$

با اعمال روابط فوق در معادله (24) و حل حاصل، تابع تنش عمودی در هسته به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\sigma_{rrc} = \frac{\tau_{\theta, \theta}}{r^2} - \tau_{x, x} + \frac{c_1}{r} \quad (ب-3)$$

مولفه جابجایی شعاعی در راستای ضخامت با در نظر گرفتن روابط ساختاری مربوط به هسته ساندویچی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$w_c = -\frac{\tau_{\theta, \theta}}{E_c r} - \frac{\tau_{x, x}}{E_c} r + \frac{c_1}{E_c} \ln(r) + c_2 \quad (ب-4)$$

بهمنظور استخراج ضرایب c_1 و c_2 در معادله مورد نظر، از شرایط پیوستگی در مرز مشترک میان هسته و رویه‌ها استفاده شده است. با اعمال این شرایط، معادلات (5) و (6)، مقادیر تحلیلی این ضرایب به دست می‌آید. نتیجه این فرایند، فرم بسته‌ای برای c_1 و c_2 است که به صورت زیر بیان بدست می‌آید:

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} (r_t \cdot \sigma_{xxt}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \varepsilon_{xxt}) dz dx d\theta$$

$$r_t \int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xxt}(x, \theta, z, t) (-z (\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w_{0t}(x, \theta, t)) +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u_{0t}(x, \theta, t)) dz dx d\theta \quad (الف-4)$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\varepsilon_{\theta\theta t}$:

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} (r_t \cdot \sigma_{\theta\theta t}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \varepsilon_{\theta\theta t}) dz dx d\theta$$

$$r_t \int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta\theta t}(x, \phi, z, t)$$

$$z (\frac{\partial}{\partial \theta} \delta v_{0t}(x, \theta, t)) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \delta w_{0t}(x, \theta, t)$$

$$(\frac{\partial}{\partial \theta} \delta v_{0t}(x, \theta, t)) + \delta w_{0t}(x, \theta, t)$$

$$r_t^2 \quad (الف-5)$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\gamma_{x\theta t}$:

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} (r_t \cdot \tau_{x\theta t}(x, \theta, z, t) \cdot \delta \gamma_{x\theta t}) dz dx d\theta$$

$$r_t \int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta t}(x, \theta, z, t) (z (\frac{\partial}{\partial x} \delta v_{0t}(x, \theta, t)) - \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \delta w_{0t}(x, \theta, t))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \delta w_{0t}(x, \theta, t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta v_{0t}(x, \theta, t) + \frac{\partial}{\partial \theta} \delta u_{0t}(x, \theta, t)$$

$$r_t \quad (الف-6)$$

و همچنین تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با τ_{xrc} در هسته:

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \tau_{xrc}(x, \theta, r, t) \cdot \delta \gamma_{xrc}) dr d\theta dx =$$

$$\int_0^1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_{bc}}^{r_{tc}} (r \cdot \tau_{xrc}(x, \theta, r, t) \cdot (\delta(\frac{\partial w}{\partial x}) + \delta(\frac{\partial u}{\partial r}))) dr d\theta dx \quad (الف-7)$$

تغییرات انرژی پتانسیل متناظر با $\tau_{\theta rc}$ در هسته:

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$u_c = \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(r) - w_{b,x} r - \frac{\tau_{\theta, x\theta}}{E_c} \left(\frac{r}{r_{bc}} - \ln(r) + \frac{k_0 r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + \left(\frac{r^2}{2} - r r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + c_3 \quad (10-ب)$$

ثابت c_3 ، که از فرآیند انتگرال‌گیری حاصل می‌شود، با استفاده از شرط سازگاری در شعاع مرزی ($r=r_{bc}$) به دست می‌آید:

$$c_3 = u_{0b} - \frac{d_b}{2} w_{b,x} - \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(r_{bc}) + w_{b,x} r_{bc} - \frac{\tau_{\theta, x\theta}}{E_c} (l - \ln(r_{bc})) + \frac{k_0 r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} + \left(\frac{r_{bc}^2}{2} - r r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \quad (11-ب)$$

در نتیجه، با اعمال مقدار موردنظر C_3 ، توصیف ریاضی نهایی مؤلفه جابجایی در هسته انعطاف‌پذیر u_c به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$u_c = u_{0b} + (r_{bc} - r - \frac{d_b}{2}) w_{b,x} + \frac{\tau_x}{G_{cx}} \ln(\frac{r}{r_{bc}}) - \frac{\tau_{\theta, x\theta}}{E_c} \left(\frac{r}{r_{bc}} - l + \ln(\frac{r_{bc}}{r}) + \frac{k_0 (r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l))}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + \left(\frac{r^2 + r_{bc}^2}{2} - r r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) (r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l))}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{r_{bc} + r (\ln(\frac{r}{r_{bc}}) - l)}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \quad (12-ب)$$

$$c_1 = \tau_{\theta, \theta} \left(\frac{(r_t - r_b)}{r_t r_b \ln(\frac{r_b}{r_t})} - \frac{(r_t - r_b)}{\ln(\frac{r_b}{r_t})} \tau_{x,x} \right) + \frac{E_c}{\ln(\frac{r_b}{r_t})} (w_b - w_t) \quad (5-ب)$$

$$c_2 = W_b + \frac{\tau_{\theta, \theta}}{r_{bc} E_c} + \frac{r_{bc} \tau_{x,x}}{E_c} - c_1 \ln(r_{bc}) \quad (6-ب)$$

بر اساس روابط ارائه شده فوق، مؤلفه شعاعی میدان جابجایی در هسته انعطاف‌پذیر پوسته استوانه‌ای ساندویچی، به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$w_c = w_b + \frac{\tau_{\theta, \theta}}{E_c} \left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{k_0 \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) - \left(r - r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) \frac{\tau_{x,x}}{E_c} + \frac{\ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} (w_b - w_t) - k_0 \frac{r_{tc} - r_{bc}}{r_{tc} r_{bc}} \quad (7-ب)$$

به دنبال مراحل تحلیل، مؤلفه تنش در راستای عمودی در هسته پوسته ساندویچی به فرم زیر حاصل می‌گردد.

$$\sigma_{rrc} = \frac{\tau_{\theta, \theta}}{r^2} \left(\frac{r(r_t - r_b)}{r_t r_b \ln(\frac{r_b}{r_t})} + l \right) - \left(\frac{(r_t - r_b)}{r \ln(\frac{r_b}{r_t})} + l \right) \tau_{x,x} + \frac{E_c}{r \ln(\frac{r_b}{r_t})} (w_b - w_t) \quad (8-ب)$$

بر مبنای رابطه ساختاری و مقدار استخراج شده برای w_c ، فرم نهایی معادله (4) برای مؤلفه جابجایی u_c به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$u_{c,r} = \frac{\tau_x}{r G_{cx}} - w_{b,x} - \frac{\tau_{\theta, x\theta}}{E_c} \left(\frac{1}{r_{bc}} - \frac{1}{r} + \frac{k_0 \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \right) + (r - r_{bc} + \frac{(r_{bc} - r_{tc}) \ln(\frac{r}{r_{bc}})}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})}) \frac{\tau_{x,xx}}{E_c} - (w_{b,x} - w_{t,x}) \frac{r_{bc}}{\ln(\frac{r_{bc}}{r_{tc}})} \quad (9-ب)$$

- [7] Mitchel, J., Vizzini, A., Sankar, S., "Low-velocity Impact Response of Composite Laminates Using a Simplified Spring-mass Model," *Compos. Struct.*, Vol. 67, No. 3, pp. 217–225, 2005.
- [8] Aslan, Z., Karakuzu, R., Okutan, F., "The Response of Laminated Composite Plates Under Low-velocity Impact Loading," *Compos. Part B Eng.*, Vol. 39, No. 4, pp. 538–547, 2008.
- [9] Rahmani, O., Khalili, S. M. R., Malekzadeh, K., "Free Vibration Response of Composite Sandwich Cylindrical Shell With Flexible Core," *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 1269–1281, 2010.
- [10] Azizi, M., Ziaei-Rad, S., Saidi, A. R., "Dynamic Response of Conical Sandwich Shells Under Low-velocity Impact Using Differential Quadrature Method," *Compos. Structure.*, Vol. 168, pp. 84–92, 2017.
- [11] Malekzadeh Fard, M. K., Hasheminejad, H., Mousavi, S. S., "Analytical Study of Impact Response of Fiber-metal Laminates Using a Modified Contact Law," *Appl. Compos. Mater.*, Vol. 25, No. 3, pp. 763–780, 2018.
- [12] Cicco, D. D., Asaei, Z., Taheri, F., "Low-velocity Impact Damage Response of Fiberglass/magnesium Fiber-metal Laminates Under Different Size and Shape Impactors," *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, Vol. 24, No. 7, pp.545-555, 2017.
- [13] Carrillo, J. G., Caminero, M. A., Pinna, R., "Impact Behavior of Thermoplastic Fiber-metal Laminates with Aramid/Polypropylene and Aluminum Alloys," *Mater. Des.*, Vol. 94, pp. 250–261, 2016.
- [14] Zhu, Y., Son, Y., "Low-velocity impact response of multilayer foam core sandwich panels with composite face sheets" *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 209, 106704, 2021.
- [15] Peng, A., Deng, J., Wu, D., Zhang, N., Guo, Y., Cai, D., Zhou, G., Wang, X., "Damage Behavior and Failure Mechanism of Composite Sandwich Panel Subjected to Localized Impact: A Comprehensive Study" *Thin-Walled Structures*, Vol. 192, 111155, 2023.
- [16] Shahveisi, N., Feli, S., "Analysis of Low Velocity Impact on Curved Sandwich Beams with FML Face Sheets and Flexible Core" *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 29, No. 9, pp.1294-1307, 2022.
- [17] Song, H., Hu, K., Wu, J., Shi, Q., Wang, J., Zhao, F., Zhu, F., "Low-Velocity Impact Response and Damage Mechanisms of Fiber Metal Laminate/PMI Foam-Reinforced Corrugated Sandwich Structures," *Polymer Composites*, 2025.
- [18] Feng, G., Xiao, C., Liu, B., Zhang, H., Jia, P., Wang, C., "Experimental and Numerical Study on the Impact Response of Composite Sandwich Structures with Different Cores" *Polymers*. Vol. 16, No. 23, 3436, 2024.
- [19] Zhang, H., Xu, Q., Wang, P., "Delamination and Repair in Honeycomb Core Sandwich Structures Under Low-velocity Impact," *Compos. Struct.*, Vol. 160, pp. 233–243, 2017.
- [20] Yang, S., Li, D., Wu, X., "Impact Response of CFRP/foam Sandwich Panels," *Compos. Part B Eng.*, Vol. 165, pp. 189–199, 2019.
- [21] Zhou, H., Wang, K., Zhao, Y., "Effect of Foam Density on Low-velocity Impact Response of Sandwich Panels," *Compos. Struct.*, Vol. 153, pp. 124–134, 2016.
- [22] Azarafza, R., Aslanzadeh GoliBeiglo, S., Davar, A., "Analysis of free vibration of laminated composite cylindrical shells with rectangular cutout," In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 10, No. 2, pp. 2209 -2196 , 2023
- [23] Malekzadeh, F. K., Zolghadr, N., "Analytical Modeling to Predict Dynamic Response of Fiber-Metal Laminated Panel Subjected to Low Velocity Impact" In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites* 2018
- [24] Amirshajaei-Asalemi, K., Fakhreddini-Najafabadi, S., Taheri Behrooz, F., "Numerical and Experimental Study of Carbon / Epoxy Composite Laminate Response to Low Velocity Impact," In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 8, No. 1, pp. 1461-1472, 2021.
- [25] Anderson, T. A., "An Investigation of SDOF Models for Large Mass Impact on Sandwich Composites," *Composites: Part B*, Vol. 36, pp. 135–142, 2005.

در راستای تحلیل ارائه‌شده، و بر پایه‌ی رابطه ساختاری، معادله (4) که مؤلفه جابجایی v_c را توصیف می‌کند به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$rv_{c,r} - v_c = \frac{\tau_{\theta}}{rG_{c\theta}} - w_{c,\theta} \quad (13-ب)$$

در نتیجه‌ی جایگذاری مقدار به‌دست‌آمده w_c در رابطه فوق، معادله دیفرانسیل حاکم بر v_c به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$rv_{c,r} - v_c = \frac{\tau_{\theta}}{rG_{c\theta}} - w_{b,\theta} + \frac{\tau_{\theta,\theta\theta}}{E_c} \left(\frac{l}{r_{bc}} - \frac{l}{r} + \frac{k_0 \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} - (r - r_{bc}) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} \right) + \frac{\tau_{x,\theta}}{E_c} + (w_b - w_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} \quad (14-ب)$$

حل معادله فوق منجر به تعیین مؤلفه جابجایی v_c در هسته‌ی انعطاف‌پذیر پوسته استوانه‌ای می‌گردد:

$$v_c = \frac{r}{r_{bc}} (l + k_b) v_{0b} + \left(l - \frac{r}{r_{bc}} (l + k_b) \right) w_{b,\theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - r_{bc}^2}{r_{bc}^2 r} \right) \frac{\tau_{\theta}}{G_{c\theta}} + \frac{\tau_{\theta,\theta\theta}}{E_c} \left(\left(\frac{r - r_{bc}}{2r_{bc}^2} \right)^2 + \frac{k_0 \left(l - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} - (w_{t,\theta} - w_{b,\theta}) \frac{\left(l - \frac{r}{r_{bc}} + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} + \frac{\tau_{x,\theta}}{E_c} \left(\frac{(r_{bc} - r_{ic}) \left(l + \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) - \frac{r}{r_{bc}} \right)}{\ln\left(\frac{r_{bc}}{r_{ic}}\right)} + r_{bc} - r + r \ln\left(\frac{r}{r_{bc}}\right) \right) \right) \quad (15-ب)$$

8- مراجع

- [1] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis," CRC press, 2003
- [2] Abrate, S., "Impact on Laminated Composites: Recent Advances," *Journal of Applied Mechanics Rev*, Vol.47, pp. 517-544, 1994.
- [3] Asundi, A., Choi, A.Y., "Fiber Metal Laminates: an Advanced Material for Future Aircraft," *Journal of Materials processing technology*, Vol. 63, pp. 384–94, 1997.
- [4] Četković, M., Vuksanović, D., "Bending, Free Vibrations and Buckling of Laminated Composite and Sandwich Plates Using a Layerwise Displacement Model," *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 219–27, 2009.
- [5] Whitney, J. M., Pagano, N. J., "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates," *J. Appl. Mech.*, vol. 37, No. 4, pp. 1031–1036, 1970.
- [6] Frostig, Y., Baruch, O., Sheinman, S., Vilnay, E., "High-order Theory for Sandwich-beam Behavior with Soft Cores," *J. Eng. Mech.*, Vol. 118, No. 5, pp. 1026–1043, 1992.

- [26] Davar, A., Heydari Beni, M., Azarafza, R., Eskandari Jam, J., "Parametric impact analysis on cylindrical sandwich shells with FML face and functionally graded core using a new shell theory," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 9, No. 4, pp. 2099 -2115 , 2023.
- [27] Rezghi Maleki H., Parvande P., "Study of the Flexural Strength and Low-Velocity Impact Behavior of Sandwich Structures with Basalt/Epoxy Face Sheets and a Cork Core," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 11, No. 4, pp. 2634 - 2644 , 2025