

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیست** http://jstc.iust.ac.ir

توسعه روش اغتشاشات- هوموتوپی به منظور بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر مدرج تابعی متخلخل تحت بارگذاری خارجی

مسعود مينائى¹*، وحيد عربملكى²

1- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز 2- دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز * تبریز، کدپستی 3375171379، ac.minaei@azaruniv.ac.ir

چکیدہ	اطلاعات مقاله
در مقاله حاضر، ارتعاشات غیرخطی عرضی با دامنه بزرگ تیر مدرج تابعی متخلخل واقع بر بستر وینکلر تحت بارگذاری خارجی به صورت	دريافت: .98/08/22
تحلیلی مورد مطالعه قرار داده میشود. خواص تیر مدرج تابعی متخلخل مطابق با قانون توانی به طور پیوسته در سطح مقطع تیر تغییر	پذيرش: .99/06/22
میکند. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیر اولر- برنولی با بکارگیری اصل هامیلتون و با فرض غیرخطینگی ون کارمن به دست میآید.	·
با اعمال روش گالرکین و با درنظر گرفتن شرایط مرزی دو سر گیردار غیرمتحرک، همچنین با فرض بار خارجی یکنواخت خارجی، معادله	ليتعادرون
دیفرانسیل با مشتقات جزئی، تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی میشود. به دلیل بزرگ بودن ضریب جمله غیرخطی و نیز به دلیل	تد مدرج تابعي متخلخان
ناهمگن بودن معادله غیرخطی حاصل، روشهای کلاسیک اغتشاشات قادر به حل مساله نمیباشند. به منظور حل، روش اغتشاشات-	توسعه روش اغتشاشات-هوموتوپي
هوموتوپی اصلاحشده، توسعه داده میشود. در ادامه برای صحهگذاری، نتایج پاسخ زمانی به دست آمده از روش اغتشاشات- هوموتوپی	بستر وينكلر
توسعهیافته با نتایج عددی به ازای دامنهها و فرکانسهای تحریک مختلف، مقایسه میشود. همچنین نتایج به دست آمده برای مقدار	
افزایش فرکانس غیرخطی تیر مدرج تابعی متخلخل دوسرگیردار با روش حاضر و روشهای موجود در ادبیات فن مورد مقایسه قرار	
میگیرد. مقایسه نتایج نشان میدهد که روش ارائه شده از دقت بسیار خوبی برخوردار است. در نهایت، منحنیهای پاسخ فرکانسی تیر به	
ازای مقادیر مختلف شاخص توانی کسر حجمی و نیز کسر حجمی تخلخل، ارائه شده و مورد بررسی قرار میگیرد	

Developing homotopy perturbation method to investigate the nonlinear vibration of a Porous FG-Beam subjected to the external excitation

Masoud Minaei1*, Vahid Arab Maleki2

د کامپوزیت

1- Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* P.O.B. 5375171379, Tabriz, Iran, ac.minaei@azaruniv.ac.ir

Keywords	Abstract		
Keywords Nonlinear Forced Vibration Porous FG-Beam Developing Homotopy Perturbation Method Winkler Foundation	In this paper large amplitude vibration analysis of a porous FG-beam rested on a Winkler foundation and subjected to a harmonic loading is analytically investigated. The material properties of the porous FG beam are assumed to vary continuously according to a simple power law. Employing Von Karman's geometric nonlinearity, implementing the Galerkin's method and assuming doubly clamped immovable end boundary conditions, the governing nonlinear partial differential equation is reduced to a nonlinear ODE. Because of the large coefficient of the nonlinear term and due to existence of the external harmonic loading effect, none of the traditional perturbation methods leads to a valid solution. So, in order to solve this nonlinear nonhomogenous equation, the modified homotopy perturbation method is developed and it is called developed homotopy perturbation method (DHPM). For validating, the time response results obtained by DHPM and numerical methods are compared for various values of excitation amplitudes and frequencies. The increasing of nonlinear frequency obtained by DHPM with those of existence literature revealed a good agreement with a desired accuracy. Finally, the frequency response curves are presented for different values of volume fraction exponent together with porous volume fraction and the effects of nonlinearities on the frequency response curves are discussed in detail		

تشکیل دهنده آن، به تدریج تغییر میکند تا ریزساختاری غیر یکنواخت با خواص مدرج پیوسته حاصل شود. عمدتاً یک طرف ماده مدرج تابعی، از جنس سرامیک و مقاوم در برابر بارهای حرارتی بوده و سمت دیگر فلزی با استحکام سازهای بسیار بالا میباشد. ترکیب این دو خاصیت مهم در مواد

1- مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ نسل جدیدی از کامپوزیتها هستند که کسر حجمی مواد

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Minaei, M. and Arab Maleki, V. "Developing homotopy perturbation method to investigate the nonlinear vibration of a Porous FG-Beam subjected to the external excitation", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No.7, pp. 907-916, 2020.

¹ Functionally Graded Materials (FGM)

مدرج تابعی، خواص سیستمهای مقاوم در برابر حرارت را بهبود میبخشد، زیرا ترک و پوسته پوسته شدن که عمدتاً در کامپوزیتهای لایهای متداول رخ میدهد، به دلیل تغییرات تدریجی پیوسته در این مواد مشاهده نمی شود. مواد مدرج تابعی به منظور کاربردهای مختلفی نظیر کاربردهای بیوپزشکی، ايمپلنتها، صنايع هوافضا، صنايع دفاعي و . . . مورد مطالعه قرار مي گيرند [1]. طی فرآیند ساخت مواد مدرج تابعی، تفاوت بزرگ در دمای انجماد بین اجزای مواد تشکیل دهنده، ممکن است باعث ایجاد حفرههای میکروسکوپی يا تخلخل درون مواد در طى فرآيند پخت شود [2]. آكيدا و همكاران [3] علل ایجاد تخلخل شامل ورود حبابهای هوا به ماده ماتریس ذوب، نشست بخار آب روی سطوح ذرات، جذب گاز طی فرآیند مخلوط کردن و انقباض طی فرآیند انجماد را ارائه کردند. کیم و همکاران [4] سطوح تیتانیومی نانو میکرویی متخلخل مدرج تابعی را با بکارگیری روش آنودایز ساختند. واتاناسکولپونگ و همکاران [5] اثر تخلخل داخل نمونههای مواد مدرج تابعی که توسط تکنیک نفوذ متوالی چند مرحلهای ساخته شدهاند را بررسی کردند. امروزه بسیاری از محققان علاقهمند به مطالعه رفتار مکانیکی تیرهای متخلخل مدرج تابعی هستند. یکی از نیازهای اصلی مهندسی سازه، تعیین خواص مکانیکی در مقیاس ماکرو می باشد. مدل سازی مواد مرکب با استفاده از روشهای میکرومکانیکی کمهزینه بوده و علاوه بر تخمین خواص مکانیکی، منجر به تخمین درصد حجمی اجزای سازنده ماده مرکب به صورت بهینه میشوند. برای همگنسازی مواد مرکب دوفازی روشهای مختلفی مانند روشهای بسیاری وجود دارد که از بین آنها روش موری-تاناکا نسبت به سایر روشها مقبولیت بیشتری داشته و برای مواد مرکب با درصد حجمی

ناخالصي حداكثر تا 30 درصد جوابهاي نسبتاً دقيقي ارائه ميدهد [6]. واتاناسكولپونگ و اونگهاكورن ارتعاشات خطى و غيرخطى تيرهاى متخلخل مدرج تابعی که به طور الاستیک مقید شده است با استفاده از روش ديفرانسيلي كوآدراتيك أ مورد مطالعه قرار دادند. واتاناسكولپونگ و چیکیتیراتانا [7] رفتار ارتعاشی تیرهای تیموشینکوی متخلخل مدرج تابعی را با بکارگیری روش کولوکیشن چبیشف ^۲ مورد بررسی قرار دادند. آتمانه و همکاران [8] اثرات گسترش ضخامت و تخلخل را روی رفتار مکانیکی تیرهای مدرج تابعي كه بر بستر الاستيك واقع شدهاند را بررسي كرده و اين مساله را با بکارگیری روش ناویر حل کردند. ابراهیمی و مختاری [9] رفتار ارتعاشی تیر چرخان متخلخل مدرج تابعی را با بکارگیری روش دیفرانسیلی کوآدراتیک مورد مطالعه قرار دادند. ابراهیمی و همکاران [10] ارتعاشات ترمومکانیکی تیرهای متخلخل مدرج تابعی را تحت بارگذاری حرارتی با اعمال روش تبدیل ديفرانسيلي ^۳ بررسي كردند. شفيعي و همكاران [11] ارتعاشات غيرخطي میکروتیرهای متخلخل مخروطی و ناقص مدرج تابعی را بر مبنای تئوری تیر اولر- برنولی و تئوری تنش کوپل اصلاحشده را مطالعه کردند. پوراشرف و انصاری [12] ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای ساختهشده از مواد هدفمند در محیط حرارتی با درنظر گرفتن اثرات تنش سطحی و تئوری الاستیسیته را مورد بررسی قرار دادند. رحمانی و غلامی [13] کنترل ارتعاشات عرضی تیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای ترک عرضی و تحت تأثیر بار حرارتی را مطالعه کردند و روشی مقاوم برای طراحی بهرههای کنترلکننده و رؤیتگر حالت ارائه نمودند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی به منظور مطالعه رفتار دینامیکی دامنه بزرگ تیرها، موضوع بسیار

کنعانی و همکاران [16] اثر بستر الاستیک غیرخطی بر ارتعاشات آزاد و اجباری با دامنه بزرگ تیر مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش تکرار تغییرات⁴ به منظور حل معادله حرکت استفاده کرده و اثر تکیه-گاههای مختلف روی پاسخ فرکانسی سیستم را نیز مطالعه کردند. با این وجود همانند سایر روشهای تحلیلی غیرخطی، روشهای متداول اغتشاشات نیز محدودیتهای خاصی نظیر فرض وجود ضریب جمله غیرخطی کوچک و نیز هنر تعیین این ضریب در معادله دارد. این امر باعث ایجاد محدودیت در به کارگیری روشهای اغتشاشات میشود. بر همین اساس در سال 2000 هی کارگیری روش اغتشاشات میشود. بر همین اساس در سال 2000 هی نع روش اغتشاشات معروف بوده و به وجود پارامتر کوچک در از بین می برد. دقت روش هی در تقریب مرتبه اول کمتر از ./7 بود. رضائی و از بین می برد. دقت روش هی در تقریب مرتبه اول کمتر از ./7 بود. رضائی و مینائی [18] روش اغتشاشات هوموتوپی هی [17] را اصلاح کرده² و نشان دادند که دقت روش آنها در تقریب مرتبه اول و دوم به ترتیب کمتر از ./2 بود. دادند که دقت روش آنها در تقریب مرتبه اول و دوم به ترتیب کمتر از ./2 بود.

بررسی مطالعات گسترده انجام شده نشان میدهد که تاکنون رفتار ارتعاشات اجباری با دامنه بزرگ تیر مدرج تابعی متخلخل خصوصاً برای حالتی که محدودیتی در اندازه ضریب جمله غیرخطی وجود نداشته باشد، مورد مطالعه قرار نگرفته است. بر این اساس در مقاله حاضر، ارتعاشات غيرخطي عرضي با دامنه بزرگ تير مدرج تابعي متخلخل واقع بر بستر وينكلر تحت بارگذاری خارجی به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده می شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیر اولر- برنولی با بکارگیری اصل هامیلتون و با فرض غیرخطینگی ون کارمن به دست می آید. با اعمال روش گالرکین و با درنظر گرفتن شرایط مرزی دوسرگیردار غیرمتحرک، همچنین با فرض بار خارجی یکنواخت خارجی، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی میشود. به دلیل بزرگ بودن ضریب جمله غیرخطی و نیز به دلیل ناهمگن بودن معادله غیرخطی حاصل، روش-های کلاسیک اغتشاشات قادر به حل مساله نمی باشند. به منظور حل، روش اغتشاشات- هوموتوپی اصلاحشده، توسعه داده میشود^۷. در ادامه برای صحه-گذاری، نتایج پاسخ زمانی به دست آمده از توسعه روش اغتشاشات-هوموتوپی اصلاحشده با نتایج عددی به ازای دامنهها و فرکانسهای تحریک مختلف مقایسه میشود. منحنیهای پاسخ فرکانسی به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی کسر حجمی و نیز کسر حجمی تخلخل، ارائه شده و مورد بررسی قرار میگیرد.

علوم و فناوری

كاميوزيت

¹ Differential Quadratic Method (DQM)

² Chebishev Collocation Method (CCM) ³ Differential Transform Method (DTM)

جالبی برای محققان میباشد. از تکنیکهای مرسوم برای حل مسایل غیرخطی، روشهای اغتشاشات میباشد. کی و همکاران [14] ارتعاشات غیرخطی آزاد تیرهای مدرج تابعی را بر اساس تئوری اولر- برنولی و فرض اثرات غیرخطی هندسی بررسی و نتایج خود را با نتایج عددی مقایسه کردند. شیمشک و کوجاتورک [15] ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری تیر اولر-برنولی مدرج تابعی با یک بار متمرکز متحرک هارمونیک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از معادله لاگرانژ برای به دست آوردن معادله حرکت استفاده کرده و در ادامه اثرات ناهمگونی مادهای، سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک را بر پاسخ دینامیکی بررسی کردند.

⁴ Variational Iteration Method (VIM)

⁵ Homotopy Perturbation Method (HPM)

⁶ Modified Homotopy Perturbation Method (MHPM)

⁷ Developed Homotopy Perturbation Method (DHPM)

2- معادله حاکم بر حرکت

شماتیک سیستم فیزیکی مورد بررسی در مقاله حاضر، یک تیر اولر – برنولی متخلخل مدرج تابعی به طول L می،اشد که در راستای \hat{x} دارای سطح مقطعی با عرض b در راستای \hat{y} و ارتفاع h در راستای \hat{z} می،اشد که مطابق شکل 1، روی یک بستر وینکلر واقع شده است.

1-2- فرمولبندي سيستم

با فرض اینکه خواص مادهای تیر مدرج تابعی متخلخل یعنی مدول الاستیک، F، و چگالی، ρ ، در جهت ارتفاع تیر، \hat{x} ، از فلز خالص در قسمت پایینی F، و چگالی، ρ مدر جهت ارتفاع تیر، \hat{x} ، از فلز خالص در قسمت بایی آن تغییر می کند و همچنین با استفاده از قانون توزیع توانی داریم [8]:

$$E(\hat{z}) = E_M + \left(E_C - E_M\right) \left(\frac{2\hat{z} + h}{2h}\right)^n - \Gamma\left(\frac{E_C + E_M}{2}\right)$$
(1)

$$\rho(\hat{z}) = \rho_M + \left(\rho_C - \rho_M\right) \left(\frac{2\hat{z} + h}{2h}\right)^n - \Gamma\left(\frac{\rho_C + \rho_M}{2}\right)$$
(2)

که در آن n شاخص توانی کسر حجمی، Γ معرف کسر حجمی تخلخل ($1 >> \Gamma$) و اندیسهای M و C به ترتیب معرف اجزای سازنده فلزی و سازمیکی میباشند. مقدار n معرف پروفیل تغییرات ماده در جهت ضخامت تیر بوده و مقدار آن بین صفر تا بی نهایت می تواند باشد. مقدار صفر برای n، حالتی است که تیر فقط از جنس فلز ساخته شده و مقدار بی نهایت برای n، مربوط به حالتی است که تیر فقط از جنس سرامیک ساخته شده باشد. مطابق تئوری تیر اولر – برنولی، جابجاییهای طولی و عرضی هر نقطه دلخواه از تیر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{u}(\hat{x},\hat{z},\hat{t}) = \hat{u}(\hat{x},\hat{t}) + \hat{z} \frac{\partial \hat{w}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}}$$
(3)

$$\tilde{w}(\hat{x},\hat{z},\hat{t}) = \hat{w}(\hat{x},\hat{t}) \tag{4}$$

در روابط اخیر \tilde{u} و \tilde{w} به ترتیب جابجایی صفحه وسط تیر در راستای محورهای \hat{x} و \hat{z} ، و \hat{t} معرف زمان می باشد. به منظور بررسی رفتار ارتعاشات غیرخطی تیر، با در نظر گرفتن رابطه کرنش- جابجایی ون کارمن و بر اساس معادله سازگاری الاستیک خطی، تنش نرمال، $\sigma_{\hat{x}}$ ، و کرنش نرمال، $F_{\hat{x}}$ ، به فرم زیر فرض می شود:

$$\sigma_{\hat{X}} = E(\hat{z})\varepsilon_{\hat{X}} \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\hat{x}} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{z} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \tag{6}$$

با اعمال اصل هامیلتون، معادلات حرکت سیستم به صورت زیر به دست می-آید:

$$m\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{t}^2} - \frac{\partial N}{\partial \hat{x}} = \hat{f}_{\hat{u}}$$
(7)

$$m\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \hat{x}^2} - N\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = \hat{f}_{\hat{w}}$$
(8)



Fig. 1 Schematic of a porous FG-beam subjected to the external excitation and rested on a Winkler foundation شکل 1 شماتیک تیر مدرج تابعی متخلخل تحت بارگذاری خارجی واقع بر بستر وینکلر

در معادلات (7) و (8)، $\hat{f}_{\hat{W}}$ به ترتیب نیروهای طولی و عرضی، m جرم واحد طول تیر، N و M منتجههای نیرو و گشتاور بوده و مقدار آنها از روابط زیر محاسبه می شود:

$$N = bA_{11} \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] + bB_{11} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}$$
(9)

$$M = bB_{11} \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] + bD_{11} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}$$
(10)

در روابط فوق، A_{11} ، A_{11} و D_{11} به ترتیب معرف سفتیهای طولی، محوری و خمشی تیر بوده و از رابطه زیر به دست میآیند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} E(\hat{z})(1, \hat{z}, \hat{z}^2) d\hat{z}$$
(11)

با صرفنظر کردن از اینرسی صفحهای [19] و صفر فرض کردن نیروی طولی توزیعشده، معادله (7) به صورت زیر در میآید:

$$\frac{\partial N}{\partial \hat{x}} = 0 \tag{12}$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق داریم:

$$\begin{split} N_0 I &= \\ bA_{11} \Bigg[\hat{u} \Big(I, \hat{t} \Big) - \hat{u} \Big(0, \hat{t} \Big) + \int_0^1 \Bigg[\frac{1}{2} \bigg(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \bigg)^2 + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \Bigg] d\hat{x} \Bigg] \\ (13) \end{split}$$

$$N_0 = \frac{bA_{11}}{l} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{B_{11}}{A_{11}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right] d\hat{x}$$
(14)

نشريه علوم و فناورى كامپوزيت

با بکارگیری معادلات (10) و (12)، منتجه ممان به صورت زیر به دست می-آید:

$$M = \frac{B_{11}}{A_{11}} \left[N_0 - bB_{11} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right] + bD_{11} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}$$
(15)

با در نظر گرفتن معادله (12) و جاگذاری معادله (15) در معادله (8)، داریم:

$$m\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + b\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} - N_0 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = \hat{f}_{\hat{w}}$$
(16)

در معادله (16)، نیروی عرضی توزیعشده \hat{f}_{W} که شامل نیروهای عکسالعمل تکیهگاه الاستیک و نیروی خارجی توزیعشده روی تیر است، از رابطه زیر به دست میآید:

$$\hat{f}_{\hat{w}} = -\hat{k}_L \hat{w} + \hat{f} \cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right) \tag{17}$$

که در آن \hat{K}_L ضریب سفتی بستر وینکلر بوده [20] و \hat{f} و $\hat{\Omega}$ به ترتیب مقادیر دامنه و فرکانس نیروی تحریک خارجی هستند. با جاگذاری معادلات (14) و (17) در معادله (16) داریم:

$$m\frac{\partial^{2}\hat{w}}{\partial\hat{t}^{2}} + b\left(D_{11} - \frac{B_{11}^{2}}{A_{11}}\right)\frac{\partial^{4}\hat{w}}{\partial\hat{x}^{4}} - \int_{0}^{I}\left[\frac{bA_{11}}{2I}\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^{2}d\hat{x}\right]$$
$$-\frac{bB_{11}}{I}\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\left(I,\hat{t}\right) - \frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\left(0,\hat{t}\right)\right)d\hat{x}\frac{\partial^{2}\hat{w}}{\partial\hat{x}^{2}} + \hat{k}_{L}\hat{w}$$
$$= \hat{f}\cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right) \qquad (18)$$

معادله فوق، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی اجباری غیرخطی تیر مدرج تابعی متخلخل به تکیهگاههای غیر متحرک واقع بر بستر وینکلر میباشد. همانگونه که مشاهده میشود، غیرخطینگی معادله حرکت حاکم بر سیستم ناشی از تغییر مکانهای بزرگ بوده و از نوع غیرخطینگی درجه سوم است.

2-2- بیبعدسازی معادلات حاکم

به منظور مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی سیستم از فرم بیبعد معادلات حرکت استفاده میشود. با تعریف متغیرهای بیبعد به صورت زیر [19]:

$$x = \frac{\hat{x}}{l}, \quad w = \frac{\hat{w}}{l}, \quad t = \hat{t} \sqrt{b \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) / m l^4}$$
(19)

با استفاده از معادله (18) و پارامترهای بیبعد تعریف شده در معادله (19)، معادله حرکت در فرم غیرخطی به صورت زیر حاصل میشود:

$$\ddot{w} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ -\alpha \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \beta \left(\frac{\partial w}{\partial x} (1, t) - \frac{\partial w}{\partial x} (0, t) \right) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_L w = f \cos(\Omega t) \quad (20)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{A_{11}l^2}{2\Delta} , \quad \beta = \frac{B_{11}l^2}{\Delta} , \quad f = \frac{\hat{f}l^3}{b\Delta}$$
$$\Omega = \hat{\Omega}\sqrt{\frac{ml^4}{b\Delta}} , \quad k_L = \frac{\hat{k}_L l^4}{b\Delta} , \quad \Delta = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)$$
(21)

حل معادله (20) به صورت $\psi(x,t) = \phi(x)q(t)$ فرض می شود که در آن $W(x,t) = \phi(x)q(t)$ تابع شکل مود اول تیر بوده و q(t) معرف تابع مستقل زمانی است. برای تیر دوسرگیردار تابع $(x)\phi(t)$ از رابطه زیر به دست می آید [18]:

$$\phi(x) = \cosh(4.73x) - \cos(4.73x) - \frac{\cosh(4.73) - \cos(4.73)}{\sinh(4.73) - \sin(4.73)} (\sinh(4.73x) - \sin(4.73x))$$
(22)

با اعمال روش گالرکین و ضرب طرفین معادله (20) در $\phi(x)$ و سپس با انتگرالگیری در بازه [0,1]، معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم ناهمگن به صورت زیر حاصل میشود:

$$\begin{split} \omega_0^2 &= \frac{f_4}{f_1} + k_L, \quad \gamma = -\beta \left(\phi'(1) - \phi'(0) \right) \frac{f_2}{f_1} \\ \varepsilon &= -\alpha \frac{f_2 f_3}{f_1}, \quad F = \frac{f_5}{f_1} f \\ f_1 &= \int_0^1 \phi^2 dx, \quad f_2 = \int_0^1 \phi \phi'' dx, \quad f_3 = \int_0^1 \phi'^2 dx \\ f_4 &= \int_0^1 \phi \phi^{(4)} dx, \quad f_5 = \int_0^1 \phi dx \end{split}$$
(24)

3- توسعه روش حل اغتشاشات – هوموتوپی

استفاده از روشهای اغتشاشات برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با رفتار غیرخطی قوی با محدودیتهای زیادی مواجه میباشد، زیرا در روشهای اغتشاشات ضریب جمله غیرخطی میباید بسیار کوچکتر از واحد باشد. هی [17] یک روش اغتشاشات جدید بر اساس تکنیک هوموتوپی را ارائه داد که به روش اغتشاشات- هوموتوپی معروف است. این روش به وجود پارامتر کوچک در معادله نیاز نداشته و به آسانی محدودیتهای روشهای معمول اغتشاشات را از بین میبرد. اصلاحات این روش در سال 2016 توسط رضائی و مینائی[18] اعمال شده و تحت عنوان روش اغتشاشات- هوموتوپی اصلاح-شده مطرح گردید. روش مذکور قابل اعمال به سیستم با معادله دیفرانسیل غیرخطی همگن میباشد. در مقاله حاضر، روش مذکور به سیستم با معادله دیفرانسیل غیرخطی ناهمگن توسعه داده شده و تحت عنوان روش $\omega_1 = \frac{3}{4}Y^2 - \frac{\overline{F}}{Y} \tag{34}$

با بكارگيري معادله (29) و با حل تقريب مرتبه اول، داريم:

$$\omega_{\rm l} = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{\varepsilon} \tag{35}$$

با استفاده از معادلات (34) و (35) مي توان نوشت:

$$\frac{3}{4}\varepsilon Y^3 - \left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)Y - F = 0 \tag{36}$$

با حل معادله (36)، مجهول Y، با در نظر گرفتن یک گام تقریب به دست میآید. به علاوه پاسخ فرکانسی سیستم نیز میتواند با تغییر فرکانسهای تحریک مختلف به دست آید. با توجه به اینکه معادله (23)، دارای جمله غیرخطی درجه سوم است، از این رو تشدید سوپرهارمونیک در $\Omega = \frac{1}{3} \, \Theta$ و تشدید سابهارمونیک در $\Omega = 3 \, \Omega$ رخ خواهد داد. حال به منظور تعیین مقدار فرکانس تصحیح، σ ، روشی که برای تعیین فرکانس طبیعی غیرخطی به کار برده شد، مورد استفاده قرار می گیرد. بدین منظور، شرایط اولیه سیستم به صورت $0 = (0) \, P$ در نظر گرفته می شود که در آن Y از معادله (36) به دست می آید [16] با استفاده از روش اغتشاشات- هوموتوپی اصلاح شده و با در نظر گرفتن یک گام تقریب خواهیم در آن:

$$\sigma = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon Y^2} \tag{37}$$

حال با به دست آمدن مقادیر Y و σ ، پاسخ زمانی تیر تحت تحریک هارمونیک از رابطه (26) و با یک گام تقریب به دست می آید. اگر حل با دو گام تقریب در نظر گرفته شود، q_1 با حل معادله (32) به صورت زیر به دست می آید:

$$q_1(t) = \frac{Y^3}{4\left(9\Omega^2 - \omega_0^2\right)} \left(\cos 3\Omega t - \cos \Omega t\right)$$
(38)

$$\frac{d^{2}q_{2}}{dt^{2}} + \omega_{0}^{2}q_{2} = \left(\frac{3Y^{5}}{16(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})} + \frac{\bar{F}Y^{2}}{4(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})} + \omega_{2}Y\right)\cos\Omega t - \left(\frac{\bar{F}Y^{2}}{4(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})}\right)\cos\Omega t - \left(\frac{3Y^{5}}{16(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})}\right)\cos\Omega t$$
(39)

نشريه علوم و فناورى كامپوزيت

اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته نامگذاری میشود. وقتی تیر تحت اثر نیروی تحریک هارمونیک خارجی باشد، با صرفنظر کردن از حل پاسخ گذرای آن، میتوان شرایط اولیه را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0$$
 (25)

از معادلات (23) و (25) پاسخ کلی سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$q(t) = Y(\cos\Omega t - \cos\sigma t)$$
⁽²⁶⁾

که در آن Y معرف دامنه ارتعاشات و σ فرکانس تصحیح می اشد. این دو ضریب مجهول با اعمال روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعه یافته به دست می آید. بدین منظور تقریب اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$q_0(t) = Y \cos\Omega t \tag{27}$$

 Ω^2 و q و q اساس روش اغتشاشات- هوموتوپی اصلاحشده [18]، جملات q و q

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots \tag{28}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots$$
(29)

با فرض $F = \varepsilon \overline{F}$ و جاگذاری معادلات (28) و (29) در معادله (23) داریم:

$$\varepsilon^{1}: \quad \frac{\mathrm{d}^{2}q_{1}}{\mathrm{d}t^{2}} + \omega_{0}^{2}q_{1} = \omega_{1}q_{0} - q_{0}^{3} + \overline{F}\cos\Omega t$$
(30)

$$\varepsilon^{2}: \frac{\mathrm{d}^{2}q_{2}}{\mathrm{d}t^{2}} + \omega_{0}^{2}q_{2} = \omega_{1}q_{1} + \omega_{2}q_{0} - 3q_{0}^{2}q_{1}$$
(31)

با جاگذاری معادله (23) در معادله (30):

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = \left(\omega_1 Y - \frac{3}{4}Y^3 + \overline{F}\right) \cos\Omega t - \frac{1}{4}Y^3 \cos 3\Omega t \tag{32}$$

برای حذف جمله سکولار از معادله فوق می ایست ضریب جمله cosΩt برابر صفر باشد، یعنی:

$$\omega_1 Y - \frac{3}{4} Y^3 + \overline{F} = 0 \tag{33}$$

از معادله فوق نتيجه مىشود:

برای حذف جمله سکولار از معادله فوق می ایست ضریب جمله cosΩt برابر صفر باشد، یعنی:

$$\omega_2 = -\frac{3Y^4}{16(9\Omega^2 - \omega_0^2)} - \frac{\overline{FY}}{4(9\Omega^2 - \omega_0^2)}$$
(40)

با جایگذاری معادلات (34) و (40) در معادله (29) و با فرض تقریب مرتبه دوم، میتوان نوشت:

$$\Omega^{2} = \omega_{0}^{2} + \frac{3}{4}\varepsilon Y^{2} - \frac{\overline{F}\varepsilon}{Y} - \frac{3\varepsilon^{2}Y^{4}}{16(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})} - \frac{\overline{F}\varepsilon^{2}Y}{4(9\Omega^{2} - \omega_{0}^{2})}$$
(41)

پس از مرتبسازی و جایگذاری $F = \varepsilon \overline{F}$ داریم:

$$3\varepsilon^{2}Y^{5} + \left(-108\varepsilon\Omega^{2} + 12\varepsilon\omega_{0}^{2}\right)Y^{3} + 4\varepsilon FY^{2} + \left(-160\omega_{0}^{2}\Omega^{2} + 16\omega_{0}^{4} + 144\Omega^{4}\right)Y - 16F\omega_{0}^{2} + 144F\Omega^{2} = 0$$
(42)

همان گونه که قبلاً نیز ذکر شد، فرکانس تصحیح سیستم، σ ، برابر با مقدار فرکانس طبیعی سیستم در حالت ارتعاشات آزاد که شرایط اولیه فرکانس طبیعی سیستم در حالت ارتعاشات آزاد که شرایط اولیه $\dot{q}(0) = 0$, q(0) = Yبر آن اعمال شده است، میباشد [16]. لازم به ذکر است که مقدار Y از رابطه (42) محاسبه میشود. با فرض تقریب مرتبه دوم روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته (با در نظر گرفتن دو گام تقریب) میتوان نوشت:

$$\sigma = \frac{1}{4}\sqrt{8\omega_0^2 + 6\varepsilon Y^2 + \sqrt{64\omega_0^4 + 96\varepsilon Y^2\omega_0^2 + 30\varepsilon^2 Y^4}}$$
(43)

از حل معادلات (42) و (43)، با یافتن مقادیر Y و σ ، بر اساس رابطه (26)، پاسخ زمانی تیر تحت تحریک هارمونیک برای تقریب مرتبه دوم به دست میآید. بر اساس مرجع [16]، برای تیر دوسرگیردار، فرکانس تصحیح سیستم بر مبنای روش تکرار تغییرات، σ ، پس از حل معادلات و مرتبسازی به صورت زیر به دست میآید:

$$\sigma_{1,2}' = \frac{1}{12} \times \sqrt{80\omega_0^2 + 56\varepsilon Y^2 \pm \sqrt{4096\omega_0^4 + 6656\varepsilon Y^2 \omega_0^2 + 3136\varepsilon^2 Y^4}}$$
(44)

با دقت در معادله (44) مشاهده می شود که با استفاده از مبانی روش تکرار تغییرات، دو مقدار متفاوت برای ضریب تصحیح به دست می آید. با استفاده از حل عددی معادله (23) و مقایسه آن با حل روش تکرار تغییرات، می توان نتیجه گرفت که در معادله (44) فقط ضریب تصحیح بزرگتر مورد قبول است و از ضریب تصحیح کوچکتر می بایست صرفنظر نمود که این مساله در مرجع [16]، مورد توجه قرار نگرفته است. این در حالی است که در صورت بکارگیری روش اغتشاشات – هوموتوپی توسعه یافته، مطابق معادله (43) تنها

یک جواب برای ضریب تصحیح به دست میآید که همان نیز جواب صحیح و منحصر به فرد برای ضریب تصحیح است.

4- بررسی نتایج

در بخش حاضر، ارتعاشات اجباری تیر مدرج تابعی متخلخل واقع بر بستر وینکلر با مقایسه نتایج حل عددی، حل با روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته و حل با روش تکرار تغییرات [16] مورد بررسی قرار میگیرد تا همگرایی و دقت روش جدید ارائه شده مورد ارزیابی قرار گیرد. بدین منظور تیر مدرج تابعی متخلخل با خواص مادهای مندرج در جدول 1 و خواص هندسی مندرج در جدول 2، در نظر گرفته میشود.

خواص مادهای تیر متخلخل اعم از مدول الاستیک و چگالی مطابق معادلات (1) و (2) در جهت ضخامت تیر تغییر میکنند. در جدول 3 نتایج مربوط به نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی متخلخل دوسرگیردار با روش

تحلیلی حاضر و روش ارائه شده توسط کنعانی و همکاران می باشد [16]. به ازای مقادیر مختلف دامنه بی بعد، نتایج هر دو روش مطابقت بسیار خوبی نشان می دهند. در جدول 3 نتایج مربوط به نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی متخلخل دوسر گیردار با روش تحلیلی حاضر و روش ارائه شده توسط کنعانی و همکاران می باشد [16]. به ازای مقادیر مختلف دامنه بی بعد، نتایج هر دو روش مطابقت بسیار خوبی نشان می دهند.

در جدول 3 نتایج مربوط به نسبت فرکانسی تیر مدرج تابعی متخلخل دوسرگیردار با روش تحلیلی حاضر و روش ارائه شده توسط کنعانی و همکاران میباشد [16]. به ازای مقادیر مختلف دامنه بیبعد، نتایج هر دو روش مطابقت بسیار خوبی نشان میدهند.

در شکلهای 2 و 3 پاسخ زمانی ارتعاشات اجباری تیر مدرج تابعی متخلخل دو سرگیردار تحت بار هارمونیک یکنواخت با استفاده از دو روش رانگ کوتای مرتبه چهارم و روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته نشان داده شده است. در شکل 2 بازه زمانی بی بعد برابر 0 تا 100 در نظر گرفته شده است. به منظور وضوح بهتر نمودار و بررسی دقیق تر نتایج حل عددی و حل حاضر، در شکل 3، پاسخ زمانی سیستم در بازه زمانی بی بعد 69 تا 77 رسم شده است. همان گونه که در شکلهای مذکور مشاهده می شود، روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته مطابقت خوبی با حل عددی دارد.

در شکل 4 پاسخ زمانی ارتعاشات اجباری تیر مدرج تابعی متخلخل دو سرگیردار تحت بار هارمونیک یکنواخت در فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی غیرخطی با استفاده از دو روش رانگ کوتای مرتبه چهارم و روش جدید اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته نشان داده شده است. پدیده ضربان به وضوح در شکل 4 مشاهده می شود. همچنین انطباق بسیار خوبی بین نتایج روش حاضر و حل عددی وجود دارد.

به منظور مقایسه نتایج روش ارائه شده حاضر با نتایج حل تکرار تغییرات، پارامتر FR که عبارت از میزان افزایش فرکانس غیرخطی سیستم میباشد، به صورت زیر تعریف میشود:

$$FR = \frac{\omega_{NL} - \omega_0}{\omega_0} \tag{45}$$

فناورى

كاميوز

٦[¦]



Fig. 3 Comparison the time response function of the porous FG-beam via DHPM and RK45 for the time interval 69 to 77

شکل 3 مقایسه پاسخ زمانی تیر مدرج تابعی متخلخل از روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته و حل عددی RK45 در بازه زمانی 69 تا 77



Fig. 4 Comparison the time response function of the porous FG-beam via DHPM and RK45 near the resonance point (beating phenomena) شکل 4 مقایسه پاسخ زمانی تیر مدرج تابعی متخلخل از روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته و حل عددی RK45 نزدیک نقطه رزونانس (پدیده ضربان)

در شکل 5، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر مدرج تابعی متخلخل دوسرگیردار تحت بار هارمونیک واقع بر بستر وینکلر به ازای $\Gamma = 0.05$ ، با استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعه یافته) و روش تکرار تغییرات مورد مقایسه قرار گرفته است. همان گونه که مشاهده می شود، در دامنههای ارتعاشی کوچک، نتایج حل از هر دو روش بسیار نزدیک به هم می باشد. با افزایش دامنه ارتعاشی سیستم، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر افزایش می یابد، ضمن اینکه نتایج حل از دو روش مذکور، از همدیگر فاصله می گیرد. میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر در روش جدید حل حاضر کمتر از روش تکرار تغییرات میباشد. در شکل 6، اثر ضریب سفتی بستر وينكلر روى ميزان افزايش فركانس طبيعي غيرخطي تير مورد بررسي قرار گرفته است. همان گونه که مشاهده می شود، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر نسبت معکوس با ضریب سفتی بستر وینکلر دارد. همچنین به ازای ضریب سفتی مشخص از بستر وینکلر، با افزایش دامنه، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر افزایش مییابد. در شکل 7، اثر شاخص توانی کسر حجمى تير مدرج تابعى متخلخل روى ميزان افزايش فركانس طبيعي غیرخطی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. با دقت در شکل مذکور مشخص می شود که میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر نسبت مستقیمی با شاخص توانی کسر حجمی تیر دارد. همچنین به ازای شاخص توانی کسر حجمی

جدول 1 خواص مادهای اجزای تشکیل دهنده تیر مدرج تابعی [21] Table 1 Material properties of the FG-beam [21]

چگالی (kg/m ³)	مدول یانگ (GPa)	نوع	جنس
2370	122/577	Ti-6Al-4V	فلز
4429	348/430	Si_3N_4	سرامیک

جدول 2 خواص هندسی تیر مدرج تابعی [21] Table 2 Geometrical properties of the FG-beam [21]

مقدار (mm)	مشخصه	
500	طول	
31	عرض	
31	ارتفاع	

جدول 3 نسبت فرکانسی، ω_{NL}/ω_L ، تیر مدرج تابعی متخلخل واقع بر بستر Θ_{NL}/ω_L وینکلر به ازای Γ = 0.05

Table 3 Frequency ratio, ω_{NL}/ω_L , of the porous FG-beam on a Winkler foundation for $\Gamma = 0.05$

n	=5	n	=1		
کنعانی و همکاران [16]	حل حاضر (DHPM)	کنعانی و همکاران [16]	حل حاضر (DHPM)	К _L	Y
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1	0
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	10	÷
1.0101	1.0101	1.0072	1.0072	1	0.01
1.0100	1.0100	1.0071	1.0071	10	0.01
1.2318	1.2261	1.1695	1.1661	1	0.05
1.2281	1.2225	1.1667	1.1634	10	0.05
1.7592	1.7273	1.5776	1.5552	1	0.1
1.7476	1.7173	1.5692	1.5472	10	0.1
2.1338	2.0824	1.8779	1.8398	1	0.12
2.1189	2.0683	1.8660	1.8284	10	0.13



Fig. 2 Comparison the time response function of the porous FG-beam via DHPM and RK45 for the time interval 0 to 100 شكل 2 مقايسه پاسخ زمانى تير مدرج تابعى متخلخل از روش اغتشاشات- هوموتوپى توسعهيافته و حل عددى RK45 در بازه زمانى 0 تا 100



Fig. 7 The effect of power exponent of volume fraction on the increasing nonlinear frequency for $\Gamma = 0.05$ via present method (DHPM)

شکل 7 تاثیر تغییر پارامتر شاخص توانی کسر حجمی بر میزان افزایش فرکانس غیرخطی به ازای $\Gamma = 0.05$ با استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته)



Fig. 8 Frequency response curve of the porous FG-beam for various values of the porosity volume fraction using present method (DHPM) شكل 8 منحنى پاسخ فركانسى تير مدرج تابعى متخلخل به ازاى مقادير مختلف كسر حجمي تخلخل با استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات- هوموتوپي توسعهيافته)



Fig. 9 Frequency response curve of the porous FG-beam for various values of the power exponent of volume fraction using present method (DHPM)

شکل 9 منحنی پاسخ فرکانسی تیر مدرج تابعی متخلخل به ازای مقادیر مختلف شاخص توانی کسر حجمی تخلخل با استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات-هوموتوپی توسعهیافته) 

Fig. 5 Comparison of the increasing of nonlinear frequency for $\Gamma\!=\!0.05$ via present method (DHPM) and VIM

شکل 5 مقایسه میزان افزایش فرکانس غیرخطی به ازای F=0.05 با استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته) و روش تکرار تغییرات



Fig. 6 The effect of the Winkler foundation's stiffness on the increasing of nonlinear frequency for $\Gamma = 0.05$ via present method (DHPM)

شکل 6 تاثیر تغییر پارامتر سفتی بستر وینکلر بر میزان افزایش فرکانس غیرخطی به ازای 0.05 ج ۲ استفاده از حل حاضر (روش اغتشاشات- هوموتوپی توسعهیافته)

- [3] Aqida, S., Ghazali, M. and Hashim, J., "Effect of Porosity on Mechanical Properties of Metal Matrix Composite: An Overview," Jurnal Teknologi, Vol. 40, No. 1, pp. 17-32, 2004.
- [4] Kim, H. S., Yang, Y., Koh, J. T., Lee, K. K., Lee, D. J., Lee, K. M. and Park, S. W., "Fabrication and Characterization of Functionally Graded Nano - Micro Porous Titanium Surface by Anodizing," Journal of Biomedical Materials Research Part B: Applied Biomaterials: An Official Journal of The Society for Biomaterials, The Japanese Society for Biomaterials, and The Australian Society for Biomaterials and the Korean Society for Biomaterials, Vol. 88, No. 2, pp. 427-435, 2009.
- [5] Wattanasakulpong, N., Prusty, B. G., Kelly, D. W. and Hoffman, M., "Free Vibration Analysis of Layered Functionally Graded Beams with Experimental Validation," Materials & Design (1980-2015), Vol. 36, pp. 182-190, 2012.
- [6] Mehrdad, S. M. and Elahi, M., "A New Model to Estimate the Young's Modulus of Polymer Concrete Using Micromechanical Relations," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 12, No. 2, pp. 153-162, 2012.
- [7] Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A., "Flexural Vibration of Imperfect Functionally Graded Beams Based on Timoshenko Beam Theory: Chebyshev Collocation Method," Meccanica, Vol. 50, No. 5, pp. 1331-1342, 2015.
- [8] Atmane, H. A., Tounsi, A. and Bernard, F., "Effect of Thickness Stretching and Porosity on Mechanical Response of a Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundations," International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 13, No. 1, pp. 71-84, 2017.
- [9] Ebrahimi, F. and Mokhtari, M., "Transverse Vibration Analysis of Rotating Porous Beam with Functionally Graded Microstructure Using the Differential Transform Method," Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Vol. 37, No. 4, pp. 1435-1444, 2015.
- [10] Ebrahimi, F., Ghasemi, F. and Salari, E., "Investigating Thermal Effects on Vibration Behavior of Temperature-Dependent Compositionally Graded Euler Beams with Porosities," Meccanica, Vol. 51, No. 1, pp. 223-249, 2016.
- [11] Shafiei, N., Mousavi, A. and Ghadiri, M., "On Size-Dependent Nonlinear Vibration of Porous and Imperfect Functionally Graded Tapered Microbeams," International Journal of Engineering Science, Vol. 106, pp. 42-56, 2016.
- [12] Pourashraf, S. T. and Ansari, R., "Nonlinear Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Nanobeams in Thermal Environments by Considering Surface Stress and Nonlocal Effects," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 16, 2015.
- [13] Rahmani, B. and Gholami, F., "Robust Vibration Control of a Functionally Graded Cracked Beam," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 1, pp. 41–52, 2015.
- [14] Ke, L.-L., Yang, J. and Kitipornchai, S., "An Analytical Study on the Nonlinear Vibration of Functionally Graded Beams," Meccanica, Vol. 45, No. 6, pp. 743-752, 2010.
- [15] Şimşek, M. and Kocatürk, T., "Free and Forced Vibration of a Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic Load," Composite Structures, Vol. 90, No. 4, pp. 465-473, 2009.
- [16] Kanani, A., Niknam, H., Ohadi, A. and Aghdam, M., "Effect of Nonlinear Elastic Foundation on Large Amplitude Free and Forced Vibration of Functionally Graded Beam," Composite Structures, Vol. 115, pp. 60-68, 2014.
- [17] He, J.-H., "A New Perturbation Technique Which Is Also Valid for Large Parameters," Journal of Sound and Vibration, Vol. 5, No. 229, pp. 1257-1263, 2000.
- [18] Rezaee, M. and Minaei, M., "A Theoretical and Experimental Investigation on Large Amplitude Free Vibration Behavior of a Pretensioned Beam with Clamped–Clamped Ends Using Modified Homotopy Perturbation Method," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 230, No. 10, pp. 1615-1625, 2016.

5- نتیجهگیری

در مطالعه حاضر، ارتعاشات غیرخطی عرضی با دامنه بزرگ تیر مدرج تابعی متخلخل واقع بر بستر وینکلر تحت بارگذاری خارجی به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده شد. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت تیر اولر- برنولی با بکارگیری اصل هامیلتون و با فرض غیرخطینگی ون کارمن به دست آمد. با اعمال روش گالرکین و با درنظر گرفتن شرایط مرزی دو سر گیردار غيرمتحرك، همچنين با فرض بار خارجي يكنواخت خارجي، معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي، تبديل به معادله ديفرانسيل معمولي شد. به دلیل بزرگ بودن ضریب جمله غیرخطی و نیز به دلیل ناهمگن بودن معادله غیرخطی حاصل، روش های کلاسیک اغتشاشات قادر به حل مساله نبوده و به منظور حل، روش اغتشاشات- هوموتوپی اصلاحشده، توسعه داده شد. صحه گذاری نتایج حل حاضر، از مقایسه آن با نتایج به دست آمده از حل عددی و نتایج روش تکرار تغییرات انجام گرفت. مقایسه نتایج حاکی از دقت بسیار خوب روش ارائه شده بود. همچنین با دقت در معادله غیرخطی حاکم بر ارتعاشات اجباری تیر، مشاهده گردید که استفاده از مبانی روش تکرار تغییرات، دو مقدار متفاوت برای ضریب تصحیح به دست میدهد. مقایسه پاسخ سیستم با حل عددی نشان دادند که فقط ضریب تصحیح بزرگتر مورد قبول بوده و این مساله در سایر پژوهشها مورد توجه قرار نگرفته بود. این در حالی است که در صورت بکارگیری روش جدید اغتشاشات- هوموتوپی توسعه یافته، تنها یک جواب برای ضریب تصحیح به دست می آید که همان نیز جواب صحیح و منحصر به فرد برای ضریب تصحیح است. خلاصهای از سایر نتایج مقاله حاضر به شرح زیر است:

1 با افزایش ضریب سفتی بستر وینکلر، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر کاهش مییابد. همچنین به ازای ضریب سفتی مشخص از بستر وینکلر، با افزایش دامنه، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر افزایش مییابد.

2- مقدار افزایش فرکانس غیرخطی تیر نسبت مستقیمی با شاخص توانی کسر حجمی تیر دارد. به ازای شاخص توانی کسر حجمی معین از تیر، میزان افزایش فرکانس غیرخطی تیر با افزایش دامنه، بیشتر می شود.

3- با افزایش کسر حجمی تخلخل، ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت تیر افزایش یافته و به تبع آن منحنی پاسخ فرکانسی تیر مدرج تابعی متخلخل اندکی به سمت راست خمیده می شود، یعنی تیر رفتار سخت-شوندگی بیشتری از خود نشان می دهد.

4- افزایش شاخص توانی کسر حجمی، باعث انحراف زیاد منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست شده و رفتار سختشوندگی تیر افزایش مییابد. زیرا با افزایش شاخص توانی کسر حجمی، ضریب جمله غیرخطی در معادله حرکت تیر افزایش یافته و اثرگذاری آن در پاسخ فرکانسی تیر بیشتر میشود.

5- مراجع

- Ghazi, R., Payghaneh, G. and Shahgholi, M., "Resonance Analysis and Free Nonlinear Vibrations of a Nanocomposite with Internal Damping," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 12, pp. 98-104, 2018.
- [2] Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S., "Fabrication of Zro2– Nicr Functionally Graded Material by Powder Metallurgy," Materials chemistry and physics, Vol. 68, No. 1-3, pp. 130-135, 2001.

نشريه علوم و فناورى كامپوزيت

- [19] Emam, S. A. and Nayfeh, A. H., "Postbuckling and Free Vibrations of Composite Beams," Composite Structures, Vol. 88, No. 4, pp. 636-642, 2009.
- [20] Fallah, A. and Aghdam, M., "Nonlinear Free Vibration and Post-Buckling Analysis of Functionally Graded Beams on Nonlinear Elastic Foundation," European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 30, No. 4, pp. 571-583, 2011.
- [21] Azadi, M., "Free and Forced Vibration Analysis of Fg Beam Considering Temperature Dependency of Material Properties," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 25, No. 1, pp. 69-80, 2011.