جلد 7، شماره 1، بهار 99، ص‌ص 768-778

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیت**

http://jstc.iust.ac.ir

پاسخ غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت بارگذاری دینامیکی

علی کیانی[1]، روح‌اله حسینی [2*]، حسین خدارحمی[3]

1- دانشجوی دکتری تخصصی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران

* تهران، صندوق پستی 1698715461، R.hosseini.mech@gmail.com

اطلاعات مقاله:

دریافت: 98/07/13

پذیرش: 99/03/22

کلیدواژگان

چندلایه‌های فلز کامپوزیت

وون کارمن

غیرخطی هندسی

بارگذاری دینامیکی

چکیده

چندلایه‌های فلز-کامپوزیت سازه‌های مرکب تشکیل‌شده از لایه‌های سبک کامپوزیتی و لایه‌های فلزی می‌باشند که دارای مقاومت ضربه-ای و جذب انرژی بالا همراه با وزن پایین می‌باشند. در این مطالعه، با استفاده از روابط حاکم بر رفتار غیرخطی ورق چندلایه‌ی فلز-کامپوزیت، به بررسی اثرات مختلف حاکم بر ورق مانند بستر ویسکوپاسترناک و بارگذاری دینامیکی در دمای محیط پرداخته شده است. بدین منظور با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های بزرگ وون کارمن اثرات غیرخطی هندسی در نظر گرفته‌شده است و معادلات حاکم بر جابجایی ورق با استفاده از اصل کار مجازی استخراج گردیده‌اند. شرایط مرزی در تمامی لبه‌های ورق به‌صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته‌شده است. سپس معادلات مشتقات جزئی غیرخطی حرکت با استفاده از روش گالرکین به حالت معادلات مشتقی ساده تبدیل‌شده‌اند که به‌صورت تحلیلی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده‌اند و یک رابطه‌ی تحلیلی برای فرکانس‌های غیرخطی ورق به‌دست‌آمده است. نتایج تحلیل تئوری انجام‌شده با نتایج ارائه‌شده در مطالعات پیشین مقایسه گردیده و تطابق خوبی مشاهده‌شده است. با استفاده از مدل تحلیلی اعتبارسنجی شده، اثر تغییرات درجه حرارت، بستر ویسکوپاسترناک و مقادیر حداکثر فشار موردبررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که افزایش دامنه بارگذاری، منجر به افزایش تغییر شکل و کاهش نسبت فرکانسی سیستم خواهد شد. همچنین نتایج نشان داد که چندلایه‌های فلز کامپوزیت می‌توانند انتخاب مناسبی برای سازه‌های تحت بارگذاری دینامیکی باشند.

Non-linear response of Fiber Metal Laminates subjected to Dynamic loading

Ali Kiani[1], Rouhollah Hosseini [1*], Hossein Khodarahmi[1]

1- Department of Solid Mechanics, Faculty of Engineering, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran
*P.O.B. 1698715461, Tehran, Iran, R.hosseini.mech@gmail.com

Keywords

High velocity impact
FML
Nanoclay
Ballistic limit velocity
Basalt

Abstract

Fiber metal laminates (FMLs) are hybrid structures composed of composite lightweight layers and aluminum layers that have high impact resistance and energy absorption along with low weight. In this study, by using of governing equation of non-linear behavior of FMLs, the effect of various parameter such as visco-Pasternak foundation and dynamic loading in environment temperature have been investigated. For this purpose, the geometric nonlinearity effects are taken into account with the von Kármán large deflection theory and the governing equations of motion for the plate are derived by the use of the virtual work principle. The simply supported boundary conditions are considered for all edges of the plate. Then, Nonlinear Partial differential Equations (PDEs) of motion by using of the Galerkin method are transformed to a single nonlinear Ordinary Differential Equation (ODE), which is solved analytically by the multiple time scales method, and an analytical relation is found for the nonlinear frequency of these plates. The results of conducted theoretical analyses compared with the presented results in the literature and good agreement is found. By using the validated theoretical model, the influences of changes in temperature change, visco-Pasternak foundation and peak pressure values are investigated. The results indicated that increasing the peak pressure values would lead to an increase in deformation and a decrease in the frequency ratio of the system. The results also show that FMLs would be a good choice for structures under dynamic loading.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Kiani, A., Hosseini.R.,Khodarahmi, H. "Non-linear response of Fiber Metal Laminates subjected to Dynamic loading", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 1, pp. 768-778, 2020.

1- مقدمه

چندلایه‌های فلز کامپوزیت[1] سازه‌های مرکب تشکیل‌شده از لایه‌های استحکام بالای کامپوزیت و آلیاژها می‌باشند که همزمان دارای مقاومت ضربه‌ای بالای فلزات و جذب انرژی بالا همراه با وزن پایین می‌باشند [1]. این چندلایه‌ها علاوه بر کاهش وزن سازه، ضریب اطمینان سازه را بالا برده و از طرفی موجب افزایش استحکام کششی و استحکام نهایی در راستای عرضی می‌شوند. مرز بین لایه‌های مختلف در چندلایه‌های فلز کامپوزیت مانند سدهایی در مقابل خوردگی عمل می‌کنند و علاوه بر آن خاصیت عایق‌کنندگی و میراکنندگی خوبی نیز دارند [2-4]. این سازه‌ها به سه گروه تقسیم می‌گردند: چندلایه‌ی کامپوزیت شیشه با لایه‌ی میانی آلومینیوم[2]، چندلایه‌ی کامپوزیت آرامید با لایه‌ی میانی آلومینیوم[3]، و چندلایه‌ی کامپوزیت کربن با لایه‌ی میانی آلومینیوم[4] [6،5]. چندلایه‌های فلز کامپوزیت علاوه بر مزایا و معایب ذکرشده، دارای خاصیت آسیب‌دیدگی و استحکام خستگی بسیار بالا می‌باشند که منجر به استفاده گسترده از آن‌ها در صنعت هوافضا می‌گردد [7]. علاوه بر مزایای ذکرشده‌ی چندلایه‌های فلز کامپوزیت و معایب آن‌ها، این چندلایه‌ها به‌منظور دست یافتن به چندلایه‌های فلز کامپوزیت با مقاومت به ضربه بالاتر و وزن پایین‌تر تحقیقات بسیاری بر روی خواص مکانیکی چندلایه‌های فلز کامپوزیت صورت گرفته است [8-12]. هرس و همکارانش [13] به بررسی رفتار دینامیکی خطی و غیرخطی چندلایه‌های فلز کامپوزیت به‌صورت آزمایشگاهی و تئوری پرداختند. امیدی و سوکی [14] با استفاده از معیارهای چسبندگی سطحی و معیار واماندگی هشین به بررسی رفتار چندلایه فلز کامپوزیت تحت ضربه سرعت‌پایین پرداختند. آن‌ها دریافتند که در سطوح انرژی بالاتر، مدل‌سازی‌های شامل المان یا سطح چسبناک نسبت به حالات اتصال کامل بین لایه‌ای پاسخ‌های دقیق‌تری می‌دهند، اما در سطوح انرژی‌های پایین تفاوت چندانی وجود ندارد. قاسمی و همکارانش با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی بر روی خواص مکانیکی چندلایه‌های فلز کامپوزیت انجام دادند. آن‌ها با استفاده از حل تحلیلی و مدل‌سازی ریاضی، رفتار دینامیکی چندلایه‌های فلز کامپوزیت تحت بارگذاری دینامیکی را موردبررسی قراردادند. آن‌ها در پژوهشی دیگر با استفاده از یک روش ابداعی و همچنین بررسی پارامترهای مختلف مؤثر مانند زاویه و چیدمان لایه‌ها، نوع بارگذاری، سرعت بارگذاری، موفق به بهبود خواص ورق چندلایه‌ی فلز کامپوزیت شدند[15،16]. کانزانسی و مکتوغلو [17] به بررسی پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت بار دینامیکی پرداختند. آن‌ها همچنین به بررسی اثر نسبت ابعادی، جهت‌گیری الیاف و تعداد لایه‌ها را موردبررسی قراردادند و دریافتند که با افزایش نسبت ابعادی ورق، اندازه‌ی کرنش‌های نرمال کاهش می‌یابد و فرکانس افزایش می‌یابد. ملک‌زاده فرد و همکارانش [18] به منظور پیش‌بینی پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با رویه FML تحت ضربه سرعت‌پایین، یک مدل تحلیلی ارائه نمودند. آن‌ها توانستند محدوده‌ی معتبری، جهت استفاده از قانون هرتز برای ورق‌های ساندویچی با رویه FML، ارائه دهند. همچنین در تحقیقی دیگر [19] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و اصل همیلتون پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را تحت بارگذاری ضربه سرعت‌پایین موردبررسی قراردادند. آن‌ها اثر بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی، مقدار خیز مرکز ورق و نیروی برخورد را بررسی و دریافتند که مقادیر آن‌ها با افزایش مدول عمودی تغییرات کمی خواهند داشت، اما با افزایش مدول برشی دچار تغییرات قابل‌توجهی می‌گردند پایگانه و همکاران [20] به بررسی پاسخ چندلایه‌ی فلز کامپوزیت تحت بارگذاری ضربه با تکیه‌گاه‌های ثابت پرداختند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و همچنین سری فوریه، معادلات حاکم را حل نموده و نشان دادند که استفاده از لایه‌های آلومینیومی به‌جای لایه‌های متداول کامپوزیتی خیز تیر و تنش‌های اصلی را بهبود می‌بخشد. مورینیر و همکاران [21] با استفاده از تئوری کلاسیک کامپوزیت‌ها و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یک مدل تحلیلی برای پیش‌بینی رفتار چندلایه‌ی فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی ارائه نمودند. با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده آن‌ها دریافتند که چندلایه‌ی فلز کامپوزیت 72 درصد مقاوم‌تر از آلومینیوم یکپارچه 2024 با همان ضخامت است. همچنین ازآنجایی‌که سازه‌های فلز کامپوزیت از لایه‌های نازک و با استحکام با قابلیت تغییر شکل بزرگ ساخته‌شده‌اند، ساختاری ایده‌آل برای مقاومت در برابر بارگذاری ضربه می‌باشند. آن‌ها همچنین در تحقیقی دیگر با ارائه روشی شبه استاتیک پیش‌رونده به بررسی اثرات جهت‌گیری لایه‌ها، ضخامت فلز آلومینیوم، ابعاد ورق، سفتی کلی چندلایه و رسیدن به سازه بهینه در برابر بارگذاری دینامیکی پرداختند [22]. منظری و مقدم [23] با استفاده از شبیه‌سازی عددی به تحلیل دینامیکی غیرخطی هندسی پوسته‌های استوانه‌ای FML تحت بارگذاری انفجاری با انواع شرایط مرزی پرداختند. آن‌ها دریافتند که در بررسی پوسته، شرط مرزی گیردار بهترین عملکرد را نسبت به شرایط مرزی دیگر داشته، اما افزایش شعاع داخلی، زاویه‌ی داخلی و ابعاد پوسته برخلاف فاصله‌ی مواد منفجره، تأثیرات افزایشی بر بیشینه تغییر مکان مرکز پوسته داشته‌اند. کانزانسی [24] با استفاده تئوری کلاسیک ورق‌ها و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های بزرگ به بررسی پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی اورتوتروپیک پرداخت. بدین منظور برای حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله از روش تفاضل محدود[5] استفاده‌شده و مشخص گردیده که برای طراحی سازه‌های در معرض بارهای دینامیکی، ورق‌های دارای نسبت ابعادی پایین از ورق‌های مربعی دارای کارایی بیشتری می‌باشند. ستوده و همکاران [25] با استفاده از روش الاستیسیته سه‌بعدی به بررسی پاسخ ضربه سرعت‌پایین ورق کامپوزیتی پرداختند. بدین منظور برای بررسی نیروی تماسی بین ضربه زننده و ورق کامپوزیتی از قانون تماس غیرخطی هرتزین استفاده نمودند. آن‌ها همچنین یک کد عددی برای رسیدن به پاسخ‌های موردنظر گسترش داده و درنهایت پاسخ‌های به‌دست‌آمده را با پاسخ‌های به‌دست‌آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه نمودند. کاپرینو و همکارانش [26] رفتار ضربه با سرعت‌پایین را برای چندلایه‌های فلز کامپوزیت (آلومینیوم – فایبرگلاس) را به‌صورت تجربی موردبررسی قراردادند. آن‌ها با استفاده از آزمایش تجربی نشان دادند که مقاومت چندلایه‌های کامپوزیتی آلومینیوم-فایبرگلاس نسبت به چندلایه‌های با الیاف کربن و الیاف فایبرگلاس در مقابله با نفوذ عملکرد بهتری دارند. کوماری و سینگا [27] به بررسی پاسخ غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی و استوانه‌ای تحت بار دینامیکی پرداختند. بدین منظور در هر بازه زمانی از حل با استفاده از شرایط میدان تنش درون ورق و معیار تسای وو به پیش‌بینی میزان آسیب پرداختند. دابینس [28] پاسخ گذرای ورق اورتوتروپیک تحت بارگذاری‌های متفاوت وابسته به زمان مانند هارمونیک،

[1] Fiber Metal Laminate (FML)
[2] Glass reinforced aluminum laminate (GLARE)
[3] Aramid reinforced aluminum laminate (ARALL)
[4] Carbon reinforced aluminum laminate (CARALL)
[5] Finite Difference Method

پله، مثلثی و انفجار را به‌صورت تحلیلی و با استفاده از حل ناویر موردبررسی قرار داده است. باستورک و همکاران [29] به بررسی پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی بازالت تحت بارگذاری دینامیکی با شرایط مرزی ساده پرداخته‌اند. آن‌ها به‌منظور به دست آوردن معادلات حاکم از تئوری وون‌کارمن و اصل جابه‌جایی مجازی استفاده نمودند و درنهایت با استفاده از روش تفاضل محدود و نیومارک به حل معادلات پرداختند. آن‌ها همچنین اثر پارامترهایی نظیر نسبت ابعادی، جهت الیاف و مقدار حداکثر فشار را موردبررسی قراردادند.

همان‌طور که مشاهده می‌گردد، مطالعات بسیاری بر روی پاسخ دینامیکی ورق‌ها تحت شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف صورت گرفته است. در این پژوهش نیز با استفاده از روابط پیچیده حاکم بر رفتار غیرخطی ورق چندلایه‌ی فلز کامپوزیت، به بررسی اثرات مختلف حاکم بر ورق مانند بستر ویسکوپاسترناک و بارگذاری دینامیکی در دمای محیط پرداخته‌شده است. ازآنجایی‌که تحلیل روابط غیرخطی با استفاده از روش‌های ریاضی و تحلیلی کاری دشوار است، تحقیقات بسیاری کمی توسط دیگر محققین با استفاده از روش‌های حل ریاضی انجام‌شده است. به همین دلیل در این مقاله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه[1]، رفتار حاکم بر چندلایه‌ی فلز کامپوزیت قرارگرفته بر روی بستر ویسکوپاسترناک موردبررسی قرارگرفته است. همچنین اثرات پارامترهای مختلف مانند تغییرات درجه حرارت محیط، بستر ویسکوپاسترناک و مقادیر مختلف بارگذاری نیز به‌صورت کامل بررسی‌شده است. مطابق با صحه سنجی انجام‌شده، نتایج به‌دست‌آمده از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشند. درنهایت پاسخ ناشی از بارگذاری نیز برای اندازه‌های مختلف دامنه، تحلیل و بررسی‌شده است.

2- معادلات حاکم

شکل 1 یک ورق مستطیلی به ابعاد $a\times b$ و ضخامت h را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری دینامیکی قرارگرفته است. این چندلایه‌ی فلز کامپوزیت دارای مدول الاستیسیته E_1 و E_2 ، همچنین مدول برشی G_{12} و نسبت پواسن ν_{12} و ν_{21} در دو راستای x و y در مختصات کارتزین می‌باشد.

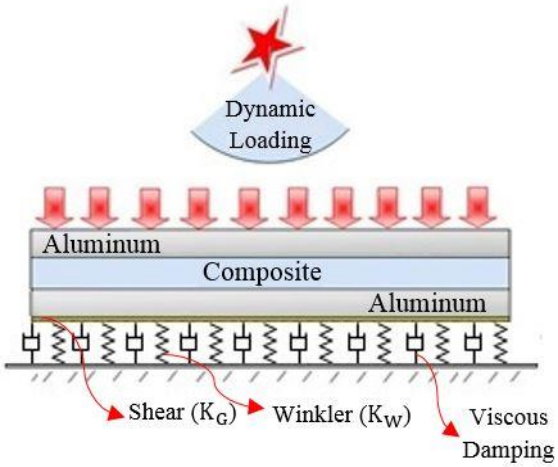

Fig. 1 Fiber Metal Laminate under dynamic loading

شکل 1 چندلایه فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی

2-1-روابط تنش کرنش غیرخطی

در این پژوهش، برای مدل‌سازی میدان جابجایی ورق، از تئوری کلاسیک ورق‌ها استفاده‌شده است. این تئوری برای سازه‌های نازک که اثرات جابجایی برشی و اینرسی دورانی در آن‌ها لحاظ نمی‌شوند، جواب‌های دقیق می‌دهد. بر طبق این تئوری:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{1}$$

درحالی‌که u_0 و v_0 به ترتیب جابجایی‌های صفحه خنثی در جهات x و y بوده و w_0 جابجایی عرضی ورق می‌باشد. همان‌گونه که قبلاً بیان‌شده در این کار فرض شده که سازه دارای تغییر شکل بزرگ و کرنش کوچک باشد بدین منظور از تئوری وون‌کارمن برای بیان روابط کرنش جابجایی استفاده می‌شود. درحالی‌که اگر کرنش بزرگ فرض شود می‌توان از روش کرنش محدود[2] برای مدل‌سازی کرنش جابجایی استفاده کرد [30-32]. مطابق با تئوری غیرخطی هندسی وون‌کارمن روابط کرنش جابجایی به‌صورت رابطه‌ی (2) خواهند بود:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} - z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} \tag{2}$$

که در رابطه‌ی (2) $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ کرنش‌های مهندسی می‌باشند. با توجه به اینکه چندلایه‌ی فلز کامپوزیت، از کامپوزیت با لایه‌های ارتوتروپیک با زاویه الیاف گوناگون تشکیل‌شده است، باید هر لایه به‌صورت خارج محور به مختصات روی محور انتقال یابد. بر اساس حالت تنش صفحه‌ای، با استفاده از مدل هوک، روابط ساختاری تنش- کرنش برای هر لایه با زاویه الیاف مختلف به‌صورت رابطه‌ی (3) بیان می‌شود [20]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} - z\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y} \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Im \Delta T \right) \tag{3}$$

[1] Multiple scales method

[2] Finite Strain

که در رابطه‌ی (3)، $\Im$ ضریب انبساط حرارتی و ΔT بیان‌گر تغییرات دما است. در اینجا $\bar{Q}_{ij}$ بیان‌گر مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش‌یافته برای چندلایه‌ی فلز کامپوزیت می‌باشد [33]، که به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= (Q_{11}C^4) + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}S^4 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}(S^4 + C^4) \\
\bar{Q}_{22} &= (Q_{11}S^4) + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}C^4 \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})C^3S + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66})S^3C \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66})SC^3 \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{66}(S^4 + C^4)
\end{aligned} \tag{4}$$

که $S = Sin(\theta)$ و $C = Cos(\theta)$ و θ زاویه‌ی بین مختصات اصلی و انتقال‌یافته در دستگاه کارتزین می‌باشد. همچنین Q_{ij} نیز مؤلفه‌های تانسور سفتی و به فرم زیر است:

$$\begin{aligned}
&Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}, Q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{1 - v_{12}v_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}} \\
&Q_{66} = G_{12} = \frac{E_1}{2(1 + v_{12})} \; and \; \upsilon_{21} = \frac{\upsilon_{12}E_2}{E_1}
\end{aligned} \tag{5}$$

به دلیل تابع ناپیوسته تنش در ضخامت هر لایه، و به منظور به دست آوردن معادله ساختاری با در نظر گرفتن زوج نیروهای تنش می‌توان از رابطه (5) در راستای ضخامت ورق انتگرال گرفت. درنتیجه برای نیروها و ممان‌های برون صفحه‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[[A][B]\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \left[[B][D]\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

ماتریس‌های A، B و D نیز با توجه به رابطه‌ی (7) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{L} (\bar{Q}_{ij})_k [z_k - z_{k-1}] \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L} (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^2 - z_{k-1}^2] \\
D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{L} (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^3 - z_{k-1}^3]
\end{aligned} \tag{7}$$

که در رابطه‌ی (7)، A، B و D نیز به ترتیب ماتریس‌های کشیدگی، کوپلینگ و خمش می‌باشند.

2-2-معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم

با استفاده از روش کار مجازی و اصل همیلتون، معادله حرکت سیستم با استفاده از رابطه‌ی (8)، استخراج می‌شود:

$$\int_0^T (\delta K - \delta W - \delta U)dt = 0 \tag{8}$$

در اینجا δU تغییرات انرژی کرنشی، W کار مجازی انجام‌شده توسط نیروهای اعمالی خارجی و δK تغییرات انرژی جنبشی می‌باشند، که مطابق با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \\
&\int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}\delta e_{xx} + \sigma_{yy}\delta e_{yy} + 2\sigma_{xy}\delta e_{xy})dzdA] \\
&= \int_A \Bigg[\int_A [N_{xx}[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}] - M_{xx}[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}] \\
&+ N_{yy}[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}] - M_{yy}[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}] \\
&+ N_{xy}[\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial y}] \\
&- 2M_{xy}[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}] \Bigg] dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta K &= \frac{1}{2}\rho \int_V \delta[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2]dV \\
&= \rho \int_V \delta[\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}]dV \\
&= \int_A \Bigg[(I_0\dot{u} - I_1\frac{\partial \dot{w}}{\partial x})\delta\dot{u} + (-I_1\dot{u} + I_2\frac{\partial \dot{w}}{\partial x})\frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \\
&+ (I_0\dot{v} - I_1\frac{\partial \dot{w}}{\partial y})\delta\dot{v} + (-I_1\dot{v} + I_2\frac{\partial \dot{w}}{\partial y})\frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \\
&+ (I_0\dot{w})\delta\dot{w} \Bigg] dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_A \Bigg[(K_w w - K_G \nabla^2 w - P(t) + C_d\frac{\partial w}{\partial t})\delta w \\
&+ (\frac{E\Im}{1-v}\int_{-h/2}^{h/2} \Delta T \; dz)(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\delta x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\delta y}) \Bigg] dA
\end{aligned} \tag{9}$$

درنهایت می‌توان بر اساس اصل همیلتون و استفاده از روش جزءبه‌جزء، معادلات حرکت سیستم را به فرم زیر نوشت:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \tag{10}$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \tag{11}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + -K_w w + K_G \nabla^2 w + P(t) - C_d \frac{\partial w}{\partial t} + N_{xx}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2}\right) \quad (12)$$

که در روابط فوق اینرسی‌های جرمی ورق به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$I_i = \int_A \rho z^i dA \ , i = 0,1,2 \quad (13)$$

شرایط مرزی به‌دست‌آمده در $x = 0,a$ عبارت‌اند از :

$$\begin{aligned} &\delta u = 0 \quad or \quad N_x \\ &\delta v = 0 \quad or \quad N_{xy} \\ &\delta w = 0 \quad or \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + \\ &\qquad + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y} - I_1 \ddot{u} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\ &\frac{\delta \partial w}{\partial x} = 0 \quad or \quad M_x \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین در $y = 0,b$ عبارت‌اند از :

$$\begin{aligned} &\delta u = 0 \quad or \quad N_{xy} \\ &\delta v = 0 \quad or \quad N_y \\ &\delta w = 0 \quad or \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ &\qquad + N_y\frac{\partial w}{\partial y} - I_1 \ddot{v} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \\ &\frac{\delta \partial w}{\partial y} = 0 \quad or \quad M_y \end{aligned} \quad (15)$$

همچنین در $(x,y) = (0,0),(a,b),(a,0),(0,b)$ عبارت است از:

$$\delta w = 0 \quad or \quad M_{xy} \quad (16)$$

حال با انتخاب تابع تنش ایری مناسب که در معادلات (10) و (11) صدق کند، روابط زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, N_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

حال با جایگذاری معادله (17) در معادله (12) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_w w + K_G \nabla^2 w + P(t) - C_d \frac{\partial w}{\partial t} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2}\right) \quad (18)$$

برای حل کردن رابطه (18) نیاز به یک معادله سازگاری می‌باشد. با حذف کردن u_0 و v_0 از رابطه (3) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (19)$$

با استفاده از رابطه (7) و به دست آوردن کرنش‌ها برحسب نیروهای درون صفحه‌ای N و همچنین در نظر گرفتن رابطه (17) معادله سازگاری به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_{22}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2} + 2(A_{12}^* + 2A_{66}^*)\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11}^* \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \nabla^2 (N^{Th}) \quad (20)$$

که در این رابطه A_{ij}^* ها عبارات درایه‌های معکوس ماتریس سفتی کششی ورق هستند. با به‌کارگیری روابط بالا و جایگذاری عبارات مربوط به جابه‌جایی عرضی درون این معادلات درنهایت معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر سیستم را می‌توان بر اساس تغییر شکل عرضی ورق و تابع تنش ایری نوشت:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - (N^{Th})\nabla^2 w + \left(K_w w - K_G \nabla^2 w + P(t) + C_d \frac{\partial w}{\partial t}\right) = \left(I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) \quad (21)$$

معادله (21) معادله حرکت عرضی حاکم بر سیستم و معادله (20) نیز معادله حاکم بر تابع تنش ایری می‌باشد.

3- بارگذاری دینامیکی

یکی از مهم‌ترین موضوعات در مواجهه با طراحی سازه‌های پیشرفته در زمینه‌های متفاوت و کاربردی در صنایع هوایی، دریایی و زمینی، طراحی پاسخ دینامیکی این سازه‌ها در مقابل بارگذاری بیرونی مستقل از زمان از نوع موج انفجار می‌باشد. به‌عنوان‌مثال سازه‌ها و وسایل نقلیه‌ی دریایی به دلیل حملات موشکی یا انفجار گازها تحت بارگذاری انفجار می‌باشند. بدین منظور ابتدا انواع مختلفی از موج‌های انفجار خارجی مستقل از زمان ارائه می‌گردد.

3-1-تابع‌نمایی بارگذاری

اگر منبع انفجار به‌اندازه‌ی کافی از ورق فاصله داشته باشد، موج فشاری انفجار به‌صورت یک تابع نمایی شکل 2، به‌صورت تابع فریدلندر[1] خواهد بود [28]:

$$P(t) = P_m\left(1 - \frac{t}{t_m}\right)Exp\left(\frac{-\gamma t}{t_m}\right) \quad (22)$$

که $P(t)$ مقدار فشار اعمالی در هر لحظه، P_m حداکثر فشار پیشانی انفجار، γ پارامتر شکل موج و t_m مدت زمان بخش فاز مثبت می‌باشد.

3-2-تابع سینوسی بارگذاری

تابع بارگذاری سینوسی در شکل 3 نشان داده‌شده است.

[1] Friedländer

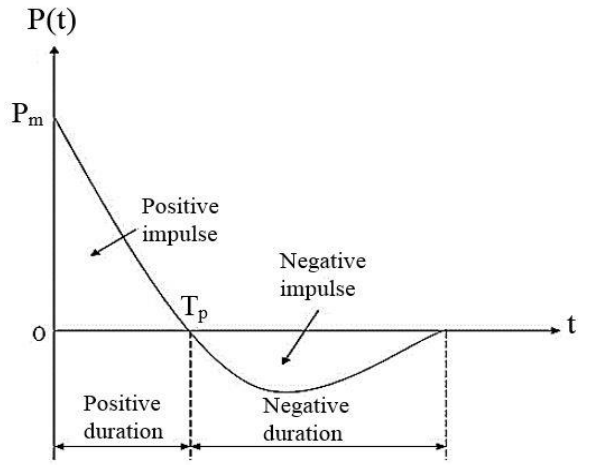

Fig. 2 Exponential loading curve resulted by explosion wave

شکل 2 منحنی نمایی بارگذاری ناشی از موج انفجار

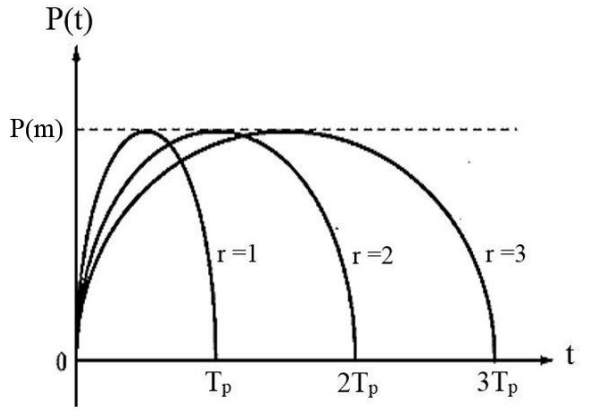

Fig. 3 Sinusoidal loading curve resulted by explosion wave

شکل 3 منحنی نمایی بارگذاری ناشی از موج انفجار

تابع این بارگذاری به‌صورت زیر می‌باشد:

$$P(t)=\begin{cases} P_m \sin\left(\pi t / r t_p\right) & 0 \prec t \prec r t_p \\ 0 & t \prec 0 \; and \; r \succ r t_p \end{cases} \tag{23}$$

که در رابطه‌ی (23)، r بیانگر فاکتور طول موج ضربه می‌باشد به‌طوری‌که شکل موج با تغییر مقدار r تعیین می‌گردد. لازم به ذکر است که تعیین بارگذاری موج انفجار با روابط دیگری نظیر بارگذاری پله و بارگذاری مثلثی نیز قابل بیان می‌باشد. در این تحقیق از بارگذاری انفجاری به شکل تابع کسینوسی هارمونیک استفاده‌شده است به‌نحوی‌که دامنه بارگذاری برابر با P_m در نظر گرفته‌شده است.

4- روش حل

برای ورق فلز کامپوزیتی، شرایط مرزی به‌صورت چهار طرف تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته می‌شود که فاقد نیروی درون صفحه‌ای بوده و می‌توان شرایط جابه‌جایی و تابع تنش را در موقعیت مرزهای ورق به‌صورت زیر نشان داد:

$$x=(0,a)\rightarrow\begin{cases} w_0=0 \;, M_{xx}=0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0, \displaystyle\int_0^b \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy=0 \end{cases}$$
$$y=(0,b)\rightarrow\begin{cases} w_0=0 \;, M_{yy}=0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0, \displaystyle\int_0^a \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx=0 \end{cases} \tag{24}$$

با توجه به شرایط مرزی مطرح‌شده و با فرض حرکت هارمونیک زمانی، برای حل معادلات می‌توان از تابع زیر که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند استفاده کرد:

$$w_0(x,y,t)=hw(t)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y) \tag{25}$$

در رابطه فوق اندیس‌های m و n معرف نیم موج‌های مود حرکتی است. همچنین $W(t)$ یک تابع مجهول و پاسخ زمانی سیستم می‌باشد که در ادامه بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه بسط داده‌شده و معادلات دیفرانسیل نظیر آن استخراج خواهد شد.

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (21) و پس از انجام محاسبات ریاضی، تابع تنشی که شرایط مرزی حاکم بر مسئله را ارضاء می‌کند، به فرم (26) به دست می‌آید:

$$\varphi(x,y,t)=\frac{h^2}{32}\left[\frac{(\frac{a}{b})^2}{A_{22}^*(\frac{n}{m})^2}\cos(\frac{2n\pi x}{a})+\frac{(\frac{n}{m})^2}{A_{11}^*(\frac{a}{b})^2}\cos(\frac{2m\pi y}{b})\right]w^2(t) \tag{26}$$

برای تبدیل معادلات حرکت سیستم به فرم معادلات زمانی از روش قدرتمند گالرکین استفاده می‌شود. با استفاده از روش گالرکین، معادله (21) با استفاده از تبدیل زیر به فرم یک معادله مودال زمانی تبدیل خواهد شد:

$$\iint \Gamma(w,\varphi)\Psi(x,y)dydx=0 \tag{27}$$

که $\Gamma(w,\varphi)$ معرف تابع باقی‌مانده است که در اینجا نظیر معادله حاکم بر سیستم می‌باشد و $\Psi(x,y)$ تابع وزنی کاندید شده فضایی مناسب برای ارضاء شرایط مرزی مطابق رابطه (24) می‌باشد. درنهایت با استفاده از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\Bigg[D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\\&+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\\&-\left(\frac{E\Im}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T\;dz\right)\nabla^2 w+\left(K_w w\right.\\&\left.-K_G\nabla^2 w+P(t)+C_d\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\left(I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right.\\&-I_2\nabla^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\&\left.-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)\Bigg]dydx=0\end{aligned} \tag{28}$$

حال تابع تنش ایری به‌دست‌آمده که وابسته به زمان و مختصات فضایی است را در معادله (21) وارد نموده و پس از انجام محاسبات با در نظر گرفتن مود اصلی فرکانس سیستم غیرخطی، معادله دیفرانسیل زمانی به فرم کلی (29) به دست خواهد آمد:

$$\ddot{w}(t)+C_1\dot{w}(t)+C_2 w(t)+C_3 w^3(t)=P(t) \tag{29}$$

به منظور به دست آوردن پاسخ، ابتدا با فرض تحریک هارمونیک خارجی با فرکانس ω_{ex} فرم کلی مسئله بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به وجود عبارات غیرخطی در معادله فوق، با استفاده از نظریه اغتشاشات و به‌وسیله روش مقیاس‌های چندگانه، پاسخ سیستم به تحریک خارجی تحلیل می‌شود. با لحاظ تغییراتی در متغیرها به‌صورت $C_1=2\mu\varepsilon$ $C_2=\omega_0^2$ ، $C_3=\bar{\alpha}\varepsilon$ و $P=\bar{p}\varepsilon$ امکان استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه مهیا می‌شود. در این روابط ε بیانگر پارامتر کوچک اغتشاشی بی‌بعد از مرتبه اول است.

لازم به ذکر است در صورت استفاده از مراتب بزرگ‌تر، ترم‌هایی از پارامترهای سیستم در جواب معادله دیفرانسیل ظاهر خواهد شد که به علت کوچکی از پاسخ تحلیلی سیستم حذف می‌شوند و لذا ترم‌های مرتبه بالا را می‌توان به‌عنوان خطای حل معادله دیفرانسیل منظور نمود. همچنین بر طبق کارهای انجام‌شده مرتبه بزرگی جملات معادله (29) نیز یکسان فرض شده است. با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای ذکرشده، می‌توان معادله (29) را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\ddot{w}+2\mu\varepsilon\dot{w}+\omega_0^2 w+\bar{\alpha}\varepsilon w^3=\bar{p}\varepsilon\cos(\omega_{ex}t) \tag{30}$$

در روش پیشنهادشده، مقیاس‌های زمانی را به ترتیب و به فرم $T_n=\varepsilon^n t, n=0,1,2,...$ منظور نموده و روابط مشتق با توجه به قاعده مشتق زنجیره‌ای مطابق زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}=D_0+\varepsilon D_1\\&\frac{d^2}{dt^2}=D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2\left(D_1^2+2D_0D_2\right)\end{aligned} \tag{31}$$

همچنین مطابق روش مقیاس‌های چندگانه، فرم کلی جواب نیز مطابق زیر است:

$$\begin{aligned}&w(t)=w_0(T_0,T_1,T_2,..)+\varepsilon w_1(T_0,T_1,T_2,..)\\&+\varepsilon^2 w_2(T_0,T_1,T_2,...)+..\end{aligned} \tag{32}$$

مسئله ارتعاش اجباری موردبحث برای حالتی که $\omega_{ex}\to\omega_0$ تحلیل می‌شود. در این حالت فرکانس تحریک را به‌صورت $\omega_{ex}=\omega_0+\varepsilon\sigma$ بازنویسی کرده که در آن σ پارامتر انحراف از تشدید است. سپس رابطه (32) در معادله اصلی سیستم جایگذاری شده و رابطه (33) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\left(D_0^2+2\varepsilon D_0D_1+\varepsilon^2D_1^2+\omega_0^2\right)(w_0+\varepsilon w_1)\\&=-\bar{\alpha}\varepsilon(w_0+\varepsilon w_1)^3+\bar{p}\varepsilon\cos(\omega_{ex}t)+\\&+2\mu\varepsilon(D_0+\varepsilon D_1)(w_0+\varepsilon w_1)\end{aligned} \tag{33}$$

چون ε^i ها مستقل خطی هستند، تمامی ضرایب آن‌ها در معادله فوق باید صفر باشند، ازاین‌رو روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned}&O(\varepsilon^0): D_0^2w_0+\omega_0^2w_0=0\\&O(\varepsilon^1): D_0^2w_1+\omega_0^2w_1=-2\varepsilon D_0D_1w_0\\&-\bar{\alpha}w_0^3+\bar{p}\cos(\omega_{ex}t)-2\mu\varepsilon D_0w_0\\&w_0=A(T_1,T_2)e^{i\omega_0T_0}\end{aligned} \tag{34}$$

با بازنویسی رابطه با بزرگی 1 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&O(\varepsilon^1): D_0^2w_1+\omega_0^2w_1=\\&-2i\omega_0D_1Ae^{i\omega_0T_0}-2i\omega_0\mu Ae^{i\omega_0T_0}\\&-\bar{\alpha}\left(A^3e^{3i\omega_0T_0}+3A^2\bar{A}e^{i\omega_0T_0}\right)+\frac{1}{2}\bar{p}e^{i\omega_0T_0}e^{i\sigma T_1}\end{aligned} \tag{35}$$

شرط رسیدن به جواب بامعنی در معادله بالا، حذف جملات سکولار در پاسخ زمانی است تا پاسخ در زمان طولانی به بی‌نهایت میل نکند، سپس رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&-2i\omega_0D_1Ae^{i\omega_0T_0}-3\bar{\alpha}A^2\bar{A}e^{i\omega_0T_0}\\&+\frac{1}{2}\bar{p}e^{i\omega_0T_0}e^{i\sigma T_1}-2i\omega_0\mu Ae^{i\omega_0T_0}=0\end{aligned} \tag{36}$$

با استفاده از فرم قطبی برای ساده‌تر شدن روند تحلیل عملیات ریاضی، فرض می‌شود که $A=\alpha/2\,e^{i\beta}$ باشد سپس معادله فوق را با استفاده از فرض بالا بازنویسی می‌شود. برای صفر شدن کل عبارت بالا، قسمت موهومی و حقیقی آن باید همزمان مساوی صفر باشند، درنهایت دستگاه معادلات مطابق زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}: \beta'=\frac{3\bar{\alpha}}{8\omega_0}\alpha^2-\frac{\bar{p}}{2\omega_0\alpha}\cos(\sigma T_1-\beta)\\&\mathrm{Im}: \alpha'=\frac{\bar{p}}{2\omega_0}\sin(\sigma T_1-\beta)-\mu\alpha\end{aligned} \tag{37}$$

پاسخ حالت مانای سیستم از مساوی صفر قرار دادن α' و β' در معادلات فوق به‌دست‌آمده و سرانجام با حذف پارامتر کوچک اغتشاش فرم بسته و پاسخ تحلیلی زیر برای ارتعاشات اجباری غیرخطی سیستم به‌صورت (38) حاصل خواهد شد:

$$\omega=\left(1+\frac{3}{4}\frac{C_3}{\omega_0}\alpha^2-\frac{P}{\alpha\omega_0}-\frac{C_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

5-بررسی نتایج

در ابتدا به منظور نشان دادن همگرایی و دقت روش ارائه‌شده، نتایج ارائه‌شده با دیگر مقالات [34] مقایسه شده است. در این مقاله با استفاده از یک روند حل نیمه‌تحلیلی رفتار ارتعاشی ورق‌های مستطیلی و دایروی تحت شرایط مرزی مختلف موردبررسی قرارگرفته است که درنهایت با حل معادله دیفرانسیلی غیرخطی مقادیر فرکانس طبیعی و فرکانس غیرخطی بر اساس حداکثر اندازه دامنه سیستم استخراج‌شده‌اند. به منظور بررسی صحت نتایج به دست آمده، نسبت فرکانسی به‌صورت ω^{nl}/ω_0 در نظر گرفته‌شده است. در شکل 4 مقایسه‌ی میان نتایج یاماکی و مطالعه‌ی حاضر نشان داده‌شده است، و مطابق با آن نتایج به‌دست‌آمده دارای تطابق و همگرایی قابل قبولی می‌باشد.

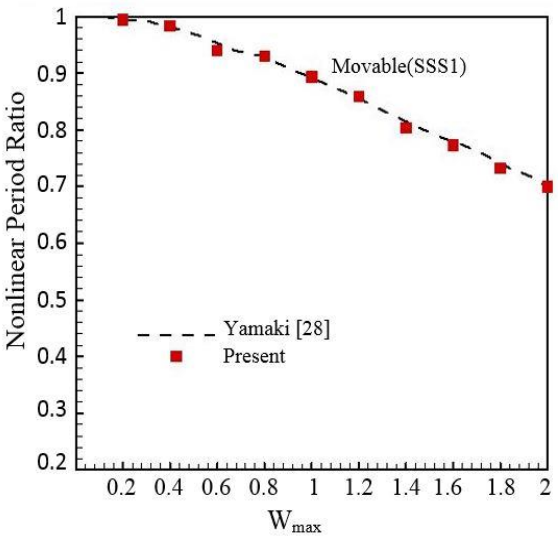

Fig. 4 Comparison the frequency ratio of the square plate with simply-support boundary condition

شکل 4 مقایسه نسبت فرکانسی ورق مربعی با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده

به منظور بررسی پاسخ ورق تحت شرایط دمایی و شرایط بستر از خواص جدول 1 استفاده‌شده است. به منظور بررسی اثر برخی پارامترها روابط بی-بعدی به‌صورت رابطه (39) می‌گردند. فرکانس‌های غیرخطی و بی‌بعد چندلایه فلز کامپوزیت، تحت شرط مرزی تکیه‌گاه ساده برای شکل‌مودهای مختلف در جدول 2 ارائه‌شده است.

مقدار تغییرات حرارتی بین 0-150 پارامتر مدول وینکلر بی‌بعد شده فنر بین 50-200 در نظر گرفته‌شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش درجه حرارت، فرکانس‌های غیرخطی کاهش می‌یابند. علت آن است که با افزایش درجه حرارت ورق فلز کامپوزیتی نرم‌تر شده درنتیجه فرکانس طبیعی با کاهش همراه می‌باشد. همچنین مطابق با جدول 2 با افزایش سختی بستر فرکانس غیرخطی افزایش‌یافته و باعث بیشتر شدن سفتی ورق می‌شود. باید به این نکته نیز اشاره کرد که در شکل‌مودهای بالاتر، از حساسیت فرکانس غیرخطی کاسته می‌شود.

جدول 1 خواص چندلایه‌ی فلز کامپوزیت و بار دینامیکی

Table 1 Properties of Fiber Metal Laminate and Dynamic Loading

ماده	خواص
مشخصات ورق کامپوزیتی با لایه‌چینی $[0,90]_{2s}$	$E_1 = 120GPa$ $E_2 = 7.9GPa$ $G_{12} = 5.5GPa$ $\nu_{12} = 0.3$ $\rho_1 = 1540$ $a = 300mm$ $b = 150mm$ $h = 5mm$
مشخصات فلز آلومینیوم	$E = 72.4GPa$ $G = 27.6GPa$ $\nu = 0.33$ $\rho_2 = 2780kg/m^3$
مشخصات بار دینامیکی	$P_m = 10KPa$ $\gamma = 0.35$ $t_m = 0.0018s$

$$K_W = D_{11}\frac{\tilde{K}_W}{a^4}$$
$$P = P^* E_1 (\frac{h}{a})^4$$
$$C_d = C\sqrt{\frac{E_1}{a^2}}$$
$$K_G = D_{11}\frac{\tilde{K}_G}{a^2}$$
$$\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_1 h}{D_{11}}} \qquad (39)$$

جدول 2 فرکانس غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده $(\alpha = -1.6\times10^{-6}K^{-1}, \tilde{P} = 1, C = K_G = 0)$

Table 2 Nonlinear frequency of Fiber metal laminate under simply-support boundary condition

ΔT	$\tilde{K}_W$	Modes (m,n) (1,1)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
0	50	27.7802	46.1471	111.1803	204.0660	221.0646
	100	27.7861	46.1632	111.1836	204.0658	221.0654
	150	27.7920	46.1668	111.1850	204.0666	221.0661
	200	27.7979	46.1703	111.1865	204.0674	221.0669
50	50	27.7540	46.1345	111.1559	204.0387	221.0383
	100	27.7599	46.1380	111.1574	204.0395	221.0391
	150	27.7658	46.1416	111.1589	204.0403	221.0398
	200	27.7717	46.1451	111.1604	204.0411	221.0406
100	50	27.7278	46.1092	111.12982	204.0123	221.0120
	100	27.7337	46.1128	111.13130	204.0131	221.0128
	150	27.7396	46.1164	111.13277	204.0139	221.0135
	200	27.7455	46.1199	111.13425	204.0147	221.0143
150	50	27.7016	46.0840	111.10367	203.9859	220.9857
	100	27.7075	46.0876	111.10514	203.9867	220.9865
	150	27.7134	46.0910	111.10662	203.9875	220.9872
	200	27.7193	46.0947	111.10809	203.9884	220.9880

جدول 3 فرکانس غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده $(\alpha=-1.6\times10^{-6}K^{-1},\tilde{P}=1,C=K_W=0)$

Table 3 Nonlinear frequency of Fiber metal laminate under simply-support boundary condition

ΔT	$\tilde{K}_G$	Modes (m,n) (1,1)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
0	1	27.7801	46.1491	111.186	204.071	221.069
	3	27.7917	46.1729	111.198	204.082	221.082
	5	27.8034	46.1841	111.210	204.094	221.093
	7	27.8150	46.1953	111.221	204.105	221.105
50	1	27.7539	46.1365	111.160	204.044	221.044
	3	27.7656	46.1477	111.172	204.056	221.055
	5	27.7772	46.1589	111.184	204.067	221.067
	7	27.7889	46.1702	111.195	204.079	221.079
100	1	27.7277	46.1113	111.134	204.017	221.017
	3	27.7394	46.1225	111.146	204.029	221.029
	5	27.7511	46.1337	111.157	204.041	221.041
	7	27.7627	46.1450	111.169	204.053	221.052
150	1	27.7015	46.0861	111.108	203.991	220.991
	3	27.7132	46.0973	111.120	204.003	221.003
	5	27.7249	46.1085	111.131	204.015	221.014
	7	27.7365	46.1198	111.143	204.026	221.026

در جدول 3، فرکانس‌های غیرخطی و بی‌بعد ورق فلز کامپوزیتی، تحت شرط مرزی تکیه‌گاه ساده برای شکل‌مودهای مختلف آورده شده است. بدین منظور مقدار تغییرات حرارتی بین 0-150 و پارامتر مدول برشی بی‌بعد شده بین 1-7 قرار دارد. با توجه به نتایج، افزایش مدول برشی عاملی برای افزایش فرکانس غیرخطی است زیرا این افزایش با سفتی بیشتر ورق همراه شده درنتیجه فرکانس افزایش می‌یابد. اما نتیجه دیگری که حاصل می‌شود این است که تغییرات درجه حرارت، منجر به کاهش سفتی ورق شده و درنتیجه فرکانس غیرخطی کاهش می‌یابد. در شکل 5، پاسخ دینامیکی سیستم در بازه ی زمانی 0 تا 0.0018 s در حالتی که $\tilde{P}=1$ است برای مقادیر مختلف دامنه رسم شده است.

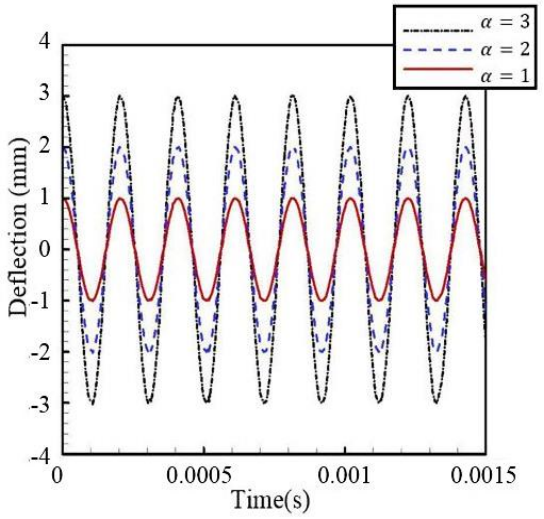

Fig. 5 Dynamic response of system for different domain values against the time

شکل 5 پاسخ دینامیکی سیستم برای مقادیر مختلف دامنه برحسب زمان

مطابق با نتیجه به‌دست‌آمده، مشاهده می‌شود که با افزایش دامنه، پاسخ دینامیکی سیستم نیز افزایش‌یافته است.

در شکل 6، اثر مقادیر مختلف بارگذاری بر روی فرکانس نرمالیزه شده نسبت به دامنه فرکانسی رسم شده است. می‌توان مشاهده نمود که با افزایش دامنه، فرکانس بی‌بعد شده نیز افزایش خواهد یافت. همچنین با افزایش مقادیر مختلف بارگذاری بی‌بعد شده، از نسبت فرکانسی کاسته می‌شود.

همچنین در جدول 4، تأثیر افزایش میرایی بر روی فرکانس غیرخطی ورق فلز کامپوزیتی، تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده آورده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش میرایی با کاهش فرکانس همراه بوده و موجب کاهش سفتی ورق می‌گردد.

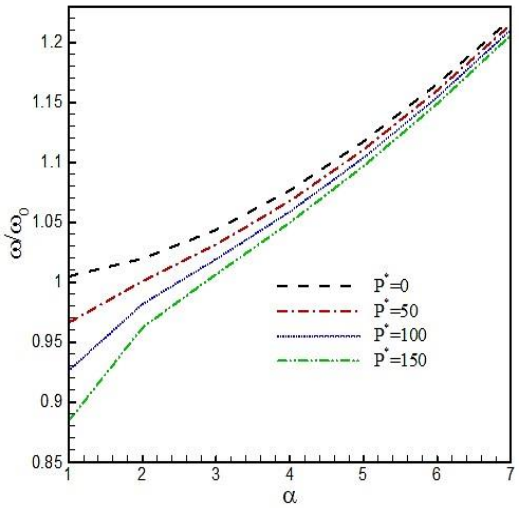

Fig. 6 The effect of domain changes with normalized frequency for different loading values

شکل 6 اثر تغییرات دامنه با فرکانس نرمالیزه شده برای مقادیر مختلف بارگذاری

جدول 4 فرکانس غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده $(\alpha = -1.6\times10^{-6}K^{-1}, \tilde{P}=1, K_G = K_W = 0)$

Table 4 Nonlinear frequency of Fiber metal laminate under simply-support boundary condition

ΔT	C	Modes (m,n)				
		(1,1)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
0	0.1	27.3685	46.0267	111.1270	204.0260	221.0370
	0.2	26.7067	45.6362	110.9660	203.9390	220.9560
	0.3	26.5655	44.9779	110.6970	203.7920	220.8210
	0.4	23.8765	44.0398	110.3190	203.5870	220.6320
50	0.1	27.3420	46.0014	111.1010	204.0000	221.0110
	0.2	26.6795	45.6107	110.9400	203.9120	220.9300
	0.3	25.5371	44.9521	110.6700	203.7660	220.7950
	0.4	23.8460	44.0134	110.2930	203.5610	220.6050
100	0.1	27.3154	45.9761	111.0750	203.9740	220.9840
	0.2	26.6522	45.5852	110.9130	203.8860	220.9030
	0.3	25.5086	44.9262	110.6440	203.7400	220.7680
	0.4	23.8155	43.9870	110.2660	203.5350	220.5790
150	0.1	27.2888	45.9508	111.0480	203.9470	220.9580
	0.2	26.6249	45.5597	110.8870	203.8600	220.8770
	0.3	25.4801	44.9003	110.6180	203.7130	220.7420
	0.4	23.7850	43.9605	110.2400	203.5080	220.5530

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از روش تحلیلی رفتار غیرخطی چندلایه فلز کامپوزیت تحت بارگذاری حرارتی دینامیکی موردبررسی قرارگرفته است. به‌منظور در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی از روابط کرنش جابه‌جایی وون‌کارمن استفاده‌شده و معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل همیلتون استخراج‌شده‌اند. در ادامه برای حل معادلات غیرخطی از تابع تنش ایری استفاده‌شده تا معادله غیرخطی مرتبه چهار حاصل شود که درنهایت با به‌کارگیری روش گالرکین، معادله غیرخطی تابع زمانی به‌دست‌آمده می‌آید. با بررسی‌های انجام‌شده مشاهده شد که استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه اغتشاشات، بهترین و دقیق‌ترین روش برای حل معادلات غیرخطی است. به منظور اعتبارسنجی کار، نتایج با دیگر پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه مقایسه شده و ملاحظه می‌گردد که نتایج تطابق خوبی با یکدیگر دارند. با توجه به تحلیل انجام‌شده می‌توان نتیجه گرفت که افزایش پارامترهای مدول برشی و وینکلر بستر، تأثیر بسزایی در افزایش فرکانس‌های غیرخطی سیستم داشته و از طرفی افزایش تغییرات درجه حرارت منجر به کاهش فرکانس می‌شود. علاوه بر این اثر مقادیر مختلف دامنه بارگذاری نیز موردبررسی قرار گرفت و مشاهده‌شده که افزایش دامنه بارگذاری، منجر به افزایش تغییر شکل و کاهش نسبت فرکانسی سیستم خواهد شد. همچنین مشاهده شد که با افزایش میرایی، فرکانس غیرخطی ورق فلز کامپوزیتی نیز کاهش‌یافته است.

7- مراجع

[1] Botelho, E. C., Silva, R. A., Pardini, L. C. and Rezende, M. C.,"A Review on the Development and Properties of Continuous Fiber/Epoxy/Aluminum Hybrid Composites for Aircraft Structures", Materials Research, Vol. 9, No. 3, pp. 247-256, 2006

[2] Ghasemi, A. R., Mohandes, M., Dimitri, R. and Tornabene, F. J.,"Agglomeration Effects on the Vibrations of Cnts/Fiber/Polymer/Metal Hybrid Laminates Cylindrical Shell", Composites Part B: Engineering, Vol. 167, pp. 700-716, 2019.

[3] Mohandes, M., Ghasemi, A. R., Irani-Rahagi, M., Torabi, K., Taheri-Behrooz, F. J, "Development of Beam Modal Function for Free Vibration Analysis of Fml Circular Cylindrical Shells", Journal of Vibration and Control, Vol. 24 ,No. 14, pp. 3026-3035, 2018.

[4] Ghasemi, A. and Mohammadi, M. J., "Residual Stress Measurement of Fiber Metal Laminates Using Incremental Hole-Drilling Technique in Consideration of the Integral Method", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 114, pp. 246-256, 2016.

[5] Botelho, E., Campos, A., De Barros, E., Pardini, L. and Rezende, M. C.., "Damping Behavior of Continuous Fiber/Metal Composite Materials by the Free Vibration Method", Composites Part B: Engineering, Vol. 37, No. 2-3, pp. 255-263, 2005.

[6] Sinmazçelik, T., Avcu, E., Bora, M. Ö., Çoban, O., "A Review: Fibre Metal Laminates, Background, Bonding Types and Applied Test Methods", Materials & Design, Vol. 32, No. 7, pp. 3671-3685, 2011.

[7] Vogelesang, L. B. and Vlot, A.., "Development of Fibre Metal Laminates for Advanced Aerospace Structures", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 103, No. 1, pp. 1-5, 2000..

[8] Caprino, G., Lopresto, V., Iaccarino, P., "A Simple Mechanistic Model to Predict the Macroscopic Response of Fibreglass–Aluminium Laminates under Low-Velocity Impact", Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 38, No. 2, pp. 290-300, 2007.

[9] Abdullah, M., Cantwell, W, "The Impact Resistance of Polypropylene-Based Fibre–Metal Laminates", Composites Science and Technology, Vol. 66, No. 11-12, pp. 1682-1693, 2006.

[10] Atas, C. J. J. o. R. P. and Composites, "An Experimental Investigation on the Impact Response of Fiberglass/Aluminum Composites", Vol. 26, No. 14, pp. 1479-1491, 2007.

[11] Faramarz, A. G., Esmaeil, A. F. and Ali, P. A., "An Experimental Study of Temperature Effect on Low-Velocity Impact Response of Notched Aluminum Plates Repaired by Fml Composite Patches," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 9, pp. 175-182, 2014.

[12] Aksoylar, C., Ömercikoğlu, A., Mecitoğlu, Z. and Omurtag,

M. H., "Nonlinear Transient Analysis of Fgm and Fml Plates under Blast Loads by Experimental and Mixed Fe Methods", Composite Structures, Vol. 94, No. 2, pp. 731-744, 2012.

[13] Harras, B., Benamar, R., White, R. J., "Experimental and Theoretical Investigation of the Linear and Non-Linear Dynamic Behaviour of a Glare 3 Hybrid Composite Panel", Journal of Sound and Vibration, Vol. 252, No. 2, pp. 281-315, 2002.

[14] Majid, J. O. and mohammadreza, M. S., "Numerical Investigation of the Behavior of Fml Composite Plates under Low Velocity Impact " In Persian, Journal of Energetic Materials, Vol. 11, No. 2, pp. 23-38, 2016.

[15] Ghasemi, F. A., Raissi, S., Malekzadehfard, K." Analytical and Mathematical Modeling and Optimization of Fiber Metal Laminates (Fmls) Subjected to Low-Velocity Impact Via Combined Response Surface Regression and Zero-One Programming", Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 10, No. 2, pp. 391-408, 2013.

[16] Ashena, G. F., Malekzadeh ,F. K. and Paknejad, R., "Response of Cantilever Fiber Metal Laminate (Fml) Plates Using an Analytical-Numerical Method", In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 3, pp. 57-67, 2013.

[17] Kazancı, Z., Mecitoğlu, Z. J., "Nonlinear Dynamic Behavior of Simply Supported Laminated Composite Plates Subjected to Blast Load", Journal of Sound and Vibration, Vol. 317, No. 3-5, pp. 883-897, 2008.

[18] Keramat, M.-F., hossein, A. A. and Naser, Z., "Analytical Modeling to Predict Dynamic Response of Fiber-Metal Laminated Panel Subjected to Low Velocity Impact" In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, No. 3, pp. 331-342, 2018.

[19] Keramat, M.-F., Hasan, P. G. and Mansour, K., "Dynamic Response Analysis of a Sandwich Plate with a Flexible Core and Elastic Substrate under a Low Velocity Impact" In Persian, Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering), Vol. 45, No. 2, pp. 27-42, 2013.

[20] Payeganeh, G. H., Ghasemi, F. A. and Malekzadeh, K., "Dynamic Response of Fiber–Metal Laminates (Fmls) Subjected to Low-Velocity Impact", Thin-Walled Structures, Vol. 48, No. 1, pp. 62-70, 2010.

[21] Morinière, F., Alderliesten, R. and Benedictus, R., "Energy Distribution in Glare and 2024–T3 Aluminium During Low-Velocity Impact", 2012.

[22] Morinière ,F., Alderliesten, R., Sadighi, M. and Benedictus, R., "An Integrated Study on the Low-Velocity Impact Response of the Glare Fibre-Metal Laminate", Composite Structures, Vol. 100, pp. 89-103, 2013.

[23] Reza, J. and Farzad, S. M., "Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Fml Cylindrical Shells under Blast Loading" In Persian, in Conference on Civil engineering, Architecture & Urban planning of the ISLAMIC COUNTRIES, Iran-Tabriz, 2018.

[24] Kazancı, Z. J. I. J. o. N.-L. M., "Dynamic Response of Composite Sandwich Plates Subjected to Time-Dependent Pressure Pulses", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 46, No. 5, pp. 807-817, 2011.

[25] Setoodeh, A., Malekzadeh, P ,.Nikbin, K. J. M. and Design, "Low Velocity Impact Analysis of Laminated Composite Plates Using a 3d Elasticity Based Layerwise Fem", Vol. 30, No. 9, pp. 3795-3801, 2009.

[26] Caprino, G., Spataro, G., Del Luongo, S."Low-Velocity Impact Behaviour of Fibreglass–Aluminium Laminates", Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, Vol. 35, No. 5, pp. 605-616, 2004.

[27] Kumari, E. and Singha, M., "Nonlinear Response of Laminated Panels under Blast Load", Procedia Engineering, Vol. 173, pp. 539-546, 2017.

[28] Dobyns, A."Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads", AIAA Journal, Vol. 19, No. 5, pp. 642-650, 1981.

[29] Baştürk, S., Uyanık, H. and Kazancı, Z., "An Analytical Model for Predicting the Deflection of Laminated Basalt Composite Plates under Dynamic Loads", Composite Structures, Vol. 116, pp. 273-285, 2014.

[30] Ghasemi, A., Taheri-Behrooz, F., Farahani, S., Mohandes, M., "Nonlinear Free Vibration of an Euler-Bernoulli Composite Beam Undergoing Finite Strain Subjected to Different Boundary Conditions", Journal of Vibration and Control, Vol. 22, No. 3, pp. 799-811, 2016.

[31] Mohandes, M., Ghasemi, A. R., "Finite Strain Analysis of Nonlinear Vibrations of Symmetric Laminated Composite Timoshenko Beams Using Generalized Differential Quadrature Method", Journal of Vibration and Contro, Vol. 22, No. 4, pp. 940-954, 2016.

[32] Ghasemi, A., Mohandes, M., "Nonlinear Free Vibration of Laminated Composite Euler-Bernoulli Beams Based on Finite Strain Using Generalized Differential Quadrature Method", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 24, No. 11, pp. 917-923, 2017.

[33] Whitney, J. and Pagano, N., "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates", Journal of Applied Mechanices, Vol. 37, No. 4, pp. 1031-1036, 1970.

[34] Yamaki, N., "Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates", Vol. 41, No. 12, pp. 501-510, 1961.