



## تحلیل قابلیت اطمینان بر اساس روش بسط چند جمله‌ای آشوب در سازه‌های کامپوزیتی

محمد نوریان<sup>1</sup>، محمد راوندی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999، ravandi@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت: 98/02/19	در دهه های اخیر، نظر به اهمیت کاهش هزینه ها، افزایش بهره وری و بقا در رقابت فزاینده صنایع مختلف، و همچنین به دلیل وجود منابع عدم قطعیت متعدد، توجه به تحلیل قابلیت اطمینان در رشته های مختلف رشد چشمگیری داشته است. با توجه به مزیت های فراوان استفاده از سازه های کامپوزیتی در صنایع مختلف و رشد روزافزون بکارگیری آن، توجه به مسئله قابلیت اطمینان در سازه های کامپوزیتی از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد. برای تحلیل قابلیت اطمینان سازه ها، روش های مختلفی از جمله روش شبیه سازی مستقیم مونت کارلو ارائه شده است که به دلیل هزینه محاسباتی بسیار بالا، استفاده از آن فقط برای مسائل ساده امکان پذیر می باشد. در مقاله حاضر، برای تحلیل قابلیت اطمینان یک سازه ی کامپوزیتی با وجود منابع عدم قطعیت گسترده در پارامترهای ورودی مانند خواص مکانیکی، خواص هندسی، استحکام و بارگذاری، روش توسعه یافته ای مبنی بر روش بسط چند جمله ای های آشوب ارائه شده است که نسبت به روش های قدیمی از جمله مونت کارلو، از هزینه محاسباتی بسیار پایینی برخوردار بوده و دارای دقت بالایی می باشد. در نهایت با انجام یک مثال عددی در دو مرحله با افزایش پارامترهای ورودی غیر قطعی کارایی این روش در تحلیل مسائل با منابع عدم قطعیت گسترده از لحاظ تعداد پارامترها نشان داده شده و با بررسی نتایج حاصله با روش مونت کارلو، مزیت این روش از نظر دقت و سرعت محاسباتی مورد ارزیابی قرار گرفته است.
پذیرش: 98/12/14	
کلیدواژگان:	
نانو کامپوزیت	
نانو گرافن	
نانو لوله کربنی	
شارپی	
میکروسکوپ الکترونی روبشی گسیل میدانی	

## Reliability analysis based on polynomial chaos expansion method in composite structures

Mohammad Noorian, Mohammad Ravandi\*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 19395-1999, Tehran, Iran, ravandi@kntu.ac.ir

### Keywords

Composite structures  
Reliability analysis  
Polynomial chaos expansion  
Sparse grid collocation  
Uncertainty analysis

### Abstract

Reliability analysis of composite structures has gained increased attention due to the growing use of composite materials in many industries such as aerospace, automotive and construction in recent decades. Uncertainty analysis approaches are effective tools in order to probabilistically assess the behavior and evaluate the reliability of composite structures with variabilities in material properties. In this study, a computationally efficient surrogate model based on the polynomial chaos expansion for reliability analysis of composite structures with a large number of uncertain parameters is presented. The uncertain input parameters including composite material properties, geometry and loads, are assumed as random variables with a normal distribution and are taken into account for reliability evaluation. A sparse grid collocation strategy is used to determine the sample points for constructing the surrogate model relating the uncertain variables to the structural response. In the end, a numerical example is performed to demonstrate the accuracy and efficiency of this methodology for a higher number of uncertain variables by comparing the results with the direct Monte Carlo simulation method.

### 1-مقدمه

و پراکندگی هایی ایجاد می گردد. کامپوزیتها امروز به دلیل مزیت های متعدد نسبت به مواد سنتی [1]، در صنایع مختلف مانند صنایع هوایی، دریایی، اتومبیل و غیره، به فراوانی مورد استفاده قرار می گیرند. ترکیب ناهمگن مواد کامپوزیتی و تغییر پذیری ذاتی در خواص مواد تشکیل دهنده و پارامترهای هندسی و همچنین عیوب ناخواسته ایجاد شده در فرایند ساخت، همواره عدم قطعیت هایی در خواص نهایی سازه کامپوزیتی ایجاد می کند که در کاربردهای

امروزه نظریه قابلیت اطمینان سازه ای، تحقیقات بسیاری را به خود اختصاص داده است. در حقیقت توصیف واقعی رفتار سیستم های سازه ای به طور اجتناب ناپذیری به عدم قطعیت های موجود در مسائل بستگی دارد. این عدم قطعیت ها می تواند به صورت تغییرات و پراکندگی ها در پارامترهای هندسی، خواص مواد، بارگذاری خارجی و.. ظاهر گردد که در نتیجه آن، در رفتار سیستم نیز تغییرات

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Noorian, M. and Ravandi, M., "Reliability analysis based on polynomial chaos expansion method in composite structures", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 4, pp. 627-636, 2020.

ارائه دادند که در آن از سه نوع عدم قطعیت موجود در پارامترهای ورودی برای تعیین عدم قطعیت رفتار صفحات کامپوزیتی استفاده شده است. در سال 2015 ساسیکومار و همکاران [8]، برای تحلیل عدم قطعیت و تخمین احتمال شکست صفحات کامپوزیتی یک روش المان محدود آماری بر اساس چند جمله‌ای آشوب، ارائه دادند. اساس این روش، مدلسازی ناهمگونی‌ها در خواص مکانیکی با یک توزیع غیر گوسین در فضای دو بعدی و نمایش آن‌ها با چند جمله‌ای آشوب می‌باشد. در سال 2018 بالکاس و همکاران [9]، به بررسی عدم قطعیت خواص کامپوزیت‌های سه بعدی پرداختند که به دلیل پیچیدگی این کامپوزیت‌ها و همچنین کاهش محاسبات از روش شبکه عصبی برای ساخت مدل جایگزین استفاده نمودند. همچنین در سال 2018 ناسکار [10] یک رویه احتمالی برای تعیین پارامترهای پایداری و دینامیکی صفحات کامپوزیتی حاوی تغییر پذیری خواص ماکرو و میکرو مکانیکی سیستم ارائه دادند که در آن برای تعیین عدم قطعیت خواص، از مدل جایگزین و روش نمایش مدل ابعاد بالا<sup>2</sup> استفاده شده است. قاسمی [11] در سال 2014 بازده محاسباتی را با ساخت یک مدل جایگزین با روش کریگینگ<sup>3</sup> چند مقیاسی آماری برای ساختار کامپوزیت پلیمری بهبود بخشید.

در تمام پژوهش‌های انجام شده تحلیل عدم قطعیت با استفاده از مدل‌های جایگزین با تعداد محدودی از پارامترهای دارای عدم قطعیت مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین افزایش پارامترها و ورودی‌های مسئله باعث پیچیدگی محاسبات و کاهش دقت محاسباتی خواهد شد. از اینرو در این پژوهش، با بهره‌گیری از یک روش توسعه یافته مبتنی بر چند جمله‌ای آشوب، آنالیز قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی با در نظر گرفتن منابع عدم قطعیت با گستردگی بالا شامل عدم قطعیت در تمام خواص مکانیکی و هندسی انجام گرفته است که از دقت و سرعت محاسباتی بالایی برخوردار می‌باشد. سرانجام جهت نمایش اعتبار سنجی روش فوق، نتایج حاصله با نتایج شبیه سازی مستقیم مونت کارلو مورد بررسی و قیاس قرار گرفته است.

## 2- قابلیت اطمینان در سازه‌های کامپوزیتی

در طراحی سازه‌های کامپوزیتی، اعمال عدم قطعیت موجود در خواص اجزا تشکیل دهنده، عیوب ناشی از ساخت، بارگذاری، و هندسه به دلیل تغییر پذیری بالای آنها، از اهمیت بالایی برخوردار است. از اینرو در تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی عموماً پارامترهای استحکام، خواص مکانیکی الیاف، جهت گیری الیاف و ... به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده و با مدلسازی تابع عملکرد، قابلیت اطمینان سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله تابع عملکرد در حالت کلی به صورت اختلاف پارامترهای استحکام و بارگذاری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = g(x_1, x_2, \dots, x_m) = STRENGTH - LOAD \quad (1)$$

که در آن  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) نشان دهنده  $m$  متغیر تصادفی ورودی و  $g$  نشان دهنده رابطه بین  $m$  متغیر تصادفی و شکست سازه است. براساس رابطه (1)، مقادیر منفی  $g$  نشان دهنده شکست سازه و مقادیر مثبت آن نشان دهنده

مهندسی و برآورد این عدم قطعیت بر روی قابلیت اطمینان سازه بسیار حائز اهمیت می‌باشد. برآورد و تحلیل عدم قطعیت خواص نهایی و رفتار مکانیکی مواد و سازه‌های کامپوزیتی در طول چند دهه اخیر با استفاده از روش‌های شبیه سازی مستقیم صورت گرفته است. اما با وجود پیشرفت ظرفیت و سرعت کامپیوترها، به دلیل پیچیدگی محاسبات و شبیه سازی‌ها، استفاده از این روش‌های سنتی برای تحلیل عدم قطعیت گاه‌ها غیر ممکن می‌باشد. برای مثال تحلیل عدم قطعیت بر اساس روش مونت کارلو برای دستیابی به یک پاسخ مطلوب نیازمند هزاران بار تکرار می‌باشد که بسته به پیچیدگی مسئله، می‌تواند بسیار زمانبر و گاه‌ها غیر قابل دست یابی باشد. در حالت کلی این روش‌های پیچیده و سنتی می‌تواند به عنوان یک سیستم ورودی/خروجی در نظر گرفته شود که در آن کمیت خروجی متناظر با مجموعه‌ای از پارامترهای ورودی ارزیابی می‌شود. از اینرو تحلیل عدم قطعیت بر اساس روش‌های سنتی چون مونت کارلو دارای هزینه محاسباتی بالایی می‌باشد [2].

در تحلیل‌هایی که نیاز به تکرار بالا می‌باشد می‌توان از مدل‌های جایگزین برای تجزیه و تحلیل استفاده نمود که در آن پاسخ مطلوب تنها برای مجموعه محدودی از پارامترهای ورودی، ارزیابی می‌شود و در نهایت یک مدل ریاضی معادل، که از سیستم ورودی/خروجی تبعیت می‌کند، ساخته می‌شود [2]. در حالت کلی این مدل‌های جایگزین نشان دهنده نتایج حاصل از تحلیل سازه‌های است، که در برگزیده‌ی همه ترکیبات ممکن از پارامترهای ورودی و همچنین یک رابط بین ورودی و خروجی می‌باشد [3]. امروزه تحلیل عدم قطعیت بر اساس مدل‌های جایگزین برای ارزیابی پاسخ سازه‌های کامپوزیت‌ها از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. برای تشکیل مدل‌های جایگزین روش‌های مختلفی وجود دارد که از جمله این روش‌ها می‌توان به بسط چند جمله‌ای آشوب اشاره کرد. بسط چند جمله‌ای آشوب برای اولین بار توسط وینر معرفی شد که در آن از چند جمله‌ای‌های متعامد هرمیتی برای مدل سازی فرایند آماری با متغیر-های تصادفی گوسین استفاده شده بود [4]. بسط چند جمله‌ای آشوب یک ابزار مفید برای شبیه سازی سیستم‌های آماری بوده و اساس کار آن لقاء پارامترهای تصادفی بر روی فضای آماری ایجاد شده با چند جمله‌ای‌های متعامد می‌باشد [2]. در ادامه مروری اجمالی بر کارهای پیشین محققان در مورد تحلیل عدم قطعیت مواد کامپوزیتی آورده شده است.

در سال 2018 چن و همکاران [5]، تحلیل عدم قطعیت بر مبنای چند جمله‌ای‌های آشوب را برای سازه‌های کامپوزیتی مورد بررسی قرار دادند که در آن از ترکیب عدم قطعیت‌ها شامل متغیرهای تصادفی نرمال و بازه‌ای استفاده نمودند. آن‌ها در این پژوهش تنها عدم قطعیت موجود در ثوابت الاستیک را در نظر گرفتند. همچنین در سال 2019 تاپا و همکاران [6]، یک قالب مدلسازی چند مقیاسی آماری برای تعیین عدم قطعیت کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کربن با یک روش غیر نفوذی<sup>1</sup>، که به اصطلاح تجزیه چند جمله‌ای آشوب با مشتق‌گیری نامیده شده، ارائه دادند. آن‌ها برای کاهش محاسبات، تحلیل عدم قطعیت صفحات کامپوزیتی را در دو مرحله بررسی نمودند. در مرحله اول با مدلسازی آماری با مقیاس میکرو، خواص مکانیکی یک لایه تحت تاثیر عدم قطعیت اجزاء تشکیل دهنده لایه و در مرحله دوم عدم قطعیت موجود در خواص هندسی چندلایه‌ها، جهت تعیین عملکرد تصادفی چندلایه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در سال 2019 پنگ و همکاران [7]، روش بسط چند جمله‌ای آشوب مبتنی بر داده را برای تحلیل عدم قطعیت صفحات کامپوزیتی

<sup>3</sup> Kriging method

<sup>1</sup> Non-intrusive

<sup>2</sup> High-dimensional model representation (HDMR)

که  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$  بردار متغیرهای تصادفی  $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}$  و  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$  با توزیع نرمال استاندارد می باشد. متغیرهای استاندارد  $\rho$  با استفاده از رابطه تبدیل توزیع نرمال استاندارد، به صورت زیر بدست می آیند:

$$\rho_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{f \sigma_{x_i}} \quad (7)$$

که در آن  $\mu_{x_i}$  و  $\sigma_{x_i}$  پارامترهای توزیع نرمال می باشد و ضریب  $f$  براساس بازه اطمینان مورد نظر تعیین می شود. ضرایب چند جمله‌ای رابطه (5) با استفاده از نقاط نمونه برای پارامترهای تصادفی در نظر گرفته شده در کامپوزیت‌ها، محاسبه می شوند. این نقاط نمونه به صورت  $(\rho_1^i, \rho_2^i, \dots, \rho_m^i), i \in \{1, 2, \dots, N\}$  نمایش داده می شود که در آن  $N$  تعداد نقاط نمونه بوده و بالا نویس  $i$  نشان دهنده  $i$  امین نمونه می باشد که مقادیر آن‌ها با استفاده از روش-های نمونه گیری محاسبه می شود [16]. رابطه (5) را می توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$HC = g \quad (8)$$

که در آن  $H$  ماتریس هرمیتی،  $g$  بردار پاسخ سازه ای و  $C$  ماتریس ضرایب چند جمله‌ای، را می توان به صورت زیر تعیین کرد [5]:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_1(\rho_1^1) & \dots & H_2(\rho_{i_1}^1, \rho_{i_2}^1) & \dots & H_p(\rho_{i_1}^1, \dots, \rho_{i_p}^1) & \dots \\ 1 & H_1(\rho_1^2) & \dots & H_2(\rho_{i_1}^2, \rho_{i_2}^2) & \dots & H_p(\rho_{i_1}^2, \dots, \rho_{i_p}^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 1 & H_1(\rho_1^N) & \dots & H_2(\rho_{i_1}^N, \rho_{i_2}^N) & \dots & H_p(\rho_{i_1}^N, \dots, \rho_{i_p}^N) & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T \quad (10)$$

$$C = (H^T H)^{-1} H^T g \quad (11)$$

با توجه به روابط (9) - (11)، رابطه (5) را می توان به فرم سری زیر بازنویسی کرد:

$$g = g(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) = \sum_{j=0}^{M-1} C_j Q_j(\rho) \quad (12)$$

که  $Q_j$  چند جمله‌ای‌های هرمیتی،  $C_j$  ضرایب متناظر چندجمله‌ای و  $M$  تعداد ضرایب چند جمله‌ای می باشد. تعداد ضرایب چند جمله‌ای از ترکیب زیر قابل محاسبه می باشد:

$$M = \binom{m+p}{p} \quad (13)$$

برای مثال چند جمله‌ای هرمیتی دو بعدی از مرتبه  $p$  می تواند به صورت زیر بیان شود [17]:

$$g = g(\rho_1, \rho_2) = C_0 H_0 + C_1 H_1(\rho_1) + C_2 H_1(\rho_2) + C_3 H_2(\rho_1, \rho_1) + C_4 H_2(\rho_2, \rho_1) + C_5 H_2(\rho_2, \rho_2) + \dots \quad (14)$$

ایمن بودن سازه می باشد. احتمال شکست سازه با انتگرال گیری بر روی ناحیه  $g \leq 0$  قابل محاسبه خواهد بود [12].

$$p_f = \int \int \dots \int f_x(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (2)$$

که در آن  $f_x$  تابع پیوسته چگالی احتمال شکست می باشد. با استفاده از رابطه (2) قابلیت اطمینان سازه به صورت زیر بدست می آید:

$$P_s = 1 - P_f \quad (3)$$

در سیستم های پیچیده محاسبه رابطه (2) به دلیل افزایش متغیرها و پیچیدگی مسئله بسیار دشوار و گاهی غیرممکن می باشد. در چنین شرایطی، می توان احتمال شکست سازه را توسط تعداد متناهی از ورودی‌های تصادفی به فرم ناپیوسته زیر برآورد کرد:

$$p_f = P[g \leq 0] = \frac{N_f}{N} \quad (4)$$

که در آن  $N$  تعداد کل سیکل های شبیه سازی و  $N_f$  تعداد سیکل های شبیه سازی با  $g \leq 0$  می باشد.

### 3- بسط چند جمله‌ای آشوب

در روش بسط چند جمله‌ای آشوب، پارامترهای نامشخص به عنوان بسطی از تجزیه ضرایب قطعی و پایه‌های متعامد تصادفی بیان می شوند [13]. با استفاده از روش بسط چند جمله‌ای آشوب، پاسخ سازه‌ای  $g$  را می توان به صورت سری همگرایی از چند جمله‌ای‌های متعامد به صورت زیر بیان کرد [14]:

$$g = C_0 + \sum_{i_1=1}^m C_{i_1} H_1(\rho_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{i_1} C_{i_1 i_2} H_2(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}) + \dots \quad (5)$$

که در آن  $\{\rho_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$  مجموعه ای از متغیرهای مستقل و تصادفی با توزیع نرمال استاندارد،  $H_p(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_m})$  مجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌های چند بعدی هرمیتی از متغیرهای تصادفی نرمال  $\rho$  با مرتبه  $p$  و  $C_{i_1, i_2, \dots}$  ضرایب ثابت می باشند. بسط چندجمله‌ای آشوب یک بسط همگرا از لحاظ میانگین مربعات بوده و بسته به درجه آن،  $p$  همه چندجمله‌ای‌های متعامد از همان درجه را در قالب چند جمله‌ای هرمیتی شامل می شود. علاوه بر این، خود چندجمله‌ای هرمیتی موجود در بسط آشوب، با درجه های نابرابر، دارای خاصیت تعامد نسبت به هم هستند. این ویژگی جالب سبب می شود که این بسط، علاوه بر توزیع نرمال، قابلیت برآورد انواع توزیع های غیر گوسین را هم دارا باشد [15]. رابطه کلی برای بدست آوردن چند جمله‌ای هرمیتی از مرتبه  $p$  برای  $m$  متغیر تصادفی نرمالی  $\rho$ ، به صورت زیر بیان می شود:

$$H_p(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_p}) = (-1)^p e^{\frac{1}{2}\rho^T \rho} \frac{\partial^p e^{-\frac{1}{2}\rho^T \rho}}{\partial \rho_{i_1} \partial \rho_{i_2} \dots \partial \rho_{i_p}} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 A(2,2) &= U_{3 \leq i_1+i_2 \leq 4} (\rho^{i_1} \times \rho^{i_2}) \\
 &= (\rho^1 \times \rho^2) \cup (\rho^1 \times \rho^3) \\
 &\quad \cup (\rho^2 \times \rho^1) \cup (\rho^2 \times \rho^2) \\
 &\quad \cup (\rho^3 \times \rho^1) \\
 A(3,2) &= U_{4 \leq i_1+i_2 \leq 5} (\rho^{i_1} \times \rho^{i_2}) \\
 &= (\rho^1 \times \rho^3) \cup (\rho^1 \times \rho^4) \\
 &\quad \cup (\rho^2 \times \rho^2) \cup (\rho^2 \times \rho^3) \\
 &\quad \cup (\rho^3 \times \rho^1) \cup (\rho^3 \times \rho^2) \\
 &\quad \cup (\rho^4 \times \rho^1) \\
 A(4,2) &= U_{5 \leq i_1+i_2 \leq 6} (\rho^{i_1} \times \rho^{i_2}) \\
 &= (\rho^1 \times \rho^4) \cup (\rho^1 \times \rho^5) \\
 &\quad \cup (\rho^2 \times \rho^3) \cup (\rho^2 \times \rho^4) \\
 &\quad \cup (\rho^3 \times \rho^2) \cup (\rho^3 \times \rho^3) \\
 &\quad \cup (\rho^4 \times \rho^1) \cup (\rho^4 \times \rho^2) \\
 &\quad \cup (\rho^5 \times \rho^1)
 \end{aligned} \tag{19}$$

که در آن مکان نقاط  $\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5$  با توجه به رابطه (17) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 \rho^1 &= \{0\} \\
 \rho^2 &= \{-1, 0, 1\} \\
 \rho^3 &= \{-1, -0.7, 0, 0.7, 1\} \\
 \rho^4 &= \{-1, -0.9, -0.7, -0.3, 0, 0.3, 0.7, 0.9, 1\} \\
 \rho^5 &= \{-1, -0.98, -0.92, -0.8, -0.7, -0.5, \dots \\
 &\quad -0.3, -0.1, 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8, \dots \\
 &\quad 0.92, 0.98, 1\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

با استفاده از روابط (19) و (20) مجموعه نقاط کلینشو در فضای دو بعدی با سطوح ترتیب مختلف به طور واضح در شکل 1 مشهود می‌باشد.

2- در مرحله دوم ضرایب چند جمله‌ای  $C_j = 1, 2, \dots, M$  با استفاده از روابط (9) و (10) تعیین می‌گردد. در ابتدا برای محاسبه بردار پاسخ صحیح  $g, N$  تحلیل پاسخ سازه‌ای قطعی بر اساس نقاط نمونه انجام شده و سپس با استفاده از رابطه (11) ماتریس ضرایب تعیین می‌گردد. پارامترهای ورودی بر اساس تبدیل توزیع نرمال استاندارد رابطه (7) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_j^i = \rho_j^i * (f\sigma_{x_j}) + \mu_{x_j} \tag{21}$$

$i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, m$

3- در این مرحله میزان دقت مد نظر باید مورد بررسی قرار گیرد. برای تعیین میزان دقت، پاسخ پیش بینی شده رابطه (12) که با استفاده از ماتریس ضرایب حاصل شده است، باید توسط پاسخ صحیح که بر اساس شبیه سازی مستقیم بدست آمده مورد قیاس قرار گیرد. اگر میزان دقت مورد نظر ارضاء شود به مرحله بعد رفته و در غیر این صورت باید تعداد نقاط نمونه با استفاده از بهبود سطح ترتیب پراکندگی شبکه‌ای افزایش یابد و همه فرایندهای تشریح شده از مرحله اول تکرار شود تا دقت مورد نظر حاصل گردد. برای بررسی دقت مورد نظر، از خطای جذر میانگین مربعات<sup>5</sup> بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g_i - g_{id})^2} \tag{22}$$

که در آن  $g_i$  مقدار پیش بینی شده و  $g_{id}$  مقدار واقعی می‌باشد. برای دستیابی به یک دقت مطلوب  $RMSE$  باید دارای مقداری کمتر از 0.005 باشد [21].

که در آن  $\rho_1$  و  $\rho_2$  دو پارامتر تصادفی مستقل از هم می‌باشد. با توجه به فرم سری رابطه (12) می‌توان بسط چند جمله‌ای آشوب رابطه (14) را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 g &= g(\rho_1, \rho_2) = C_0 + C_1\rho_1 + C_2\rho_2 \\
 &\quad + C_4\rho_1\rho_2 \\
 &\quad + C_3(\rho_1^2 - 1) \\
 &\quad + C_5(\rho_2^2 - 1) + \dots \\
 &= \sum_{j=0}^{M-1} C_j Q_j
 \end{aligned} \tag{15}$$

#### 4- تحلیل قابلیت اطمینان بر اساس روش چند جمله‌ای آشوب برای سازه‌های کامپوزیتی

برای تعیین پاسخ سیستم‌های نامعین می‌توان از بسط چند جمله‌ای آشوب رابطه (12) به عنوان یک مدل جایگزین در فرمول بندی غیر نفوذی<sup>1</sup> استفاده نمود [14]. از اینرو بسط چند جمله‌ای آشوب می‌تواند برای آنالیز قابلیت اطمینان و تقریب پاسخ سازه‌ای کامپوزیت‌ها با وجود متغیرهای تصادفی نرمال مورد استفاده قرار گیرد. در ابتدا نقاط نمونه برای متغیرهای تصادفی نرمال با استفاده از یک روش ترتیب پراکندگی شبکه‌ای<sup>2</sup> تعیین گردیده و پاسخ دقیق سازه ( $g$ ) برای این نقاط محاسبه می‌گردد. سپس با جایگذاری این نقاط در چند جمله‌ای‌های متعامد  $H$  و استخراج ضرایب چند جمله‌ای با استفاده از رابطه (11)، پاسخ سازه‌ای کامپوزیت‌ها با وجود عدم قطعیت‌ها در متغیرهای ورودی به صورت سطح پاسخ<sup>3</sup> مدل شده و میزان خطا برآورد می‌شود. روند تفضیلی این فرایند بشرح زیر است:

1- در مرحله اول نقاط نمونه با استفاده از روش ترتیب پراکندگی شبکه‌ای کلینشو-کرتیس<sup>4</sup> تعیین می‌گردد. در این روش، برای هر متغیر تصادفی نرمال زمانی که  $k$  سطح ترتیب در نظر گرفته شده باشد،  $m_i$  تعداد نقاط و  $\rho_j^{(i)}$  مکان آن نقاط در بازه  $[-1, 1]$  به صورت زیر تعیین می‌شوند [18-20]:

$$m_i = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-1} + 1, & k > 1 \end{cases} \tag{16}$$

$$\rho_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ -\cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m_i-1}\right), & j = 1, 2, \dots, m_i \quad k > 1 \end{cases} \tag{17}$$

که اندیس  $j$  نشان دهنده زامین متغیر تصادفی نرمال و  $i$  نشان دهنده  $i$ امین مکان نقطه می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط کلینشو با سطح ترتیب  $k$  با ترکیبات ایجاد شده بین سطوح  $k+1$  و  $m+k$  به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$A(k, m) = U_{k+1 \leq i_1 + \dots + i_m \leq m+k} (\rho^{i_1} \times \dots \times \rho^{i_m}) \tag{18}$$

که در آن  $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  می‌باشد. در نهایت نقاط نمونه برای متغیرهای تصادفی به صورت بردار  $(\rho_1^i, \rho_2^i, \dots, \rho_m^i), i = 1, 2, \dots, N$  قابل بیان است که  $N$  تعداد نقاط نمونه می‌باشد. برای مثال مجموعه نقاط کلینشو با سطوح ترتیب 2، 3، 4 و با در نظر گرفتن یک فضای دو بعدی به صورت زیر تعیین می‌شود:

<sup>4</sup> Sparse Cleanshaw-Curtis (SCC)

<sup>5</sup> Root Mean Square Error (RMSE)

<sup>1</sup> Non-intrusive formulation

<sup>2</sup> Sparse collocation method

<sup>3</sup> Response surface

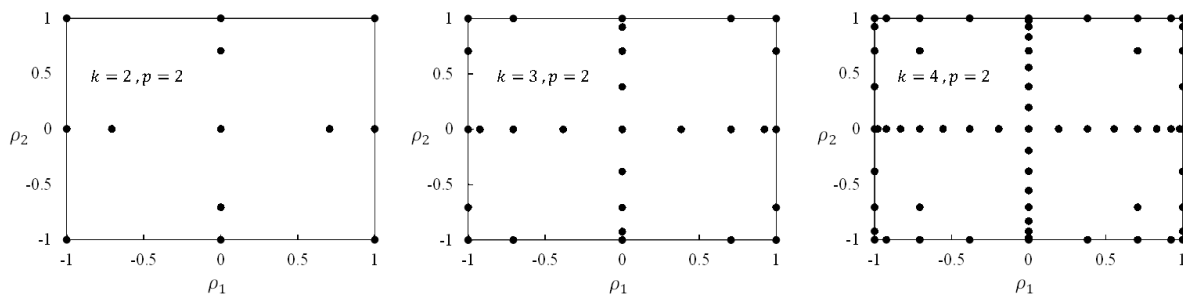


Fig.1. Two-dimensional Cleanshaw-Curtis nodes with different collocation levels

شکل 1 مجموعه نقاط کلینشو-کرتیس در فضای دو بعدی با سطح ترتیب های مختلف

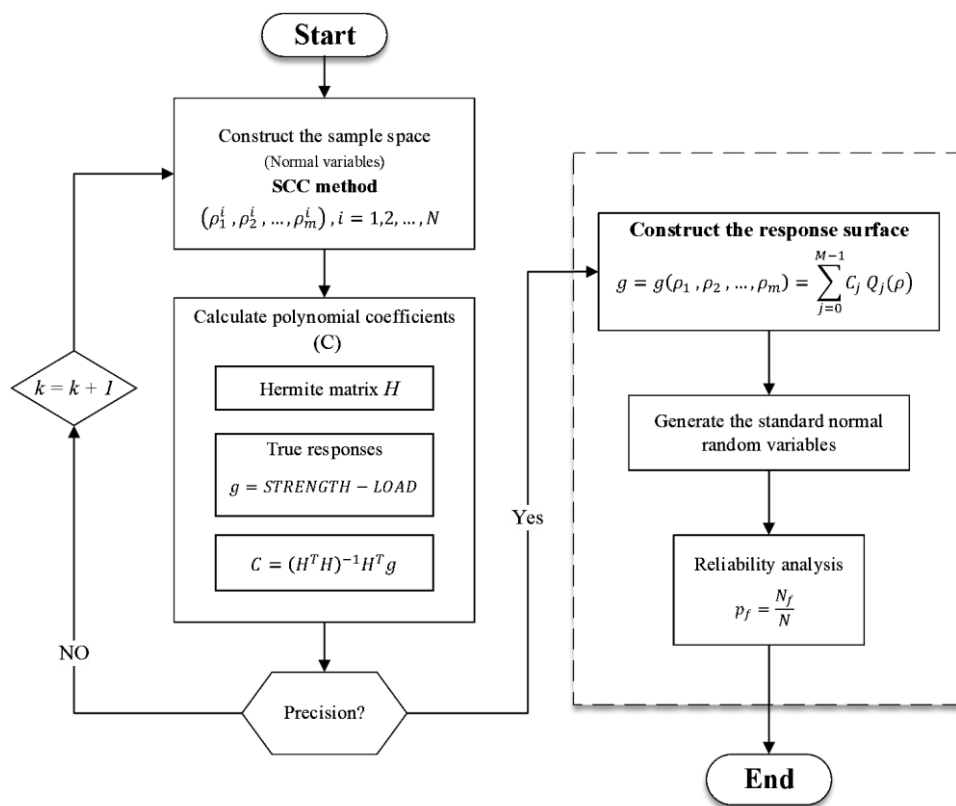


Fig.2. The flow chart of reliability analysis of composite structures based on the polynomial chaos expansion method

شکل 2 فلوچارت تحلیل عدم قطعیت سازه‌های کامپوزیتی با استفاده از بسط چند جمله‌ای آشوب

5-1- تعریف مسئله

یک صفحه کامپوزیتی از الیاف شیشه با ابعاد  $150 \times 150$  میلیمتر در معرض بارگذاری عرضی یکنواخت  $q$  و تکیه گاه ساده در لبه ها در نظر گرفته شده است (شکل 3). لایه چینی و ضخامت هر لایه به ترتیب  $[0^\circ/30^\circ/45^\circ/90^\circ]$  و  $[-45^\circ]$  و  $0.329$  میلیمتر می‌باشد و همچنین تمام خواص غیرقطعی اجزاء تشکیل دهنده در جدول 1 ارائه شده است. برای تحلیل قابلیت اطمینان صفحه کامپوزیتی مورد نظر و محاسبه احتمال شکست لایه‌ها، ابتدا معادلات حاکم بر صفحه استخراج شده و سپس تنش‌های ایجاد شده تحت بار عرضی یکنواخت  $q$  در هر لایه محاسبه گردیده است. سپس با تعریف یک تابع عملکرد به فرم رابطه (1) با استفاده از روش توسعه یافته مبنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب و

4- سرانجام مدل سطح پاسخ با استفاده از رابطه (12) برای سازه کامپوزیتی با وجود عدم قطعیت در رفتار آن، قابل بیان خواهد بود. پس از ساخت مدل سطح پاسخ و تولید متغیرهای تصادفی در فضای استاندارد و اعمال این متغیرها بر روی مدل سطح پاسخ، قابلیت اطمینان سازه کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. تمامی فرایندهای تشریح شده در فلوچارت شکل 2 ارائه شده است.

5- مثال عددی

در این بخش به منظور اعتبار سنجی روش توسعه یافته مبتنی بر روش بسط چند جمله‌ای آشوب با تعداد پارامترهای ورودی با گستردگی بالا، یک مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (27)$$

که در آن  $X_m$  و  $Y_n$  توابع تقریبی مجاز برای مسئله مقدار مرزی و ضرایب  $A_{mn}$  ثابت می‌باشند که با اعمال روش ریلی-ریتز<sup>1</sup> و حل معادله جبری  $M \times N$  زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \sum_i^M \sum_j^N \{ D_{11} \int_0^a \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_0^b Y_j Y_n dy \\ & + D_{12} \left[ \int_0^a X_m \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \int_0^b Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \right. \\ & \quad \left. + \int_0^a X_i \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_0^b Y_n \frac{d^2 Y_j}{dy^2} dy \right] \\ & + D_{22} \int_0^a X_i X_m dx \int_0^b \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \\ & + 4D_{66} \int_0^a \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx \int_0^b \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy \\ & + 2D_{16} \left[ \int_0^b \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{dX_m}{dx} dx \int_0^b Y_j \frac{dY_n}{dy} dy \right. \\ & \quad \left. + \int_0^a \frac{dX_i}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \int_0^b Y_n \frac{dY_j}{dy} dy \right] \\ & + 2D_{26} \left[ \int_0^a X_m \frac{dX_i}{dx} dx \int_0^b \frac{dY_j}{dy} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \right. \\ & \quad \left. + \int_0^a X_i \frac{dX_m}{dx} dx \int_0^b \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{dY_n}{dy} dy \right] \} A_{ij} \\ & = q_0 \int_0^a X_m dx \int_0^b Y_n dy \\ & (m = 1, 2, \dots, M \text{ و } n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (28)$$

برای صفحه مستطیلی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه ها، توابع  $X$  و  $Y$  را می‌توان به صورت توابع مثلثاتی زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{a} & Y_n(y) &= \sin \frac{n\pi y}{b} \\ X_i(x) &= \sin \frac{m\pi i}{a} & Y_j(y) &= \sin \frac{n\pi j}{b} \end{aligned} \quad (29)$$

با جایگذاری معادلات (29) و حل معادله (28)، ضرایب ثابت رابطه (27) قابل محاسبه خواهند بود. با استفاده از معادلات ساختاری مولفه‌های تنش برای هر لایه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

ساخت مدل سطح پاسخ، تحلیل قابلیت اطمینان صفحه کامپوزیتی در دو مرحله (مرحله اول شامل عدم قطعیت خواص مکانیکی و استحکام‌های فشاری و کششی و بارگذاری جمعا شامل 13 پارامتر و مرحله دوم شامل عدم قطعیت خواص مکانیکی و استحکام‌های فشاری و کششی، بارگذاری و عدم قطعیت هندسی جمعا شامل 18 پارامتر) انجام خواهد گرفت و احتمال شکست سازه محاسبه می‌گردد به طوری که این احتمال شکست تابعی از عدم قطعیت خواص مکانیکی، هندسی و استحکام سازه به فرم زیر قابل بیان می‌باشد.

$$p_f = p_f(\text{elastic properties, strengths, and loading uncertainties}) \quad (23)$$

$$p_f = p_f(\text{elastic properties, strengths, loading, and geometrical uncertainties}) \quad (24)$$

شایان ذکر است که هدف از تحلیل قابلیت اطمینان سازه در دو مرحله با بهره‌گیری از روش توسعه یافته، بررسی کارایی و برتری روش توسعه یافته با افزایش تعداد پارامترهای دارای عدم قطعیت نسبت به روش مونت کارلو می‌باشد.

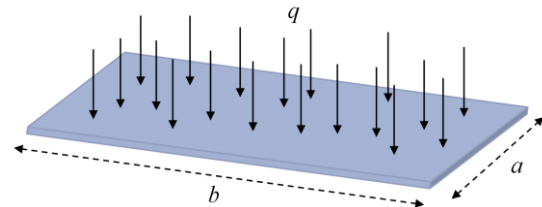


Fig.3. Schematic of a composite plate subjected to a uniform transverse load of  $q$

شکل 3 صفحه کامپوزیتی تحت بار عرضی یکنواخت  $q$

### 5-2- استخراج معادلات حاکم بر مسئله

برای استخراج معادلات حاکم بر صفحه کامپوزیتی شکل 3 که در معرض بارگذاری عرضی یکنواخت  $q$  قرار دارد از تئوری کلاسیک چندلایه‌های ناهمسانگرد استفاده شده است. با توجه به لایه چینی متقارن چند لایه مورد نظر، ماتریس سفتی کوپلینگ [B] ثابت و برابر صفر می‌باشد. در این حالت، معادله حرکت بر حسب خیز صفحه کامپوزیتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) ماتریس سفتی خمشی و  $w$  خیز صفحه می‌باشد. بارگذاری عرضی یکنواخت  $q$  را می‌توان به صورت یک سری فوریه به صورت زیر نوشت:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (26)$$

با توجه به رابطه (26)، حل معادله دیفرانسیل رابطه (25) را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

<sup>1</sup> Rayleigh-Ritz

جدول 1 داده‌های غیر قطعی برای صفحه کامپوزیتی مورد مطالعه

Table.1. Probabilistic information of the uncertain input parameters for the composite plate [25].

Uncertain Parameter	Mean values	Standard deviations	Uncertain Parameter	Mean values	Standard deviations
$q$	0.0394 MPa	0.00985 MPa	$X_T$	0.345 GPa	0.043125 GPa
$E_{11}$	24.51 GPa	1.2255 GPa	$X_C$	0.345 GPa	0.043125 GPa
$E_{22}$	7.77 GPa	0.3885 GPa	$Y_T$	0.0345 GPa	0.004313 GPa
$G_{12}$	3.34 GPa	0.167 GPa	$Y_C$	0.0965 GPa	0.012063 GPa
$\nu_{12}$	0.078	0.0039	$S$	0.0138 GPa	0.001725 GPa
$\nu_{21}$	0.246	0.0123	$a$	150 mm	1.5 mm
$b$	150 mm	1.5 mm	$\theta_i$ $i \in \{1,2, \dots, 5\}$	$[0^0/30^0/45^0/90^0/-45^0]_s$	$3^0$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} & F_2 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \\
 F_{11} &= \frac{1}{X_T X_C} & F_{22} &= \frac{1}{Y_T Y_C} \\
 F_{66} &= \frac{1}{S^2} & F_{12} &= -0.5\sqrt{F_{11} F_{22}}
 \end{aligned} \quad (34)$$

در رابطه (33) به ازاء مقادیر مثبت تابع عملکرد، لایه کامپوزیتی در حالت امن و به ازاء مقادیر منفی آن، لایه دچار شکست می‌شود. به منظور تحلیل قابلیت اطمینان این صفحه کامپوزیتی، از مدل سطح پاسخ مربوط به تابع عملکرد (33)، بر اساس بسط چند جمله‌ای آشوب استفاده شده و در نهایت احتمال شکست هر لایه‌ها برآورد می‌شود.

### 3-5- نتایج و بحث و بررسی

#### 3-5-1- عدم قطعیت خواص مکانیکی، بارگذاری و ابعاد سازه (13 پارامتر غیر قطعی)

در این بخش تحلیل قابلیت اطمینان بر اساس تابعی از عدم قطعیت خواص مکانیکی، بارگذاری و ابعاد هندسی سازه (مجموعاً 13 پارامتر غیر قطعی) انجام گرفته و نتایج حاصل از این تحلیل و احتمال شکست لایه‌ها با استفاده از روش توسعه یافته مبتنی بر روش بسط چند جمله‌ای آشوب در جدول 2 ارائه شده است. این احتمال شکست به صورت تابعی از منابع عدم قطعیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_f = p_f(q, E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}, X_T, X_C, Y_T, Y_C, S, a, b) \quad (35)$$

تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی از 500 تا 10000 سیکل افزایش یافته است و در هر مورد احتمال شکست هر لایه محاسبه شده است. ضریب واریانس (CoV) نیز برای بررسی دقت احتمال شکست تخمین زده شده، ارائه شده است. در اینجا مرتبه ماتریس هرمیتی از چند جمله‌ای آشوب ( $p$ ) برابر 4 و سطح ترتیب ( $k$ ) برابر 3 در نظر گرفته شده است.

مشاهده می‌شود که شکست لایه‌ها از لایه زیرین (لایه 10) شروع شده و پایداری این ترتیب با افزایش تعداد سیکل‌های شبیه‌سازی به وضوح قابل مشاهده می‌باشد. همچنین متناظر با همگرایی ضریب واریانس و افزایش تعداد

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(k)} &= -z(\bar{Q}^{(k)})_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{Q}^{(k)}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \bar{Q}^{(k)}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \sigma_y^{(k)} &= -z(\bar{Q}^{(k)})_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{Q}^{(k)}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \bar{Q}^{(k)}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \sigma_{xy}^{(k)} &= -z(\bar{Q}^{(k)})_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{Q}^{(k)}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \bar{Q}^{(k)}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
 \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن  $K$  شماره لایه،  $\bar{Q}$  ماتریس سفتی دوران یافته هر لایه و  $Z$  فاصله لایه مورد نظر از لایه میانی می‌باشد. ماتریس سفتی دوران یافته به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \quad (31)$$

که در آن  $[Q]$  ماتریس سفتی هر لایه، بالانویس  $T$  نمایان‌گر ترانزفاده ماتریس، و  $[T]$  ماتریس دوران به عنوان تابعی از  $\theta$  که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

برای تخمین احتمال شکست صفحه کامپوزیتی، تابع عملکرد با استفاده از معیار شکست سای-وو<sup>1</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = 1 - (F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2) \quad (33)$$

که در آن ضرایب استحکام  $F_i$  و  $F_{ij}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

<sup>1</sup> Tsai-Wu

جدول 2 احتمال شکست لایه‌ها براساس روش سطح پاسخ

Table.2. Failure probability of layers based on the response surface

Ply number	Number of simulation					
	500	1000	3000	5000	9800	10000
ply-1	0.4291 (0.0519*)	0.4274 (0.0369)	0.4302 (0.0212)	0.4383 (0.0162)	0.4383 (0.0115)	0.4379 (0.0114)
ply-2	0	0	0	0	0	0
ply-3	0	0	0	0	0	0
ply-4	0	0	0	0	0	0
ply-5	0	0	0	0	0	0
ply-6	0	0	0	0	0	0
ply-7	0	0	0	0	0	0
ply-8	0	0	0	0	0	0
ply-9	0	0.001 (0.995)	0.0037 (0.3009)	0.0031 (0.2587)	0.0032 (0.0115)	0.0033 (0.0114)
ply-10	0.4551 (0.0494)	0.4526 (0.0351)	0.4471 (0.0205)	0.4447 (0.016)	0.4395 (0.0115)	0.4383 (0.0114)

\* مقدار داخل پرانتز نشانگر ضریب واریانس (CoV) می باشد.

معیار اعتبار سنجی، به خوبی واضح است که روش سطح پاسخ دارای دقت محاسباتی بالا و خطایی برابر 0.6 درصد می باشد.

مزیت دوم روش سطح پاسخ، یعنی زمان اجرای شبیه سازی، از نمودار شکل 6 به خوبی مشهود است. همان طور که مشاهده می شود زمان اجرای مدل سطح پاسخ با افزایش تعداد سیکل های شبیه سازی نسبت به روش مونت کارلو بسیار ناچیز و قابل چشم پوشی می باشد. ولی ملاحظه می شود که با افزایش تعداد سیکل های شبیه سازی زمان اجرای روش مونت کارلو دچار تغییرات بالایی شده و به صورت غیر خطی افزایش می یابد. این بدان دلیل است که در شبیه سازی مونت کارلو، معادلات دیفراسیل حاکم بر مسئله می بایست به طور کامل به تعداد سیکل های شبیه سازی حل شود در حالیکه در مورد مدل سطح پاسخ فقط یک معادله جبری که هزینه محاسباتی بسیار پایینی دارد حل می شود. یک حقیقت جالب دیگر از مقایسه زمان اجرای این دو روش این است که در تعداد سیکل های شبیه سازی پایین زمان اجرای مونت کارلو کمتر از زمان اجرای مدل سطح می باشد، اما باید در نظر داشت که در این تعداد سیکل شبیه سازی، میزان همگرایی مطلوب حاصل نشده است. به همین دلیل برای رسیدن به یک همگرایی مطلوب باید تعداد سیکل های شبیه سازی افزایش یابد که به تبع آن زمان اجرا نیز افزایش می یابد. در مقابل، زمان اجرای مدل سطح پاسخ در تمام سیکل ها تا رسیدن به همگرایی مطلوب تقریباً ثابت می باشد. سیستم مورد استفاده دارای پردازشگر 4 هسته ای Intel Core i7-7500U 2.5GHz و 8 GB DDR4 RAM می باشد و شبیه سازی با بهره گیری از الگوریتم پردازش موازی نرم افزار متلب انجام گرفته است

سیکل های شبیه سازی، ملاحظه می شود که در تعداد سیکل 9800 احتمال شکست لایه ها تقریباً همگرا می شوند. 43 درصد احتمال شکست در لایه یکم و دهم در صفحاتی که تحت بار فشاری عرضی یکنواخت قرار دارند پیش بینی شده است. همچنین 0.3 درصد احتمال شکست در لایه نهم وجود دارد و بقیه لایه ها در حالت امن می باشند. در شکل 4 نحوه انتخاب مقدار پارامتر سطح ترتیب  $k$  مربوط به تعیین نقاط کلینشو-کرتیس نشان داده شده است. همچنانکه مشاهده می شود با افزایش  $k$ ، احتمال شکست افزایش یافته و زمانی که سطح ترتیب دارای مقادیری برابر 3 و 4 می باشد احتمال شکست دارای مقداری برابر و ثابت 0.438 می باشد. این نشان دهنده آن است که در  $k = 3$  احتمال شکست به یک مقدار ثابت همگرا شده است. بنابراین برای کاهش هزینه های محاسباتی مقدار سطح ترتیب برای تعیین نقاط کلینشو-کرتیس برابر 3 در نظر گرفته شده است. تحلیل قابلیت اطمینان بر اساس روش بسط چند جمله ای آشوب و ساخت مدل سطح پاسخ، نسبت به روش مونت کارلو از دو لحاظ، نرخ همگرایی و زمان همگرایی، بسیار حائز اهمیت است. در شکل 5 نرخ همگرایی روش مونت کارلو و مدل سطح پاسخ و در شکل 6 زمان همگرایی این دو روش مورد مقایسه قرار گرفته است. در نمودار شکل 5 مشاهده می شود که با افزایش تعداد سیکل های شبیه سازی، احتمال شکست لایه دهم با روش مونت کارلو در تعداد سیکل 15000 و در روش سطح پاسخ با 9800 سیکل شبیه سازی همگرا شده است.

پر واضح است که روش سطح پاسخ نسبت به روش مونت کارلو از نرخ همگرایی بالاتری برخوردار می باشد چرا که در تعداد سیکل شبیه سازی پایین تری به همگرایی رسیده است. همچنین با مقایسه دقت نتایج روش سطح پاسخ نسبت به نتایج بدست آمده از روش شبیه سازی مستقیم مونت کارلو به عنوان



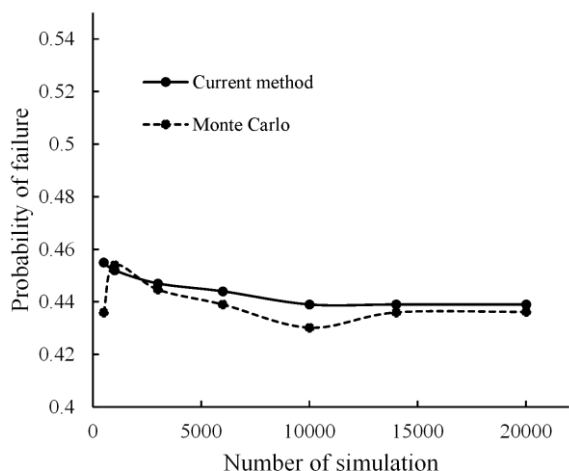


Fig.5. Comparison between the convergence rate of the response surface method and MCS

شکل 5 مقایسه همگرایی روش مونت کارلو و روش سطح پاسخ

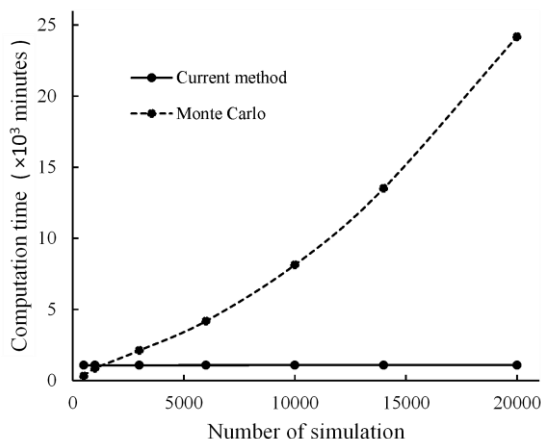


Fig.6. Comparison between the computation times of the response surface method and MCS

شکل 6 نمودار مقایسه زمان اجرای مونت کارلو و مدل سطح پاسخ

### 6- نتیجه‌گیری

هدف از مقاله حاضر ارائه یک روش توسعه یافته مبتنی بر روش بسط چند جمله‌ای آشوب برای تحلیل قابلیت اطمینان با وجود منابع عدم قطعیت گسترده در خواص فیزیکی و مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی می‌باشد. همان‌طور که واضح است تحلیل قابلیت اطمینان با استفاده از روش‌های سنتی از جمله مونت کارلو دارای هزینه محاسباتی بسیار بالا می‌باشد. در این مقاله سعی بر آن شده که با ارائه یک روش توسعه یافته برای تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی مشکلات حاصل از روش مونت کارلو چون هزینه محاسباتی بالا، کاهش یابد. در نهایت با انجام یک مثال عددی در دو حالت با افزایش پارامترهای دارای عدم قطعیت و بررسی نتایج مشاهده شد که روش توسعه یافته از میزان دقت محاسباتی 0.6 درصد نسبت به روش مونت کارلو برخوردار بوده و میزان نرخ همگرایی نسبت به روش مونت کارلو با وجود افزایش پارامترهای دارای عدم قطعیت 33.66 درصد بهبود یافته است. همچنین هزینه محاسباتی این روش نسبت به روش مونت کارلو تا رسیدن به همگرایی 91.98

### 5-3-2- عدم قطعیت خواص مکانیکی، بارگذاری، ابعاد سازه و جهت-گیری لایه‌ها (18 پارامتر غیر قطعی)

در این بخش علاوه بر عدم قطعیت خواص مکانیکی، بارگذاری و ابعاد سازه، عدم قطعیت جهت‌گیری لایه‌ها نیز در تحلیل قابلیت اطمینان سازه و محاسبه احتمال شکست لایه‌ها با استفاده از روش توسعه یافته در نظر گرفته شده است (مجموعاً 18 پارامتر غیر قطعی). این احتمال شکست به صورت تابعی از عدم قطعیت‌ها به فرم زیر بیان می‌شود:

$$p_f = p_f(q, E_1, E_2, G_{12}, v_{12}, v_{21}, X_T, X_C, Y_T, Y_C, S, a, b, \theta_i)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, 5\} \quad (36)$$

با توجه به رابطه (31) و (32)، ماتریس دوران به فرم رابطه (37) بیان می‌شود:

$$[T] = [T(\sigma_\theta, \mu_\theta)] \quad (37)$$

که در آن  $\sigma_\theta$  مقدار متوسط جهت‌گیری هر لایه و  $\mu_\theta$  انحراف معیار جهت-گیری لایه‌ها می‌باشد که در این مطالعه  $3^0$  در نظر گرفته شده است. مرتبه ماتریس هرمیتی از چند جمله‌ای آشوب برابر 4 و همچنین سطح ترتیب برابر 3 انتخاب گردیده است. در جدول 3 نتایج حاصل تحلیل قابلیت اطمینان احتمال شکست لایه دهم با استفاده از روش توسعه یافته و روش مونت کارلو مورد قیاس قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود که احتمال شکست با استفاده از روش توسعه یافته و روش مونت کارلو به ترتیب در تعداد سیکل 14000 و 24000 همگرا شده است و دارای مقادیری به ترتیب برابر 0.4220 و 0.4231 می‌باشند. همان‌طور که انتظار می‌رفت این احتمال شکست نسبت به حالتی که عدم قطعیت جهت‌گیری لایه‌ها در نظر گرفته نشده بود، کاهش یافته است. همان‌طور که مشهود است با افزایش منابع عدم قطعیت، نرخ همگرایی در هر دو روش کاهش یافته است. با این حال، با وجود افزایش پارامترهای ورودی، نرخ همگرایی روش جاری، با حفظ دقت، در مقایسه با روش مونت کارلو بسیار بالاتر می‌باشد.

از نقطه نظر هزینه محاسباتی، با وجود افزایش تعداد نقاط کلینشو-کرتیس و به تبع آن افزایش زمان محاسباتی اولیه جهت ساخت مدل سطح پاسخ، روش سطح پاسخ مزیت خود را نسبت به روش مونت کارلو حفظ کرده و هزینه محاسباتی آن به مراتب از این روش پایین تر می‌باشد. لذا می‌توان روش مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب را به عنوان یک روش کارآمد در تحلیل قابلیت اطمینان و پاسخ غیر قطعی در سازه‌های کامپوزیتی در نظر گرفت.

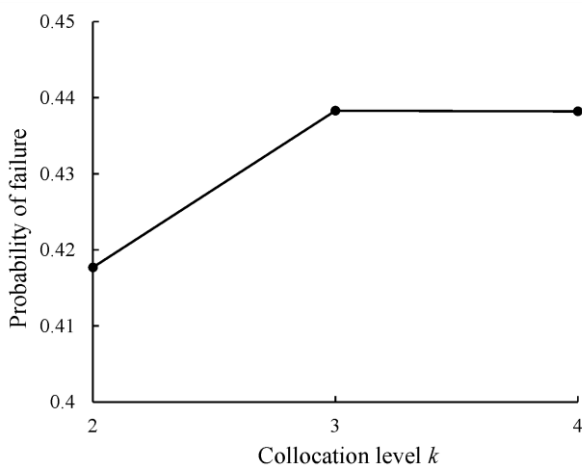


Fig.4. The Convergence of results against the collocation level  
شکل 4 نمودار همگرایی بر حسب سطح ترتیب

- [15] Choi, S-K. Grandhi, RV. Canfield, RA. Pettit, CL., "Polynomial Chaos Expansion with Latin Hypercube Sampling for Estimating Response Variability," AIAA Journal, Vol. 42, pp. 1191–1198, 2004.
- [16] Xiu, D. Hesthaven, JS., "High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs," SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 27, pp. 1118–1139, 2005.
- [17] Xiu, D. Karniadakis, GE., "Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos," Journal of Computational Physics, Vol. 187, pp. 137–167, 2003.
- [18] Nobile, F. Tempone, R. Webster, CG., "A Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data," SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 46, pp. 2309–2345, 2008.
- [19] Burkardt, J., "Slow Exponential Growth for Clenshaw Curtis Sparse Grids," 2014.
- [20] Bhaduri, A. Graham-Brady, L., "An efficient adaptive sparse grid collocation method through derivative estimation. Probabilistic Engineering Mechanics," Vol. 51, pp. 11–22, 2018.
- [21] Dey, S. Mukhopadhyay, T. Spickenheuer, A. Gohs, U. Adhikari, S., "Uncertainty Quantification in Natural Frequency of Composite Plates - An Artificial Neural Network Based Approach," Advanced Composites Letters, Vol. 25, pp. 43-48, 2016.
- [22] Reddy, JN., "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis," 2nd ed. USA, CRC Press, 2004.
- [23] Ghannadpour, AM. Kurkaani Barvaj, A., "Ultimate strength analysis of imperfect composite plates under both in-plane compressive load and lateral pressure using Ritz method," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, pp. 1-10, 2018.
- [24] Ghannadpour, A. Barekati, M., "Post-buckling analysis of anti-symmetric cross-ply composite plates under end-shortening," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, pp. 35-42, 2018.
- [25] Jeong, HK. Sheno, RA., "Reliability analysis of mid-plane symmetric laminated plates using direct simulation method," Composite Structures, Vol. 43, pp. 1-13, 1998.;43:1–13.

درصد کمتر می باشد. ازینرو براساس نتایج حاصل شده، برتری این روش بر روش‌های سنتی چون مونت کارلو به وضوح قابل مشاهده می‌باشد و می‌توان روش مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب را به عنوان یک روش کارآمد در تحلیل قابلیت اطمینان سازه‌های کامپوزیتی با گستردگی بالا در منابع عدم قطعیت در نظر گرفت.

جدول 3 احتمال شکست بر اساس روش سطح پاسخ

Table.3. Failure probability based on the response

Method	Probability of failure	Number of Simulation	Computation time (minutes)
Current method	0.4220	14000	1990
Monte Carlo	0.4231	24000	26145

#### 7- مراجع

- [1] Saeedifar, M. Najafabadi, MA. Toudeshky, HH. Mohammadi, R., "Investigation of Initiation and Evolution of Delamination in Glass/Epoxy Laminated Composites Using Acoustic Emission Method," In Persian, AmirKabir Journal of Science & Research Mechanical Engineering, Vol. 48, No. 4, pp. 153-156, 2017.
- [2] Dey, S. Mukhopadhyay, T. Adhikari, S., "Metamodel based high-fidelity stochastic analysis of composite laminates: A concise review with critical comparative assessment," Composite Structures, Vol. 171, pp. 227–250, 2017.
- [3] Baran, I. Cinar, K. Ersoy, N. Akkerman, R. Hattel, JH., "A Review on the Mechanical Modeling of Composite Manufacturing Processes," Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 365–395, 2017.
- [4] Fisher, J. Bhattacharya, R., "Linear quadratic regulation of systems with stochastic parameter uncertainties," Automatica Vol. 45, pp. 2831–2841, 2017.
- [5] Chen, X. Qiu, Z., "A novel uncertainty analysis method for composite structures with mixed uncertainties including random and interval variables," Composite Structures Vol. 184, pp. 400–410, 2018.
- [6] Thapa, M. Mulani, SB. Walters, RW., "Stochastic multi-scale modeling of carbon fiber reinforced composites with polynomial chaos," Composite Structures, 2018.
- [7] Peng, X. Li, D. Wu, H. Liu, Z. Li, J. Jiang, S. et al., "Uncertainty analysis of composite laminated plate with data-driven polynomial chaos expansion method under insufficient input data of uncertain parameters," Composite Structures, Vol. 209, pp. 625–633, 2019.
- [8] Sasikumar, P. Venketeswaran, A. Suresh, R. Gupta, S., "A data driven polynomial chaos based approach for stochastic analysis of CFRP laminated composite plates," Composite Structures, Vol. 125, pp. 212–227, 2015.
- [9] Balokas, G. Czichon, S. Rolfes, R., "Neural network assisted multiscale analysis for the elastic properties prediction of 3D braided composites under uncertainty," Composite Structures, Vol. 183, pp. 550–562, 2018.
- [10] Naskar, S. Mukhopadhyay, T. Sriramula, S., "Probabilistic micromechanical spatial variability quantification in laminated composites," Composites Part B: Engineering, Vol. 151, pp. 291–325, 2018.
- [11] Ghasemi, H. Rafiee, R. Zhuang, X. Muthu, J. Rabczuk, T., "Uncertainties propagation in metamodel-based probabilistic optimization of CNT/polymer composite structure using stochastic multi-scale modeling," Computational Materials Science, Vol. 85, pp. 295–305, 2014.
- [12] Whiteside MB., "Stochastic Analysis of Composite Materials. Doctoral dissertation," Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2012.
- [13] Marburg, S. Hardtke, H-J., "Uncertainty quantification in stochastic systems using polynomial chaos expansion," International Journal of Applied Mechanics, Vol. 02, pp. 305–353, 2010.
- [14] Choi, S-K. Grandhi, RV. Canfield, RA., "Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior," Computers & Structures, Vol. 82, pp. 1113–1121, 2004.