



کمی سازی عدم قطعیت رفتار ارتعاشی کامپوزیت کتان/اپوکسی بر اساس روشی مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب

محمد نوریان¹، محمد راوندی^{2*}

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 19919-43344، ravandi@kntu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

سازه‌های کامپوزیتی به دلیل دارا بودن خواص ویژه، امروزه به فراوانی در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. ترکیب ناهمگن مواد کامپوزیتی و همچنین عیوب ناخواسته ایجاد شده در فرایند ساخت همواره عدم قطعیت‌هایی در خواص نهایی سازه ایجاد می‌کنند. به ویژه در مواد کامپوزیتی تقویت شده با الیاف طبیعی که خواص آن به دلیل منشأ طبیعی دارای یک تغییر پذیری ذاتی بسیار بالا می‌باشد، خواص نهایی سازه‌های ساخته شده از این مواد را با عدم قطعیت‌های قابل توجهی همراه می‌سازد. لذا در پژوهش حاضر به تحلیل عدم قطعیت چند مقیاسی کامپوزیت کتان/اپوکسی تک جهته پرداخته شده است. بر این اساس، در گام نخست خواص مکانیکی غیر قطعی این نوع مواد در مقیاس میکرو و ماکرو بر مبنای نتایج تجربی گزارش شده در منابع استخراج گردیده و سپس با بهره‌گیری از آزمون‌های آماری، مدل احتمالی این خواص مشخص شده است. سپس با بکارگیری روش مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب، به عنوان یک روش بهینه از لحاظ هزینه محاسباتی، و همچنین با بهره‌گیری از روش‌های نمونه برداری کلینشو-کرتیس و هایپرکیوب، به تحلیل عدم قطعیت رفتار ارتعاشی کامپوزیت کتان/اپوکسی پرداخته شده است. افزون بر این، نتایج بدست آمده از این روش با نتایج روش مونت کارلو به عنوان متداول‌ترین و پرهزینه‌ترین روش تحلیل عدم قطعیت، مورد صحت‌گذاری قرار گرفته است که انطباق خوبی را نشان داده است.

دریافت: 1399/08/28

پذیرش: 1400/03/30

کلیدواژه‌ها:

تحلیل عدم قطعیت

کامپوزیت کتان/اپوکسی

رفتار ارتعاشی

بسط چند جمله‌ای آشوب

کلینشو-کرتیس

Uncertainty quantification of natural frequencies of flax/epoxy composite laminates based on a polynomial chaos expansion method

Mohammad Noorian, Mohammad Ravandi*

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.Box. 19919-43344, Tehran, Iran, ravandi@kntu.ac.ir

Keywords

Uncertainty quantification
Flax fibers
Vibrational behavior
Polynomial chaos expansion
Cleanshaw –Curtis

Abstract

Non-homogeneous mixture and unintentional flaws during the production stage have always given rise to uncertainties in the structural response of composite materials. This is intensified in the composites reinforced with natural fibers due to the natural origin of the fibers. In this study, an uncertainty analysis of the frequency response of a unidirectional flax/epoxy composite, as one of the common natural fiber composites, were carried out. The variability of the fiber elastic properties, fiber density, fiber volume fraction, and the misalignment of ply orientations were considered as the uncertainty sources. The uncertain input variables were divided into normal and uniform variables through the Anderson-Darling test, based on the various experimental data acquired from the literature. Due to the high number of uncertain input variables, a computationally efficient response surface approach based on the polynomial chaos expansion was adopted and modified accordingly to take the multi-type stochasticity of the input parameters into account. Moreover, the uncertainty analysis results obtained from the response surface method were validated by the direct Monte Carlo simulation, and the accuracy and efficiency of the surrogate model were demonstrated.

1- مقدمه

منجر به بروز مشکلاتی چون آلودگی‌های زیست محیطی گردیده است. مواد کامپوزیتی تقویت شده با الیاف مصنوعی از منابع تجدید ناپذیر به شمار آمده و تقریباً غیر قابل بازیافت می‌باشند. از اینرو، بهره‌گیری از موادی چون کامپوزیت‌های الیاف طبیعی به دلیل منشأ طبیعی آنها، رویکردی است که امروزه در راستای مقابله با مشکلات زیست محیطی به طور گسترده‌ای در

کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف مصنوعی از جمله الیاف شیشه و کربن به دلیل مزیت‌های فراوان نسبت به مواد سنتی امروزه در صنایع مختلفی مانند صنایع هوایی، دریایی، اتومبیل و غیره به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرند [1]. اما با وجود تمام کاربردهای عظیم آنها، استفاده از این مواد با گذشت زمان

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Noorian, M., and Ravandi, M., "Uncertainty Quantification of Natural Frequencies of Flax/Epoxy Composite Laminates Based on a Polynomial Chaos Expansion Method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 1, pp. 1327-1338, 2021.

و تخمین احتمال شکست صفحات کامپوزیتی پرداختند. این روش بر اساس مدلسازی ناهمگونی‌های فضایی در خواص مواد با استفاده از میدان متغیرهای غیر گوسی در یک فضای دو بعدی و نمایش این ناهمگونی‌ها با استفاده بسط چند جمله‌ای آشوب می‌باشد. در سال 2015 ماخوپدی و همکاران [10]، با استفاده از رویکرد مدل جایگزین و روش کریگینگ مبتنی بر امان محدود، فرکانس طبیعی آماری پوسته کروی کامپوزیتی را بررسی نمودند. در این مطالعه حساسیت هر یک از منابع عدم قطعیت از جمله مکانیکی و هندسی بر فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین در سال 2017 ماخوپدی و همکاران [11]، به بررسی فرکانس طبیعی آماری تیرهای کامپوزیتی جدار نازک با عدم قطعیت در خواص میکرومکانیکی و آسیب ناشی از ترک ماتریس، با بهره از مدل جایگزین مبتنی بر روش تابع پایه شعاعی² پرداختند. در سال 2018 بالکوسا و همکاران [12]، به مطالعه و پیش بینی خواص الاستیک کامپوزیت‌های بافته شده سه بعدی پرداختند که با توجه به پیچیدگی این نوع کامپوزیت‌ها و کاهش هزینه‌های محاسباتی، از روش شبکه عصبی در راستای ایجاد مدل جایگزین استفاده شده است. در سال 2019 پینگ و همکاران [13]، با بهره از یک روش آنالیز عدم قطعیت مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب به بررسی اثر خواص مکانیکی الاستیک غیر قطعی بر روی فرکانس طبیعی سازه‌های کامپوزیتی پرداختند.

در طول چند سال اخیر تحقیقات بسیاری در حوزه تحلیل عدم قطعیت کامپوزیت‌های متعارف انجام گرفته است ولی با این وجود، با توجه به اهمیت کامپوزیت‌های الیاف طبیعی، مطالعات بسیار اندکی در حوزه تحلیل عدم قطعیت در این نوع کامپوزیت‌ها اختصاص داده شده است. در میان مطالعات انجام شده در زمینه کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کتان، تنها یک مطالعه توسط بلنچارد و همکاران [14]، در سال 2019 ارائه شده است. آنها بر اساس قابلیت اطمینان، یک طراحی نسبی از سازه‌های کامپوزیتی تقویت شده با الیاف شیشه و کتان، با هدف جایگزین الیاف کتان با الیاف شیشه در سازه Grillage را مورد بررسی قرار دادند. همچنین برای بررسی رفتار ارتعاشی کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کتان در طول چند سال اخیر مطالعاتی ارائه شده است. در اکثر این مطالعات رفتار ارتعاشی به صورت یک پاسخ قطعی و با استفاده از آزمایشات تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته است [15-19]. بر همین اساس، در مطالعه حاضر با بهره‌گیری از رویکرد مدل جایگزین مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب، تحلیل عدم قطعیت رفتار ارتعاشی و ارزیابی پاسخ فرکانس طبیعی کامپوزیت تقویت شده با الیاف کتان انجام گرفته است. افزون بر این، به جهت بررسی راندمان محاسباتی روش فوق و همچنین صحت گذاری نتایج بدست آمده، نتایج استخراجی با نتایج شبیه سازی مستقیم مونت کارلو مورد بررسی و قیاس قرار گرفته است.

2- خواص مکانیکی کامپوزیت کتان/اپوکسی

با توجه به شماره بالای منابع در ارتباط با بررسی خواص مکانیکی کامپوزیت‌های کتان، در گام نخست باید یک معیار دقیق در راستای استخراج و گردآوری داده‌های مربوط به خواص مکانیکی اتخاذ گردد، بطوریکه به دلیل ماهیت ذاتی این نوع الیاف که دارای پراکندگی بالایی در خواص مکانیکی هستند، معیار انتخابی باید به نحوی باشد که داده‌های انتخابی میزان پراکندگی بالا در خواص

کاربردهای مختلفی مورد توجه قرار گرفته است. به نحوی که کمپانی‌های بزرگ خودروسازی از جمله مرسدس بنز، از کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف طبیعی برای ساخت اجزاء غیرسازه‌ای داخل اتومبیل استفاده می‌کنند.

اما باید در نظر داشت که ترکیب ناهمگن مواد کامپوزیتی و همچنین عیوب ناخواسته ایجاد شده در فرایند ساخت، همواره عدم قطعیت‌هایی در خواص نهایی سازه ایجاد می‌کنند. این عدم قطعیت در کامپوزیت‌های الیاف طبیعی، که به سبب عدم کنترل در روند تولید دارای یک تغییر پذیری ذاتی بسیار بالا در خواص فیزیکی، مکانیکی و شیمیایی الیاف می‌باشد، در تعیین خواص نهایی سازه در کاربردهای مهندسی بسیار حائز اهمیت بوده و در قابلیت اطمینان سازه کامپوزیتی می‌تواند نقش بسزایی ایفا کند.

در میان کامپوزیت‌های الیاف طبیعی، کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کتان با توجه به دارا بودن پتانسیل مکانیکی بالقوه این الیاف، با رویکرد جایگزینی با الیاف شیشه در کامپوزیت‌های پلیمری، توجه بسیاری از محققان را در طی سالهای اخیر به خود جلب کرده است [2]. از اینرو، در سالهای اخیر مطالعات فراوانی در ارتباط با سازه‌های کامپوزیتی الیاف کتان انجام گرفته است که در ادامه به مروری اجمالی برخی از آنها پرداخته می‌شود.

در سال 2013 دارشیل و همکاران [3]، به مقایسه کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کتان و الیاف شیشه به منظور جایگزینی الیاف کتان در یک سازه توربین بادی کوچک پرداختند که سرانجام مشاهده شد توربین کتانی با کارایی مشابه می‌تواند 10 درصد نسبت به توربین الیاف شیشه سبکتر باشد. در سال 2017 بامبج و همکاران [4]، به بهینه سازی هندسه مقاطع پروفیل شکل ساخته شده با الیاف طبیعی از جمله کتان در مقایسه با سازه‌های استیل معادل پرداختند. در این پژوهش نشان داده شده است که نمونه کتانی با ضخامت 4.8 میلیمتر در مقایسه با ضخامت 1.15 میلیمتر برای استیل، قادر به برآورد معیار کمناش برای دیواره‌های تحمل کننده بار می‌باشد. همچنین در سال 2018 آنها در مطالعه ای دیگر [5]، به طور تجربی به بررسی مقاطع پروفیل شکل ساخته شده از الیاف طبیعی پرداختند. در سال 2019 بلنچارد و همکاران [6]، تغییراتی در رفتار سازه کتانی در مقایسه با سازه‌های الیاف شیشه و کربن معادل یافتند که این تغییرات با افزایش تنش در سازه کتانی همراه می‌باشد.

تحلیل عدم قطعیت خواص مکانیکی و رفتار نهایی مواد و سازه‌های کامپوزیتی در طول چند سال اخیر با استفاده از روش‌های سنتی از جمله روش شبیه سازی مستقیم مونت کارلو انجام گرفته است. اما باید در نظر داشت که بهره‌گیری از این روش‌ها به جهت دستیابی به یک پاسخ مطلوب نیازمند هزاران بار تکرار می‌باشد. به علاوه این فرایند دارای رابطه مستقیمی با تعداد منابع دارای عدم قطعیت بوده، بطوریکه با افزایش این منابع نرخ همگرایی مطلوب از پاسخ سیستم به شدت کاهش می‌یابد. به همین منظور بهره‌گیری از رویکرد مدل‌های جایگزین و روش‌های ساخت آن از قبیل روش بسط چند جمله‌ای آشوب، در راستای کاهش هزینه محاسباتی فرایند مدلسازی عدم قطعیت و افزایش نرخ همگرایی پاسخ نهایی، می‌تواند نقش بسزایی ایفا کند [7]. بر این اساس در سال 2014 اسکارس و همکاران [8]، به بررسی و مدلسازی پایداری ایروالاستیک بال‌های چندلایه کامپوزیتی با عدم قطعیت موجود در جهت‌گیری لایه‌ها پرداختند. در این پژوهش به جهت کاهش هزینه محاسباتی، از مدل سطح پاسخ¹ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب در راستای آنالیز عدم قطعیت استفاده شده است. در سال 2015 ساسیکوما و همکاران [9]، به توسعه یک روش امان محدود بر اساس چند جمله‌ای آشوب در راستای آنالیز عدم قطعیت

² Radial basis function (RBF)

¹ Response Surface Methodology (RSM)

بر همین اساس در راستای استخراج نتایج واقعی از منابع موجود، تلاش گردیده است که منابعی انتخاب گردد که تمامی قوانین اشاره شده را شامل شود. در جدول 1 نتایج نهایی حاصل از داده‌های استخراجی از لایه‌های تقویت شده با الیاف کتان ارائه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، مدول یانگ الیاف و کسر حجمی براساس آزمون اندرسون دارلینگ¹ و ارضای قوانین معیار سطح قابل توجه مشاهدات² [13]، از یک توزیع نرمال تبعیت می‌نمایند. ازینرو، این خواص می‌تواند به عنوان پارامترهای تصادفی با توزیع نرمال در نظر گرفته شوند. همچنین مدول برشی و چگالی الیاف با توجه به مطالعات انجام شده توسط بیلی و زیا [29-32]، با یک توزیع نرمال ارائه شده است. از طرفی ضریب پواسون الیاف با یک توزیع یکنواخت در نظر گرفته شده اند. دلیل این فرض، عدم داده‌های کافی می‌باشد که تعیین توزیع این خواص را ناممکن می‌کند. بنابراین این خواص می‌تواند به عنوان پارامترهای بازه‌ای با تعریف یک بازه با کران بالا و کران پایین لحاظ شود. در نهایت، خواص ماتریس شامل مدول یانگ، مدول برشی و ضریب پواسون، با توجه به میزان پراکندگی اندک آنها در مقایسه با الیاف کتان، به صورت مقادیر قطعی در نظر گرفته شده اند. بنابراین از 9 خواص مکانیکی استخراج شده، E_f ، G_f ، V_f ، ρ_f دارای توزیع نرمال، v_f دارای توزیع یکنواخت و ρ_m ، v_m ، G_m ، E_m دارای مقداری قطعی و ثابت می‌باشند.

را پوشش دهی کرده‌باشد. همچنین، خواص گردآوری شده تطابق مطلوبی با خواص واقعی دارا باشند. روند تفضیلی معیار انتخابی به شرح زیر می‌باشد:

I. به منظور بدست آوردن بالاترین خواص مکانیکی، کامپوزیت تقویت شده یک جهت انتخاب گردیده است.

II. به دلیل بیشترین داده‌های موجود برای رزین اپوکسی و سازگاری بسیار بالا با الیاف کتان، رزین اپوکسی به عنوان ماتریس انتخابی مورد بررسی قرار گرفته است.

III. تمام داده‌های گردآوری شده از نتایج تجربی حاصل گردیده و از نتایج غیر تجربی صرف نظر شده است.

IV. از نتایج ارائه شده در گرافها و نمودارها به دلیل عدم وضوح و دقت پایین صرف نظر گردیده و حتی الامکان داده‌ها و نتایجی مورد استفاده قرار گرفته که به صورت نقاط مشخص و یا مقدار دقیق گزارش شده است.

V. تاثیر انواع مختلف فرایند ساخت در خواص نهایی از اهمیت بالایی برخوردار بوده و باعث ایجاد تغییراتی در خواص می‌گردد. لذا برای پوشش دهی کلیه این تغییرات، انواع فرایندهای مختلف ساخت در استخراج و گردآوری داده‌ها در نظر گرفته شده است.

جدول 1 مدل احتمالی و نوع توزیع خواص مکانیکی کامپوزیت کتان/اپوکسی به همراه پارامترهای مربوطه

Table.1. Probabilistic model of mechanical properties of flax/epoxy composite

Parameteres	Distribution	Mean Value	Standard Deviation	Lower bound	Upper bound	Ref.
E_f (GPa)	Normal	52.02	17.12	[24-34]
G_f (GPa)		2.5	0.2	[20,21]
ρ_f ($\frac{kg}{m^3}$)		1.47	0.24	[35,36]
V_f		0.40	0.11	[24-28,31-35,37-44]
v_f	Uniform	0.27	0.31	[32]
E_m (GPa)	Deterministic	3.7	
G_m (GPa)		1.37	[24,30-32]
v_m		0.35	
ρ_m ($\frac{kg}{m^3}$)		1.15	[35,36]

² Observation significance level

¹ Anderson-Darling test

$$X = X(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) = \sum_{j=1}^M C_j Q_j(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) = Q(\rho)C$$

$$Q(\rho) = [Q_1(\rho), Q_2(\rho), \dots, Q_M(\rho)]$$

$$C = [C_1, C_2, \dots, C_M]^T$$

(7)

که Q_j چند جمله‌ای‌های هرمیتی، C_j ضرایب متناظر چندجمله‌ای و M تعداد ضرایب چند جمله‌ای می‌باشد.

2-3- محاسبه ضرایب چند جمله‌ای

بر اساس رابطه (7) ملاحظه می‌شود که پاسخ تصادفی سازه به عنوان توابع هرمیتی با وجود پارامترهای تصادفی نرمال و همچنین محاسبه ضرایب قطعی چند جمله‌ای بر اساس روش‌های نمونه برداری، امکان پذیر می‌باشد. با این وجود، همانطور که از جدول 1 مشاهده می‌شود، تعیین پاسخ سازه با وجود پارامترهایی با توزیع یکنواخت علاوه بر پارامترهای تصادفی نرمال، امری چالش برانگیز خواهد بود. لذا بر این اساس، روش بسط چند جمله‌ای آشوب به عنوان یک رویکرد مفید در ارزیابی پاسخ تصادفی سازه همراه با ترکیب عدم قطعیت‌ها شامل پارامترهایی با توزیع نرمال و یکنواخت، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به همین منظور با توجه به اینکه توابع لژاندر قادر به مدل کردن فضای آماری با توزیع یکنواخت می‌باشند [47]، ضرایب چند جمله‌ای رابطه (7) را می‌توان به عنوان توابع لژاندر مرتبه دو از پارامترهای تصادفی یکنواخت به صورت زیر بیان کرد [13,47]:

$$C_j = A_{j1} + \sum_{i=1}^n B_{ji} \gamma_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_{ji} (3\gamma_i^2 - 1) \quad (8)$$

$$j = 1, 2, \dots, M$$

که در آن A_{j1} ، B_{ji} ، D_{ji} ضرایب چند جمله‌ای، γ_i پارامترهای یکنواخت استاندارد و n تعداد پارامترهای یکنواخت می‌باشد. سرانجام با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (7) پاسخ نهایی سازه با ترکیب عدم قطعیت‌ها شامل پارامترهایی با توزیع نرمال و یکنواخت به صورت همزمان، به فرم زیر بیان می‌شود:

$$X = X(\rho_1, \dots, \rho_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

$$= \sum_{j=1}^M \left(A_{j1} + \sum_{i=1}^n B_{ji} \gamma_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n D_{ji} (3\gamma_i^2 - 1) \right) Q_j(\rho)$$

(9)

برای محاسبه ضرایب A_{j1} ، B_{ji} ، D_{ji} چند جمله‌ای، رابطه (8) را می‌توان در فرم ماتریسی به صورت زیر باز نویسی نمود:

$$LE_j = C_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, M \quad (10)$$

که در آن L ماتریس لژاندر مرتبه دو از پارامترهای بازه‌ای، E_j بردار ضرایب چند جمله‌ای و C_j ضرایب بسط چند جمله‌ای آشوب، را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

3- تحلیل عدم قطعیت سازه کامپوزیتی با بهره‌گیری از بسط چند

جمله‌ای آشوب

1-3 بسط چند جمله‌ای آشوب

در روش بسط چند جمله‌ای آشوب، پارامترهای نامشخص به عنوان بسطی از تجزیه ضرایب قطعی و پایه‌های متعامد تصادفی بیان می‌شوند [22]. با استفاده از روش بسط چند جمله‌ای آشوب، پاسخ سازه‌ای X را می‌توان به صورت سری همگرایی از چند جمله‌ای‌های متعامد به فرم رابطه (1) بیان کرد [23]:

$$X = C_0 + \sum_{i_1=1}^m C_{i_1} H_1(\rho_{i_1}) \quad (1)$$

$$+ \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{i_1} C_{i_1 i_2} H_2(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}) + \dots$$

که در آن $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل و تصادفی با توزیع نرمال استاندارد، $H_p(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_m})$ مجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌های چند بعدی هرمیتی از متغیرهای تصادفی نرمال ρ با مرتبه p ، و $C_{i_1 i_2 \dots}$ ضرایب ثابت می‌باشند. بسط چندجمله‌ای آشوب یک بسط همگرا از لحاظ میانگین مربعات بوده و بسته به درجه آن، همه چندجمله‌ای‌های متعامد از همان درجه را در قالب چند جمله‌ای هرمیتی شامل می‌شود [45]. رابطه کلی برای بدست آوردن چند جمله‌ای هرمیتی از مرتبه p برای m متغیر تصادفی نرمال ρ ، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_p(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_p})$$

$$= (-1)^p e^{\frac{1}{2}\rho^T \rho} \frac{\partial^p e^{-\frac{1}{2}\rho^T \rho}}{\partial \rho_{i_1} \partial \rho_{i_2} \dots \partial \rho_{i_p}}$$

(2)

که در آن $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$ و $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}$ بردار متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. در نهایت، رابطه (1) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$HC = X \quad (3)$$

که در آن H ماتریس هرمیتی، X بردار پاسخ سازه‌ای و C ضرایب چند جمله‌ای، را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد [13,46]:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & H_1(\rho_1^1) & \dots & H_2(\rho_1^1, \rho_2^1) & \dots & H_p(\rho_1^1, \dots, \rho_p^1) \\ 1 & H_1(\rho_1^2) & \dots & H_2(\rho_1^2, \rho_2^2) & \dots & H_p(\rho_1^2, \dots, \rho_p^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H_1(\rho_1^N) & \dots & H_2(\rho_1^N, \rho_2^N) & \dots & H_p(\rho_1^N, \dots, \rho_p^N) \end{bmatrix}$$

(4)

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T \quad (5)$$

$$C = (H^T H)^{-1} H^T X \quad (6)$$

که در آن N تعداد نقاط نمونه مربوط به متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال می‌باشد. بنابراین با توجه به روابط (3)-(6)، رابطه (1) را می‌توان به فرم سری زیر بازنویسی کرد:

$$m_i = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 2^{k-1} + 1, & k > 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\rho_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ -\cos\left(\frac{\pi(j-1)}{m_i-1}\right), & j = 1, 2, \dots, m_i \quad k > 1 \end{cases} \quad (16)$$

که اندیس j نشان دهنده Z امین متغیر تصادفی نرمال و i نشان دهنده A امین مکان نقطه می‌باشد. بنابراین مجموعه نقاط کلینشو با سطح ترتیب k با ترکیبات ایجاد شده بین سطوح $k+1$ و $k+m$ به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$A(k, m) = \cup_{k+1 \leq i_1 + \dots + i_m \leq m+k} (\rho^{i_1} \times \dots \times \rho^{i_m}) \quad (17)$$

که در آن $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ می‌باشد. در نهایت نقاط نمونه برای متغیرهای تصادفی به صورت بردار $(\rho_1^i, \rho_2^i, \dots, \rho_m^i)$ ، $i = 1, 2, \dots, N$ قابل بیان است که در آن N تعداد نقاط نمونه می‌باشد.

2- در مرحله دوم، ضرایب چند جمله‌ای $C_j = 1, 2, \dots, M$ با استفاده از روابط (4)-(5) تعیین می‌گردد. در ابتدا در ω امین نمونه از متغیرهای بازه‌ای $(\gamma_1^\omega, \gamma_2^\omega, \dots, \gamma_n^\omega)$ بردار پاسخ صحیح X با استفاده از N تحلیل پاسخ سازه‌ای قطعی بر اساس نقاط نمونه برآورد شده و سپس با استفاده از رابطه (6) ماتریس ضرایب تعیین می‌گردد. پارامترهای ورودی بر اساس تبدیل توزیع نرمال و یکنواخت استاندارد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_i^v &= \rho_i^v * (f \sigma_{x_i}) + \mu_{x_i} \\ y_j^\omega &= \gamma_j^\omega * y_j^r + y_j^c \\ v &= 1, 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن σ_{x_i} و μ_{x_i} پارامترهای توزیع نرمال، γ_i^r و γ_i^c به ترتیب مقدار اسمی و شعاع بازه پارامتر بازه‌ای γ_i می‌باشد و ضریب f براساس بازه اطمینان مورد نظر تعیین می‌شود.

3- در این مرحله، میزان دقت مد نظر باید مورد بررسی قرار گیرد. برای تعیین میزان دقت، پاسخ پیش بینی شده رابطه (7) که با استفاده از ماتریس ضرایب حاصل شده است، باید توسط پاسخ صحیح که بر اساس شبیه سازی مستقیم بدست آمده مورد قیاس قرار گیرد. اگر میزان دقت مورد نظر ارضاء شود به مرحله بعد رفته و در غیر این صورت باید تعداد نقاط نمونه با استفاده از بهبود سطح ترتیب افزایش یابد و همه فرایندهای تشریح شده از مرحله اول تکرار شود.

4- در این مرحله، برای هر یک از نقاط نمونه مدل شده برای متغیرهای بازه‌ای، مرحله دوم تکرار می‌گردد و به دنبال آن ماتریس L بر اساس این نقاط نمونه تعیین می‌شود. سپس ماتریس ضرایب چند جمله‌ای C_j ، $j = 1, 2, \dots, M$ قابل محاسبه می‌باشد و در آخر ماتریس ضرایب E_j با استفاده از رابطه (14) مدل می‌گردد. برای بررسی دقت مورد نظر، خطای جذر میانگین مربعات می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [7].

5- سرانجام، مدل سطح پاسخ با استفاده از رابطه (9) برای سازه کامپوزیتی با وجود عدم قطعیت در رفتار آن، قابل بیان خواهد بود. پس از ساخت مدل سطح پاسخ و تولید متغیرهای تصادفی در فضای استاندارد و اعمال این متغیرها بر

$$L = \begin{bmatrix} 1 & (\gamma_1)^1 & \dots & (\gamma_n)^1 & \left(\frac{3\gamma_1^2-1}{2}\right)^1 & \dots & \left(\frac{3\gamma_n^2-1}{2}\right)^1 \\ 1 & (\gamma_1)^2 & \dots & (\gamma_n)^2 & \left(\frac{3\gamma_1^2-1}{2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{3\gamma_n^2-1}{2}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & (\gamma_1)^K & \dots & (\gamma_n)^K & \left(\frac{3\gamma_1^2-1}{2}\right)^K & \dots & \left(\frac{3\gamma_n^2-1}{2}\right)^K \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$E_j = [A_{j1} \quad B_{j1} \quad \dots \quad B_{jn} \quad D_{j1} \quad \dots \quad D_{jn}]^T \quad (12)$$

$$C_j = [(C_j)^1 \quad (C_j)^2 \quad \dots \quad (C_j)^K]^T \quad (13)$$

که در آن K تعداد نقاط نمونه برداری پارامترهای بازه‌ای می‌باشد. بنابراین با توجه به روابط (10)-(13) ماتریس ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_j = (L^T L)^{-1} L^T C_j \quad (14)$$

3-3- الگوریتم تحلیل عدم قطعیت سازه کامپوزیتی بر اساس بسط چند جمله‌ای آشوب

برای تعیین پاسخ غیر قطعی سازه‌های کامپوزیتی می‌توان از بسط چند جمله‌ای آشوب رابطه (9) به عنوان یک مدل جایگزین استفاده نمود [23]. از اینرو، بسط چند جمله‌ای آشوب می‌تواند برای تحلیل عدم قطعیت و تقریب پاسخ سازه‌های کامپوزیت‌ها با ترکیب عدم قطعیت‌ها شامل پارامترهای تصادفی نرمال و بازه‌ای مورد استفاده قرار گیرد. در ابتدا نقاط نمونه برای پارامترهای تصادفی نرمال با استفاده از یک روش ترتیب پراکندگی شبکه‌ای¹ تعیین گردیده و پاسخ دقیق سازه (X) برای این نقاط محاسبه می‌گردد. سپس با جایگذاری این نقاط در چند جمله‌ای‌های متعامد هرمیتی ماتریس H ، ضرایب چند جمله‌ای بسط آشوب با استفاده از رابطه (6) استخراج می‌گردد. سرانجام با استفاده از روش نمونه‌برداری هاپپرکیوب² و جایگذاری آن در چند جمله‌ای لژاندر به عنوان توابعی از پارامترهای بازه‌ای و سپس استخراج ضرایب چند جمله‌ای با استفاده از رابطه (14)، پاسخ سازه‌های کامپوزیت‌ها با وجود ترکیب عدم قطعیت‌ها شامل متغیرهای تصادفی نرمال و بازه‌ای به صورت سطح پاسخ³ مدل شده و میزان خطا برآورد می‌شود. روند تفصیلی این فرایند بشرح زیر است:

1- در مرحله اول نقاط نمونه باید در دو سطح با استفاده از روش مناسب تعیین گردد. به همین منظور در ابتدا نقاط نمونه برای متغیرهای بازه‌ای با بهره‌گیری از روش نمونه‌برداری هاپپرکیوب مدل می‌گردد [45,48]. این متغیرها به صورت بردار $\gamma = (\gamma_1^\omega, \gamma_2^\omega, \dots, \gamma_n^\omega)$ ، $\omega = 1, 2, \dots, K$ بیان می‌شوند، که در آن n تعداد متغیرهای بازه‌ای و K تعداد نقاط نمونه مدل شده با نمونه‌برداری هاپپرکیوب می‌باشد. سپس نقاط نمونه برای متغیرهای تصادفی نرمال با استفاده از روش ترتیب پراکندگی شبکه‌ای کلینشو-کرتیس⁴ تعیین می‌گردد. در این روش، برای هر متغیر تصادفی نرمال زمانی که k سطح ترتیب در نظر گرفته شده باشد، m_i تعداد نقاط و $\rho_j^{(i)}$ مکان آن نقاط در بازه $[-1, 1]$ به فرم رابطه (15)-(16) تعیین می‌شوند [51-49]:

¹ Sparse collocation method

² Latin hypercube sampling method

³ Response surface

⁴ Sparse Cleanshaw-Curtis (SCC)

روی مدل سطح پاسخ، رفتار سازه کامپوزیتی تحت منابع عدم قطعیت مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. تمامی فرایندهای تشریح شده در فلوجارت شکل 1 ارائه شده است.

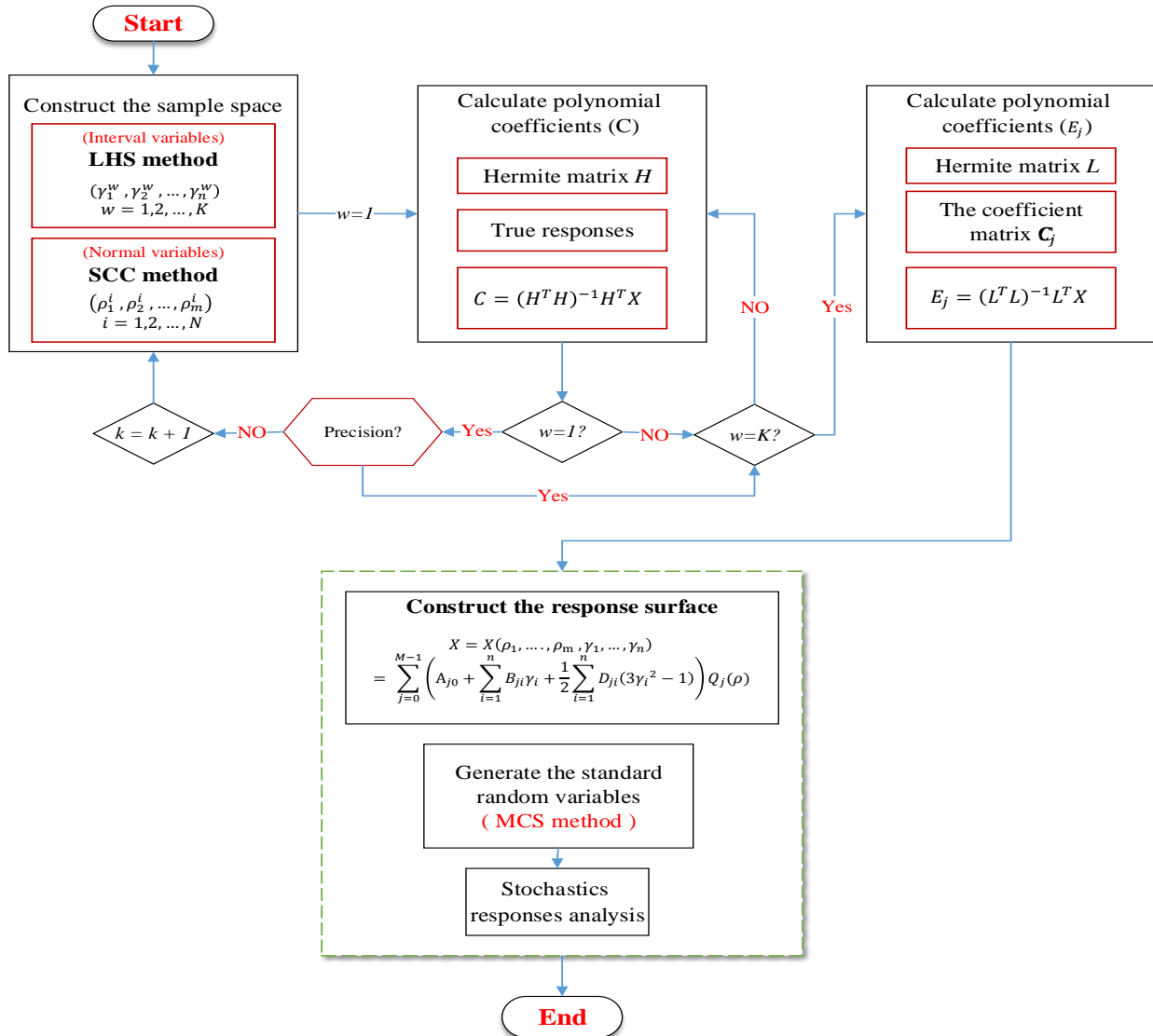


Fig.1. The flowchart of uncertainty analysis of composite structures based on the polynomial chaos expansion method

شکل 1 فلوجارت مدل‌سازی عدم قطعیت سازه کامپوزیتی مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب

ساخته و عدم قطعیت در پاسخ فرکانسی ارزیابی شده است. فرکانس طبیعی به عنوان تابعی از منابع عدم قطعیت به فرم رابطه (19) بیان می‌شود.

$$\omega_n = \omega_n(E_f, G_f, V_f, v_f, \rho_f, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{12}) \quad (19)$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

که در آن $\theta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta_i}^2)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ جهت گیری الیاف از جهت گیری اسمی هر لایه (اینجا صفر درجه) با فرض توزیع نرمال با واریانس σ_{θ}^2 است. بنابراین، ورودی‌های غیر قطعی شامل 17 پارامتر می‌باشد که از آن 16 پارامتر دارای توزیع نرمال و 1 پارامتر دارای توزیع یکنواخت است. همچنین، به جهت بررسی اثر عدم قطعیت جهت گیری لایه ها در ارزیابی پاسخ فرکانس طبیعی، تحلیل عدم قطعیت در انحراف معیارهای

4- تحلیل عدم قطعیت چند مقیاسی فرکانس طبیعی صفحه کامپوزیتی کتان/اپوکسی

به منظور تحلیل عدم قطعیت چند مقیاسی رفتار ارتعاشی و ارزیابی پاسخ فرکانس طبیعی کامپوزیت کتان/اپوکسی، یک صفحه کامپوزیتی 12 لایه تک جهته با ابعاد هندسی 250*100 میلی متر مربع با ضخامت 3.1 میلی متر در نظر گرفته شده است. صفحه کامپوزیتی دارای شرایط مرزی یک سرگیردار بوده، که در آن 50 میلی متر از طول نمونه ثابت شده است. این انتخاب بر اساس مطالعه تجربی انجام شده توسط محمودی و همکاران [18] در سال 2019 به منظور صحت سنجی مدل قطعی می باشد. سپس، با استفاده از مدل المان محدود برای پیش بینی رفتار فرکانسی قطعی صفحه کامپوزیتی و روش بسط چند جمله‌ای آشوب، مدل سطح پاسخ چهار فرکانس طبیعی آماری اول سیستم مذکور با وجود عدم قطعیت در خواص مکانیکی و جهت گیری لایه ها

1.8٪ می باشد. علاوه بر این با توجه به همگرایی پاسخ فرکانس طبیعی سایز مش بندی 8*8 میلی متر در نظر گرفته شده است. پس از اطمینان از صحت مدل المان محدود، با اسکریپت نویسی به زبان پایتون و تعریف خواص قطعی و غیر قطعی مواد در مقیاس میکرو و ماکرو، و همچنین اعمال عدم انطباق جهت گیری الیاف از جهت گیری اسمی هر لایه و در نهایت تعیین نقاط نمونه برداری با استفاده از روش کلینشو و هایپرکیوب، خروجی به ازای هر یک از نقاط نمونه با استفاده از نرم افزار آباکوس استخراج می گردد. برای انتشار عدم قطعیت ها از مقیاس میکرو به ماکرو و تعریف خواص قطعی و غیر قطعی مواد در این دو مقیاس، می توان از قوانین مخلوط ها به فرم روابط (20) - (24) بهره برد [52,53].

مختلفی از عدم انطباق جهت گیری الیاف شامل 0.5، 1، 1.5، 2، 2.5، 3 درجه انجام گرفته است.

1-4- فرایند مدسازی

مدلسازی عدم قطعیت پاسخ فرکانس طبیعی با استفاده از نرم افزار المان محدود آباکوس و اسکریپت نویسی به زبان پایتون برای ساخت مدل سطح پاسخ انجام گرفته است. در گام نخست نیاز به بررسی و صحت گذاری مدل المان محدود قطعی در مقایسه با نتایج تجربی می باشد. در جدول 2 نتایج حاصل از مدل المان محدود با نتایج تجربی [18] مورد قیاس قرار گرفته است. همانطور که ملاحظه می شود نتایج چهار مد اول فرکانس طبیعی حاصل از مدل المان محدود با مرتبه دو نسبت به المان خطی از دقت بالاتری در قیاس با نتایج تجربی برخوردار بوده و در حالت کلی نتایج حاصل شده دارای حداکثر خطای

جدول 2 مقایسه نتایج تجربی و المان محدود

Table.2. Comparison of the experimental and finite element results

Mode No.	Experimental (Hz)	FEM (Hz)		Error (%)	
		Linear	Quadratic	ϵ^*	$\epsilon^\#$
1	58.82	59.879	59.873	1.8	1.79
2	125.7	127.857	127.692	1.71	1.58
3	377.96	372.246	371.674	1.51	1.66
4	481.35	489.111	488.304	1.6	1.44

شایان ذکر است که مقادیر مربوط به سطح ترتیب و مرتبه ماتریس هرمیتی از چند جمله ای آشوب باید به صورت متناسب با یکدیگر تا رسیدن به دقت محاسباتی مطلوب افزایش یابد. افزایش بیش از حد این مقادیر، در گام نخست، منجر به افزایش حجم محاسباتی به مراتب بیشتر از روش مونت کارلو خواهد شد. در مرحله دوم، این امر منجر به همپوشانی بیش از حد نقاط انتخابی با منحنی سطح می شود، که سبب می شود پاسخ نهایی با خطای بالا و در مواردی با رفتارهای نامطلوب همراه شود. در جدول 3 نتایج حاصل از دو روش برای چهار مد اول مورد قیاس قرار گرفته است. همانگونه که مشاهده می شود نتایج حاصل از مدل سطح پاسخ نسبت به روش مونت کارلو به عنوان یک معیار صحت سنجی دارای دقت محاسباتی قابل توجهی می باشد. مقدار میانگین و انحراف معیار پاسخ فرکانس چهار مد اول بدست آمده از مدل سطح به ترتیب دارای خطاهایی کمتر از 0.15٪ و 1.51٪ درصد می باشند. این امر نشان دهنده دقت محاسباتی بالای بسط چند جمله ای آشوب و به دنبال آن مدل سطح پاسخ در مدلسازی عدم قطعیت سازه دارد. یک نکته قابل توجه از مقایسه فرکانس ها با یکدیگر این است که خطای انحراف معیار مد چهارم با سایر مودهای اولیه از مرتبه یکسانی برخوردار می باشد، در صورتی که در حالت کلی دقت محاسبه در فرکانس های بالاتر ارتعاشی به واسطه آنکه مدل شناسایی دقیقتری نیاز دارد کاهش خواهد یافت. اما باید در نظر داشت که این امر ناشی از خطای سیستماتیک ایجاد شده در محاسبه فرکانس های طبیعی می باشد. روش بسط چند جمله ای آشوب یک روش جایگزین بر پایه داده های آماری از رفتار حقیقی سیستم می باشد و توزیع نتایج این روش تابع توزیع داده های ورودی می باشد. بنابراین، با توجه به اینکه در اینجا برای تولید داده های قطعی فرکانس های

$$E_1 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \quad (20)$$

$$v_{12} = V_f v_f + (1 - V_f) v_m \quad (21)$$

$$E_2 = E_m \frac{1 + 0.5\delta V_f}{1 - \delta V_f} \quad (22)$$

$$\delta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + 0.5} \quad (23)$$

$$G_{12} = G_m \frac{(1 + V_f)G_f + (1 - V_f)G_m}{(1 - V_f)G_f + (1 + V_f)G_m} \quad (24)$$

سپس با استفاده از نتایج حاصل از مدل المان محدود، مدل سطح پاسخ مبتنی بر روش بسط چند جمله ای آشوب ایجاد و تحلیل عدم قطعیت پاسخ فرکانس طبیعی انجام می گیرد. در نهایت، نتایج بدست آمده با استفاده از روش سطح پاسخ با نتایج روش شبیه سازی مستقیم مونت کارلو مورد صحت گذاری قرار گرفته است.

2-4- نتایج و بحث و بررسی

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل عدم قطعیت چهار فرکانس طبیعی اول (شکل 2) با وجود عدم قطعیت در خواص فیزیکی، مکانیکی و جهت گیری الیاف با استفاده از مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله ای آشوب مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در اینجا مرتبه ماتریس هرمیتی از چند جمله ای آشوب (p) برابر 4، سطح ترتیب (k) مربوط به تعیین نقاط کلینشوکتیس برابر 2 و تعداد نقاط نمونه برداری هایپرکیوب برابر 3 در نظر گرفته شده است.

تحلیل عدم قطعیت بر اساس مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب از دو لحاظ، نرخ همگرایی و زمان همگرایی بسیار حائز اهمیت است. در شکل 3 نرخ همگرایی روش مونت کارلو و مدل سطح پاسخ، و در شکل 4 زمان همگرایی این دو روش مورد قیاس قرار گرفته است. در نمودار شکل 3 مشاهده می‌شود که مقدار میانگین و انحراف معیار پاسخ فرکانس مد اول حاصل از مدل سطح پاسخ به ترتیب در تعداد سیکل 3000 و 5000 همگرا گردیده در حالیکه پاسخ حاصل از روش مونت کارلو در تعدادی حدود 5000 سیکل شبیه سازی همگرا شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش سطح پاسخ نسبت به روش مونت کارلو از نرخ همگرایی بالاتری برخوردار می‌باشد.

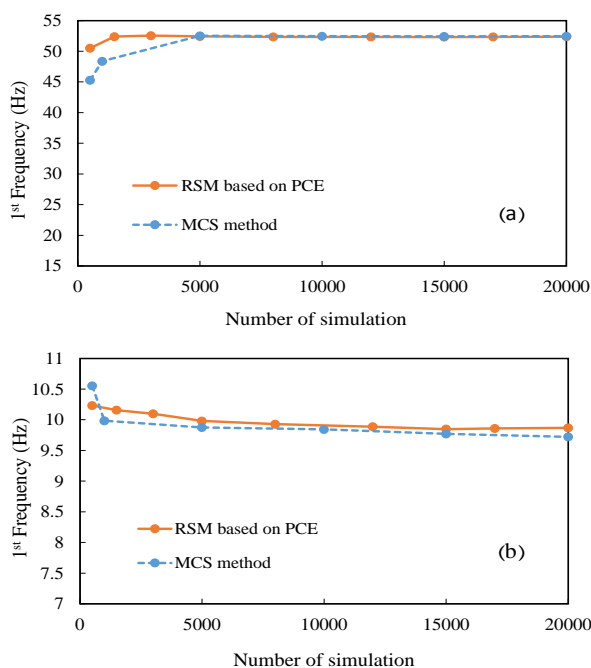


Fig.3. The Convergence study of the first natural frequency (a) Mean value, (b) Standard deviation

شکل 3 بررسی همگرایی پاسخ فرکانس طبیعی (a) مقدار میانگین مد اول فرکانس طبیعی، (b) مقدار انحراف معیار مد اول فرکانس طبیعی

طبیعی از شبیه سازی عددی در نرم افزار آباکوس استفاده شده است، نتایج قطعی حاصل از تحلیل عددی به عنوان داده‌های ورودی برای روش بسط چند جمله‌ای آشوب و ساخت مدل سطح پاسخ مورد استفاده قرار گرفته است. از اینرو این مدل جایگزین درکی از نحوه بدست آمدن این نتایج نخواهد داشت و خطای ایجاد شده در محاسبه عددی فرکانس‌های طبیعی در مدل سطح ایجاد شده نیز به صورت سیستماتیک ظاهر خواهد شد. به بیان دیگر، انحراف معیار در پاسخ فرکانسی سازه مورد مطالعه، فقط تابع عدم قطعیت موجود در داده‌های ورودی می‌باشد.

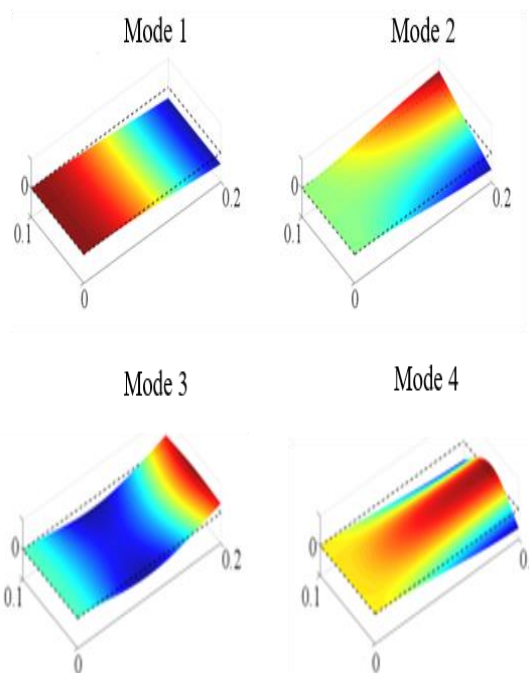


Fig.2. The first four modes of natural frequency of the composite plate

شکل 2 چهار مد اول فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی مورد مطالعه

جدول 3 پاسخ چهار مد اول فرکانس طبیعی حاصل از روش مونت کارلو و مدل سطح پاسخ

Table.3. The first four modes of natural frequency based on response surface method and MCS

Mode	Parameter	MCS (Hz)	PCE (Hz)	Error (%)
1	Mean response	52.46	52.38	0.14
	Standard deviation	9.72	9.87	1.51
2	Mean response	122.42	122.4	0.02
	Standard deviation	9.36	9.34	0.15
3	Mean response	325.75	326.13	0.12
	Standard deviation	60.45	60.54	0.14
4	Mean response	455.39	454.68	0.15
	Standard deviation	50.31	50.86	1.09

یک حقیقت جالب دیگر از مقایسه زمان اجرای این دو روش این است که در تعداد سیکل های شبیه سازی پایین زمان اجرای روش مونت کارلو کمتر از زمان اجرای مدل سطح می باشد، اما باید در نظر داشت که در این تعداد سیکل شبیه سازی میزان همگرایی مطلوب حاصل نشده است. به همین دلیل برای رسیدن به یک همگرایی مطلوب باید تعداد سیکل های شبیه سازی افزایش یابد که به تبع آن زمان اجرا نیز افزایش می یابد. در مقابل، زمان اجرای مدل سطح پاسخ تا رسیدن به همگرایی مطلوب بسیار ناچیز می باشد. شایان ذکر است سیستم مورد استفاده دارای پردازشگر 4 هسته ای - Intel Core™ i7-4790 و 16 GB RAM می باشد.

در شکل 5-a و 5-b تابع چگالی احتمال پاسخ فرکانس طبیعی تحت عدم قطعیت خواص مکانیکی و جهت گیری الیاف با استفاده از روش سطح پاسخ و روش مستقیم مونت کارلو ارائه و مقایسه شده است. واضح است که نتایج چهار فرکانس طبیعی اول حاصل از مدل سطح پاسخ و روش مونت کارلو از همپوشانی بسیار برخوردار بوده و نتایج حاصل از دو روش منطبق بر یکدیگر می باشند. این امر دلالت بر دقت محاسباتی بالای مدل سطح پاسخ دارد.

باتوجه به عدم قطعیت موجود در مقدار پراکندگی عدم تطابق جهت گیری الیاف، حساسیت پاسخ فرکانسی به این متغیر باید سنجیده شود. برای این منظور، با افزایش پراکندگی جهت گیری الیاف با مقادیر انحراف معیار 0.5، 1، 1.5، 2، 2.5، 3 درجه، در هر مورد پاسخ فرکانس طبیعی در چهار مد اول با استفاده از مدل سطح پاسخ مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج این بررسی در شکل 6 ارائه شده است. مشاهده می شود که با افزایش پراکندگی عدم تطابق جهت گیری الیاف، تغییراتی قابل توجهی در مقدار میانگین و انحراف معیار پاسخ فرکانس طبیعی حاصل نگردیده است.

مزیت دوم مدل سطح، یعنی زمان همگرایی از نمودار شکل 4 به خوبی مشهود است. همان طور که ملاحظه می شود زمان اجرای مدل سطح پاسخ با افزایش تعداد سیکل های شبیه سازی نسبت به روش مونت کارلو بسیار ناچیز و قابل چشم پوشی می باشد. ولی مشاهده می شود که با افزایش تعداد سیکل های شبیه سازی زمان اجرای روش مونت کارلو دچار تغییرات بالایی شده و به صورت خطی افزایش می یابد. این بدان دلیل است که در شبیه سازی مونت کارلو، مدل اصلی می بایست به طور کامل به تعداد سیکل های شبیه سازی مدل شود، در حالیکه در مورد مدل سطح پاسخ فقط یک معادله جبری که هزینه محاسباتی بسیار پایینی دارد حل می شود. همچنین باید در نظر داشت هزینه محاسباتی اولیه مدل سطح پاسخ مربوط به تعداد نقاط نمونه لازم برای ساخت مدل سطح پاسخ می باشد، بطوریکه هر چه تعداد این نقاط نمونه کمتر باشد هزینه اولیه ساخت مدل سطح پاسخ نیز به مراتب کمتر خواهد بود. ازینرو در اینجا برای ساخت مدل سطح پاسخ به تعداد 1635 نقطه نمونه نیاز می باشد، که پر واضح است که در مقابل تعداد 5000 سیکل مونت کارلو کاهش چشمگیری داشته است.

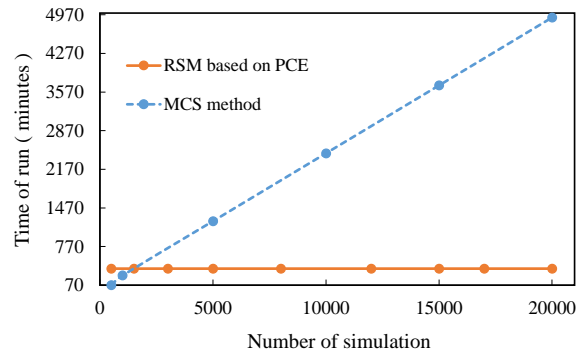


Fig.4. Comparison of the computation time of the RSM and MCS

شکل 4 مقایسه زمان محاسباتی روش مونت کارلو و مدل سطح پاسخ

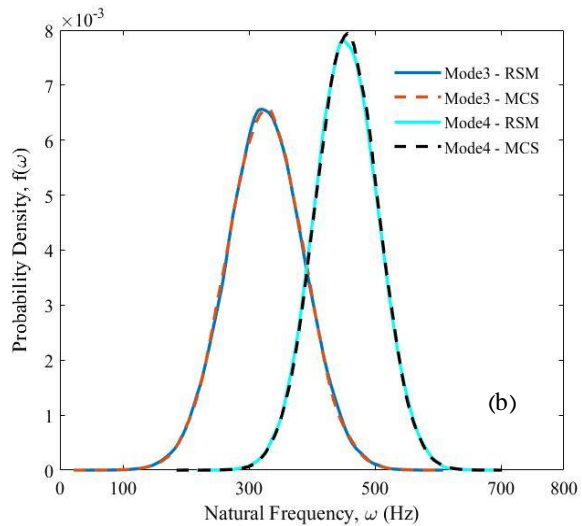
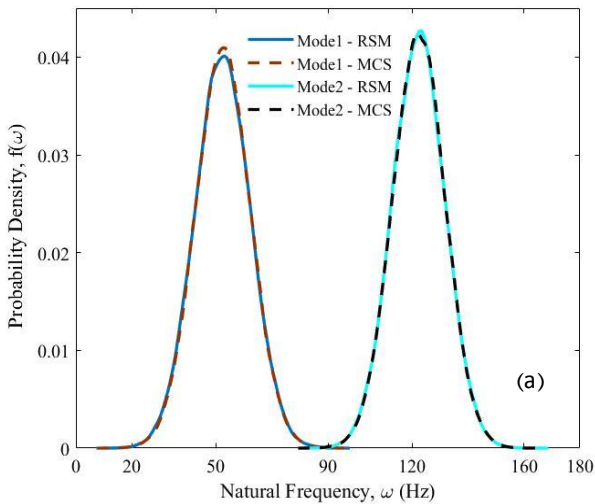


Fig.5. Probability density function of natural frequency, (a) First & second modes, (b) Third & Fourth modes

شکل 5 تابع چگالی احتمال پاسخ فرکانس طبیعی با وجود عدم قطعیت در خواص مکانیکی و جهت گیری الیاف، (a) مد اول و دوم، (b) مد سوم و چهارم

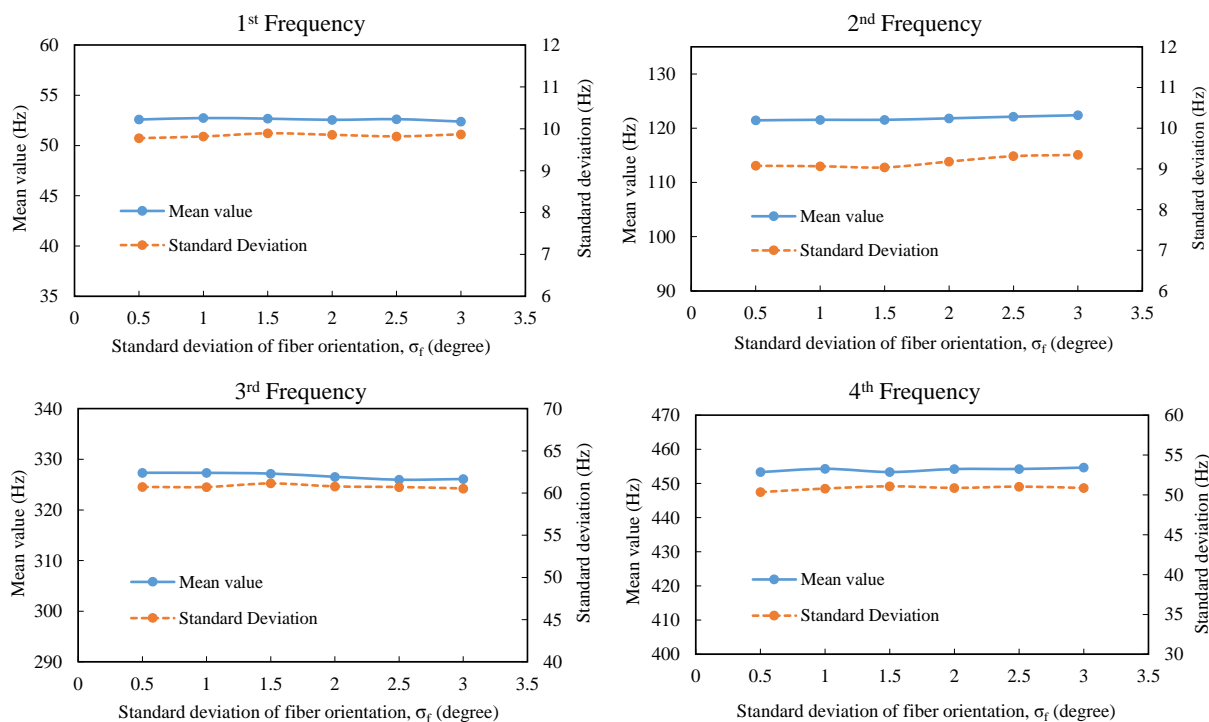


Fig.6. Natural frequency against the standard deviation of the ply orientation.

شکل 6 پاسخ فرکانس طبیعی بر حسب جهت گیری الیاف.

همچنین با توجه به عدم قطعیت موجود در مقدار پراکندگی عدم انطباق جهت گیری الیاف، حساسیت پاسخ فرکانسی به این پارامتر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان دهنده آن است که حساسیت پاسخ فرکانسی نسبت به جهت-گیری الیاف در مقادیر کوچک زوایا، بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که عدم قطعیت جهت گیری الیاف، عدم قطعیت قابل توجهی در پاسخ فرکانس طبیعی ایجاد نخواهد کرد.

از همین رو، این پدیده نشان دهنده آن است که حساسیت پاسخ فرکانسی به عدم قطعیت جهت گیری الیاف برای زوایا کوچک بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی می‌باشد. لذا این مورد می‌تواند به عنوان یک پدیده مثبت قلمداد شود، زیرا عدم قطعیت جهت گیری الیاف، عدم قطعیت قابل توجهی در پاسخ فرکانس طبیعی حاصل نمی‌نماید.

5- نتیجه گیری

هدف از مطالعه حاضر تحلیل عدم قطعیت کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کتان و بررسی رفتار ارتعاشی و پیش بینی پاسخ فرکانس طبیعی این نوع کامپوزیت‌ها، با وجود عدم قطعیت در خواص مکانیکی و عیوب ساخت می‌باشد. بر این اساس، در گام نخست، خواص مکانیکی بر اساس داده‌های تجربی گزارش شده در منابع، استخراج و سپس مدل احتمالی و نوع توزیع هر یک از خواص استخراجی با استفاده از آزمون آماری تعیین گردیده است. سپس، با استفاده از مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب، به عنوان یک ابزار مفید و کارآمد به لحاظ راندمان محاسباتی، پاسخ غیر قطعی فرکانس طبیعی کامپوزیت کتان/اپوکسی تک جهته مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. نتایج این مطالعه حاکی از آن است که چهار فرکانس طبیعی اول کامپوزیت کتان/اپوکسی حاصل از مدل سطح پاسخ مبتنی بر بسط چند جمله‌ای آشوب، در قیاس با نتایج بدست آمده از روش مستقیم مونت کارلو به عنوان معیار اعتبار سنجی، از دقت بسیار مطلوبی برخوردار است. حداکثر خطای این دو روش برابر با 1.51٪ می‌باشد. همچنین به لحاظ راندمان محاسباتی، روش مدل سطح در مقایسه با روش مونت کارلو تا رسیدن به همگرایی مطلوب با کاهش 90 درصدی هزینه محاسباتی همراه است. ازینرو، بر اساس نتایج بدست آمده، برتری روش فوق بر روش‌های سنتی مونت کارلو قابل نتیجه گیری می‌باشد.

6- مراجع

- [1] Saeedifar, M. Najafabadi, MA. Toudeshky, HH. Mohammadi, R., "Investigation of Initiation and Evolution of Delamination in Glass/Epoxy Laminated Composites Using Acoustic Emission Method," In Persian, AmirKabir Journal of Science & Research Mechanical Engineering, Vol. 48, No. 4, pp. 153-156, 2017
- [2] Sparnins, E., "Mechanical Properties of Flax Fibers and Their Composites," 2006.
- [3] Shah, DU. Schubel, PJ. Clifford, MJ., "Can Flax Replace E-glass in Structural Composites? A Small Wind Turbine Blade Case Study," Composites Part B: Engineering, Vol. 52, pp. 172-181, 2013.
- [4] Bambach. MR., "Compression Strength of Natural Fibre Composite Plates and Sections of Flax, Jute and Hemp," Thin-Walled Structures, Vol. 119, pp. 103-113, 2017.
- [5] Bambach, MR., "Geometric Optimisation and Compression Design of Natural Fibre Composite Structural Channel Sections," Composite Structures, Vol.185, pp. 549-560, 2018.
- [6] Blanchard, JMFA. Mutlu, U. Sobey, AJ. Blake, JIR., "Modelling the Different Mechanical Response and Increased Stresses Exhibited by Structures Made From Natural Fibre Composites," Composite Structures, Vol. 215, pp. 402-410, 2019.
- [7] Noorian, M. Ravandi, M., "Reliability Analysis Based on Polynomial Chaos Expansion Method in Composite," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 4, pp. 627-636, 2020

- [27] Van de Weyenberg, I. Chi Truong, T. Vangrimde, B. Verpoest, I. , "Improving the Properties of UD Flax Fibre Reinforced Composites by Applying an Alkaline Fibre Treatment," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 37, pp. 1368–1376, 2006.
- [28] Lebrun, G. Couture, A. Laperrière, L. , "Tensile and Impregnation Behavior of Unidirectional Hemp/Paper/Epoxy and Flax/Paper/Epoxy Composites," *Composite Structures*, Vol. 103, pp. 151–160, 2013.
- [29] Charlet, K. Baley, C. Morvan, C. Jernot, JP. Gomina, M. Bréard, J. , "Characteristics of Hermès Flax Fibres as a Function of Their Location in the Stem and Properties of the Derived Unidirectional Composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 38, pp. 1912–1921, 2007.
- [30] Oksman, K. , "High Quality Flax Fibre Composites Manufactured by the Resin Transfer Moulding Process," , Vol. 8, No. 7, 2001.
- [31] Duc, F. Bourban, PE. Plummer, CJG. Manson, J-AE. , "Damping of Thermoset and Thermoplastic Flax Fibre Composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 64, pp. 115–123, 2014.
- [32] Habibi, M. Laperrière, L. Lebrun, G. Toubal, L. , "Combining Short Flax Fiber Mats and Unidirectional Flax Yarns for Composite Applications: Effect of Short Flax Fibers on Biaxial Mechanical Properties and Damage Behaviour," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 123, pp. 165–178, 2017.
- [33] Monti, A. El Mahi, A. Jendli, Z. Guillaumat, L. , "Mechanical Behaviour and Damage Mechanisms Analysis of a Flax-Fibre Reinforced Composite by Acoustic Emission," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 90, pp. 100–110, 2016.
- [34] Castegnaro, S. Gomiero, C. Battisti, C. Poli, M. Basile, M. Barucco, P. et al. , "A Bio-Composite Racing Sailboat: Materials Selection, Design, Manufacturing and Sailing," *Ocean Engineering*, Vol. 133, pp. 142–150, 2017.
- [35] Mahboob, Z. El Sawi, I. Zdero, R. Fawaz, Z. Bougherara, H., "Tensile and Compressive Damaged Response in Flax Fibre Reinforced Epoxy Composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 92, pp. 118–133, 2017.
- [36] Yan, L. Chouw, N. Jayaraman, K. , "Flax Fibre and Its Composites – A Review," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 56, pp. 296–317, 2014.
- [37] Lefeuve, A. Bourmaud, A. Baley, C. , "Optimization of The Mechanical Performance of UD Flax/Epoxy Composites by Selection of Fibres Along the Stem," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 77, pp. 204–208, 2015.
- [38] Koh, R. Madsen, B. , "Strength Failure Criteria Analysis for a Flax Fibre Reinforced Composite," *Mechanics of Materials*, Vol. 124, pp. 26–32, 2018.
- [39] Baley, C. Le Duigou, A. Bourmaud, A. Davies, P. , "Influence of Drying on the Mechanical Behaviour of Flax Fibres and Their Unidirectional Composites," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 43, pp. 1226–1233, 2012.
- [40] Van Vuure, AW. Baets, J. Wouters, K. Hendrickx, K. "Compressive Properties of Natural Fibre Composites," *Materials Letters*, Vol. 149, pp. 1138–140, 2015.
- [41] Cherif, ZE. Poilâne, C. Vivet, A. Ben Doudou, B. Chen, J. , "About Optimal Architecture of Plant Fibre Textile Composite for Mechanical and Sorption Properties," *Composite Structures*, Vol. 140, pp. 240–251, 2016.
- [42] Berges, M. Léger, R. Placet, V. Person, V. Corn, S. Gabrion, X. et al. I, "Nfluence of Moisture Uptake on the Static, Cyclic and Dynamic Behaviour of Unidirectional Flax Fibre-Reinforced Epoxy Laminates," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 88, pp. 165–177, 2016.
- [43] Baets, J. Plastria, D. Ivens, J. Verpoest, I., "Determination of the Optimal Flax Fibre Preparation for Use in Unidirectional Flax-Epoxy Composites," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 33, pp. 493–502, 2014.
- [44] Kersani, M. Lomov, SV. Van Vuure, AW. Bouabdallah, A. Verpoest, I. , "Damage in Flax/Epoxy Quasi-Unidirectional Woven Laminates Under Quasi-Static Tension," *Journal of Composite Materials*, Vol. 49, pp. 403–413, 2015.
- [45] Choi, S-K. Grandhi, RV. Canfield, RA. Pettit, CL. , "Polynomial Chaos Expansion with Latin Hypercube Sampling for Estimating
- [8] Scarth, C. Cooper, JE. Weaver, PM. Silva, GHC. , "Uncertainty Quantification of Aeroelastic Stability of Composite Pplate Wings Using Lamination Parameters," *Composite Structures*, Vol. 116, pp. 184–193, 2014.
- [9] Sasikumar, P. Venketeswaran, A. Suresh, R. Gupta, S. , "A Data Driven Polynomial Chaos Based Approach for Stochastic Analysis of CFRP Laminated Composite Plates," *Composite Structures*, Vol. 125, pp. 212–227, 2015.
- [10] Dey, S. Mukhopadhyay, T. Adhikari, S. , "Stochastic Free Vibration Analyses of Composite Shallow Doubly Curved Shells – A Kriging Model Approach," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 70, pp. 99–112, 2015.
- [11] Naskar, S. Mukhopadhyay, T. Sriramula, S. Adhikari, S. , "Stochastic Natural Frequency Analysis of Damaged Thin-Walled Laminated Composite Beams With Uncertainty in Micromechanical Properties," *Composite Structures*, Vol. 160, pp. 312–334, 2017.
- [12] Balokas, G. Czichon, S. Rolfes, R. , "Neural Network Assisted Multiscale Analysis for the Elastic Properties Prediction of 3D Braided Composites Under Uncertainty," *Composite Structures*, Vol. 183, pp. 550–562, 2018.
- [13] Peng, X. Li, D. Wu, H. Liu, Z. Li, J. Jiang, S. et al. , "Uncertainty Analysis of Composite Laminated Plate With Data-Driven Polynomial Chaos Expansion Method Under Insufficient Input Data of Uncertain Parameters," *Composite Structures*, Vol. 209, pp. 625–633, 2019.
- [14] Blanchard, JMFA. Sobey, AJ. , "Comparative Design of E-glass and Flax Structures Based on Reliability," *Composite Structures*, Vol. 225, pp. 111037, 2019. 111037.
- [15] Ben Ameer, M. El Mahi, A. Rebiere, J-L. Abdennadher, M. Haddar, M. , "Damping Analysis of Unidirectional Carbon/Flax Fiber Hybrid Composites," *Int J Appl Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 1850050, 2018.
- [16] Assarar, M. Zouari, W. Sabhi, H. Ayad, R. Berthelot, J-M. , "Evaluation of the Damping of Hybrid Carbon-Flax Reinforced Composites," *Composite Structures*, Vol. 132, pp. 148–154, 2015.
- [17] Prabhakaran, S. Krishnaraj, V. kumar, MS. Zitoune, R. , "Sound and Vibration Damping Properties of Flax Fiber Reinforced Composites," *Procedia Engineering*, Vol. 97, pp. 573–581, 2014.
- [18] Mahmoudi, S. Kervoelen, A. Robin, G. Duigou, L. Daya, EM. Cadou, JM. , "Experimental and Numerical Investigation of the Damping of Flax-Epoxy Composite Plates," *Composite Structures*, Vol. 208, pp. 426–433, 2019.
- [19] Hajer, D. Abderrahim, EM. Jean-Luc, R. Charfeddin, M. Mohamed, T. Mohamed, H. , "Experimental Analysis of the Linear and Nonlinear Vibration Behavior of Flax Fibre Reinforced Composites With an Interleaved Natural Viscoelastic Layer," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 151, pp. 201–214, 2018.
- [20] Baley, C. Kervoëlen, A. Le Duigou, A. Goudenhooff, C. Bourmaud, A. , "Is the Low Shear Modulus of Flax Fibres an Advantage for Polymer Reinforcement?," *Materials Letters*, Vol. 185, pp. 534–536, 2016.
- [21] Baley, C. , "Analysis of the Flax Fibres Tensile Behaviour and Analysis of the Tensile Stiffness Increase," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 33, pp. 938–948, 2002.
- [22] Marburg, S. Hardtke, H-J., "Uncertainty Quantification in Stochastic Systems Using Polynomial Chaos Expansion," *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 02, pp. 305–353, 2010.
- [23] Choi, S-K. Grandhi, RV. Canfield, RA., "Structural Reliability Under Non-Gaussian Stochastic Behavior," *Computers & Structures*, Vol. 82, pp. 1113–1121, 2004.
- [24] Coroller, G. Lefeuve, A. Le Duigou, A. Bourmaud, A. Ausias, G. Gaudry, T. et al. , "Effect of Flax Fibres Individualisation on Tensile Failure of Flax/Epoxy Unidirectional Composite," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 51, pp. 62–70, 2013.
- [25] Baley, C. Bourmaud, A. , "Average Tensile Properties of French Elementary Flax Fibers," *Materials Letters*, Vol. 122, pp. 159–161, 2014.
- [26] Torres, JP. Vandi, L-J. Veidt, M. Heitzmann, MT. , "The Mechanical Properties of Natural Fibre Composite Laminates: A Statistical Study," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 98, pp. 99–104, 2017.

- Response Variability," AIAA Journal, Vol. 42, No. 6, pp. 1191–1198, 2004.
- [46] Crestaux, T. Le Maître, O. Martinez, J-M. , "Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. Reliability Engineering & System Safety," Vol. 94, No. 7, pp. 1161–1172, 2009.
- [47] Xiu, D. Karniadakis, GE. , "Modeling Uncertainty in Flow Simulations via Generalized Polynomial Chaos," Journal of Computational Physics, Vol. 187, No. 1, pp. 137–167, 2003.
- [48] Shields, MD. Zhang, J. , "The Generalization of Latin Hypercube Sampling. Reliability Engineering & System Safety," Vol. 148, No. 7, pp. 96–108, 2016.
- [49] Nobile, F. Tempone, R. Webster, CG. , "A Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with Random Input Data. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 46, No. 5, pp. 2309–2345, 2008.
- [50] Burkardt, J. , "Slow Exponential Growth for Clenshaw Curtis Sparse Grids," 2014.
- [51] Bhaduri, A. Graham-Brady, L. , "An Efficient Adaptive Sparse Grid Collocation Method Through Derivative Estimation. Probabilistic Engineering Mechanics," Vol. 51, pp. 11–22, 2018.
- [52] Daniel, IM. Ishai, O. , "Engineering Mechanics of Composite Materials," second ed. New York: Oxford Univ, 2006.
- [53] Ku, H. Wang, H. Pattarachaiyakoop, N. Trada, M. , "A Review on the Tensile Properties of Natural Fiber Reinforced Polymer Composites. Composites Part B: Engineering, Vol. 42, No. 4, pp. 856–873, 2011.