



تحلیل استاتیکی نانوپوسته‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی مرتبه بالاتر در محیط حرارتی-رطوبتی تحت بارگذاری خمشی

محمد رضا نوروزی¹، عبدالرضا راستی طلب^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد داریون، داریون

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد داریون، داریون

* داریون، صندوق پستی 714616-4949، ab.rastitalab@iau.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

در این مقاله، تحلیل خمشی نانوپوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی-رطوبتی بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی بررسی شده است. توزیع دما در امتداد ضخامت به صورت خطی تغییر می‌کند. به منظور افزایش دقت نتایج، در این مقاله اثرات برشی و خمشی نانوپوسته در راستای ضخامت به صورت مستقل در نظر گرفته شده‌اند. نوآوری اصلی مقاله، در نظر گرفتن اثرات ناشی از خمش، برش و اثر ضخامت به صورت مستقل بر جابه‌جایی عرضی می‌باشد. معادلات حرکت با در نظر گرفتن اثرات غیر موضعی با استفاده از اصل همپلتون به‌دست آمده است. سپس به روش ناویر¹، معادلات حرکت به‌دست آمده، حل شده است. تأثیر پارامترهایی مثل ابعاد پوسته، خواص مکانیکی آن و پارامتر غیر موضعی بر روی خیز استاتیکی مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که اثرات برشی در راستای ضخامت نقش حیاتی در خمش نانوپوسته‌های مدرج تابعی دارد.

دریافت: 1404/07/24

پذیرش: 1404/09/20

کلیدواژگان

اثر کشش ضخامت، نانوپوسته، تئوری گرادیان کرنش غیرمحملی، پارامتر طولی اثر اندازه، محیط حرارتی-رطوبتی

Static analysis of composite nanoshells using higher-order strain gradient theory in a thermal–moisture environment under bending loads

Mohammad Reza Norozi¹, Abdoreza Rastitalab^{1*}

1- School of Mechanical Engineering, Darion Azad University, Darion, Iran.

* P.O.B. 714616-4949, Darion, Iran, ab.rastitalab@iau.ac.ir

Keywords

Thickness strength effect, Nanoshell, Nonlocal strain gradient theory, Length scale parameter, Thermal-Moisture environment

Abstract

In this paper, the bending analysis of cylindrical nanoshells under thermal-humidity loading is investigated based on the nonlocal strain gradient theory. The temperature distribution changes linearly along the thickness. In order to increase the accuracy of the results, in this paper, the shear and bending effects of the nanoshell in the thickness direction are considered independently. The main innovation of the paper is to consider the effects of bending, shear and thickness effect independently on the transverse displacement. The equations of motion are obtained by considering nonlocal effects using Hamilton's principle. Then, the obtained equations of motion are solved using the Navier method. The effect of parameters such as shell dimensions, its mechanical properties and nonlocal parameter on the static deflection is analyzed. The simulation results show that the shear effects in the thickness direction play a vital role in the bending of functionally graded nanoshells.

1- مقدمه

سازه‌های کروی شکل ضروری است. بنابراین، ارائه یک مدل جدید با دقت بالا برای تجزیه و تحلیل پاسخ‌های مکانیکی سازه‌های کروی شکل ضروری است. برای مطالعه پاسخ‌های مکانیکی نانو ساختارها، در نظر گرفتن اثر اندازه ضروری است. نظریه‌های مختلفی مانند نظریه گرادیان کرنش و نظریه الاستیسیته غیرمحملی برای در نظر گرفتن اثر اندازه وجود دارد [1-3]. نتایج

سازه‌های کروی شکل به طور گسترده در کاربردهای مختلف مهندسی از جمله مهندسی عمران و مکانیک مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نوع سازه‌ها در طول عمر مفید خود تحت تأثیر انواع مختلف بارهای خارجی قرار می‌گیرند. علاوه بر این، به منظور افزایش طول عمر این مدل سازه‌ها، پیش‌بینی دقیق رفتار

¹ Navier

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Norozi, M. R., Rastitalab, A., "Static analysis of composite nanoshells using higher-order strain gradient theory in a thermal–moisture environment under bending loads," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 12, No. 2, pp. 2761-2767, 2026.

https://doi.org/10.22068/jstc.2025.2064112.1923

$$\begin{aligned}
 u_{x_1}(x_1, x_2, x_3, t) &= \left(1 + \frac{x_3}{R_1}\right) u(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w_b(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \\
 &\quad - f(x_3) \frac{\partial w_s(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \\
 u_{x_2}(x_1, x_2, x_3, t) &= \left(1 + \frac{x_3}{R_2}\right) v(x_1, x_2, t) - x_3 \frac{\partial w_b(x_1, x_2, t)}{a_1 \partial x_2} \\
 &\quad - f(x_3) \frac{\partial w_s(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \\
 u_{x_3}(x_1, x_2, x_3, t) &= w_b(x_1, x_2, t) + w_s(x_1, x_2, t) + g(x_3) w_{x_3}(x_1, x_2, t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

در معادله فوق، u_{x_1} ، u_{x_2} و u_{x_3} به ترتیب بیانگر جابه‌جایی پوسته در جهات x_1 ، x_2 ، x_3 می‌باشد؛ u و v بیانگر جابه‌جایی صفحه میانی (تار خنثی) می‌باشند. جابه‌جایی عرضی به سه مؤلفه شامل جابه‌جایی ناشی از خمش (w_b)، جابه‌جایی ناشی از برش (w_s) و جابه‌جایی ناشی از اثر ضخامت می‌باشد. نوآوری اصلی مقاله در نظر گرفتن اثرات ناشی از خمش، برش و اثر ضخامت به صورت مستقل بر جابه‌جایی عرضی می‌باشد. روند مستقل سازی مؤلفه‌های جابه‌جایی عرضی سبب می‌گردد نتایج تحلیل استاتیکی دقیق‌تر گردد. همچنین در رابطه فوق $g = \frac{df}{dx_3} \cdot f = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right)$ بر اساس مؤلفه‌های کرنش در هر نقطه‌ی دلخواهی از نانوپوسته استوانه‌ای، طبق رابطه (2) تعیین می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_1^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} + \frac{w_b}{R_1} + \frac{w_s}{R_1} + \frac{g w_{x_3}}{R_1} \\
 \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_2^2} - f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} + \frac{w_b}{R_2} + \frac{w_s}{R_2} + \frac{g w_{x_3}}{R_2} \\
 \varepsilon_3 &= \frac{dg}{dx_3} w_{x_3} \\
 \varepsilon_6 &= \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x_1 \partial x_2} - 2f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \varepsilon_4 &= g \frac{\partial w_{x_3}}{\partial x_2} + \left(1 - \frac{df}{dx_3}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_2} \\
 \varepsilon_5 &= g \frac{\partial w_{x_3}}{\partial x_1} + \left(1 - \frac{df}{dx_3}\right) \frac{\partial w_s}{\partial x_1}
 \end{aligned} \tag{2}$$

در این مقاله، از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی جهت در نظر گرفتن اثر اندازه استفاده می‌شود. این تئوری به دلیل لحاظ کردن همزمان اثرات سفتی و نرمی نانسازه، یکی از دقیق‌ترین و پیچیده‌ترین تئوری‌های غیرموضعی می‌باشد. طبق این تئوری، روابط تنش بر حسب کرنش با در نظر گرفتن اثرات حرارتی-رطوبتی به صورت زیر می‌باشد [19].

$$\begin{aligned}
 &(1 - \mu^2 \nu^2) \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \\
 &= (1 - l^2 \nu^2) \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{11} \Delta T - \beta_{11} \Delta C \\ \varepsilon_2 - \alpha_{22} \Delta T - \beta_{22} \Delta C \\ \varepsilon_3 - \alpha_{33} \Delta T - \beta_{33} \Delta C \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3}$$

در رابطه فوق، Q_{ij} بیانگر مؤلفه‌های تانسور سفتی (تانسور تنش موضعی مرتبه چهارم) می‌باشد، l بیانگر پارامتر مقیاس طولی، μ بیانگر پارامتر اثر اندازه، α ضریب انبساط حرارتی، β ضریب انبساط رطوبتی، ΔT تغییر دما و ΔC تغییر رطوبت را نشان می‌دهد. مؤلفه‌های ماتریس سفتی از رابطه زیر تعیین می‌شوند.

تجربی نشان می‌دهد که برای مطالعه پاسخ مکانیکی نانوساختارها با دقت بالا، در نظر گرفتن پارامتر اثر اندازه ضروری است [12-4]. زنگور [13] به تحلیل کمناشی نانورق مدرج تابعی بر اساس تئوری تیر مرتبه بالاتر پرداخته است. به منظور در نظر گرفتن اثر اندازه، از تئوری الاستیسیته غیر موضعی استفاده شده است. شهسواری و همکاران [14] به تحلیل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی متخلخل بر روی بسترهای مختلف بر اساس تئوری ورق مرتبه بالاتر پرداختند. دیندارلو و همکاران [15] به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با در نظر گرفتن اثرات اندازه و همچنین اثرات برشی در یک محیط حرارتی پرداختند. کرمی و همکاران [16] به تحلیل کمناش نانورق‌های مجهز به وصله‌های پیزوالکتریک پرداختند. فرض شده است که خواص مکانیکی سازه در راستای ضخامت طبق توزیع توانی تغییر می‌کند. تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای بررسی پارامتر اثر اندازه اعمال شده است. لی و همکاران [17] به تحلیل ارتعاشات و کمناش نانورق‌های الاستیک بر اساس تئوری گرادیان کرنشی غیرموضعی پرداختند. خواص مکانیکی نانورق در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شده است. اوویسی و همکاران [18] به بررسی غیرخطی کمناش نانوسیلندرهای استوانه‌ای حامل نانوسیال در محیط حرارتی-رطوبتی پرداختند. بر اساس تاریخچه فوق، می‌توان نتیجه گرفت که بررسی استاتیکی نانوپوسته‌های کامپوزیتی مدرج تابعی با در نظر گرفتن اثر کشش ضخامت در محیط حرارتی-رطوبتی یک خلأ پژوهشی در پیشینه فوق می‌باشد که این موارد در این مقاله کاملاً بررسی شده است. نوآوری اصلی مقاله، در نظر گرفتن اثرات ناشی از خمش، برش و اثر ضخامت به صورت مستقل بر جابه‌جایی عرضی می‌باشد. در نظر گرفتن تمامی اثرات سبب افزایش دقت نتایج می‌گردد.

2- تعیین معادلات حرکت

در این مقاله، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر و همچنین تئوری تغییر شکل عمودی برای تحلیل دقیق رفتار مکانیکی نانوپوسته‌ها استفاده شده است. شکل 1 یک پوسته دو انحنایی با طول b ، ضخامت h و عرض a را نشان می‌دهد. شعاع‌های انحنا R_1 و R_2 می‌باشند و x_1 ، x_2 ، x_3 سه محور مختصات منحنی الخط هستند. مدل پوسته سه‌بعدی مقاله حاضر بر اساس میدان جابجایی زیر توصیف می‌شود [19]:

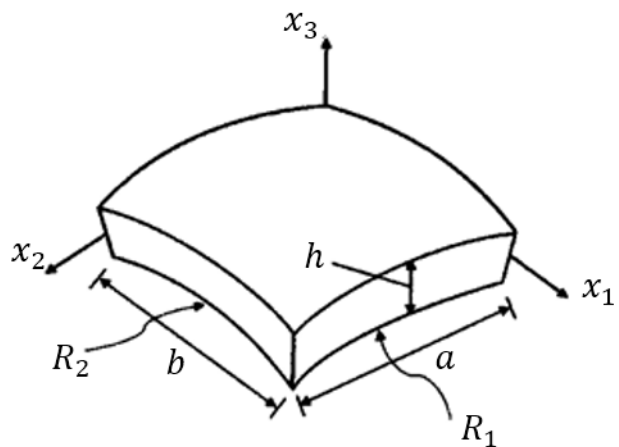


Fig. 1 Schematic of a doubly-curve shell with geometric parameters

شکل 1 شماتیک پوسته دو انحنایی همراه با پارامترهای هندسی

$$\begin{aligned}
 & (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7) \\
 & = \int_{-\frac{h_e}{2}}^{\frac{h_e}{2}} \rho(x, y, z) (1, z, z^2, f, fz, fz^2, g, g^2) dz \\
 & (N_i, M_i, P_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i (1, z, f(z)) dz \quad (i=1,2,6) \\
 & (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_1 g, \sigma_2 g, \sigma_3 \frac{dg}{dx_3}, \sigma_4 \left(1 - \frac{df}{dx_3} \right), \sigma_5 \left(1 - \frac{df}{dx_3} \right) \right) dz \\
 & (Q'_4, Q'_5) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(\sigma_4, \sigma_5) dz \quad (8)
 \end{aligned}$$

3- حل معادلات استاتیکی نانوپوسته های استوانه ای

با توجه به اینکه حل تحلیلی و دقیق معادلات دیفرانسیل به دست آمده مشکل می باشد، جهت حل معادلات به دست آمده از روش عددی ناوبر استفاده می کنیم. در این روش فرض می کنیم تمامی تکیه گاه های سازه ساده می باشند. همچنین فرض می کنیم پاسخ سیستم متشکل از سری فوریه دوگانه با جملات مثلثاتی می باشد. طبق روش ناوبر، پاسخ معادلات استاتیکی پوسته ها برابر است با [15]:

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} U_{rs} \cos(\alpha x_1)_r \sin(\beta x_2)_s \\
 v(x_1, x_2) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} V_{rs} \sin(\alpha x_1)_r \cos(\beta x_2)_s \\
 w_b(x_1, x_2) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs}^b \sin(\alpha x_1)_r \sin(\beta x_2)_s \\
 w_s(x_1, x_2) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs}^s \sin(\alpha x_1)_r \sin(\beta x_2)_s \\
 w_{x_3}(x_1, x_2) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} W_{rs}^s \sin(\alpha x_1)_r \sin(\beta x_2)_s \quad (9)
 \end{aligned}$$

در رابطه ی فوق، $\alpha = \frac{r\pi}{a}$ و $\beta = \frac{s\pi}{b}$ می باشد. همچنین r بیانگر تعداد مودهای مکانیکی می باشد که در اینجا مقدار $r = 1$ فرض می شود. با جایگذاری رابطه فوق در معادلات حرکت به دست آمده، معادلات استاتیکی نانوپوسته به فرم رابطه (9) تبدیل می شوند.

$$[K_{ij}] \begin{Bmatrix} U_{rs} \\ V_{rs} \\ W_{brs} \\ W_{srs} \\ W_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{1rs} \\ Q_{2rs} \\ Q_{3rs} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

در رابطه ی فوق، $[K_{ij}]$ بیانگر ماتریس سفتی سیستم می باشد.

4- نتایج و بحث

در این پژوهش، خواص نانوپوسته در راستای ضخامت طبق توزیع های توانی مختلف (ثابت، خطی و غیرخطی) تغییر می کند؛ به این صورت که خواص مکانیکی نظیر مدول الاستیسیته و چگالی پوسته در راستای ضخامت طبق معادله (11) تغییر می کنند.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{E(x_3)(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \\
 Q_{12} = Q_{23} = Q_{13} &= \frac{E(x_3)v}{(1+v)(1-2v)} \\
 Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(x_3)}{2(1+v)} \quad (4)
 \end{aligned}$$

تغییرات کلی دما و رطوبت برای پوسته استوانه ای مقاله حاضر از رابطه زیر تعیین می گردد:

$$\begin{Bmatrix} T(x_1, x_2, x_3) \\ C(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1(x_1, x_2) \\ C_1(x_1, x_2) \end{Bmatrix} + \frac{x_3}{h} \begin{Bmatrix} T_2(x_1, x_2) \\ C_2(x_1, x_2) \end{Bmatrix} + \frac{f(x_3)}{h} \begin{Bmatrix} T_3(x_1, x_2) \\ C_3(x_1, x_2) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

به منظور تعیین معادلات استاتیکی نانوپوسته استوانه ای، از اصل همپلتون استفاده می کنیم؛ به این صورت که ابتدا انرژی های پتانسیل و جنبشی نانوپوسته را محاسبه می کنیم، سپس در اصل همپلتون جایگذاری می کنیم و پس از ساده سازی های مربوطه، معادلات استاتیکی به دست می آید. معادله بیان کننده اصل همپلتون در رابطه (6) ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
 \int_0^t (\delta U - \delta W - \delta T) dt &= 0 \\
 \Rightarrow \int_0^t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{ &\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_3 \delta \varepsilon_3 \\
 &+ \sigma_4 \delta \varepsilon_4 + \sigma_5 \delta \varepsilon_5 \\
 &+ \sigma_6 \delta \varepsilon_6 \} dx dy \Big| dz dt \\
 - \int_0^t q \delta w dx dy dz dt &= 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

در رابطه (6)، δU بیان کننده تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی سیستم، δT بیان کننده تغییرات انرژی جنبشی سیستم و q بیان کننده بار خارجی اعمالی به سیستم می باشد. با جای گذاری روابط (2) و (3) در رابطه (6)، معادلات استاتیکی نانوپوسته استوانه ای طبق رابطه (7) تعیین می گردد.

$$\delta u: \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} = q_1$$

$$\delta v: \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_6}{\partial x_1} = q_2$$

$$\delta w_b: -\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x_1 \partial x_2} = q_3$$

$$\delta w_s: -\frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial Q_4}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_5}{\partial x_2} = q_4$$

$$\delta w_{x_3}: -\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_2}{R_2} - Q_3 + \frac{\partial Q'_4}{\partial x_2} + \frac{\partial Q'_5}{\partial x_1} = q_5 \quad (7)$$

پارامترهای استفاده شده در رابطه (7)، به صورت زیر تعریف میگردند.

¹ Navier

غیرموضعی، سفتی سازه کاهش یافته و در نتیجه کرنش آن افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل 2 می‌توان دریافت که تأثیرگذاری نسبت $\frac{b}{a}$ بر جابه‌جایی عرضی بدون بعد پوسته، بیشتر از پارامتر غیر موضعی می‌باشد. با مشاهده شکل 2 می‌توان مشاهده کرد با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ ، جابه‌جایی بی‌بعد سازه افزایش می‌یابد.

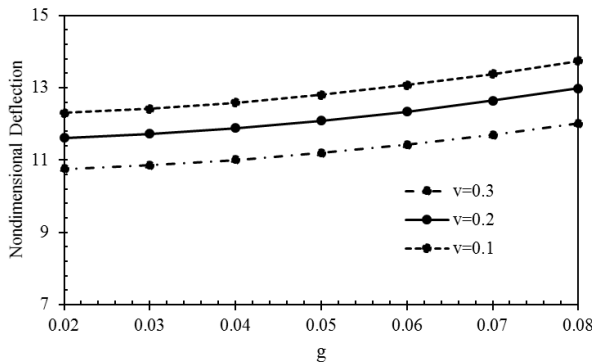


Fig. 3 The effect of the nonlocal parameter and Poisson's ratio on the nondimensional deflection of the nanoshell

شکل 3 اثر پارامتر غیر موضعی و نسبت پواسون بر جابه‌جایی بدون بعد نانوپوسته

در شکل 3، به بررسی اثرات ضریب پواسون و پارامتر غیرموضعی بر جابه‌جایی‌های بدون بعد نانوپوسته پرداخته می‌شود. در این شکل، جابه‌جایی‌های بی‌بعد به ازای مقادیر مختلفی از ضریب پواسون ارائه شده است. با توجه به شکل 3، می‌توان مشاهده کرد که با افزایش ضریب پواسون، میزان جابه‌جایی بدون بعد پوسته کاهش می‌یابد. تفسیر فیزیکی این پدیده به این صورت می‌باشد که با افزایش ضریب پواسون، مقاومت به کرنش سازه افزایش یافته و در نتیجه سفتی سازه افزایش و کرنش آن کاهش می‌یابد. با مشاهده شکل 3، می‌توان به راحتی پی برد که با افزایش پارامتر غیر موضعی، جابه‌جایی بدون بعد پوسته به ازای تمامی مقادیر ضریب پواسون، افزایش می‌یابد.

شکل 4 اثرات شاخص توان و پارامترهای غیرموضعی را بر جابه‌جایی عرضی بی‌بعد نانوپوسته مدرج تابعی نشان می‌دهد. با توجه به شکل 4 مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر شاخص توان در یک پارامتر غیرموضعی مشخص، جابه‌جایی عرضی بی‌بعد نانو سازه مدرج تابعی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش پارامتر غیرموضعی، به ازای هر مقدار از شاخص توانی، جابه‌جایی عرضی بی‌بعد سازه افزایش می‌یابد.

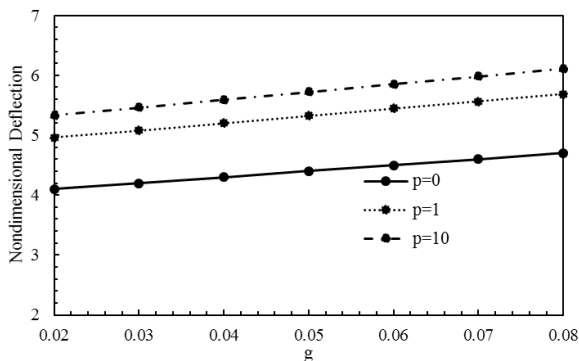


Fig. 4 The effect of the nonlocal parameter and power law index on the nondimensional deflection of the nanoshell

شکل 4 اثر پارامتر غیر موضعی و شاخص توانی بر جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m$$

$$v = v_m = v_c = 0.30 \quad (11)$$

در رابطه‌ی (11)، p بیانگر شاخص توان، E_c و E_m به ترتیب بیانگر مدول الاستیسیته‌ی ماده استفاده شده در نیمه‌ی بالایی و پایینی پوسته مدرج تابعی می‌باشند. همچنین ρ_c و ρ_m به ترتیب بیانگر چگالی ماده استفاده شده در نیمه‌ی بالایی و پایینی پوسته مدرج تابعی می‌باشند. در این پژوهش، به دلیل تغییرات اندک ضریب پواسون، مقدار ثابتی برای آن در نظر گرفته می‌شود. در این پژوهش، به منظور بررسی نتایج، مقادیر $E_c = 380GPa$ ، $E_m = 70GPa$ ، $\rho_c = 3800 \frac{kg}{m^3}$ و $\rho_m = 2700 \frac{kg}{m^3}$ در نظر گرفته می‌شود [15].

در این بخش، ابتدا به صحت سنجی نتایج پرداخته می‌شود. در جدول 1، به بررسی جابه‌جایی‌های عرضی پوسته همگن تحت بار ثابت در حالت موضعی پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه در پژوهش حاضر، خیز پوسته ناشی از برش و خمش به صورت مستقل در نظر گرفته شده است، بنابراین خیز نانوپوسته از مجموع جابه‌جایی‌های خمشی و برشی در راستای ضخامت به دست می‌آید و در جدول فوق نیز، مجموع جابه‌جایی‌های برشی و خمشی در راستای ضخامت ارائه شده است. طبق داده‌های جدول 1، مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده در پژوهش حاضر، تطبیق خوبی با سایر کارهای پژوهشی انجام شده دارد. با توجه به جدول 1، مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر $\frac{h}{a}$ اختلاف بین مقادیر تئوری‌ها افزایش می‌یابد. همانطور که از داده‌های جدول 1 به راحتی قابل تشخیص است، با افزایش مقادیر $\frac{h}{a}$ در پوسته، جابه‌جایی عرضی آن افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه در تحلیل حاضر جابه‌جایی ناشی از خمش و برش به صورت مجزا لحاظ شده است، داده‌های به دست آمده نزدیک‌ترین مقدار به حل تحلیلی سه‌بعدی می‌باشد و پژوهش حاضر نسبت به سایر تحلیل‌های مشابه، دقت بیشتری دارد.

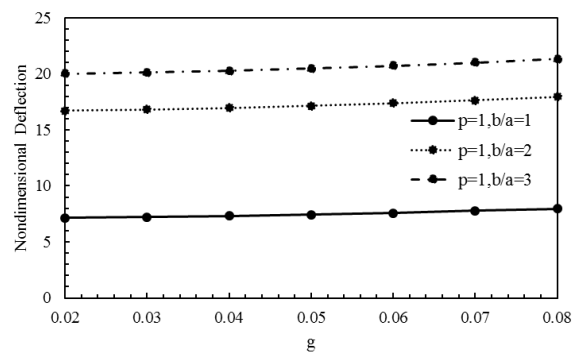


Fig. 2 The effect of the nonlocal parameter and $\frac{b}{a}$ ratio on the nondimensional deflection of the nanoshell

شکل 2 اثر پارامتر غیر موضعی و نسبت طولی $\frac{b}{a}$ بر جابه‌جایی بدون بعد نانوپوسته

در شکل 2، به بررسی اثرات نسبت‌های طولی نانوپوسته و همچنین پارامتر غیرموضعی بر روی جابه‌جایی عرضی بی‌بعد آن پرداخته می‌شود. در این شکل، جابه‌جایی‌های بی‌بعد پوسته به ازای مقادیر مختلفی از نسبت طولی $\frac{b}{a}$ با فرض $\frac{h}{a} = 15$ را نشان می‌دهد. در شکل 2، پارامتر g به صورت $g = \frac{\sqrt{h}}{a}$ تعریف می‌شود. با توجه به شکل (2) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش پارامتر غیرموضعی، برای تمامی نسبت‌های $\frac{b}{a}$ ، جابه‌جایی عرضی بی‌بعد پوسته افزایش می‌یابد. تفسیر فیزیکی این تغییر به این صورت می‌باشد که با افزایش پارامتر

جدول 1 اعتبار سنجی جابه‌جایی عرضی پوسته ($\bar{C} = \bar{T} = 0$)

Table 1 Shell transverse displacement validation ($\bar{C} = \bar{T} = 0$)

$\frac{R}{a}$	Method	$\frac{h}{a}$		
		0.01	0.1	0.15
1	HSDT [20]	98.114	7.431	3.877
	3-D [21]	100.59	8.709	4.949
	CST[21]	99.644	7.37	3.697
	FSDT [19]	99.73	7.55	3.87
	Present	100.04329	7.424948	3.867368
2	HSDT [20]	392.853	16.977	6.871
	3-D [21]	396.45	18.451	7.724
	CST[21]	394.37	16.48	6.332
	FSDT [19]	394.374	17.01	6.82
	Present	396.1829	16.95846	6.865328
3	HSDT [20]	870.585	22.187	8.001
	3-D [21]	875.36	23.381	8.591
	CST[21]	872	21.371	7.294
	FSDT [19]	872.08	22.27	8.09
	Present	874.988	22.16492	7.99456
4	HSDT [20]	1512.3	24.849	8.489
	3-D [21]	1518.3	25.78	8.92
	CST[21]	1513.6	23.849	7.7
	FSDT [19]	1513.6	24.95	8.6
	Present	1517.228	24.80597	8.468382
5	HSDT [30]	2294.2	26.308	8.735
	3-D [31]	2301.4	27.061	9.075
	CST[31]	2295.3	25.2	7.909
	FSDT [2]	2295.3	26.44	8.86
	Present	2299.104	26.27597	8.722023
10	HSDT [30]	7370.9	28.541	9.086
	3-D [31]	7383.1	28.91	9.2502
	CST[31]	7370.2	27.26	8.201
	FSDT [2]	7371.1	28.75	9.22
	Present	7380.165	28.51392	9.071704
20	HSDT [30]	16485	29.1602	9.178
	3-D [31]	16499	29.356	9.266
	CST[31]	16479	27.831	8.278
	FSDT [2]	16484	29.38	9.325
	Present	16489.94	29.13336	9.161621

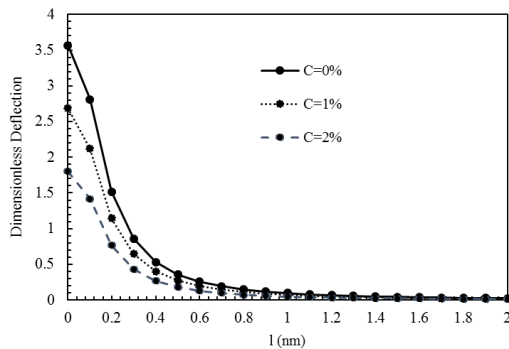


Fig. 6 The effect of the length scale parameter and moisture variation on the nondimensional deflection of the nanoshell

شکل 6 اثر پارامتر طولی اثر اندازه و تغییرات رطوبت بر جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته

شکل 6 اثرات پارامتر طولی اثر اندازه و تغییرات رطوبت بر جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته را نشان می‌دهد. با توجه به شکل 6 می‌توان مشاهده کرد که با افزایش رطوبت جابه‌جایی کاهش می‌یابد. این کاهش جابه‌جایی به این دلیل می‌باشد که با افزایش رطوبت، سفتی سازه افزایش یافته و در نتیجه جابه‌جایی آن کاهش می‌یابد.

شکل 5 اثرات پارامتر طولی اثر اندازه و تغییرات دما بر جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته را نشان می‌دهد. با توجه به شکل 5 می‌توان مشاهده کرد که با افزایش مقدار پارامتر طولی اثر اندازه، جابه‌جایی پوسته کاهش می‌یابد. فیزیکی این کاهش جابه‌جایی به این صورت می‌باشد که با افزایش پارامتر طولی اثر اندازه، سفتی سازه افزایش یافته و در نتیجه جابه‌جایی آن کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش دما جابه‌جایی کاهش می‌یابد. این کاهش جابه‌جایی به این دلیل می‌باشد که با افزایش دما، سفتی سازه افزایش یافته و در نتیجه جابه‌جایی آن کاهش می‌یابد.

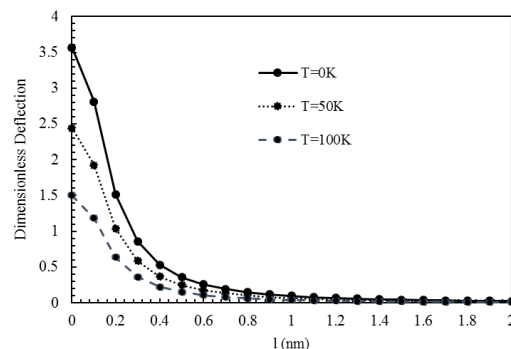


Fig. 5 The effect of the length scale parameter and temperature variation on the nondimensional deflection of the nanoshell

شکل 5 اثر پارامتر طولی اثر اندازه و تغییرات دما بر جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته

جدول 2 تغییرات جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته برای مقادیر مختلفی از نسبت $\frac{a}{h}$ با و بدون در نظر گرفتن اثرات برشی

Table 2 The variation of the nondimensional deflection of the nanoshell for several values of the $\frac{a}{h}$ ratio and l with and without considering the shear effects (Thickness stretching effect)

l (nm)	$\frac{a}{h}$						
	5	10	15	20	25	30	
$\varepsilon_{x_3} = 0$	0	2.410653	2.545862	2.571341	2.581419	2.58844	2.596027
	0.1	2.315532	2.457534	2.484259	2.49479	2.501811	2.509172
	0.2	2.067309	2.225166	2.255061	2.266385	2.273519	2.280314
	0.3	1.746614	1.920324	1.953616	1.96596	1.973094	1.979209
	0.4	1.424219	1.608801	1.644471	1.657607	1.664628	1.670064
	0.5	1.138062	1.328079	1.365108	1.378584	1.385605	1.390474
	0.6	0.899692	1.091294	1.129003	1.142592	1.149386	1.153916
	0.7	0.706618	0.897993	0.935929	0.949517	0.956199	0.960275
	0.8	0.551366	0.742515	0.780337	0.793812	0.80038	0.80423
	0.9	0.425556	0.617498	0.655207	0.668682	0.675137	0.678874
1	0.321602	0.516827	0.554536	0.567899	0.57424	0.577864	
$\varepsilon_{x_3} \neq 0$	0	3.310118	2.769624	2.670539	2.637133	2.623997	2.6206
	0.1	3.194161	2.676767	2.581532	2.549372	2.536689	2.533292
	0.2	2.891583	2.432395	2.347125	2.318136	2.306586	2.303188
	0.3	2.500566	2.112039	2.038999	2.013973	2.003782	2.000385
	0.4	2.10717	1.784549	1.722947	1.701771	1.692938	1.689654
	0.5	1.758051	1.489332	1.437355	1.41935	1.41165	1.408592
	0.6	1.467817	1.240431	1.195928	1.180414	1.173619	1.170675
	0.7	1.233976	1.037392	0.99855	0.984962	0.978847	0.976129
	0.8	1.048149	0.8741	0.839448	0.827331	0.821896	0.819291
	0.9	0.901164	0.743194	0.711713	0.700616	0.695633	0.693142
1	0.785206	0.637994	0.608891	0.598587	0.593944	0.591566	

با افزایش پارامتر شاخص توان در یک پارامتر غیرموضعی مشخص، سفتی پوسته کاهش یافته و در نتیجه جابه‌جایی عرضی بی‌بعد نانوپوسته مدرج تابعی افزایش می‌یابد.

با افزایش دما و رطوبت، سفتی سازه کاهش یافته، کرنش افزایش یافته و در نتیجه جابه‌جایی سازه کاهش می‌یابد.

در مقادیر کوچک‌تر نسبت طول به ضخامت پوسته، اثر ضخامت بر رفتار استاتیکی سازه تأثیر بیشتری دارد.

جدول 2 تغییرات جابه‌جایی بی‌بعد نانوپوسته را به ازای مقادیر متفاوتی از l و $\frac{a}{h}$ با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن اثرات برشی (اثر ضخامت) نشان می‌دهد. با توجه به داده‌های موجود در جدول 2، می‌توان نتیجه گرفت در نسبت‌های $\frac{a}{h}$ با مقادیر بالا، اثرات برشی تأثیر کمتری بر خیز سازه دارد؛ به‌گونه‌ای که تفاوت اندکی بین خیز نانوپوسته در دو حالت $\varepsilon_{x_3} = 0$ و $\varepsilon_{x_3} \neq 0$ وجود دارد. همچنین با بررسی داده‌های موجود می‌توان نتیجه گرفت که در نسبت‌های $\frac{a}{h}$ با مقادیر کمتر، اثرات برشی تأثیر بیشتری بر خیز سازه دارد؛ به‌گونه‌ای که تفاوت زیادی بین خیز نانوپوسته در دو حالت $\varepsilon_{x_3} = 0$ و $\varepsilon_{x_3} \neq 0$ وجود دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نوآوری‌های استفاده شده در مقاله شامل در نظر گرفتن اثر ضخامت و اثرات خمش و برش، باعث تحلیل دقیق‌تر نانوپوسته استوانه‌ای می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که یک مدل جامع مکانیکی برای تحلیل نانوسازه‌ها به ازای هر مقداری از $\frac{a}{h}$ قابل استفاده می‌باشد.

6- فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	طول نانو ورق، m
b	عرض نانو ورق، m
A	ماتریس مربوط به خواص مکانیکی نانوپوسته
C_{ijkl}	تانسور تنش مرتبه چهارم
E	مدول الاستیسیته، $\frac{N}{m^2}$
g	پارامتر گرادیان کرنشی
h	ضخامت نانو ورق، m
l	پارامتر استاتیکی گرادیان کرنشی
L	طول نانورق، m
K_{ij}	ماتریس سفتی
M	خمش
N	نیرو، N
P	نیرو، N
Q	نیروی برشی، N
u	جابه‌جایی در جهت x، m
U_{rs}	ضریب حل نویر
v	جابه‌جایی در جهت y، m

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل استاتیکی نانوپوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با در نظر گرفتن اثر کشش ضخامت در محیط حرارتی-رطوبتی ارائه شده است. تحلیل خمشی نانوپوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی-رطوبتی بر اساس تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی بررسی شده است. به منظور افزایش دقت نتایج، در این مقاله اثرات برشی و خمشی نانوپوسته در راستای ضخامت به صورت مستقل در نظر گرفته شده اند. با توجه به مطالعه حاضر، نتایج زیر قابل استخراج می‌باشد.

با افزایش مقادیر نسبت طول به ضخامت پوسته، سفتی سازه افزایش یافته و در نتیجه جابه‌جایی عرضی پوسته کاهش می‌یابد.

با افزایش پارامتر غیرموضعی/پارامتر طولی اثر اندازه، جابه‌جایی عرضی بی‌بعد پوسته افزایش/کاهش می‌یابد.

resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation.” *Aerospace Science and Technology*, Vol. 72, No. 1, pp. 134-149, 2018.

- [15] Dindarloo, M., Li, L., “Vibration analysis of carbon nanotubes reinforced isotropic doubly-curved nanoshells using nonlocal elasticity theory based on a new higher order shear deformation theory,” *Composites Part B: Engineering* Vol. 175, No. 1, 2019.
- [16] Karami, B., Shahsavari, D., Li, L., Karami, M., Janghorban, M., “Thermal buckling of embedded sandwich piezoelectric nanoplates with functionally graded core by a nonlocal second-order shear deformation theory,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 233, No. 1, pp. 287-301, 2019.
- [17] Le, H.H., Tran, V.K., Hoang, N.T., Huong, N.N.M., “The impacts of variable nonlocal, length-scale factors and surface energy on hygro-thermo-mechanical vibration and buckling behaviors of viscoelastic FGP nanosheet on viscoelastic medium,” *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 4, No. 5, pp. 1-20, 2025.
- [18] Oveissi, S., Ghassemi, A., Salehi, M., Eftekhari, S.A., Ziaei-Rad, S., “Nonlinear Buckling Analysis of Cylindrical Nanoshells Conveying Nano-Fluid in Hygrothermal Environment,” *ECS Advances*, Vol. 2, No. 1, p.011002, 2023.
- [19] Dindarloo, M., Zenkour, A.M., “Nonlocal strain gradient shell theory for bending analysis of FG spherical nanoshells in thermal environment,” *The European Physical Journal Plus*, Vol. 135, No. 1, pp. 1-18, 2020.
- [20] Kiani, Y. “Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment,” *Composites Part B: Engineering*, Vol. 156, No. 1, pp. 128-137, 2019.
- [21] Dindarloo, M. H., Li, L., Dimitri, R., Tornabene, F., “Nonlocal Elasticity Response of Doubly-Curved Nanoshells,” *Symmetry*, Vol. 12, No. 3, pp. 455-466, 2020.

V_{rs} ضریب حل نویر

w جابه‌جایی در جهت z , m

W_{rs} ضریب حل نویر

علائم یونانی

ρ چگالی، kg/m^3

ϵ_{ij} تانسور کرنش

σ_{ij} تانسور تنش

μ پارامتر غیرموضعی

v ضریب پواسون

φ تابع کرنش برشی

7-مراجع

- [1] Eringen, A.C. “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 5, No. 2, pp. 4703-4710, 1983.
- [2] Mobarakian, M., Safarabadi, M., Farahani, M. Developing a thermomechanical and thermochemical model for investigating the cooling rate effects on the distortion of unsymmetrical viscoelastic polymeric composite laminates. *Polymer Testing*, Vol. 87, 106503, 2020.
- [3] Pradhan, S.C., Phadikar, J.K., “Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models,” *Physics letters A*, Vol. 373, No. 11, pp. 1062-1069, 2009.
- [4] Mobarakian, M., Safarabadi, M., Farahani, M., “Investigating the effects of cooling rate on distortion of asymmetric composite laminates,” *Composite Structures*, Vol. 236, 111875, 2020.
- [5] Jafarpour, A., Safarabadi, M., Haghighi-Yazdi, M., Yousefi, A., “Numerical study of curing thermal residual stresses in GF/CNF/epoxy nanocomposite using a random generator model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*,” Vol. 28, No. 24, pp. 2618-2628, 2021.
- [6] Thai, C.H., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Nguyen-Xuan, H., “Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory,” *Composite Structures*, Vol. 104, No. 1, pp. 196-214, 2013.
- [7] Jafarpour, A., Farahani, M. S., Haghighi-Yazdi, M., “Numerical investigation of oriented CNFs effects on thermo-mechanical properties and curing residual stresses field of polymeric nanocomposites,” *Mechanics of Materials*, Vol. 138, 103176, 2019.
- [8] Phuc, P.Q., Van Dong, P., Hai, N.T., Zenkour, A.M., Thien, L.G., “The application of novel shear deformation theory and nonlocal elasticity theory to study the mechanical response of composite nanoplates,” *Composite Structures*, Vol. 352, p.118646,2025.
- [9] Safarabadi, M., “Evaluation of curing residual stresses in three-phase thin composite laminates considering micro-scale effects,” *Journal of Composite Materials*, Vol. 50, No. 27, pp. 3753-3764, 2016.
- [10] Jafari, A., Yousefzadeh, S., Mohammadzadeh, A., “Hydroelastic vibration analysis of functionally graded circular plate in contact with bounded fluid by Ritz method,” *In Persian, Journal of Science and Technology of Composite*, Vol. 5, No. 4, pp. 529-538, 2018.
- [11] Indronil, D., “Sinusoidal shear deformable beam theory for analytic nonlocal elasticity,” *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 101116, 2025.
- [12] Darban, H., Faghidian, S.A., “Flexural frequency analysis of damaged beams using mixture unified gradient elasticity theory,” *Composite Structures*, Vol. 363, p.119143, 2025.
- [13] Zenkour, A. M., Sobhy, M., “Nonlocal elasticity theory for thermal buckling of nanoplates lying on Winkler-Pasternak elastic substrate medium,” *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 53, No. 4, pp. 251-259, 2013.
- [14] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B., “A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities