



## تحلیل ارتعاشات اجباری نانوپوسته مخروطی ناقص حاوی سیال تحت بار هارمونیک با استفاده از تئوری کوپل استرس اصلاح شده

شهرزاد یوسفزاده<sup>1\*</sup>، امیرحسین نصراله براتی<sup>1</sup>

1- استادیار، گروه مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز  
 \* یوسفزاده، صندوق پستی 6861465975، [sh.yousefzadeh@iau.ac.ir](mailto:sh.yousefzadeh@iau.ac.ir)

| اطلاعات مقاله:  | چکیده   |
|---|---|
| دریافت: 1404/01/25  | در پژوهش حاضر ارتعاش اجباری نانوپوسته مخروطی ناقص در تماس با سیال تحت بار هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل پوسته از تئوری کلاسیک صفحات همراه با تئوری کوپل استرس اصلاح شده استفاده شده است. برای تعیین معادلات حاکم از روش انرژی و اصل همپلتون بهره گرفته شده است. فشار اعمالی از طرف سیال به پوسته با استفاده از تابع پتانسیل سیال و بکارگیری شرایط مرزی سرعت در سطح تماس سیال و پوسته تعیین گردیده است. همچنین برای تعیین پاسخ ارتعاشی از روش مودهای فرضی به همراه تکنیک گالرکین استفاده شده است. در نهایت، برای یک نانوپوسته نمونه، نتایج عددی به کمک نرم افزار متلب تعیین شده و به تحلیل نتایج عددی ارتعاش اجباری و تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت‌های ابعادی، زاویه رأس مخروط، پارامترهای نیروی خارجی و چگالی سیال بر پاسخ ارتعاشی سیستم پرداخته شده است. |
| پذیرش: 1404/07/12   |   |
| <b>کلیدواژگان</b><br>نانوپوسته مخروطی ناقص، ارتعاشات اجباری، تئوری کلاسیک صفحات، تئوری کوپل استرس |   |

## Analysis of forced vibrations of truncated conical nanoshell containing fluid under harmonic load using modified couple stress theory

Shahrouz Yousefzadeh<sup>1\*</sup>, Amirhosein Nasrollah Barati<sup>1</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran.  
 \* P.O.B. 6861465975, Aligudarz, Iran, [sh.yousefzadeh@iau.ac.ir](mailto:sh.yousefzadeh@iau.ac.ir)

### Keywords

Truncated conical nanoshell, Forced vibrations, Classical plate theory, Couple stress theory

### Abstract

The present research investigates the forced vibration of a truncated conical nanoshell in contact with fluid under harmonic load. Classical plate theory, along with modified couple stress theory, has been used for shell analysis. The energy method and Hamilton's principle have been used to determine the governing equations. The applied pressure from the fluid to the shell has been defined by using the fluid potential function and the velocity boundary conditions at the contact surface of the fluid and the shell. Also, to determine the vibration response, the method of hypothetical modes, along with the Galerkin technique, has been used. Finally, for a sample nanoshell, numerical results have been determined with the help of MATLAB software, and the numerical results of forced vibration and the effect of various parameters such as aspect ratios, cone apex angle, external force parameters, and fluid density on the vibration response of the system have been analyzed.

### 1- مقدمه

برای طراحی و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به مطالعه رفتار مواد در ابعاد میکرو از جنبه‌های مختلف از جمله جامدات، سیالات، انتقال حرارت، الکترومغناطیس و... نیاز می‌باشد. نکته مهمی که باید در طراحی و تحلیل چنین سیستم‌هایی مورد توجه قرار گیرد ابعاد و اندازه این سیستم‌ها و اثرات نیروهای بین مولکولی می‌باشد. رفتار مواد در چنین ابعادی را نمی‌توان با استفاده از نظریه‌های مکانیک کلاسیک به طور صحیح پیش‌بینی نمود، از این‌رو محققین به دنبال راهکارهای ساده‌تر در بررسی نانو ساختارها بوده‌اند. مدل‌سازی ساختارهای در مقیاس کوچک، با استفاده از مکانیک محیط پیوسته یکی از راه‌حل‌های مطالعه این مواد می‌باشد. تئوری‌های محیط پیوسته وابسته

امروزه میکروساختارها بطور گسترده به عنوان اصلی‌ترین مولفه‌های ساختاری در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند که طیف وسیعی از دستگاه‌ها از جمله رزوناتورها، سنسورهای رزونانس، بایوسنسورها، عملگرها، فیلترها و میکروسکوپ پراب نیروی اتمی را شامل می‌شوند. به طور کلی می‌توان گفت اندازه کوچک، وزن کم، دوام زیاد و هزینه پایین این سیستم‌ها سبب شده که در صنایع مختلف از جمله صنایع هوافضا، بیومکانیک، پتروشیمی، پزشکی و ... استفاده شوند. از این‌رو مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته‌اند [1].

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Yousefzadeh, S., Nasrollah Barati, A., "Analysis of forced vibrations of truncated conical nanoshell containing fluid under harmonic load using modified couple stress theory," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 12, No. 1, pp. 2693-2703, 2025.  
<https://doi.org/10.22068/jstc.2025.2057303.1919>

سوفیو و همکاران در تحقیقات دیگری [11، 12] به بررسی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های چند لایه ارتوتروپ تحت شرایط مرزی مختلف روی بستر الاستیک و کماتش غیرخطی پوسته‌های مخروطی از مواد مدرجی روی بستر الاستیک پرداختند. تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی در چهارچوب نظریه کوپل-استرس توسط ضیغم‌پور و همکاران [13] مطالعه شد. شرایط مرزی را ساده در نظر گرفته و با بکارگیری اصل همیلتون معادلات حاکم را بدست آوردند و از روش نیمه تحلیلی گالرکین برای حل معادلات و بدست آوردن فرکانس مطلوب استفاده کردند. نتایج حاصل بیانگر افزایش سختی نانولوله‌ها طبق نظریه کوپل-استرس نسبت به حالت تئوری کلاسیک می‌باشد. جعفری مهرآبادی و همکاران [14] در تحقیقی به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مستقر بر بستر الاستیک پرداختند. جین و همکاران [15] به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کوتاه با شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی، جایجایی هر نقطه از پوسته مخروطی به صورت سری فوریه اصلاح شده ارائه دادند که ترکیبی از سری فوریه استاندارد و توابع کمکی بود. تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی در چهارچوب نظریه کوپل-تنش توسط ضیغم‌پور و همکاران [16] مطالعه شد. آن‌ها شرایط مرزی را ساده در نظر گرفتند و با بکارگیری اصل همیلتون معادلات حاکم را به دست آوردند و از روش نیمه تحلیلی گالرکین برای حل معادلات و بدست آوردن فرکانس مطلوب استفاده کردند. نتایج حاصل بیانگر افزایش سختی نانولوله‌ها طبق نظریه کوپل-تنش نسبت به حالت تئوری کلاسیک می‌باشد. در پژوهشی تادی بنی و همکاران [17] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی را طبق تئوری تغییر شکل برشی و بر اساس نظریه کوپل-تنش مطالعه کردند. آن‌ها معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی را طبق مدل تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی و با استفاده از اصل همیلتون بدست آوردند. تغییرات خواص ماده در راستای ضخامت پوسته فرض شد، شرایط مرزی در دو انتهای پوسته استوانه‌ای را ساده در نظر گرفتند و برای حل معادلات حاکم حرکت از روش ناویر استفاده کردند. سلیمانی و همکاران [18] ارتعاشات پیچشی نانو پوسته مخروطی را بر اساس تئوری اصلاح شده کوپل-تنش بررسی کردند. در پژوهش آن‌ها نتایج فرکانس بی‌بعد پوسته مخروطی برای مدل جدید با نظریه های کوپل-تنش و تئوری کلاسیک مقایسه شد و نشان داد که صلبیت نانو پوسته‌ها در حالت مدل کوپل-تنش بیشتر از تئوری کلاسیک است. ضیغم‌پور و همکاران [19] معادلات حاکم بر پوسته مخروطی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و با در نظر گرفتن پارامتر اندازه از طریق تئوری کوپل-استرس استخراج کردند. برای به دست آوردن معادلات حاکم، از اصل همیلتون استفاده کرده و معادلات حرکت پوسته را با دیفرانسیل جزئی به همراه شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک استخراج کردند. مطالعه آن‌ها نشان می‌دهد که صلبیت نانو پوسته در نظریه کوپل-استرس بیشتر از نظریه کلاسیک است که منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

فیروزآبادی و همکاران [20] یک فرمول جدید برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی حاوی سیال ساکن پیشنهاد دادند. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر حرکت سازه از اصل همیلتون بهره گرفتند و با استفاده از معادلات ناویر-استوکس و فرض غیرچرخشی، تراکم پذیر و غیر لزج، معادله حاکم بر سیال را استخراج کردند. آن‌ها اثرات جرم افزوده، زاویه رأس، شرایط مرزی و انواع سیال بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار دادند. تادی

به اندازه متنوعی وجود دارند که آثار اندازه را در نظر گرفته‌اند از جمله: تئوری میکرومورفیک، تئوری میکروساختار، تئوری میکروپولار، تئوری کوسرات، تئوری غیرموضعی، تئوری کوپل استرس اصلاح شده، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی که این‌ها گسترش یافته‌ی تئوری‌های میدانی کلاسیک هستند که در آن‌ها آثار اندازه گنجانده شده است [2].

از طرف دیگر، در دهه‌های اخیر، مطالعه رفتار سازه‌های در تماس با سیال مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است چون این پدیده می‌تواند در مواردی موجب از کارافتادگی و خستگی سازه گردد. از این‌رو، کنترل و حتی تعدیل آن برای موقعیت‌های حساس دارای اهمیت زیادی می‌باشد [3]. در صنایع مختلفی از جمله صنایع هسته‌ای، مخازن سوخت، اجزای داخلی راکتورها، صفحات خورشیدی و سازه‌های دریایی و هوایی می‌توان اندرکنش سیال و سازه را مشاهده نمود. واضح است که رفتار ارتعاشی سازه‌ها در حالت تماس با سیال متفاوت از رفتار آن در حالت بدون تماس با سیال می‌باشد [4]. بنابراین، آگاهی از رفتار سازه و سیال در تراکنش دینامیکی بین آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد.

دامنه مطالعات و ادبیات مرتبط با تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی نانو پوسته‌ها بسیار گسترده است. در این زمینه مطالعات و پژوهش‌های انجام شده را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. دسته اول شامل پژوهش‌هایی است که به مدل‌سازی دینامیک خطی و غیرخطی پوسته‌ها بر اساس نظریه کلاسیک الاستیسیته پرداخته و دسته دوم به بررسی دینامیک خطی و غیرخطی پوسته‌ها بر اساس نظریه‌های غیرکلاسیک مانند گرادیان کرنش، کوپل تنش و غیرموضعی اختصاص می‌یابند.

فتوحی و همکاران [5] به بررسی ارتعاش آزاد نانو پوسته مخروطی تحت فشار خارجی و نیروی محوری فشاری و در تحقیق دیگری [6] به بررسی ارتعاش آزاد نانو پوسته مخروطی روی بستر الاستیک بر اساس تئوری غیرموضعی پرداختند. آن‌ها بستر الاستیک را با استفاده از مدل‌های وینکلر و پسترناک مشابه‌سازی کرده و معادلات حرکت را بر مبنای تکنیک آنالیز مودال و با استفاده از روش گالرکین به دست آورده و حل کردند. نتایج به دست آمده، بر اثرات هندسه و پارامتر مقیاس روی فرکانس طبیعی نانو پوسته مخروطی تاکید می‌کند. ژو و یانگ [7] برای بررسی اثر مقیاس کوچک و اثر غیریکنواخت بر ارتعاش محوری نانومخروط‌ها بر اساس تئوری کشسانی غیرمحلی، یک مدل میله‌ای غیریکنواخت ارائه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که فرکانس‌های طبیعی محوری حاصل از مدل میله‌ای کلاسیک به دلیل صرف‌نظر کردن از تأثیر مقیاس اندازه بسیار بیشتر از حد برآورد می‌شود.

تاریوردی‌لو و همکاران [8] به منظور مطالعه ارتعاشات ورق دایروی در تماس با سیال غیرقابل تراکم، با محاسبه جرم افزوده<sup>1</sup> فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی را تعیین کردند. آن‌ها از دو روش برای استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده کردند. فتوحی و همکاران [9] در تحقیقی به بررسی ارتعاش آزاد نانو پوسته مخروطی روی بستر الاستیک بر اساس تئوری غیرمحلی پرداختند. بستر الاستیک با استفاده از مدل‌های وینکلر و پسترناک شبیه‌سازی شده و معادلات حرکت بر مبنای تکنیک آنالیز مودال و با استفاده از روش گالرکین بدست آمده و حل شدند. نتایج بدست آمده بر آثار هندسه و پارامتر مقیاس بر روی فرکانس طبیعی نانو پوسته مخروطی تاکید می‌کند. سوفیو و همکاران [10] در تحقیقی به بررسی ارتعاش و پایداری پوسته‌های مخروطی غیرهمگن ارتوتروپ با تکیه-گاه‌های گیردار تحت فشار یکنواخت خارجی پرداختند.

<sup>1</sup>. Added mass

تخلخل هسته فوم آلومینیومی را در امتداد ضخامت در نظر گرفتند. آن‌ها با در نظر گرفتن اثرات حرارت محیط، معادلات دینامیکی غیرخطی را بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همیلتون استخراج کرده و با استفاده از روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آوردند. منصوری و همکاران [28] رفتار ارتعاش اجباری غیرخطی نانوپوسته‌های مخروطی ناقص را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری کشسانی غیرمحملی برای اصلاح اثر اندازه نانو با در نظر گرفتن کرنش‌های غیرخطی ون-کارمن استفاده کردند و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی نانوپوسته‌های مخروطی ناقص به دست آورده و برای حل معادلات حاکم از روش گالرکین بهره گرفتند.

همانطور که مرور تحقیقات نشان می‌دهد پژوهش‌های بسیار کمی در زمینه بررسی رفتار نانو پوسته‌های مخروطی به ثبت رسیده است. پوسته‌ها نقش بسیار مهمی در کاربردهای مهندسی نظیر زبردیابی‌ها، سفینه‌های فضایی، پرتابه-ها، راکت‌ها، لوله‌ها و تانک‌های ذخیره دارند. پژوهشگران به دلیل پیچیدگی‌های هندسی و مکانیکی پوسته‌ها، تئوری‌های گوناگون مربوط به پوسته‌ها را بر اساس فرضیات متفاوت ارائه کرده‌اند. با توجه به مرور پژوهش‌های اشاره شده در قسمت قبل تاکنون پژوهشی مبنی بر توصیف رفتار ارتعاش اجباری نانو پوسته‌های مخروطی حاوی سیال بر اساس تئوری کوپل استرس اصلاح شده گزارش نشده است. در این تحقیق به تحلیل ارتعاشات اجباری نانوپوسته مخروطی حاوی سیال با در نظر گرفتن اثرات اندازه برای نخستین بار پرداخته شده است. ابتدا، برای تعیین معادلات حاکم از روش انرژی و اصل همیلتون بهره گرفته شده است. فشار اعمالی از طرف سیال به پوسته با استفاده از تابع پتانسیل سیال و بکارگیری شرایط مرزی سرعت در سطح تماس سیال و پوسته تعیین گردیده است. سپس برای تعیین پاسخ ارتعاشی از روش مودهای فرضی به همراه تکنیک گالرکین استفاده شده است. در نهایت، برای یک نانوپوسته نمونه، نتایج عددی به کمک نرم‌افزار متلب تعیین شده و به تحلیل نتایج عددی ارتعاش اجباری و تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت‌های ابعادی، زاویه رأس مخروط، پارامترهای نیروی خارجی و چگالی سیال بر پاسخ ارتعاشی سیستم پرداخته شده است.

## 2- معادلات حاکم

یک پوسته مخروطی ناقص به طول  $L$  و شعاع متغیر  $R(x)$  با ضخامت یکنواخت  $h$  مطابق شکل 1 مفروض است. جنس پوسته مفروض از مواد همگن با مدول الاستیسیته  $E$ ، مدول برشی  $\mu$  و ضریب پواسون  $\nu$  فرض شده است. مطابق شکل 1 یک سیستم مختصات شامل محورهای  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  در نظر گرفته شده که محور  $x$  در راستای محور مولد مخروط و محورهای  $\theta$  و  $z$  به ترتیب در راستای محیط و ضخامت مخروط می‌باشند.

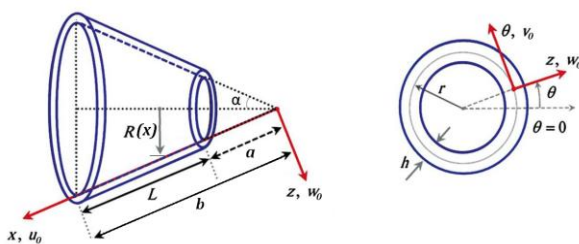


Fig. 1 Truncated conical nanoshell containing fluid with coordinate system considered in the mid-layer

شکل 1 نانوپوسته مخروطی ناقص حاوی سیال با دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در لایه میانی

بنی و مهرعلیان [21] معادلات حاکم بر پوسته مخروطی نازک ساخته شده از مواد تابعی را با استفاده از تئوری کوپل-استرس اصلاح شده توسعه دادند و در حالت خاص، ارتعاش آزاد نانوپوسته مخروطی ساخته شده از مواد تابعی را با استفاده از روش گالرکین بررسی کردند. تحقیق آن‌ها نشان داد نظریه کوپل-استرس اصلاح شده سفتی نانوپوسته مخروطی را با دقت بالاتری نسبت به نظریه کلاسیک پیوسته پیش‌بینی می‌کند.

داک و همکاران [22] پایداری حرارتی و مکانیکی یک پوسته مخروطی ناقص ساخته شده از مواد تابعی و تقویت شده توسط الیاف نانولوله کربنی روی بستر الاستیک را بررسی کردند. توزیع الیاف‌ها در ضخامت پوسته یکنواخت یا مدرج فرض گردید. آن‌ها اثرات زاویه رأس، طول پوسته، کسر حجمی الیاف، الگوی توزیع الیاف، دما و سختی بستر الاستیک را بر روی بارهای کماتش حرارتی و مکانیکی پوسته مورد مطالعه قرار دادند.

جاوید [23] به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی چند لایه کامپوزیت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر پرداخت. او معادلات دیفرانسیل کوپل شده بر حسب جابجایی و توابع دورانی را به دست آورده و با استفاده از اسپلین مکعبی و کمی تقریب زد. در نهایت، از مواد مختلف برای نشان دادن اثر نسبت طول پوسته، زاویه مخروط، توالی انباشته شدن و تعداد لایه بر روی فرکانس پوسته‌های مخروطی استفاده کرد. دینامیک غیرخطی نزدیک به رزونانس داخلی یک پوسته مخروطی کوتاه از جنس مواد تابعی توسط ژانگ و همکاران [24] مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روابط ون-کارمن، اصل همیلتون و روش گالرکین، معادلات غیرخطی حرکت پوسته مخروطی از جنس مواد تابعی کوتاه را به دست آوردند و تأثیر عدد ماخ، توان کسر حجمی و برانگیختگی درون صفحه بر رفتارهای تشدید غیرخطی پوسته مخروطی را بررسی کردند. مقصودپور و همکاران [25] مدل نانوپوسته مخروطی را بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده توسعه دادند. معادلات حاکم بر نانوپوسته مخروطی ناقص با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی استخراج و پارامترهای اندازه از طریق نظریه گرادیان کرنش اصلاح‌شده در نظر گرفته شد. از اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حاکم استفاده شد و معادلات حرکت پوسته با دیفرانسیل‌های جزئی همراه با شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک به دست آمد. آن‌ها نتایج مدل جدید را با نتایج تئوری‌های تنش کلاسیک و کوپل-استرس مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که مدل‌های کلاسیک و کوپل-استرس موارد خاصی از نظریه گرادیان کرنش اصلاح‌شده هستند.

مقصودپور و همکاران [26] به مطالعه ارتعاشات آزاد غیرخطی نانوپوسته‌های مخروطی ناقص با استفاده از تئوری تغییر شکل پذیر برشی مرتبه اول پرداختند. تجزیه و تحلیل آن‌ها از طریق تئوری گرادیان کرنش اصلاح‌شده، روش‌های تربع دیفرانسیل و روابط کرنش ون-کارمن برای غیرخطی بودن سینماتیک انجام گرفت. معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون به دست آمد. آن‌ها مقایسه‌ای بین یافته‌های مدل جدید در مقایسه با نظریه‌های کوپل-استرس و کلاسیک انجام دادند که نشان داد نظریه‌های کوپل-استرس کلاسیک و اصلاح‌شده، بازنمایی‌های متمایز از نظریه گرادیان کرنش اصلاح‌شده هستند. همچنین نتایج نشان داد که درجه سخت شدن نانوپوسته‌های مخروطی ناقص در نظریه گرادیان کرنش اصلاح‌شده کمتر از کوپل-استرس اصلاح‌شده و کلاسیک است. وانگ و همکاران [27] ارتعاش آزاد سیستم سختی متغیر را برای پوسته مخروطی ساندویچی ناقص ساخته شده از هسته فوم آلومینیومی متخلخل با ضخامت متغیر و صفحات فیبر کربنی تحت شرایط مرزی ساده ارائه دادند. ضخامت لایه هسته در جهت طولی را متغیر و پنج نوع مختلف توزیع

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[u_{i,j} + u_{j,i}] \quad , \quad \chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (6)$$

و بردار چرخش طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_i = \left(\frac{1}{2} \text{curl}(u)\right)_i \quad (7)$$

تانسور تنش کوشی و تانسور مرتبه بالای تنش طبق نظریه کوپل استرس بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad , \quad m_{ij} = 2\mu l^2\chi_{ij} \quad (8)$$

در روابط فوق،  $l$  پارامتر اندازه و  $\lambda$  و  $\mu$  ضرایب لامه هستند و با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

با جایگذاری از رابطه (4) در روابط (6) و (7) پارامترهای  $\varepsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  را می‌توان برحسب مولفه‌های میدان جابجایی به صورت زیر گسترش داد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{x} \frac{\partial u_0}{\sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{x} - \frac{v_0}{x} \\ &\quad - 2z \left( \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\cot \alpha}{2x} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cot \alpha}{x^2} v_0 \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x} \cot \alpha \\ &\quad - z \left( -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \left\{ \begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{x \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{2v_0}{x \tan \alpha} - \right. \\ &\quad \left. z \left( \frac{v_0}{x^2 \tan^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right] \\ \theta_\theta &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \right. \\ \chi_{xx} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{2}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad - \frac{x \tan \alpha}{2} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ &\quad \left. - z \left( -\frac{2v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} + \frac{1}{x^2 \tan^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2 \cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} \right) \right] \\ \chi_{x\theta} &= \chi_{\theta x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \theta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \theta_x}{\partial \theta} - \frac{\theta_\theta}{x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2x} \frac{\partial w_0}{\partial x} - z \left( \frac{\cos^2 \alpha}{2x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{2x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ \chi_{\theta\theta} &= \frac{1}{x \sin \alpha} \left[ \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta} + \theta_x \sin \alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad \left. - z \left( \frac{v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف میدان تغییرمکان در سیستم مختصات منحنی‌الخط متعامد [29]:

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \phi_1(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ U_2 &= u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + \alpha_3 \phi_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ U_3 &= u_3(\alpha_1, \alpha_2, t) \end{aligned} \quad (1)$$

روابط مربوط به کرنش‌ها به شرح زیر بدست می‌آید [29]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3}; \varepsilon_{12} \\ &= \frac{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})} \right) \\ &\quad + \frac{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{U_2}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})} \right) \\ \varepsilon_{13} &= A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1}) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{U_1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})} \right) + \frac{1}{A_1(1+\frac{\alpha_3}{R_1})} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} \\ \varepsilon_{23} &= A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2}) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{U_1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})} \right) + \frac{1}{A_2(1+\frac{\alpha_3}{R_2})} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \quad (2) \end{aligned}$$

پارامترها در رابطه (2) به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \quad , \quad A_2 = R(x) = x \sin \alpha \\ r &= \frac{R(x)}{\cos \alpha} \quad , \quad R_1 = \infty \quad , \quad R_2 = r \quad , \quad \alpha_1 = x \\ \alpha_2 &= \theta \quad , \quad \alpha_3 = z \quad , \quad \phi_1 = \phi \quad , \quad \phi_2 = \psi \end{aligned} \quad (3)$$

میدان جابجایی یک نقطه دلخواه در پوسته مخروطی بر اساس نظریه کلاسیک صفحات [30] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} U &= u_0(x, \theta, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ V &= v_0(x, \theta, t) - \frac{z}{x \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ W &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $U$ ،  $V$  و  $W$  به ترتیب جابجایی یک نقطه دلخواه در امتداد محورهای  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  و  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب بیانگر جابجایی صفحه میانی پوسته مخروطی در راستای محورهای  $x$ ،  $\theta$  و  $z$  می‌باشند. با توجه به نظریه کوپل استرس اصلاح شده [31] انرژی کرنش ذخیره شده  $U$  در محیط تشکیل شده از مواد الاستیک خطی و همسانگرد بر روی حجم  $\Omega$  به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m^s_{ij} \chi^s_{ij}) d\Omega \quad (5)$$

در رابطه فوق  $\varepsilon_{ij}$ ،  $\sigma_{ij}$ ،  $\chi_{ij}$  و  $m_{ij}$  به ترتیب بیانگر تانسور کرنش، تانسور تنش کوشی (مرتبط با کرنش)، تانسور گرادیان چرخش متقارن و تانسورهای مرتبه بالای تنش هستند و بصورت زیر تعریف می‌شوند [32]:

با استفاده از مجموعه روابط (8) تا (10)، درایه‌های تانسور تنش کوشی و تانسور مرتبه بالای تنش طبق نظریه کوپل استرس به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x} \cot \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z \left( -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x} \cot \alpha \right. \\ &\quad \left. - z \left( -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] \\ \tau_{x\theta} &= 2\mu \varepsilon_{x\theta} \\ &= \mu \left[ \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{v_0}{x} \right. \\ &\quad \left. - 2z \left( \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\cot \alpha}{2x} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\cot \alpha}{x^2} v_0 \right) \right] \\ m_{xx} &= \mu l^2 \left[ -\frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{2}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{x \tan \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - z \left( -\frac{2v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} + \frac{1}{x^2 \tan^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2 \cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} \right) \right] \\ m_{x\theta} &= m_{\theta x} \\ &= \mu l^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2x} \frac{\partial w_0}{\partial x} - z \left( \frac{\cos^2 \alpha}{2x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{2x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ m_{\theta\theta} &= \mu l^2 \left[ -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad \left. - z \left( \frac{v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

منتجه‌های کلاسیک و مرتبه بالای تنش طبق نظریه گرادیان کرنش با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int \sigma_{ij} z dz \\ Y_{ij} &= \int m_{ij} dz, \quad T_{ij} = \int m_{ij} z dz \end{aligned} \quad (12)$$

با جایگذاری از رابطه (11) در (12) منتجه‌های تنش به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x} \cot \alpha \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz \\ &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \left( -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\ N_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{x} + \frac{w_0}{x} \cot \alpha + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \\ M_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} z dz \\ &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ -\frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \\ N_{x\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\theta} dz = \mu h \left( \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{v_0}{x} \right) \\ M_{x\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\theta} z dz \\ &= \frac{-\mu h^3}{6} \left[ \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\cot \alpha}{2x} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cot \alpha}{x^2} v_0 \right] \\ Y_{xx} &= \int m_{xx} dz \\ &= \mu l^2 h \left[ -\frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{2}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{x \tan \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \\ T_{xx} &= \int m_{xx} z dz \\ &= \frac{-\mu l^2 h^3}{12} \left[ \frac{2v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} + \frac{1}{x^2 \tan^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2 \cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} \right] \\ Y_{x\theta} &= \int m_{x\theta} dz \\ &= \mu l^2 h \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \alpha}{x^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ T_{x\theta} &= \int m_{x\theta} z dz \\ &= \frac{-\mu l^2 h^3}{12} \left[ \frac{\cos \alpha}{x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{x^3 \sin^3 \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right] \\ Y_{\theta\theta} &= \int m_{\theta\theta} dz \\ &= \mu l^2 h \left[ -\frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x} + \frac{2}{x^2 \sin \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{2v_0}{x^2 \tan \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ T_{\theta\theta} &= \int m_{\theta\theta} z dz = \frac{-\mu l^2 h^3}{12} \left[ \frac{v_0}{x^3 \tan^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{x^3 \sin^2 \alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

انرژی کرنشی ذخیره شده در نانویپوسته مخروطی بر اساس تئوری کوپل استرس به صورت زیر است [33]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) x \sin \alpha dx d\theta dz \quad (14)$$

انرژی جنبشی نیز به صورت زیر بیان می‌گردد [33]:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_a^b \left[ (N_{xx}x \sin \alpha)_{,x} + N_{x\theta,\theta} - N_{\theta\theta} \sin \alpha \right] \delta u_0 \\
 & + \left[ (N_{x\theta}x \sin \alpha)_{,x} + N_{x\theta,\theta} \sin \alpha + \frac{1}{2} M_{x\theta,x} \cos \alpha \right. \\
 & + \frac{1}{x} M_{x\theta} \cos \alpha + N_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{x} M_{\theta\theta,\theta} \cot \alpha - \frac{1}{x} Y_{xx} \cos \alpha \\
 & - Y_{xx,x} \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{x^2 \sin \alpha} T_{xx} - \left. \left( \frac{\cos^2 \alpha}{2x \sin \alpha} T_{xx} \right)_{,x} \right. \\
 & + \frac{1}{x} Y_{\theta\theta} \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2x \sin \alpha} T_{\theta\theta,\theta} - \frac{1}{2x} Y_{x\theta,\theta} \cot \alpha \\
 & \left. - \frac{\cos \alpha}{4x^2 \sin^2 \alpha} T_{x\theta,\theta} \right] \delta v_0 \\
 & + \left[ (M_{xx}x \sin \alpha)_{,xx} + M_{x\theta,x\theta} + \frac{1}{x} M_{x\theta,\theta} \right. \\
 & - N_{\theta\theta} \cos \alpha + \frac{1}{x \sin \alpha} M_{\theta\theta,\theta\theta} - M_{\theta\theta,x} \sin \alpha - \frac{1}{x} Y_{xx,\theta} \\
 & - Y_{xx,x\theta} - \frac{1}{x^2} T_{xx,\theta} \cot \alpha - \left. \left( \frac{1}{2x} T_{xx} \cot \alpha \right)_{,x\theta} + \frac{1}{2} Y_{\theta\theta,x\theta} \right. \\
 & + \frac{1}{x} Y_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{2x^2} \cot \alpha T_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{4} (Y_{x\theta} x \sin \alpha)_{,xx} \\
 & - \frac{1}{2x \sin \alpha} Y_{x\theta,x\theta} - \frac{1}{4} \sin \alpha Y_{x\theta,x} \\
 & \left. - \frac{\cos \alpha}{4x^2 \sin^2 \alpha} T_{x\theta,\theta\theta} \right] \delta w_0 \Big] dx d\theta dt \quad (18)
 \end{aligned}$$

کار ناشی از نیروهای خارجی ناپایستار شامل دو قسمت می‌باشد: الف- ناشی از بار گسترده روی پوسته ب- ناشی از تماس با سیال. اگر  $F(r, \theta, t)$  بار گسترده اعمالی و  $p(r, \theta, t)$  فشار اعمالی ناشی از سیال به پوسته باشد، تغییرات کار نیروهای خارجی ناپایستار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta W_{n,c} = \int_0^{2\pi} \int_a^b (F(x, \theta, t) - q(x, \theta, t)) \delta w_x \sin \alpha dx d\theta \quad (19)$$

با جایگذاری از روابط (17) تا (19) در رابطه (16) معادلات حاکم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & (N_{xx}x \sin \alpha)_{,x} + N_{x\theta,\theta} - N_{\theta\theta} \sin \alpha = \rho h x \sin \alpha \ddot{u}_0 \\
 & (N_{x\theta}x \sin \alpha)_{,x} + N_{x\theta,\theta} \sin \alpha + \frac{1}{2} M_{x\theta,x} \cos \alpha \\
 & + \frac{1}{x} M_{x\theta} \cos \alpha + N_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{x} M_{\theta\theta,\theta} \cot \alpha - \frac{1}{x} Y_{xx} \cos \alpha \\
 & - Y_{xx,x} \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{x^2 \sin \alpha} T_{xx} - \left( \frac{\cos^2 \alpha}{2x \sin \alpha} T_{xx} \right)_{,x} \\
 & + \frac{1}{x} Y_{\theta\theta} \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2x \sin \alpha} T_{\theta\theta,\theta} - \frac{1}{2x} Y_{x\theta,\theta} \cot \alpha \\
 & - \frac{\cos \alpha}{4x^2 \sin^2 \alpha} T_{x\theta,\theta} = \rho h x \sin \alpha \ddot{v}_0 \\
 & (M_{xx}x \sin \alpha)_{,xx} + M_{x\theta,x\theta} + \frac{1}{x} M_{x\theta,\theta} \\
 & - N_{\theta\theta} \cos \alpha + \frac{1}{x \sin \alpha} M_{\theta\theta,\theta\theta} - M_{\theta\theta,x} \sin \alpha - \frac{1}{x} Y_{xx,\theta} \\
 & - Y_{xx,x\theta} - \frac{1}{x^2} T_{xx,\theta} \cot \alpha - \left( \frac{1}{2x} T_{xx} \cot \alpha \right)_{,x\theta} \\
 & + \frac{1}{2} Y_{\theta\theta,x\theta} + \frac{1}{x} Y_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{2x^2} \cot \alpha T_{\theta\theta,\theta} \\
 & + \frac{1}{4} (Y_{x\theta} x \sin \alpha)_{,xx} - \frac{1}{2x \sin \alpha} Y_{x\theta,x\theta} - \frac{1}{4} \sin \alpha Y_{x\theta,x} \\
 & - \frac{\cos \alpha}{4x^2 \sin^2 \alpha} T_{x\theta,\theta\theta} + F(x, \theta, t) x \sin \alpha \\
 & = p(x, \theta, t) x \sin \alpha + \rho h x \sin \alpha \ddot{w}_0 \\
 & + \rho \frac{h^3}{12} \left( \ddot{w}_{0,xx} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \ddot{w}_{0,\theta\theta} \right) x \sin \alpha \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T & = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] x \sin \alpha dx d\theta dz \quad (15)
 \end{aligned}$$

معادلات حرکت و شرایط مرزی را می‌توان با استفاده از اصل همپلتون به دست آورد. این اصل به صورت زیر بیان می‌گردد [33]:

$$\int_0^t \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (16)$$

با توجه به تعریف میدان تغییر مکان‌ها در تئوری کلاسیک صفحات و اعمال عملگر  $\delta$  و با استفاده از انتگرال جزء به جزء، تغییرات انرژی جنبشی بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \\
 & = \rho \int_0^{2\pi} \int_a^b \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[ h(\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) \right. \right. \\
 & - \frac{h^3}{12} \left( \dot{w}_{0,x} \delta \dot{w}_{0,x} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \dot{w}_{0,\theta} \delta \dot{w}_{0,\theta} \right) \right] dt \Big\} x \sin \alpha dx d\theta \\
 & = -\rho \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \left[ h(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) \right. \\
 & + \frac{h^3}{12} \left( \ddot{w}_{0,xx} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} \ddot{w}_{0,\theta\theta} \right) \delta w_0 \right] x \sin \alpha dx d\theta dt \quad (17)
 \end{aligned}$$

با استفاده از روابط (4) و (12) و با انجام عمل تغییرات روی متغیرهای  $w_0$  و  $v_0$ ،  $u_0$  در رابطه مربوط به انرژی کرنشی و کمک گرفتن از روش انتگرال جزء به جزء، نتیجه به صورت زیر حاصل می‌شود:

### 3- تعیین فشار دینامیکی سیال بر پوسته

که  $A$  مقداری ثابت بوده و با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود. با جایگذاری از رابطه (27) در رابطه (25) تابع پتانسیل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n \left[ 1 + \frac{n}{12} \beta^2 + \frac{n(5n+7)}{1440} \beta^4 + \frac{n(n+4)(5n+1)}{51840} \beta^6 \right]}{n \alpha^n \left[ \alpha^{-1} + \frac{(n+2)}{12} \alpha + \frac{(5n+7)(n+4)}{1440} \alpha^3 + \frac{(n+4)(5n+1)(n+6)}{51840} \alpha^5 \right]} x \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (29)$$

با استفاده رابطه  $p = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  می‌توان فشار دینامیکی اعمالی از سیال به پوسته را تعیین کرد:

$$p = -\rho_f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\beta=\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (30)$$

به طوری که:

$$p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \left[ 1 + \frac{n}{12} \alpha^2 + \frac{n(5n+7)}{1440} \alpha^4 + \frac{n(n+4)(5n+1)}{51840} \alpha^6 \right]}{n \left[ 1 + \frac{(n+2)}{12} \alpha^2 + \frac{(5n+7)(n+4)}{1440} \alpha^4 + \frac{(n+4)(5n+1)(n+6)}{51840} \alpha^6 \right]} \quad (31)$$

### 4- روش حل مسأله

برای حل معادلات بدست آمده در رابطه (20) با توجه به تقارن می‌توان مشتق نسبت به مؤلفه  $\theta$  را برابر صفر قرار داد. همچنین فرض می‌شود بار خارجی هارمونیک روی پوسته مفروض به صورت زیر باشد:

$$F(x, \theta, t) = F_0 \sin(\Omega t) \quad (32)$$

که  $F_0$  دامنه بار خارجی و  $\Omega$  فرکانس تحریک می‌باشد. بنابراین معادلات حاکم بر حرکت نانوپوسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (N_{xx} x \sin \alpha)_{,x} - N_{\theta\theta} \sin \alpha = \rho h x \sin \alpha \ddot{u} \\ & (N_{x\theta} x \sin \alpha)_{,x} + \frac{1}{2} M_{x\theta,x} \cos \alpha + \frac{1}{x} M_{x\theta} \cos \alpha \\ & - \frac{1}{x} Y_{xx} \cos \alpha - Y_{xx,x} \cos \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{x^2 \sin \alpha} T_{xx} \\ & - \left( \frac{\cos^2 \alpha}{2x \sin \alpha} T_{xx} \right)_{,x} + \frac{1}{x} Y_{\theta\theta} = \rho h x \sin \alpha \ddot{v}_0 \\ & (M_{xx} x \sin \alpha)_{,xx} - N_{\theta\theta} \cos \alpha - M_{\theta\theta,x} \sin \alpha \\ & + \frac{1}{4} (Y_{x\theta} x \sin \alpha)_{,xx} - \frac{1}{4} \sin \alpha Y_{x\theta,x} \\ & - F_0 \sin(\Omega t) x \sin \alpha \\ & = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \left[ 1 + \frac{n}{12} \alpha^2 + \frac{n(5n+7)}{1440} \alpha^4 + \frac{n(n+4)(5n+1)}{51840} \alpha^6 \right]}{n \left[ 1 + \frac{(n+2)}{12} \alpha^2 + \frac{(5n+7)(n+4)}{1440} \alpha^4 + \frac{(n+4)(5n+1)(n+6)}{51840} \alpha^6 \right]} x^2 \sin \alpha \right. \\ & \left. + \rho h x \sin \alpha \right] \ddot{w}_0 \quad (33) \end{aligned}$$

برای بدست آوردن مدل ریاضی یک سیال فرضیات زیر برای رفتار مدل دینامیکی در نظر گرفته می‌شود: جابجایی‌ها و سرعت سیال کوچک فرض می‌شوند. رفتار سیال به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. سیال ایده‌آل، تراکم‌ناپذیر، غیریویسکوز و غیرچرخشی فرض می‌شود به نحوی که برای آن یک تابع پتانسیل می‌توان یافت. شرایط اولیه سیال صفر در نظر گرفته می‌شوند. فرمولبندی براساس تابع پتانسیل سرعت می‌باشد.

با توجه به فرضیات گفته شده برای سیال در تماس با ورق، تابع پتانسیل سرعت  $\Phi$  باید معادله لاپلاس را در دامنه سیال ارضا کند. این معادله در مختصات مخروطی به فرم زیر می‌باشد: [34, 35]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(x, \theta, \beta, t) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{x^2 \tan \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \\ &+ \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

که  $(x, \theta, \beta)$  مختصات مخروطی می‌باشد. مؤلفه‌های سرعت در سه راستای  $(x, \theta, \beta)$  به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_\theta = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad V_\beta = \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \quad (22)$$

سرعت سیال و سرعت پوسته در سطح تماس در راستای عمود بر سطح پوسته (راستای  $\beta$ ) برابر است. بنابراین:

$$V_\alpha = \left( \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right)_{\beta=\alpha} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (23)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها تابع پتانسیل سیال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\beta) F_n(x, t) \cos(n\theta) \quad (24)$$

با جایگذاری از رابطه (24) در رابطه (23) داریم:

$$F(x, \theta, t) = \frac{x}{R'_n(\alpha)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (25)$$

بنابراین تابع پتانسیل به صورت زیر خواهد شد:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x R_n(\beta)}{R'_n(\alpha)} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (26)$$

برای تعیین  $R_n(\beta)$  رابطه (24) را در رابطه (21) قرار می‌دهیم (به ازای  $x$  ثابت):

$$R''_n + \frac{1}{\tan \beta} R'_n - \frac{n^2}{\sin^2 \beta} R_n = 0 \quad (27)$$

حل معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} R_n(\beta) &= A \beta^n \left[ 1 + \frac{n}{12} \beta^2 + \frac{n(5n+7)}{1440} \beta^4 + \frac{n(n+4)(5n+1)}{51840} \beta^6 \right] \quad (28) \end{aligned}$$

| زاویه رأس مخروط (درجه) | مرجع [36] | تحقیق حاضر | درصد خطا |
|------------------------|-----------|------------|----------|
| 10                     | 63.72     | 62.97      | 1.2%     |
| 30                     | 34.36     | 34.02      | 1%       |
| 60                     | 10.8      | 10.3       | 4.6%     |

همچنین برای اعتبارسنجی نتایج این تحقیق با در نظر گرفتن اثرات نانو، نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج مرجع [37] مورد مقایسه قرار گرفته است. در مرجع [37]، ارتعاشات آزاد یک نانوپوسته مخروطی با استفاده از روش تئوری غیرموضعی بررسی شده است. در شکل 2 فرکانس‌های طبیعی نانوپوسته مخروطی بدون سیال حاصل از این تحقیق با نتایج مرجع [37] مقایسه شده است. در این مقایسه پارامتر فرکانسی به صورت  $\lambda = \omega R_s \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$  است. زاویه رأس مخروط  $\alpha = 19.2^\circ$  و شعاع کوچک پوسته  $R_s = a \sin \alpha$  در نظر گرفته شده است. همانطوری که از شکل 2 مشخص است تطابق خوبی بین نتایج پژوهش حاضر با مرجع مذکور مشاهده می‌شود.

در این پژوهش یک نانوپوسته مخروطی ناقص ساخته شده از پلی استیرین با مدول یانگ  $E = 1190 \text{ Mpa}$ ، چگالی  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ ، نسبت پواسون  $\nu = 0.3$  و پارامتر مقیاس اندازه  $l = 17.6 \mu\text{m}$  در نظر گرفته شده است. همچنین فاصله رأس مخروط تا ابتدای مخروط  $a = 5 \text{ nm}$  و شرایط مرزی به صورت گیردار فرض شده است. برای شرط مرزی گیردار شرایط تکیه-گاهی به صورت زیر است:

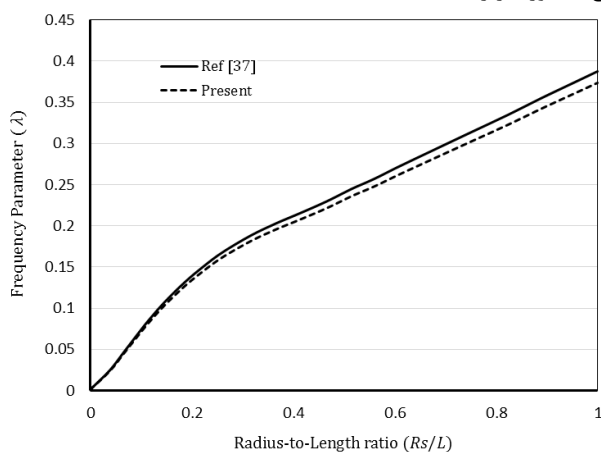


Fig. 2 Comparison of the frequency parameter of a conical nanoshell without fluid with the results obtained from the reference [37]

شکل 2 مقایسه پارامتر فرکانسی نانوپوسته مخروطی بدون سیال با نتایج حاصل از مرجع [37]

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

$$\frac{dw_0}{dx} = 0 \quad (40)$$

با توجه به شرایط موجود در  $x = a, b$  مودهای فرضی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) = (x-a)(x-b) \\ H(x) &= (x-a)^2(x-b)^2 \end{aligned} \quad (41)$$

در شکل 3، اثر افزایش  $h/L$  بر رفتار ارتعاشی نانوپوسته مخروطی بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش  $h/L$  یا ضخیم شدن نانوپوسته، ماکزیمم پاسخ ارتعاشی کاهش می‌یابد که به این دلیل است که با افزایش ضخامت نانوپوسته، اینرسی آن افزایش یافته و نهایتاً دامنه پاسخ

برای حل معادلات از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. بدین منظور پاسخ‌ها به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= U_0 \cdot F(x) \sin(\Omega t) \\ v_0(x, t) &= V_0 \cdot G(x) \sin(\Omega t) \\ w_0(x, t) &= W_0 \cdot H(x) \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (34)$$

که  $F(x)$ ،  $G(x)$  و  $H(x)$  شکل مودها می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی پوسته انتخاب می‌گردد. همچنین  $U_0$ ،  $V_0$  و  $W_0$  ثوابت مجهول می‌باشد. با جایگذاری از رابطه (34) در رابطه (33)، مانده معادلات (33) به صورت  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  تشکیل خواهد شد. مطابق با روش گالرگین انتگرال حاصل ضرب مانده‌ها در تابع وزنی روی سطح باید برابر صفر شود، بنابراین [36]:

$$\int_{\Omega} I_i X_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (35)$$

که  $X_i$  تابع وزنی است که برای پاسخ‌های رابطه (34) به فرم زیر انتخاب می‌گردد:

$$\begin{aligned} X_1 &= F(x) \\ X_2 &= G(x) \\ X_3 &= H(x) \end{aligned} \quad (36)$$

همچنین  $\Omega$  بیان کننده محدوده‌ی انتگرال گیری می‌باشد که با توجه به هندسه مسئله مشخص می‌گردد. بنابراین برای رابطه (35) به فرم زیر خواهد شد:

$$\int_a^b X_i I_i x \sin \Omega dx = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (37)$$

با جایگذاری از روابط (33)، (34) و (36) در رابطه (35) دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$[-M\Omega^2 + K] \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

که  $[M]$  ماتریس جرم،  $[K]$  ماتریس سفتی می‌باشد. با معکوس کردن ماتریس ضرایب، بردار ثوابت به فرم زیر تعیین خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = [-M\Omega^2 + K]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

## 5- نتایج عددی و بحث

به منظور صحت‌گذاری به نتایج پژوهش حاضر، با توجه به تحقیقات موجود محدودیت‌هایی در پژوهش حاضر اعمال می‌گردد. فرض می‌شود که پوسته در مقیاس میکرو بوده ( $l = 0$ ) و پوسته فاقد بارهای خارجی ( $F_0 = 0$ ) باشد. در جدول 1 فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از پژوهش حاضر با نتایج بدست آمده از مرجع [36] برای زوایای مختلف رأس مخروط  $\alpha$  مورد مقایسه قرار گرفته است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. در مرجع مذکور، ارتعاشات آزاد یک پوسته مخروطی ناقص در تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفته است.

جدول 1 مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته مخروطی حاوی سیال با نتایج مرجع [36]

Table 1 Comparison of dimensionless natural frequency of conical shell containing fluid with Ref. [36]

می‌یابد، دامنه پاسخ هارمونیک نانوپوسته نیز افزایش می‌یابد. به نظر می‌رسد در فرکانس تحریک نزدیک به  $1 \times 10^9 \text{ rad}$ ، فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی نانوپوسته نزدیک شده و تغییرات حداکثر دامنه بی‌بعد پاسخ هارمونیک با شیب تندتری افزایش می‌یابد.

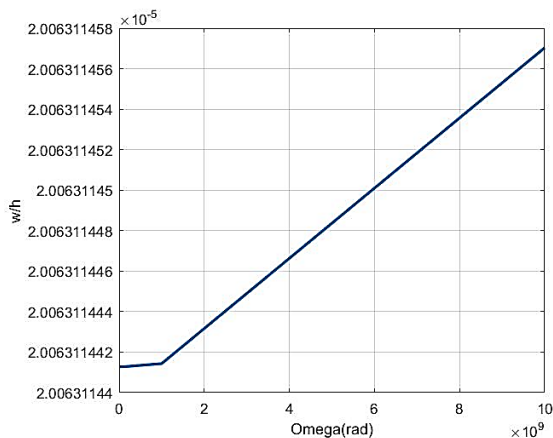


Fig. 5 Investigating the effect of changes in excitation frequency on the vibration response of a conical nanoshell containing fluid

شکل 5 بررسی اثر تغییرات فرکانس تحریک بر پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال

در شکل 6، اثر تغییرات دامنه نیروی هارمونیک خارجی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال بر حداکثر دامنه بی‌بعد پاسخ هارمونیک بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش دامنه تحریک، دامنه پاسخ هارمونیک نانوپوسته نیز افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه در این شکل آن است که تغییرات دامنه پاسخ هارمونیک نانوپوسته مخروطی برای تغییرات دامنه نیروی هارمونیک به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد.

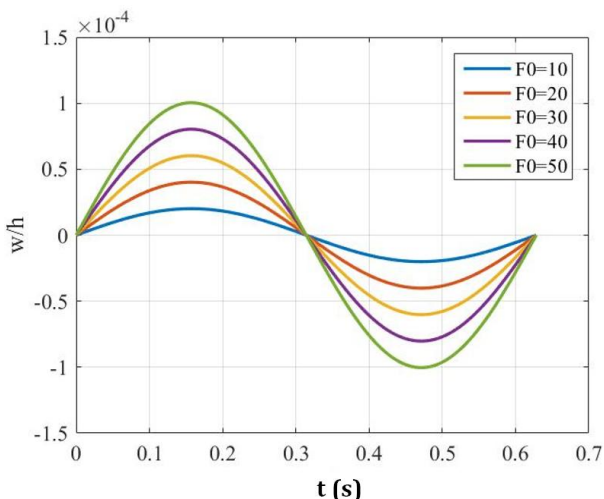


Fig. 6 Investigating the effect of excitation amplitude changes on the vibration response of a conical nanoshell containing fluid

شکل 6 بررسی اثر تغییرات دامنه تحریک بر پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال

در شکل 7، اثر تغییرات چگالی سیال بر رفتار ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش چگالی سیال، ماکزیمم پاسخ ارتعاشی به صورت بسیار ناچیز کاهش می‌یابد که این موضوع حاکی از آن است که اینرسی سیال در مقابل اینرسی نانوپوسته ناچیز بوده و تأثیر چندانی در رفتار ارتعاشی نانوپوسته ندارد. نتایج این شکل اهمیت

دینامیکی کاهش می‌یابد. همچنین، نتایج این شکل حاکی از آن است که تغییرات دامنه پاسخ دینامیکی در مقادیر کوچکتر  $h/L$  با مقادیر بیشتری کاهش می‌یابد و با افزایش مقدار  $h/L$  تغییرات به حداقل می‌رسد. لذا در صورتی که مقادیر پایین پاسخ دینامیکی نانوپوسته مد نظر باشد، ضخیم کردن آن از یک مقداری به بعد مقرون به صرفه نمی‌باشد.

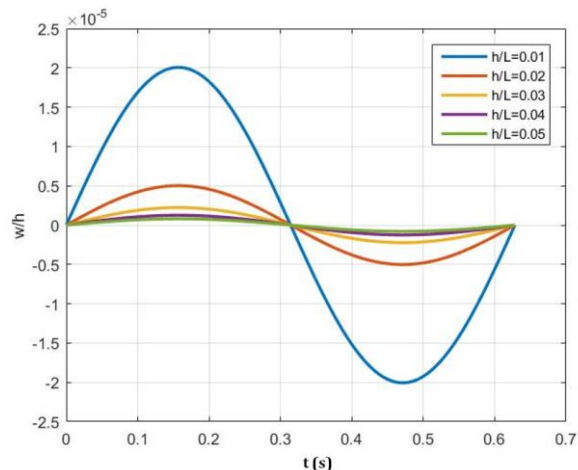


Fig. 3 Investigation of the effect of  $h/L$  on the dynamic response of a conical nanoshell containing fluid

شکل 3 بررسی اثر تغییرات  $h/L$  بر پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال

در شکل 4 اثر تغییرات زاویه رأس مخروط بر حداکثر دامنه بی‌بعد پاسخ هارمونیک نانوپوسته مخروطی بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش زاویه رأس مخروط ماکزیمم دامنه پاسخ هارمونیک افزایش می‌یابد که این افزایش تا زاویه حدود 20 درجه با شیب زیاد و برای مقادیر بیشتر از آن با شیب ملایم اتفاق می‌افتد. این افزایش نشان می‌دهد که سفتی و اینرسی نانوپوسته با افزایش زاویه رأس مخروط کاهش می‌یابد. لذا افزایش زاویه رأس مخروط از حدود زاویه 20 درجه به بعد تأثیر چندانی در میزان ماکزیمم دامنه پاسخ دینامیکی ندارد.

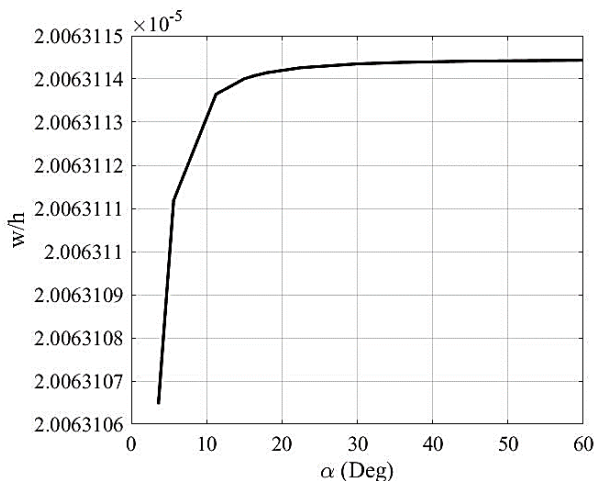


Fig. 4 Investigating the effect of changes in the cone apex angle on the vibration response of a conical nanoshell containing fluid

شکل 4 بررسی اثر تغییرات زاویه رأس مخروط بر پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال

به منظور بررسی اثر تغییرات فرکانس نیروی هارمونیک خارجی وارد بر نانوپوسته مخروطی حاوی سیال بر حداکثر دامنه بی‌بعد پاسخ هارمونیک، شکل 5 رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود هر چه فرکانس تحریک افزایش

- European Journal of Mechanics/ A Solids, Vol. 30, pp. 517-524, 2011.
- [3] Firouz-Abadi, R. D., Noorian, M. A., Haddadpour, H., "A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. Journal of Fluids and Structures," Vol. 26, No. 5, pp.747-763, 2010.
- [4] Qu, Q., Wang, R., Guo, H., Liu, P., Agarwal, R. K., "Numerical study of water impact of an elastic cylindrical shell," AIAA Journal, Vol. 54, No. 10, pp.3296-3303, 2016.
- [5] Firouz Abadi, R. D., Fotouhi, M. M., Haddadpour, H., "Stability analysis of nanocones under external pressure and axial compression using nonlocal shell model," Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 44, No. 9, pp. 1832-1837, 2012.
- [6] Fotouhi, M. M., Firouz-Abadi, R. D., Haddadpour, H., "Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model," International Journal of Engineering Science, Vol. 64, No. 1, pp. 14-22, 2013.
- [7] Guo, S. Q., Yang, S. P., "Axial vibration analysis of nanocones based on nonlocal elasticity theory," Acta Mechanica Sinica, Vol. 28, No. 3, pp. 801-807, 2012.
- [8] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R., "Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid," Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, 2013.
- [9] Fotouhi, M. M., Firouz-Abadi, R. D., Haddadpour, H., "Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model," International Journal of Engineering Science, Vol. 64, No. 1, pp. 14-22, 2013.
- [10] Sofiyev, A. H., "The non-linear dynamics of FGM truncated conical shells surrounded by an elastic medium," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 66, pp. 33-44, 2013.
- [11] Sofiyev, A. H., "Large-amplitude vibration of non-homogenous orthotropic composite truncated conical shells," Composites Part B: Engineering, Vol. 61, pp. 365-374, 2014.
- [12] Sofiyev, A. H., Kuruoglu, N., "Non-linear buckling of an FGM truncated conical shell surrounded by an elastic medium," Thin-Walled Structures, Vol. 80, pp. 178-191, 2014.
- [13] Zeighampour, H., Tadi Beni, Y., "Analysis of conical shells in the framework of coupled stresses," International Journal of Engineering Science, Vol. 81, pp. 107-122, 2014.
- [14] Jafari Mehrabadi, S., Jalilian Rad, M., Zarouni, E., "Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 12, pp. 122-132, 2014.
- [15] Jin, G., Ma, X., Shi, S., Ye, T., Liu, Z., "A modified Fourier series solution for vibration analysis of truncated conical shells with general boundary conditions," Applied Acoustics, Vol. 85, pp.82-96, 2014.
- [16] Zeighampour, H., Beni, Y. T., "Analysis of conical shells in the framework of coupled stresses," International Journal of Engineering Science, Vol. 81, pp. 107-122, 2014.
- [17] Beni, Y. T., Mehralian, F., Razavi, H., "Free vibration analysis of size-dependent shear deformable functionally graded cylindrical shell on the basis of modified couple stress theory," Composite Structures, Vol. 111, pp. 349-353, 2014.
- [18] Beni, Y. T., Soleimani, I., "Free torsional vibration and static analysis of the conical nano-shell based on modified couple stress theory," Science and Research Pioneers Institute, 3rd International Conference on Nanotechnology (ICN2015).
- [19] Zeighampour, H., Beni, Y. T., Mehralian, F., "A shear deformable conical shell formulation in the framework of couple stress theory". Acta Mechanica, Vol. 226, No. 8, pp. 2607-2629, 2015.
- [20] Rahmanian, M., Firouz-Abadi, R. D., Cigeroglu, E., "Free vibrations of moderately thick truncated conical shells filled with quiescent fluid" Journal of fluids and structures, Vol. 63, pp. 280-301, 2016.
- [21] Beni, Y. T., Mehralian, F., "The effect of small scale on the free vibration of functionally graded truncated conical shells". Journal of

کاربرد نانوپوسته‌های مخروطی حاوی سیال را نشان می‌دهد و بیانگر آن است که نانوپوسته‌ها مقاومت خوبی در برابر تغییرات چگالی سیال دارند.

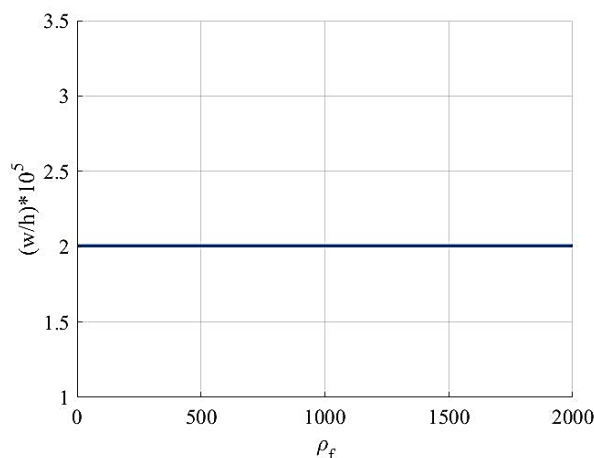


Fig. 7 Investigating the effect of fluid density changes on the vibrational response of a conical nanoshell containing fluid

شکل 7 بررسی اثر تغییرات چگالی سیال بر پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال

#### 6- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر ارتعاشات اجباری نانوپوسته مخروطی حاوی سیال مورد بررسی قرار گرفت و جهت تحلیل پوسته از تئوری کلاسیک صفحات همراه با تئوری کوپل استرس استفاده شد. برای تعیین معادلات حاکم از روش انرژی و اصل همبستگی استفاده گردید. همچنین جهت تعیین پاسخ ارتعاشی از روش مودهای فرضی به همراه تکنیک گالرکین بهره گرفته شد. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شدند:

- 1- با افزایش نسبت ضخامت نانوپوسته بر طول  $h/L$  (ضخیم شدن پوسته) دامنه پاسخ ارتعاش کاهش می‌یابد. چون با ضخیم‌تر شدن پوسته سفتی آن افزایش پیدا کرده و باعث کاهش دامنه پاسخ ارتعاشی می‌شود.
- 2- با افزایش زاویه رأس مخروط نانوپوسته مخروطی، دامنه پاسخ ارتعاش افزایش می‌یابد و افزایش زاویه رأس مخروط از حدود زاویه 20 درجه به بعد تأثیر چندانی در میزان ماکزیمم دامنه پاسخ هارمونیک ندارد.
- 3- با افزایش فرکانس تحریک نیروی هارمونیک خارجی، دامنه پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال افزایش می‌یابد و در فرکانس تحریک نزدیک به  $1 \times 10^9 \text{ rad}$ ، فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی نانوپوسته نزدیک شده و تغییرات حداکثر دامنه بی‌بعد پاسخ هارمونیک با شیب تندتری افزایش می‌یابد.
- 4- با افزایش دامنه نیروی هارمونیک خارجی، دامنه پاسخ ارتعاشی نانوپوسته مخروطی حاوی سیال به صورت یکساخت افزایش می‌یابد.
- 5- با افزایش چگالی سیال داخل نانوپوسته مخروطی، دامنه پاسخ ارتعاشی آن به طور ناچیز کاهش می‌یابد و این امر حاکی از آن است نانوپوسته‌ها مقاومت خوبی در برابر تغییرات چگالی سیال دارند.

#### 7- مراجع

- [1] Gheshlaghi, B., Hasheminejad, S. M., Abbasian, S., "Size dependent torsional vibration of nanotubes," Physica E, Vol. 43, pp. 45-48, 2010.
- [2] Wang, B., Zhou, S., Zhao, J., Chen, X., "A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory,"

- Mechanics of Materials and Structures, Vol. 11, No. 2, pp. 91-112, 2016.
- [22] Duc, N. D., Cong, P. H., Tuan, N. D., Tran, P., Van Thanh, N., "Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations" *Thin-Walled Structures*, Vol. 115, pp. 300-310, 2017.
- [23] Javed, S., "Free vibration characteristic of laminated conical shells based on higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, Vol. 204, pp. 80-87, 2018.
- [24] Yang, S. W., Zhang, W., Hao, Y. X., Niu, Y., "Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances," *Thin-Walled Structures*, Vol. 142, pp. 369-391, 2019.
- [25] Gholami, R., Darvizeh, A., Ansari, R., Sadeghi, F. "Vibration and buckling of first-order shear deformable circular cylindrical micro-/nano-shells based on Mindlin's strain gradient elasticity theory," *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 58, pp. 76-88, 2016.
- [26] Sheykhi, A., Hosseini-Hashemi, S., Maghsoudpour, A., Haghighi, S. E., "Free nonlinear vibration analysis of nano-truncated conical shells based on modified strain gradient theory". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, Vol. 236, No. 1, pp. 110-146, 2022.
- [27] Wang, Z. Q., Yang, S. W., Hao, Y. X., Zhang, W., Ma, W. S., Zhang, X. D., "Modeling and free vibration analysis of variable stiffness system for sandwich conical shell structures with variable thickness," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 23, No. 15, pp.171-198, 2023.
- [28] Mansouri, M., Dardel, M., Hasan Ghasemi, M., "Nonlinear Vibration of Truncated Open Conical Nanoshells Under Harmonic Excitation," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, pp. 245-255, 2024.
- [29] Soedel, W., "Vibrations of Shells and Plates," Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [30] J.N., Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis," Second Edition, CRC Press , 2002.
- [31] Lam, D. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J., Tong, P., "Experiments and theory in strain gradient elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.
- [32] Tohidi, H., Hosseini-Hashemi, S. H., Maghsoudpour, A., Etemadi, S., "Strain gradient theory for vibration analysis of embedded CNT-reinforced micro Mindlin cylindrical shells considering agglomeration effects," *Structural engineering and mechanics: An international journal*, Vol. 62, No. 5, pp. 551-565, 2017.
- [33] Beni, Y. T., Soleimani, I., "Free torsional vibration and static analysis of the conical nano-shell based on modified couple stress theory," *Science and Research Pioneers Institute, 3rd International Conference on Nanotechnology (ICN2015)*.
- [34] Askari, E., Jeong, K. H., Amabili, M., "Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, 2013.
- [35] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R., "Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, 2013.
- [36] Kerboua, Y., Lakis, A. A., Hmila, M., "Vibration analysis of truncated conical shells subjected to flowing fluid," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 3, pp. 791-809, 2010.
- [37] Firouz-Abadi, R. D., Fotouhi, M. M., & Haddadpour, H., " Free vibration analysis of nanocones using a nonlocal continuum model," *Physics Letters, Section A:General, Atomic and Solid State Physics*, Vol. 375, pp. 3593-3598 , 2011.