



تأثیر تخلخل و ناهمگنی خواص بر پاسخ گذرا ترموالاستیک یک ورق هدفمند: رویکردی مبتنی بر تئوری لرد-شولمن

زهرا دانشجو^{1*}، امیرمهدی مصطفی پور²، علی ترکاشوند³، امیرحسین قمی فروشانی⁴

- 1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
3- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
4- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی 16765-1719، z_daneshjoo@sbu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

مواد هدفمند تابعی به عنوان دسته‌ای از مواد پیشرفته با ساختاری ناهمگن شناخته می‌شوند که خواص مکانیکی آن‌ها به صورت پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این تغییرات ناشی از توزیع تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت سازه است. در این مقاله، پاسخ دینامیکی ترموالاستیک گذرای یک ورق مستطیلی هدفمند متخلخل تحت اثر شوک حرارتی زمانی، با تکیه بر تئوری لرد-شولمن مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، پس از اعمال بار حرارتی وابسته به زمان به ورق هدفمند متخلخل، تحلیل عددی سه بعدی بر پایه تئوری لرد-شولمن و روش فضای حالت انجام شده است. حل معادلات حاکم شامل مؤلفه‌های تنش، جابجایی، دما و شار حرارتی با استفاده از روش دوربین و وارون سازی عددی تبدیل لاپلاس برای ورق با شرایط مرزی ساده تکیه گاهی صورت گرفته است. در نهایت، با در نظر گرفتن انواع مختلف تخلخل‌ها، اثر پارامترهای گوناگونی از جمله نوع تخلخل، ضریب تخلخل، زمان و پارامتر غیرهمگن بر توزیع و مقدار دما، جابجایی و تنش‌ها بررسی شده‌اند. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تغییرات این پارامترها تأثیر قابل توجهی بر رفتار گذرای ورق هدفمند دارد. همچنین، با انتخاب بهینه توزیع کسر حجمی و مشخصات تخلخل، امکان طراحی بهینه سازه‌های هدفمند فراهم می‌گردد. تأکید این پژوهش بر ارتباط مستقیم بین پارامترهای ساختاری و پاسخ‌های مکانیکی و حرارتی، راهگشای مهندسان در بهینه‌سازی عملکرد سازه‌های هدفمند در کاربردهای پیشرفته صنعتی خواهد بود.

دریافت: 1404/04/20

پذیرش: 1404/06/19

کلیدواژگان

مواد هدفمند تابعی، ترموالاستیک، ورق هدفمند متخلخل، نظریه فضای حالت، تئوری لرد-شولمن

Effect of porosity and gradation on transient thermoelastic response of a functionally graded plate: A Lord–Shulman theory-based approach

Zahra Daneshjoo^{1*}, Amirmahdi Mostafapour², Ali Tarkashvand³, Amirhossein Ghomi Foroushani⁴

- 1, 2- Faculty of Mechanical Engineering and Energy, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
3, 4- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 16765-1719, Tehran, Iran, z_daneshjoo@sbu.ac.ir

Keywords

Functionally graded materials, Thermoelasticity, Porous functionally graded plate, State space method, Lord–Shulman theory

Abstract

Functionally graded materials (FGMs) are an advanced class of heterogeneous materials whose mechanical properties vary continuously through the thickness due to gradual changes in the volume fractions of constituent phases. This study investigates the transient thermoelastic response of a porous functionally graded rectangular plate subjected to a time-dependent thermal shock within the framework of the Lord–Shulman generalized thermoelasticity theory. A comprehensive three-dimensional numerical analysis is carried out using the state-space method in conjunction with the Lord–Shulman model. The coupled governing equations for stress components, displacements, temperature, and heat flux are solved through the differential quadrature method combined with numerical inversion of the Laplace transform, under simply supported boundary conditions. The parametric study explores the influence of porosity type, porosity coefficient, time, and gradation parameter on the spatial distribution and magnitudes of temperature, displacement, and stresses. The results reveal that these parameters significantly affect the transient thermoelastic behavior of the functionally graded plate. Furthermore, optimizing the volume fraction distribution and porosity characteristics can enhance the performance of porous FGM structures. These findings underscore the critical role of structural and material parameters in controlling coupled thermal–mechanical responses and provide practical insights for the optimal design of FGMs in advanced engineering applications.

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Daneshjoo, Z., Mostafapour, A., Tarkashvand, A., Ghomi Foroushani, A., “Effect of porosity and gradation on transient thermoelastic response of a functionally graded plate: A Lord–Shulman theory-based approach,” In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 12, No. 1, pp. 2669-2680, 2025. <https://doi.org/10.22068/jstc.2025.2065542.1928>

1- مقدمه

ورق یا صفحه یک جزء سازه‌ای است که ضخامت آن در مقایسه با ابعاد طولی و عرضی آن کم است. این عضو تحت بارهایی قرار می‌گیرد که علاوه بر ایجاد تنش‌های کششی، موجب خمش آن نیز می‌شوند [1-4]. یکی از اشکال پرکاربرد ورق، ورق‌های مستطیلی شکل می‌باشد. امروزه علاوه بر مواد خالصی که در گذشته در ساخت ورق‌ها استفاده می‌شد، از مواد جدیدی مانند مواد کامپوزیتی، مواد پیزوالکتریک، نانو مواد و مواد هدفمند تابعی (FGM¹) در ساخت ورق‌ها استفاده می‌شود [5-8]. علت استفاده از چنین مواد جدیدی در ساخت ورق‌ها این است که مواد خالص به تنهایی قادر به تأمین نیازهای صنعتی نیستند و لازم است از موادی با خواص بهبود یافته استفاده شود. مواد هدفمند، دسته‌ای از این مواد هستند که علاوه بر مقاومت در برابر نیرو و ضربه، در محیط‌های با دمای بالا نیز عملکرد مناسبی دارند و از ایجاد تنش‌های حرارتی بزرگ در ورق جلوگیری می‌کنند [9-12]. بنابراین، این مواد کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مدرن از جمله هوافضا، مکانیک، الکترونیک، اپتیک، شیمی، زیست پزشکی، هسته‌ای و مهندسی عمران در دو دهه گذشته داشته‌اند [13-16].

در سال 2004، اوتانو و تانیگاوا² به حل تئوری ترموالاستیک ورق هدفمند تابعی ناهمگن تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند و توانستند تنش برشی عرضی و تنش نرمال در جهت ضخامت را به طور دقیق در حالت گذرا ارزیابی کنند [17]. در سال 2011، ژو³ و همکاران پاسخ دینامیکی ترموالاستیک یک ورق مستطیلی هدفمند که در معرض شوک حرارتی بر روی سطح بود را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که در شوک حرارتی مقادیر دما، جابجایی و تنش‌ها به سرعت در حالت گذرا تغییر می‌کنند و عدم همگنی خواص مواد تأثیر قابل توجهی بر بزرگی و توزیع آن‌ها دارد [18]. در سال 2012، اکبرزاده و همکاران یک حل تحلیلی برای یک ورق ساخته شده از مواد هدفمند تابعی بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم ارائه کردند. در روند حل آن‌ها، مشخصات دما در سراسر ضخامت ورق توسط یک چندجمله‌ای مرتبه سوم بر حسب متغیر z با چهار مجهول تقریبی مشخص می‌شد. نتایج آن‌ها نشان داد که ورق هدفمند تابعی دارای فلز بیشتر انحراف جانبی کمتری دارد [19]. در سال 2014، جباری و همکاران حل دقیق مسئله ترموالاستیک ورق دایره‌ای سه بعدی از جنس مواد هدفمند تابعی را بررسی کردند. در کار آن‌ها، فرض بر این بود که بارهای حرارتی و مکانیکی روی سطوح پایین‌تر شرایط مرزی اعمال می‌شود و خواص مواد، به جز نسبت پواسون، به طور تصاعدی در جهت ضخامت تغییر می‌کند. آن‌ها نتیجه گرفتند که جابجایی عرضی در راستای ضخامت صفحات بر پایه مواد هدفمند تابعی ثابت و خطی نیست [20]. در سال 2016، وانگ⁴ و همکاران پاسخ ترموالاستیک مجانبی ورق نازک متشکل از مواد هدفمند تابعی را با رویکرد تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را بر اساس نظریه لرد-شولمن نوشتند و حل جابجایی تنش و دما را بدست آوردند. در نهایت آن‌ها نتیجه گرفتند که رابطه تابع بین تنش بیشینه و هر پارامتر مشخصه برای ارزیابی خواص ترمومکانیکی مواد هدفمند تابعی بسیار مهم است [21]. در سال 2017، وانگ و ژو⁵ برای اولین بار به بررسی پاسخ ترموالاستیک دینامیکی غیرخطی صفحات بر پایه مواد هدفمند تابعی با

سرعت طولی پرداختند. آن‌ها بر اساس اصل دالامبر، معادله حرکت سیستم خارج از ورق را با در نظر گرفتن اثر حرارتی و سرعت طولی پس از آن با روش گالرکین و روش تعادل هارمونیک ویژگی‌های دینامیکی سیستم را بدست آوردند. نتایج نشان داد که فرکانس طبیعی صفحات از جنس مواد هدفمند تابعی با افزایش سرعت طولی کاهش می‌یابد، افزایش سرعت طولی ناحیه رزونانس سیستم را به سمت فرکانس پایین به حرکت در می‌آورد [22]. در سال 2019، گانگ⁶ و همکاران تحلیل ترموالاستیک مواد هدفمند تابعی متخلخل با خواص وابسته به دما را با روش حجم محدود متناوب بررسی کردند. عملکرد ترموالاستیک صفحات با توزیع مواد مختلف نشان داد که تنش حرارتی به توزیع مواد بسیار حساس‌تر از دما و تغییرشکل است [23]. سال 2021، بابایی و یلوویکا⁷ در مقاله‌ای پاسخ ترموالاستیک گذرا غیرخطی ورق هدفمند تابعی تحت خنک‌کننده برودتی را بررسی کردند. گاز طبیعی مایع (LNG⁸) به طور فزاینده‌ای به عنوان سوخت برای حمل و نقل و ذخیره‌سازی در صنایع دریایی استفاده می‌شود. هنگامی که LNG با ورق، لوله یا مخزن تماس پیدا می‌کند، بار حرارتی بسیار قابل توجهی را بر سازه وارد می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که برای شرایط حرارتی معین پاسخ یک ورق تحت بار حرارتی با دمای پایین می‌تواند از نظر کیفی با بار حرارتی در دمای بالا متفاوت باشد. دما می‌تواند پاسخ خمشی غیرخطی قابل توجهی را قبل از رسیدن به تنش‌های بالا از خود نشان دهد که به طور بالقوه ایمنی سازه را به خطر می‌اندازد [24]. در سال 2022، ضیغی و جعفری یک حل بسته برای تحلیل تنش ترموالاستیک صفحات نانوکامپوزیتی نامتقارن سوراخ شده متشکل از مواد هدفمند تابعی ارائه کردند. آن‌ها هم‌چنین به بررسی تأثیر پارامترهای مهم بر نتایج تنش و گشتاورهای اطراف سوراخ پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد با انتخاب صحیح مقادیر پارامترهای مؤثر در طراحی چنین صفحات سوراخ‌داری، می‌توان تنش حاصله و گشتاورها را به میزان قابل توجهی کاهش داد [25].

در این پژوهش، پاسخ گذرای ترموالاستیک یک ورق مستطیلی هدفمند متخلخل تحت بار حرارتی وابسته به زمان، با تکیه بر تئوری لرد-شولمن مورد بررسی قرار گرفته است. نوآوری این پژوهش نسبت به مطالعات پیشین در چندین محور کلیدی نهفته است؛ نخست، بهره‌گیری از تئوری لرد-شولمن به‌عنوان مدلی پیشرفته از لحاظ تأخیر زمانی در انتقال حرارت که امکان تحلیل دقیق‌تر رفتار دینامیکی ترموالاستیک را فراهم می‌سازد. تئوری لرد-شولمن یک زمان آرامش را معرفی می‌کند، این زمان استراحت به تأخیر در انتقال حرارت و تنش‌ها اشاره دارد. معادلات حاکم در این تئوری شامل یک معادله انرژی و یک معادله حرکت هستند که با هم کوپل شده‌اند و اثرات ترموالاستیک را مدل‌سازی می‌کنند. دوم، تحلیل جامع اثرات انواع مختلف تخلخل (شامل تخلخل متقارن، غیرمتقارن نرم، غیرمتقارن سفت و همسان) و نیز در نظر گرفتن پارامترهای غیرهمگن مربوط به توزیع کسر حجمی مواد در راستای ضخامت ورق است. هم‌چنین، حل عددی معادلات حاکم با استفاده از روش دوربین و وارون‌سازی عددی تبدیل لاپلاس در چارچوب روش فضای حالت، از دیگر نوآوری‌های بارز این پژوهش به‌شمار می‌روند. یافته‌های حاصل از این مطالعه می‌تواند به‌طور مستقیم در طراحی و بهینه‌سازی سازه‌های هدفمند متخلخل در صنایع هوافضا، انرژی، خودروسازی و صنایع دفاعی که با شرایط حرارتی و مکانیکی متغیر مواجه هستند، مورد بهره‌برداری قرار گیرند.

¹ Functionally graded materials² Ootao and Tanigawa³ Zhou⁴ Wang⁵ Wang and Zu⁶ Gong⁷ Jelovica⁸ Liquified natural gas

که در آن، f ، ρ و t به ترتیب بیانگر نیروی داخلی، چگالی و زمان هستند. روابط کرنش-جابجایی عبارتند از [18]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن، ε بیانگر کرنش است. از معادلات ساختاری داریم [18]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (T - T_0) \quad (5)$$

در معادله فوق، C_{11} ، C_{12} و C_{44} بیانگر مدول الاستیک متوسط هستند. معادله تعادل انرژی به صورت زیر تعریف می‌شود [18]:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = R - T_0 \dot{s} \quad (6)$$

که در آن، q ، R و T_0 به ترتیب بیانگر شار حرارتی، منبع گرمای داخلی و دمای مرجع هستند. رابطه آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود [18]:

$$S = \frac{\rho c}{T_0} [(T - T_0) + \beta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})] \quad (7)$$

در معادله فوق، S ، β و c به ترتیب بیانگر آنتروپی، مدول حرارتی و گرمای ویژه هستند. مدل‌های هدایت حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شود [18]:

$$\begin{aligned} q_1 + \tau_0 \frac{\partial q_1}{\partial t} &= -k \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ q_2 + \tau_0 \frac{\partial q_2}{\partial t} &= -k \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ q_3 + \tau_0 \frac{\partial q_3}{\partial t} &= -k \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن، k بیانگر رسانایی حرارتی است. با قرار دادن معادله (5) در معادلات (3) و (4) و با چشم‌پوشی از نیروهای داخلی و منابع گرما داخل

2- انتخاب دستگاه مختصات و شرایط مرزی

یک ورق هدفمند متخلخل به طول a ، عرض b و ضخامت h را در نظر بگیرید که مطابق شکل 1 تحت بارهای حرارتی- مکانیکی قرار دارد. فرض کنید این ورق در معرض دمای یکنواخت T_0 باشد و از ماده همسانگرد که فقط در جهت ضخامت ($0 < x_3 < h$) خواص آن تغییر می‌کند، تشکیل شده است.

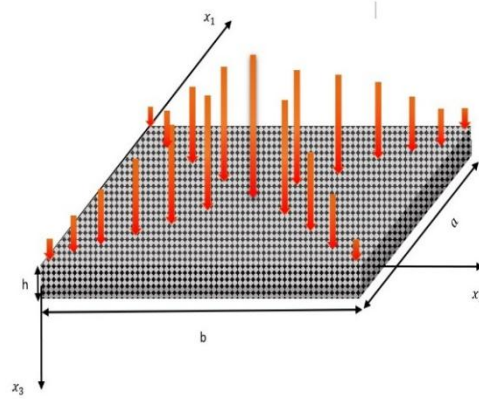


Fig. 1 Geometric configuration and coordinate system of the plate

شکل 1 شکل هندسی و دستگاه مختصات ورق

با فرض اینکه لبه‌های ورق در دمای مرجع و بر روی تکیه‌گاه ساده نگهداری می‌شوند؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = T = 0 & \quad (x_1 = 0, x_1 = a) \\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = u_1 = T = 0 & \quad (x_2 = 0, x_2 = b) \end{aligned} \quad (1)$$

تنش‌ها و شرایط مرزی حرارتی در سطوح بالا و پایین به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \quad T = T_w(x_1, x_2, t) & \quad (x_3 = 0) \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = \partial T / \partial x_3 = 0 & \quad (x_3 = h) \end{aligned} \quad (2)$$

در معادله (1)، σ ، u و T به ترتیب بیانگر تنش، جابجایی و دمای مطلق هستند. در معادله (2)، T_w بیانگر بار حرارتی در سطح بالایی است.

3- روابط تئوری حاکم

برای یک ورق هدفمند تابعی ایزوتروپیک خطی معادلات اساسی ترموالاستیک، مبتنی بر تئوری لرد-شولمن (نظریه L-S) را می‌توان به شرح زیر ارائه کرد:

1-3- معادلات اساسی

معادلات حرکت به صورت زیر تعریف می‌شوند [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx_3} \begin{bmatrix} \bar{U}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{V}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Z}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{X}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Y}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{W}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{I}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Q}_{mn}^*(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{14} & 0 & R_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{25} & R_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{34} & R_{35} & R_{36} & 0 & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & 0 & 0 & 0 & R_{47} & 0 \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & 0 & 0 & 0 & R_{57} & 0 \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & 0 & 0 & 0 & R_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{78} \\ R_{81} & R_{82} & R_{83} & 0 & 0 & 0 & R_{87} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{V}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Z}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{X}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Y}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{W}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{I}_{mn}^*(x_3) \\ \bar{Q}_{mn}^*(x_3) \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن S پارامتر لاپلاس است و علامت ستاره نشان‌دهنده تبدیل لاپلاس توابع است. ضرایب ماتریس حالت به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} R_{14} &= \bar{C}_6, R_{16} = -\zeta, R_{25} = \bar{C}_6, R_{26} = -\eta, \\ R_{34} &= \zeta, R_{35} = \eta, R_{36} = \varepsilon_2 \bar{\rho} S^2 \\ R_{41} &= \varepsilon_2 \bar{\rho} S^2 + \bar{C}_2 \zeta^2 + \bar{C}_4 \eta^2, \\ R_{42} &= (\bar{C}_3 + \bar{C}_4) \zeta \eta, \quad R_{43} = \bar{C}_1 \zeta, \\ R_{47} &= (1 + \bar{C}_1) \beta \zeta, \quad R_{51} = (\bar{C}_3 + \bar{C}_4) \zeta \eta, \\ R_{52} &= \varepsilon_2 \bar{\rho} S^2 + \bar{C}_4 \zeta^2 + \bar{C}_2 \eta^2, R_{53} = \bar{C}_1 \eta, \\ R_{57} &= (1 + \bar{c}_1) \beta \eta, \quad R_{61} = -\bar{C}_1 \zeta, \\ R_{62} &= \bar{C}_1 \eta, \quad R_{63} = \bar{C}_5, \quad R_{67} = \bar{C}_5 \beta \\ R_{78} &= 1/\bar{k}, \quad R_{81} = -(1 + \bar{C}_1) \varepsilon_1 \beta \zeta (\tau_0 S^2 + s), \\ R_{82} &= -(1 + \bar{C}_1) \varepsilon_1 \beta \eta (\tau_0 S^2 + s) \\ R_{83} &= \varepsilon_1 \beta \bar{C}_5 (\tau_0 S^2 + s), \\ R_{87} &= (\varepsilon_1 \bar{C}_1 \beta^2 + \bar{\rho} \bar{c}) (\tau_0 S^2 + s) \pm k(\zeta^2 + \eta^2) \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن

$$\zeta = m\pi h/a, \quad \eta = n\pi h/b, \quad \bar{C}_1 = -C_{12}/C_{11},$$

$$\bar{C}_2 = (C_{11} - (C_{12}^2/C_{11}))/C_d$$

$$\bar{C}_3 = (C_{12} - (C_{12}^2/C_{11}))/C_d, \quad \bar{C}_4 = C_{44}/C_d$$

$$\bar{C}_5 = C_d/C_{11}, \quad \bar{C}_6 = C_d/C_{44}$$

$$\varepsilon_1 = T_0 \alpha_d^2 C_d \gamma_d / k_d, \quad \beta = -(C_{11} + 2C_{12}) \alpha,$$

$$\varepsilon_2 = \rho_d \gamma_d^2 / C_d h^2$$

در روابط فوق $C_d, \rho_d, k_d, \alpha_d$ به ترتیب مدول الاستیک، چگالی، رسانایی حرارتی، گرمای ویژه و ضریب انبساط حرارتی خطی هستند.

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(x_3, t) \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$\sigma_{33} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$\sigma_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(x_3, t) \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$\sigma_{33} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b}$$

(14)

$$u_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(x_3, t) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}$$

که در آن $U_{mn}, V_{mn}, Z_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}, W_{mn}, \Gamma_{mn}$ و Q_{mn} توابعی نامشخص از x_3 و t هستند. متغیرهای بدون بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{x}_1 = x_1/a, \quad \bar{x}_2 = x_2/b, \quad \bar{x}_3 = x_3/h$$

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (u_1, u_2, u_3)/h, \quad \bar{t} = \frac{t\gamma_d}{h^2}$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0 \gamma_d}{h^2}$$

$$(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{23}, \bar{\sigma}_{33}) = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33})/C_d$$

$$(\bar{T}, \bar{T}_w) = (T, T_w)\alpha, \quad \bar{B} = \beta/\alpha_d C_d$$

$$\bar{q} = q\alpha_d h/k_d, \quad \bar{c} = c/c_d$$

(15)

$$\bar{k} = k/k_d, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_d, \quad \gamma_d = k_d/\rho_d c_d$$

به منظور حل سیستم معادلات دینامیکی که در بخش قبل ارائه شد، از روش تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. در واقع برای تبدیل معادلات (13) و (2) از حوزه زمان به حوزه لاپلاس ابتدا معادلات (14) را در معادلات (13) قرار داده و با معادلات (15) پارامترهای آن بی‌بعد می‌شود؛ سپس از آن‌ها نسبت به زمان تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود. بنابراین متغیرها نسبت به مکان به صورت زیر در خواهند آمد:

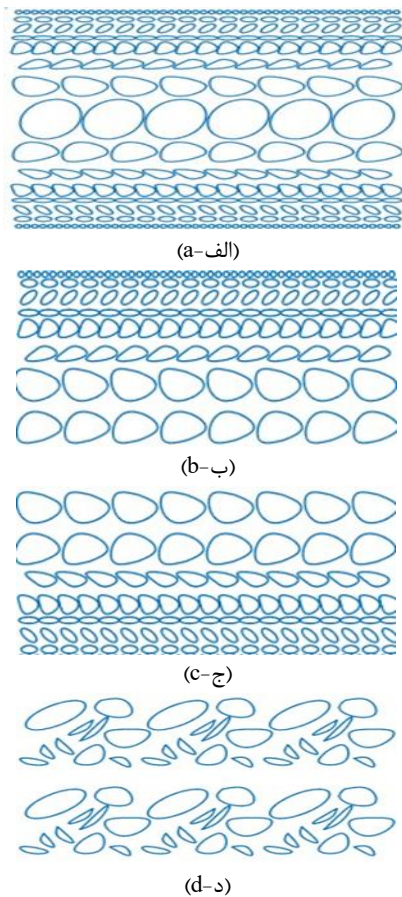


Fig. 2 Types of Porosity: a) Symmetric Porosity, b) Soft non-symmetric Porosity, c) Stiff non-symmetric Porosity and d) Uniform Porosity

شکل 2 انواع تخلخل. الف) تخلخل متقارن، ب) تخلخل غیرمتقارن نرم، ج) تخلخل غیرمتقارن سفت و د) تخلخل همسان

با توجه به اینکه تأثیر نسبت پواسون (ν) بر تغییرشکل کمتر از سایر خواص است، در محاسبات این خاصیت ثابت فرض می‌شود [27].

برای هر توزیع تخلخل، مدول یانگ از طریق ضخامت بدون بعد (z/h) تغییر می‌کند که در شکل 3 نحوه توزیع آن ارائه شده است.

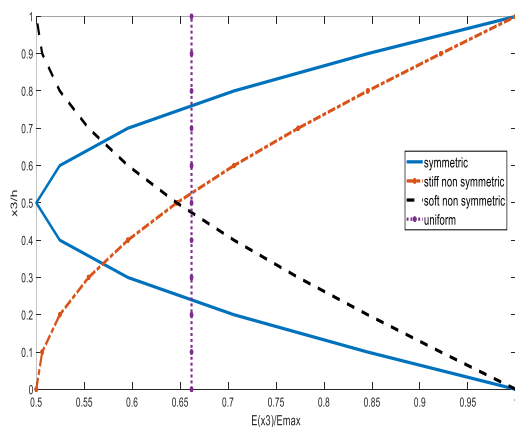


Fig. 3 Variation of Young's modulus across the dimensionless thickness (z/h) for different porosity distributions

شکل 3 تغییر مدول یانگ از طریق ضخامت بدون بعد (z/h) برای انواع مختلف توزیع تخلخل

پارامترهای خواص مواد ورق هدفمند تابعی تابع مختصات x_3 هستند. معادلات (16) سیستمی از معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر هستند؛ بنابراین خواهیم داشت [17]:

$$\frac{d}{dx_3} v = Rv \Rightarrow \frac{dv}{v} = R dx_3 \Rightarrow$$

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v} dv = \int_{x_1}^{x_2} R dx_3 \Rightarrow$$

$$\ln v_2 - \ln v_1 = R(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\ln v_2/v_1 = Rh_i \Rightarrow$$

$$v_2/v_1 = e^{Rh_i}$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 e^{Rh_i}$$

(18)

که در رابطه فوق، h_i ضخامت هر لایه است. گرفتن معکوس لاپلاس برای بدست آوردن مؤلفه‌های تنش، جایجایی و دما دشوار است؛ بنابراین، باید محاسبات عددی را در نظر گرفت. فرمول وارونگی پیچیده برای تبدیل لاپلاس به صورت زیر داده شده است.

$$\Delta(x_3, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \Delta(x_3, s) e^{st} ds \quad (19)$$

که در آن Δ می‌تواند هر یک از کمیت‌های ماتریس v باشد و μ یک عدد دلخواه بزرگتر از یک است [26].

با استفاده از فرمول زیر برگرفته از روش دوربین¹، معکوس لاپلاس توابع را می‌توان بدست آورد و مقادیر متغیرها را برحسب زمان تعیین کرد.

$$\Delta(t) = \frac{2e^{\mu t}}{T_d} \left[\frac{1}{2} R(\bar{\Delta}\mu) + \sum_{k=1}^N \left(\operatorname{Re} \left[\bar{\Delta} \left(\mu + ik \frac{2\pi}{T_d} \right) \right] \cos \left(kt \frac{2\pi}{T_d} \right) - \operatorname{Im} \left[\bar{\Delta} \left(\mu + ik \frac{2\pi}{T_d} \right) \right] \sin \left(kt \frac{2\pi}{T_d} \right) \right) \right] \quad (20)$$

که در آن N تعداد نمونه در دامنه لاپلاس و μ عددی دلخواه است و مقدار پیشنهادی μT_d برای دقت کافی بین 5 تا 10 است. با N بین 50 تا 5000 و فاصله $T_d \geq 2t_{max}$ حل معتبر است که در آن t_{max} زمانی است که نتایج تا آن زمان محاسبه شود.

3-3- انواع تخلخل

با در نظر گرفتن تخلخل در ورق هدفمند تابعی خواص مکانیکی، چگالی و خواص حرارتی آن تغییر می‌کند. در این بخش چهار نوع تخلخل مطابق شکل 2 برای ورق در نظر گرفته شده است [27].

¹ Durbin method

4- مثال عددی

ورق هدفمند تابعی با مواد تشکیل دهنده ZrO_2 و $Ti-6Al-4V$ با خواص مکانیکی و حرارتی مطابق جدول 1 در نظر گرفته شده است.

جدول 1 خواص مکانیکی و حرارتی مواد تشکیل دهنده [3]

Table 1 Mechanical and Thermal Properties of Constituent Materials [3]

ZrO_2		$Ti-6Al-4V$	
C_{11} = 203.3 GPa	ρ_1 = 5331 Kg/m ³	C_{11} = 157.1 GPa	ρ_2 = 4420 Kg/m ³
C_{12} = 87.1 GPa	k_1 = 2.09 W/mK	C_{12} = 67.3 GPa	k_2 = 7.50 W/mK
C_{44} = 58.1 GPa	c_1 = 456.7 J/KgK	C_{44} = 44.9 GPa	c_2 = 537 J/KgK
	α_1 = 10×10^{-4}		α_2 = 9.5×10^{-4}

با استناد به معادلات (1) و (2) که پیش‌تر معرفی شدند، در این مثال عددی، برای نشان دادن پاسخ حرارتی ورق هدفمند تابعی، فرض می‌شود که ورق در معرض شوک حرارتی توزیع‌شده سینوسی مطابق رابطه زیر قرار گرفته است:

$$\bar{T}_w(\bar{x}_2, \bar{x}_2, \bar{t}) = \sin(\zeta \bar{x}_1) \sin(\eta \bar{x}_2) H(\bar{t}) \quad (28)$$

که در آن، $H(\bar{t})$ تابع هویساید¹ است. در معادلات (16) فرض شده، است که شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} m &= n = 1 \\ \bar{T}^* &= 1/s, & T_0 &= 300 K \\ h/a &= h/b = 0.1, & \bar{T}_w &= 0.3 \end{aligned} \quad (29)$$

برای تسهیل در فرآیند حل، معادلات (16) با استفاده از متلب کدنویسی شده و به روش دوربین حل می‌شوند. در تحلیل عددی، برای گسسته‌سازی در راستای ضخامت، 40 لایه در نظر گرفته شده است. گام زمانی Δt برابر با 0.01 ثانیه و تعداد گام‌های زمانی 100 می‌باشد؛ که دامنه زمانی تحلیل از $t = 0$ تا $t = 1$ ثانیه را پوشش می‌دهد. پارامتر پیشنهادی روش دوربین (μ) برابر با 7 و تعداد نمونه در دامنه لاپلاس (N) برابر با 500 انتخاب شده است. هم‌چنین، برای انواع تخلخل تأثیر تغییر ضریب تخلخل و تغییر پارامتر غیرهمگن بر روی تنش نرمال، جابجایی عرضی و دما بررسی می‌شود.

5- نتایج و تفسیر آن

در این بخش به منظور تحلیل دقیق پاسخ‌های حرارتی و مکانیکی ورق هدفمند تابعی تحت بارگذاری حرارتی، پارامتر زمان آرامش بدون بُعد مطابق با تئوری لرد-شولمن برابر با ($\tau_0 = 0.02$) در نظر گرفته شد. در ادامه، با بررسی چهار نوع مختلف الگوی تخلخل، ضرایب تخلخل گوناگون، بازه‌های زمانی متنوع و مقادیر متفاوتی از پارامتر غیرهمگن n (که نمایانگر توزیع کسر حجمی مواد در راستای ضخامت است)، تغییرات دما، جابجایی و تنش نرمال در مرکز ورق، و همچنین تنش برشی در لبه ورق مورد مطالعه قرار گرفت. این تحلیل‌ها امکان بررسی تأثیر تخلخل و ناهمگنی را بر پاسخ‌های گذرای ترموالاستیک فراهم می‌کنند. شایان ذکر است تمامی نمودارهای رسم‌شده در این بخش براساس پارامترهای بدون بُعد هستند.

بر همین اساس، می‌توان خواص مواد هدفمند تابعی برای ورق با انواع توزیع تخلخل را بر اساس معادلات زیر تعریف کرد:

الف) توزیع متقارن

$$\begin{aligned} E(x_3) &= E_{max} \left(1 - N_0 \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \right) \\ \rho(x_3) &= \rho_{max} \left(1 - N_m \sin\left(\frac{\pi x_3}{h}\right) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

ب) توزیع غیرمتقارن نرم

$$\begin{aligned} E(x_3) &= E_{max} \left(1 - N_0 \sin\left(\frac{\pi x_3}{2h}\right) \right) \\ \rho(x_3) &= \rho_{max} \left(1 - N_m \sin\left(\frac{\pi x_3}{2h}\right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

پ) توزیع غیرمتقارن سفت

$$\begin{aligned} E(x_3) &= E_{max} \left(1 - N_0 \sin\left(\frac{\pi x_3}{2h} + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ \rho(x_3) &= \rho_{max} \left(1 - N_m \sin\left(\frac{\pi x_3}{2h} + \frac{\pi}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

د) توزیع همسان

$$\begin{aligned} E(x_3) &= E_{max}(1 - N_0 \lambda) \\ \rho(x_3) &= \rho_{max}(1 - N_m \lambda) \end{aligned} \quad (24)$$

که در این روابط $0 < N_0 < 1$ ضریب تخلخل، h و x_3 به ترتیب ضخامت ورق و مختصات در راستای ضخامت ورق و N_m ضریب مربوط به چگالی است. رابطه بین N_0 و N_m را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$N_m = 1 - \sqrt{1 - N_0} \quad (25)$$

و برای تخلخل همسان می‌توان λ را به صورت زیر تعریف کرد [19]:

$$\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_0} \left(1 - \frac{2N_m}{\pi} \right)^2 \quad (26)$$

با فرض اینکه یک ورق متخلخل مستطیل شکل از مواد هدفمند تابعی با جنس مخلوط سرامیک و فلز ساخته شده باشد و خواص مواد فقط در جهت ضخامت به عنوان تابع تحلیلی قانون توان تغییر می‌کند، می‌توان خواص مواد در راستای ضخامت را به صورت زیر تعریف کرد و برای اعمال هر کدام از چهار نوع تخلخل باید روابط (21) تا (24) را در رابطه زیر ضرب کرد.

$$P(\bar{x}_3) = (P_0 - P_1)(1 - \bar{x}_3)^n + P_1 \quad (27)$$

که در رابطه بالا، P_0 و P_1 نشان‌دهنده مدول‌های الاستیسیته هستند و n پارامتر غیر همگن مواد است که با مقادیر مختلف نشان‌دهنده توزیع کسر حجمی مختلف در ضخامت است [17].

¹ Heaviside

1-5- انواع تخلخل

برای تحلیل ورق هدفمند تابعی متخلخل با تخلخل متقارن و تغییر پارامتر غیرهمگن (n)، ضریب تخلخل برابر با $0.4 (N_0 = 0.4)$ و ضخامت، وسط ورق ($\alpha_3 = 0.5$) در نظر گرفته می‌شود.

شکل 6 نشان‌دهنده تأثیر افزایش پارامتر غیر همگن بر تغییرات دما نسبت به زمان در ورق متخلخل متقارن است. در تمامی انواع تخلخل، غیرهمگن شدن مواد و بیشتر فلزی شدن آن باعث انتقال سریعتر و بیشتر حرارت می‌شود.

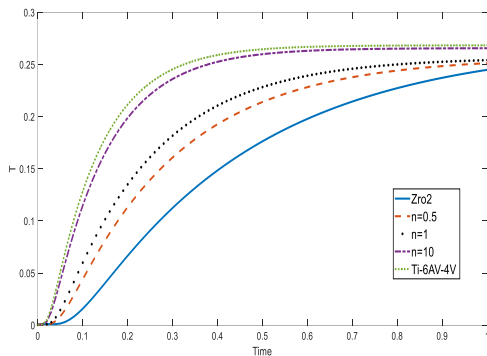


Fig. 6 Temperature variation in the center point of the porous FGM plate

شکل 6 تغییرات دما در نقطه مرکزی ورق هدفمند تابعی متخلخل

در شکل 6 مشاهده می‌شود که با افزایش زمان و رسیدن به تعادل حرارتی در ورق مقدار جابجایی کاهش پیدا می‌کند؛ که هر چه مقدار پارامتر غیرهمگن بیشتر باشد (صفحه فلزی‌تر باشد) این کاهش بیشتر است، همچنین ماکزیمم مقدار جابجایی نیز با افزایش مقدار n کاهش می‌یابد و در زمان کمتری رخ می‌دهد. در شکل 7 تغییرات جابجایی در نقطه مرکزی ورق آورده شده است.

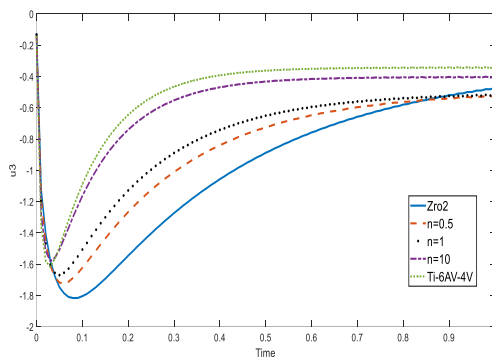


Fig. 7 Displacement variation in the center point of the porous FGM plate

شکل 7 تغییرات جابجایی در نقطه مرکزی ورق هدفمند تابعی متخلخل

در تمامی انواع تخلخل، غیرهمگن شدن مواد و بیشتر فلزی شدن آن باعث کاهش جابجایی می‌شود.

نمودارهای ارائه شده در شکل‌های 6 و 7، تغییرات دما و جابجایی را در نقطه مرکزی ورق نسبت به زمان نمایش می‌دهند. در این نمودارها، نقاط اوج

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج بدست‌آمده، ابتدا تحلیل ترموالاستیک برای حالت بدون تخلخل انجام و با نتایج ارائه‌شده در مرجع [18] مقایسه گردید که تطابق مناسب این نتایج، صحت مدل را تأیید نمود. این مقایسه‌ها نشان داد که مدل پیشنهادی نه‌تنها دارای دقت مناسبی در پیش‌بینی رفتار گذرای حرارتی و مکانیکی ورق هدفمند تابعی متخلخل است، بلکه از کارایی قابل‌قبولی در طراحی و تحلیل سازه‌های هدفمند نیز برخوردار می‌باشد.

علاوه بر مقایسه نتایج عددی با مرجع [18]، برای صحت‌سنجی روش حل، مدل با استفاده از نرم‌افزار آباکوس نیز شبیه‌سازی شده و نتایج آن با نتایج کد متلب مورد مقایسه قرار گرفته است. به دلیل تغییر خواص مکانیکی و حرارتی ورق هدفمند تابعی در راستای ضخامت، باید برای هر زیرلایه خواص جداگانه تعریف شود. بدین منظور برای هر کدام از خواص فیلد جداگانه تعریف شده و با استفاده از سابروتین USDFLD و به زبان فورترن برنامه‌ای نوشته شده است تا نرم‌افزار بتواند تحلیل ورق را با تغییر خواص در هر زیرلایه انجام دهد. برای صحت‌سنجی روند حل، ورق هدفمند تابعی متخلخل متقارن با ضریب تخلخل 0.2 در زمان بدون بعد 0.05 (معادل 5.8 ثانیه) در نظر گرفته شده است. برای مقایسه نتایج، تمامی متغیرها با بعد در نظر گرفته شده‌اند.

در شکل 4 و شکل 5 به ترتیب مقایسه تغییرات دما در راستای ضخامت و مقایسه تغییرات تنش نرمال σ_{11} در راستای ضخامت در دو نرم‌افزار متلب و آباکوس آورده شده است. نتایج حاصل از صحت‌سنجی نشان‌دهنده تطابق خوبی بین دو نرم‌افزار بوده و قابلیت اتکای مدل عددی را تأیید می‌کند.

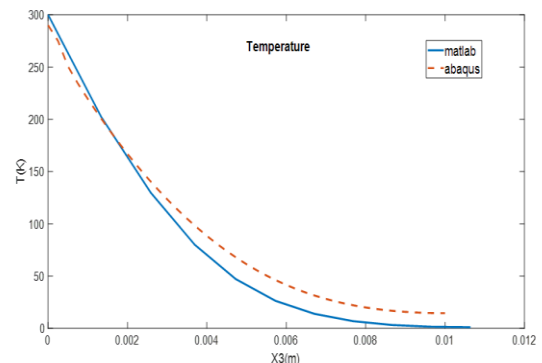


Fig. 4 Comparison of temperature variations through the thickness in MATLAB and Abaqus

شکل 4 مقایسه تغییرات دما در راستای ضخامت در دو نرم‌افزار متلب و آباکوس

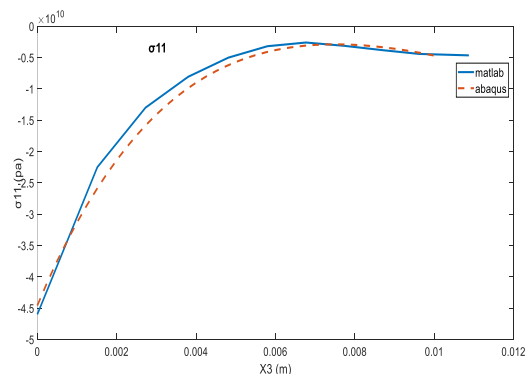


Fig. 5 Comparison of normal stress σ_{11} variations through the thickness in MATLAB and Abaqus

شکل 5 مقایسه تغییرات تنش نرمال σ_{11} در راستای ضخامت در دو نرم‌افزار متلب و آباکوس

در شکل 9 مشاهده می‌شود که توزیع نامتقارن تخلخل می‌تواند باعث ایجاد مقاومت حرارتی بیشتر شود و سرعت انتشار حرارت (γ) کاهش یابد؛ بنابراین می‌توان گفت که با افزایش ضریب تخلخل اختلاف دما بین سطح بالا و پایین در حال زیاد شدن است. در شکل 10 تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل همسان آورده شده است.

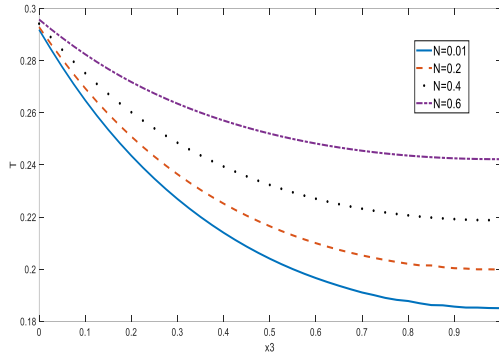


Fig. 10 Temperature variation through the thickness direction of the uniform porous plate

شکل 10 تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل همسان

در شکل 10 مشخص است که افزایش ضریب تخلخل در تخلخل همسان باعث کاهش اختلاف دما بین سطح بالا و پایین ورق می‌شود. افزایش ضریب تخلخل باعث افزایش سطح تماس و سرعت انتقال حرارت می‌شود، که منجر به کاهش اختلاف دما بین دو سطح می‌گردد.

افزایش ضریب تخلخل در انواع تخلخل باعث کاهش جابجایی عرضی می‌شود و در تخلخل متقارن علاوه بر کاهش جابجایی عرضی، اختلاف آن در سطح بالا و پایین نیز کم می‌شود. افزایش ضریب تخلخل در ورق متخلخل متقارن باعث افزایش تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت صفحه می‌شود. افزایش این ضریب در تخلخل همسان باعث کاهش این تنش در راستای ضخامت می‌شود که میزان این کاهش در تخلخل همسان مقدار قابل توجهی است. افزایش ضریب تخلخل در ورق متخلخل با تخلخل غیرمتقارن نرم باعث افزایش تنش و در تخلخل غیر متقارن سفت باعث کاهش تنش به مقدار کمی می‌شود.

در شکل 11 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل متقارن آورده شده است.

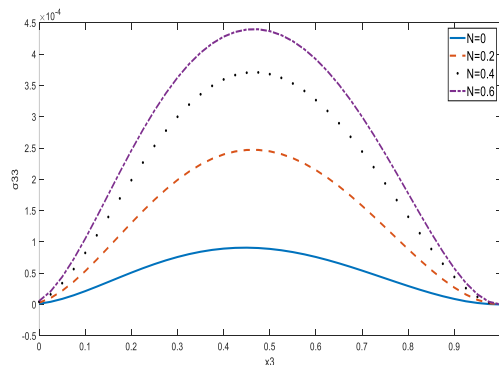


Fig. 11 Variation of normal stress σ_{33} through the thickness direction of the symmetric porous plate

شکل 11 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل متقارن

دما و جابجایی به‌وضوح قابل مشاهده‌اند و زمان وقوع بیشینه پاسخها مشخص شده است. در شکل 7 مشاهده می‌شود که پس از رسیدن جابجایی به نقطه اوج، روندی کاهشی در پاسخ ایجاد شده و پارامتر غیرهمگن بر زمان وقوع این رفتار اثرگذار است. علاوه بر این، استفاده از تئوری لرد-شولمن با لحاظ زمان آرامش، تمرکز تحلیل را بر پاسخهای گذرای بحرانی بلافاصله پس از اعمال شوک حرارتی امکان‌پذیر ساخته است.

2-5- تأثیر ضریب تخلخل

افزایش ضریب تخلخل در زمان ثابت باعث کاهش اختلاف دما در سطح بالایی و پایینی صفحه در تخلخل متقارن و تخلخل همسان می‌شود؛ در حالی که افزایش ضریب تخلخل باعث افزایش اختلاف دما در تخلخل غیرمتقارن سفت می‌شود و تأثیر بر اختلاف دما در تخلخل غیرمتقارن نرم ندارد. تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل متقارن در شکل 8 آورده شده است.

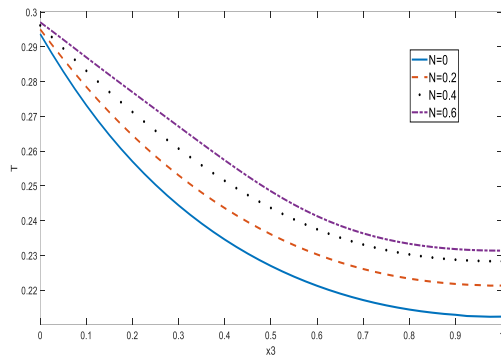


Fig. 8 Temperature variation through the thickness direction of the symmetric porous plate

شکل 8 تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل متقارن

در شکل 8 مشاهده می‌شود که افزایش ضریب تخلخل باعث افزایش سطح تماس سرعت انتقال حرارت می‌شود، که منجر به کاهش اختلاف دما بین دو سطح می‌گردد و اختلاف دما بین سطح بالا و پایین در حال کم شدن است. در واقع هرچه صفحه تخلخل بیشتری داشته باشد اختلاف دما کمتر است. تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل غیر متقارن سفت در شکل 9 آورده شده است.

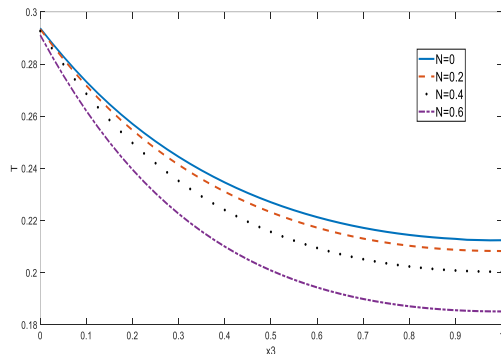


Fig. 9 Temperature variation through the thickness direction of the stiff non-symmetric porous plate

شکل 9 تغییرات دما در جهت ضخامت ورق متخلخل غیرمتقارن سفت

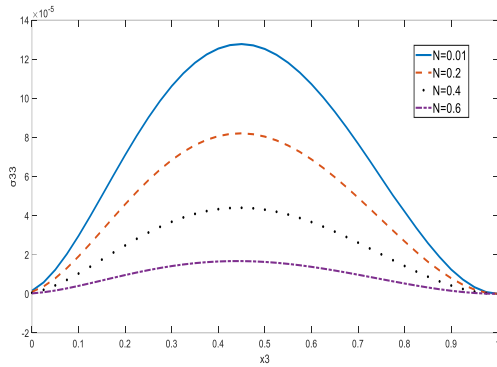


Fig. 14 Variation of normal stress σ_{33} through the thickness direction of the uniform porous plate

شکل 14 تغییر تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل همسان

در شکل 14 مشاهده می‌شود که مقدار تنش نرمال σ_{33} با افزایش ضریب تخلخل و ایجاد تعادل حرارتی کاهش می‌یابد.

افزایش ضریب تخلخل در تخلخل متقارن و همسان به علت ایجاد تعادل حرارتی باعث کاهش جابجایی عرضی می‌شود. در تخلخل غیر متقارن سفت بر خلاف انتظار و کم شدن تعادل حرارتی جابجایی به علت ساختار تخلخل کاهش می‌یابد و در تخلخل غیرمتقارن نرم افزایش ضریب تخلخل با توجه به اینکه تأثیری بر اختلاف دما ندارد باعث افزایش جابجایی می‌شود.

افزایش ضریب تخلخل در ورق متخلخل متقارن باعث افزایش تنش نرمال σ_{11} ، در راستای ضخامت صفحه می‌شود. افزایش این ضریب در تخلخل غیرمتقارن نرم و تخلخل همسان باعث کاهش این تنش در راستای ضخامت می‌شود که میزان این کاهش در تخلخل همسان بسیار بیشتر است. افزایش ضریب تخلخل در ورق متخلخل با تخلخل غیرمتقارن سفت باعث افزایش اختلاف تنش در سطح بالایی و پایینی ورق می‌شود.

با افزایش ضریب تخلخل، تنش برشی σ_{23} افزایش می‌یابد، اما در حالت غیرمتقارن سفت و همسان افزایش این ضریب باعث کاهش این تنش می‌شود؛ شایان ذکر است که تغییر ضریب تخلخل در حالت غیر متقارن نرم تأثیری بر تنش برشی ندارد.

در جدول 2 خلاصه‌ای از نتایج حاصله به صورت دسته‌بندی شده آورده شده است.

جدول 2 جمع‌بندی نتایج

Table 2 Summary of Results

افزایش پارامتر غیرهمگن	افزایش ضریب تخلخل	افزایش زمان	-
افزایش	افزایش	افزایش	انتقال دما
کاهش	کاهش	کاهش	u_3
_____	افزایش	ثابت	σ_{33}
_____	افزایش	ثابت	σ_{23}
افزایش	کاهش	افزایش	انتقال دما
کاهش	کاهش	کاهش	u_3
_____	کاهش	کاهش	σ_{33}
_____	کاهش	کاهش	σ_{23}

در شکل 11 مشاهده می‌شود که مقدار تنش نرمال σ_{33} با افزایش ضریب تخلخل و افزایش انتقال حرارت افزایش می‌یابد و جایی که حداکثر این تنش رخ می‌دهد در راستای ضخامت عوض می‌شود.

در شکل 12 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل غیر متقارن سفت آورده شده است.

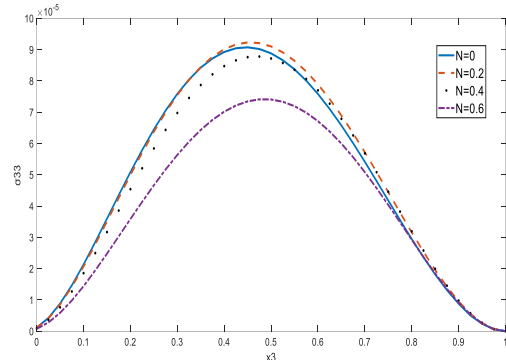


Fig. 12 Variation of normal stress σ_{33} through the thickness direction of the stiff non-symmetric porous plate

شکل 12 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل غیر متقارن سفت

در شکل 12 مشاهده می‌شود که مقدار تنش نرمال σ_{33} با افزایش ضریب تخلخل بیش از 0.2، کاهش می‌یابد و مقدار حداکثر آن نیز در راستای ضخامت کمی جابجا می‌شود.

در شکل 13 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل غیر متقارن نرم آورده شده است.

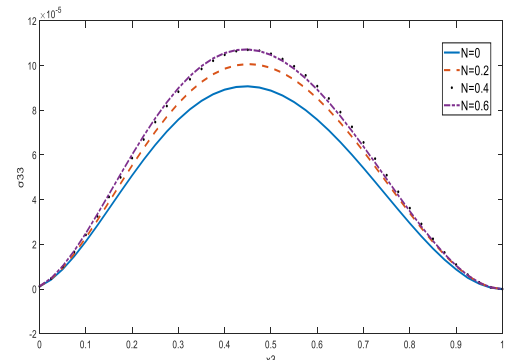


Fig. 13 Variation of normal stress σ_{33} through the thickness direction of the Soft non-symmetric porous plate

شکل 13 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل غیر متقارن نرم

در شکل 13 مشاهده می‌شود که تنش (به علت ثابت بودن تغییرات دما نسبت به افزایش ضریب تخلخل) تقریباً نسبت به افزایش ضریب تخلخل تغییری نمی‌کند.

در شکل 14 تغییرات تنش نرمال σ_{33} در راستای ضخامت ورق متخلخل همسان آورده شده است.

with Cylindrical Cavities Utilizing Higher-Order Fractional Heat Transfer Models Incorporating Time Delays,” *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 37, No. 2, p. 31, 2025.

[6] Rahmani, M., Mohammadi, Y., Kakavand, F., “Vibration analysis of truncated conical sandwich shell with porous FG core in different thermal loading”, In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 7, No. 1, pp. 694-704, 2020.

[7] Jafary, H., Attariani, H., Golmakani, M. E., “Nonlinear Thermoelastic Analysis of Circular Sandwich Porous Plates Reinforced with Functionally Graded Graphene Platelets,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 239, No. 10, pp. 3809–3827, 2025.

[8] Jafarinezhad, M. R., Eslami, M. R., “Coupled Thermoelasticity of FGM Annular Plate Under Lateral Thermal Shock,” *Composite Structures*, Vol. 168, pp. 758–771, 2017.

[9] Arefi, M., Sharifian, S., “Thermoelastic Analysis of Thick-Walled Functionally Graded Cylinder with Temperature-Dependent Properties Using the Perturbation Method,” *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 79–100, 2019.

[10] Silva, R. F., Coelho, P. G., Conde, F. M., Almeida, C. J., Custódio, A. L., “Topology Optimization of Thermoelastic Structures with Single and Functionally Graded Materials Exploring Energy and Stress-Based Formulations,” *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 68, No. 1, p. 11, 2025.

[11] Li, S. R., Xiang, Y., Shen, H. S., “Modelling and Evaluation of Thermoelastic Damping of FGM Micro Plates Based on the Levinson Plate Theory,” *Composite Structures*, Vol. 278, pp. 114684, 2021.

[12] Hosseini, V. R., Zheng, H., Zou, W., “An Efficient Meshfree Computational Approach to the Analyze of Thermoelastic Waves of Functionally Graded Materials in a Two-Dimensional Space,” *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 61, No. 12, pp. 10495-10510, 2022.

[13] Shariyat, M., Asgari, D., Azadi, M., “Transient Thermoelastic Behavior Analysis of Thick-Walled Cylinders Made of Functionally Graded Materials with Temperature-Dependent Properties Using Finite Element Method,” *Amir Kabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 9–18, 2010.

[14] Ansari, R., Ershadi, M. Z., Laskoukalayeh, H. A., Rouhi, H., “Nonlinear Large-Amplitude Vibration Analysis of Annular Sector Plates Made of FGMs Subjected to Cooling Shock,” *Thin-Walled Structures*, Vol. 193, pp. 111233, 2023.

[15] Miri, M., Safaeian Hamzekalayeh, N., Rashki, M., “Thermoelastic Analysis of Rotating Conical Shells Made of Functionally Graded Materials Using the Differential Quadrature Method,” *Journal of Civil and Environmental Engineering*, University of Tabriz, Vol. 49, No. 4, Winter 2020.

[16] Bagheri Tadi, H. R., Kiani, Y., “Thermoelastic Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells on an Elastic Foundation,” *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 20, No. 3, pp. 200–212, 2018.

[17] Ootao, Y., Tanigawa, Y., “Transient Thermoelastic Problem of Functionally Graded Thick Strip Due to Nonuniform Heat Supply,” *Composite Structures*, Vol. 63, No. 2, pp. 139–146, 2004.

[18] Zhou, F. X., Li, S. R., Lai, Y. M., “Three-Dimensional Analysis for Transient Coupled Thermoelastic Response of a Functionally Graded Rectangular Plate,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 330, No. 16, pp. 3990–4001, 2011.

[19] Akbarzadeh, A. H., Abbasi, M., Eslami, M. R., “Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Plates Based on the Third-Order Shear Deformation Theory,” *Thin-Walled Structures*, Vol. 53, pp. 141–155, 2012.

[20] Jabbari, M., Shahryari, E., Haghghat, H., Eslami, M. R., “An Analytical Solution for Steady State Three Dimensional Thermoelasticity of Functionally Graded Circular Plates Due to Axisymmetric Loads,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 47, pp. 124-142, 2014.

افزایش	افزایش	افزایش	انتقال دما	
کاهش	کاهش	کاهش	u_3	تخلخل
_____	ثابت	کاهش	σ_{33}	غیرمقارن نرم
_____	ثابت	کاهش	σ_{23}	
افزایش	افزایش	افزایش	انتقال دما	
کاهش	کاهش	کاهش	u_3	تخلخل همسان
_____	کاهش	کاهش	σ_{33}	
_____	کاهش	کاهش	σ_{23}	

6- نتیجه گیری

در این پژوهش، پاسخ دینامیکی ترموالاستیک یک ورق مستطیلی هدفمند متخلخل تحت شوک حرارتی وابسته به زمان، با بهره‌گیری از تئوری لرد-شولمن و با استفاده از روش‌های عددی پیشرفته مورد بررسی قرار گرفت. هدف اصلی، تحلیل اثر نوع و میزان تخلخل و همچنین پارامترهای غیرهمگن مؤثر بر توزیع دما، جابجایی و تنش در شرایط گذرا بود. در این راستا، مدل‌سازی سه‌بعدی با استفاده از روش دوربین و وارون‌سازی عددی تبدیل لاپلاس انجام شد و به کمک آن رفتار ورق هدفمند تابعی تحت بارگذاری حرارتی با دقت بالایی تحلیل گردید.

نتایج بدست‌آمده نشان داد که نوع تخلخل (مقارن، غیرمقارن نرم، غیرمقارن سفت و همسان) و میزان آن، به همراه پارامترهای غیرهمگن مرتبط با توزیع کسر حجمی، تأثیر قابل‌توجهی بر پاسخ‌های ترموالاستیک دارند. به‌ویژه در حالت‌های گذرا، دما، جابجایی و تنش‌ها تغییرات شدیدی از خود نشان دادند که شدت آن‌ها وابسته به خواص فیزیکی و هندسی ورق بود. همچنین، اعتبارسنجی نتایج با داده‌های موجود در مقالات مرجع و شبیه‌سازی عددی نیز تطابق مناسب و قابل قبولی را نشان داد. بر پایه یافته‌های این تحقیق، می‌توان نتیجه گرفت که طراحی بهینه سازه‌های هدفمند متخلخل با کنترل دقیق بر پارامترهای تخلخل و توزیع کسر حجمی امکان‌پذیر است. این امر می‌تواند منجر به کاهش تنش‌های حرارتی و مکانیکی، بهبود پایداری سازه‌ها و افزایش عمر مفید آن‌ها در کاربردهای صنعتی شود. در مجموع، نتایج این مطالعه می‌تواند به عنوان راهنمایی علمی و کاربردی برای مهندسان و طراحان در توسعه سامانه‌های پیشرفته برپایه مواد هدفمند تابعی مورد بهره‌برداری قرار گیرد.

7- مراجع

[1] Sator, L., Sladek, V., Sladek, J., “Bending of FGM Plates Under Thermal Load: Classical Thermoelasticity Analysis by a Meshless Method,” *Composites Part B: Engineering*, Vol. 146, pp. 176–188, 2018.

[2] Zhang, X. Y., Li, X. F., “Transient Response of a Functionally Graded Thermoelastic Plate With a Crack via Fractional Heat Conduction,” *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 104, p. 102318, 2019.

[3] Yang, H. S., Dong, C. Y., Qin, X. C., Wu, Y. H., “Vibration and Buckling Analyses of FGM Plates With Multiple Internal Defects Using XIGA-PHT and FCM Under Thermal and Mechanical Loads,” *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 78, pp. 433–481, 2020.

[4] Zhu, Y., Heidari, M., “Nonlinear Dynamic Snap-Through and Vibrations of Temperature-Dependent FGM Deep Arch Under Sudden Thermal Shock,” *Structures*, Vol. 48, pp. 1620–1633, 2023.

[5] Abouelregal, A. E., Elzayady, M. E., Marin, M., Foul, A., Askar, S. S., “Thermoelastic Modeling of Functionally Graded Materials

- [21] Wang, Y. Z., Liu, D., Wang, Q., Zhou, J. Z., "Asymptotic Analysis of Thermoelastic Response in Functionally Graded Thin Plate Subjected to a Transient Thermal Shock," *Composite Structures*, Vol. 139, pp. 233–242, 2016.
- [22] Wang, Y. Q., Zu, J. W., "Nonlinear Dynamic Thermoelastic Response of Rectangular FGM Plates with Longitudinal Velocity," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 117, pp. 74-88, 2017.
- [23] Gong, J., Xuan, L., Ying, B., Wang, H., "Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Porous Materials With Temperature-Dependent Properties by a Staggered Finite Volume Method," *Composite Structures*, Vol. 224, p. 111071, 2019.
- [24] Babaei, A., Jelovica, J., "Nonlinear Transient Thermoelastic Response of FGM Plate under Sudden Cryogenic Cooling," *Ocean Engineering*, Vol. 226, p. 108875, 2021.
- [25] Zeighami, V., Jafari, M., "A Closed-Form Solution for Thermoelastic Stress Analysis of Perforated Asymmetric Functionally Graded Nanocomposite Plates," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 118, p. 103251, 2022.
- [26] Hasheminejad, S. M., Rabbani, V., Alaei-Varnosfaderani, M., "Active Transient Elasto-Acoustic Response Damping of a Thick-Walled Liquid-Coupled Piezolaminated Cylindrical Vessel," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 44, No. 3, pp. 189–211, 2016.
- [27] Golmohammadi, A., Tarkashvand, A., Siahitry, M. S., "Effects of Pores Different Distributions on Vibrational Behavior of Functionally Graded Porous Cylinder Applying Haar Wavelet Computational Technique," *Composite Structures*, Vol. 235, p. 111729, 2020.