



اثر نیروی محوری و فشار داخلی بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه تحت ایمپالس جانبی

رضا آذرآفا^{1*}، علی داور¹

1- دانشیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
* تهران، صندوق پستی 19395-6835، azarmut@mut.ac.ir

اطلاعات مقاله:

دریافت: 1403/10/28
پذیرش: 1404/02/10

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه تحت اثر بار محوری و فشار داخلی بررسی شده است. معادلات تعادل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها نوشته شده‌اند. روابط کرنش- تغییر مکان و انحناء- تغییر مکان بر مبنای تقریب اول لایه نوشته شده و با جایگزینی آن‌ها در روابط تنش-کرنش، معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان بدست آمده‌اند. شرایط مرزی به صورت یکسر گیردار - یکسر آزاد می‌باشد. مؤلفه‌های تغییر مکان، حاصل ضرب تابع مکانی در تابع زمانی می‌باشند. مؤلفه‌های تابع مکانی به صورت سری‌های فوریه دوگانه در نظر گرفته شده‌اند. ابتدا تحلیل بار کمانشی و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی انجام شده و بار کمانشی و فرکانس‌های طبیعی استخراج شده‌اند. در حل ارتعاش اجباری، بار ایمپالس سینوسی در جهت شعاعی بر سطح مربعی اعمال شده است. تابع زمانی پاسخ با استفاده نتایج ارتعاش آزاد و انتگرال کانولوشن بدست آمده‌است. در نهایت اثر بار محوری، فشار داخلی و پارامترهای هندسی بر بار کمانشی، روی فرکانس‌های طبیعی و پاسخ بررسی شده اند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش بار محوری فشاری و افزایش نسبت طول به شعاع فرکانس‌های طبیعی کاهش یافته و هنگامی که بار محوری فشاری وارد بر پوسته برابر بار بحرانی کمانش باشد، فرکانس طبیعی پایه صفر خواهد شد. همچنین با افزایش فشار داخلی بار بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی پایه افزایش می‌یابند.

کلیدواژگان

ارتعاشات آزاد
ارتعاشات اجباری
بار محوری،
فشار داخلی
شرایط مرزی

Effect of axial load and internal pressure on the dynamic response of multi-layered composite cylindrical shell under lateral impulse Load

Reza Azarafza^{1*}, Ali Davar¹

1- Faculty of Materials & Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 19395- 6835, Tehran, Iran, azarmut@mut.ac.ir

Keywords

Free Vibration
Forced Vibration
Axial Load
Internal Pressure
Boundary Condition

Abstract

In this paper, the free and forced vibrations of multi-layered composite cylindrical shells under axial load and internal pressure investigated. The equilibrium equations are written based on first-order shear deformation theory of shells. Strain-displacement and curvature-displacement relationships are written based on the first law approximation and by replacing them in the stress-strain relationships, equilibrium equations are obtained in terms of displacement components. Boundary conditions are fixed-free. Displacement components are the product of function of position and time. The function of position components of displacement was considered in the form of double Fourier series. First, the analysis of buckling load and free vibrations of the composite cylindrical shell was performed and the buckling load, natural frequencies were extracted. In forced vibration analysis, the sinusoidal impulse load is applied in the radial direction on a rectangular area. The response function of time is obtained using the results of free vibration and integral convolution. Finally, the effect of axial load, internal pressure and geometrical parameters on the natural frequencies and dynamic response of shell have been investigated. The results show that with the increase of the compressive axial load and the increase of the ratio of length to radius, the natural frequencies decrease and when the compressive axial load on the shell is equal to the critical buckling load, the basic natural frequency will be zero. Also, with the increase of the internal pressure, the critical buckling load and the fundamental natural frequency increase.

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Azarafza, R., Davar, A., "Effect of axial load and internal pressure on the dynamic response of multi-layered composite cylindrical shell under lateral impulse Load," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 11, No. 4, pp. 2611-2625, 2025.
https://doi.org/10.22068/jstc.2025.2050693.1911

1- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه به دلیل خواص مطلوبشان از جمله سفتی ویژه و استحکام ویژه بالا، امروزه به طور گسترده در صنایع مختلف خصوصاً صنایع هوافضا از آن‌ها استفاده می‌شود. در اکثر مواقع این پوسته‌ها تحت بار محوری و فشار داخلی قرار می‌گیرند. ممکن است این بارها باعث کمناش و ارتعاش و تغییر مکان زیاد سازه شوند. بنابراین لازم است که کمناش و ارتعاشات آن‌ها در طراحی سازه مدنظر قرار گیرد. در گذشته در خصوص کمناش و ارتعاشات سازه‌ها کارهای زیادی انجام شده است که ادامه به بعضی از آن‌ها می‌پردازیم. جعفری و همکاران [1] پاسخ دینامیکی گذرای پوسته استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی را تحت ایمپالس جانبی و بار محوری را مطالعه نمودند و اثر پارامترهای مختلف را بررسی کردند. خلیلی و همکاران [2] پاسخ دینامیکی گذرای پوسته استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی را تحت فشار اولیه و ایمپالس شعاعی بدست آوردند. از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کردند. نتایج نشان داد که پاسخ دینامیکی عمدتاً تحت تأثیر دوره طبیعی سازه است که تحت تأثیر بار محوری اعمال شده و فشار داخلی است. لم و لوی [3] اثر شرایط مرزی و زاویه الیاف را بر فرکانس‌های طبیعی یک پوسته نازک استوانه‌ای چندلایه ارتوتروپیک بررسی کردند. آذرافزا و همکاران [4] آنالیز و بهینه‌سازی پوسته استوانه‌ای دایروی کامپوزیتی چندلایه که در معرض بارهای محوری و جانبی گذرا قرار دارد، را انجام دادند. پاک نژاد و همکاران [5] پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال پر با شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن وزن معادل سیال و سفتی دینامیکی معادل پوسته و سیال، تحت ضربه سرعت پایین با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. انصاری و جعفری [6] ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه محتوی سیال با شرایط مرزی دو سر ساده را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند و اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی مطالعه نمودند. فخرالدینی و همکاران [7] مدل عددی برای ضربه کم سرعت چندلایه کامپوزیتی کربن/پوکسی را بر اساس مکانیک آسیب در نرم‌افزار آباکوس مطالعه نمودند. آن‌ها نشان دادند که مدل خرابی استفاده شده به خوبی قابلیت پیش‌بینی رفتار کلی کامپوزیت را در این فرآیند دارد. کیانی و همکاران [8] برای بررسی رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی مرکب با هسته متخلخل و نانولوله کربنی درجه‌بندی عملکردی از تابع پایه شعاعی و روش‌های نیومارک-بتا استفاده کردند. در نهایت اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس بر تغییر شکل پوسته بررسی نمودند. نتایج نشان داد که با افزایش دما، میرایی و تخلخل هسته، دامنه تغییر شکل پوسته استوانه‌ای افزایش می‌یابد. پول تنگری و نیکخواه بهرامی [9] برای تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای پلکانی با تکیه‌گاه‌های انعطاف‌پذیر میانی متعدد، ترکیبی از شکل برداری روش موج با سری انبساط فوریه به عنوان روشی جدید پیشنهاد دادند. آذرافزا و همکاران [10] ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب با تقویت‌کننده‌های متعام را با استفاده از تئوری مرتبه بالا مورد تحلیل قرار دادند. در نهایت اثر پارامترهای مختلف از جمله نسبت طول به شعاع، نسبت ضخامت به شعاع، ضخامت هسته به ضخامت کل، ساختار و جنس رویه‌ها و هسته بر پاسخ ارتعاشی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. النا و میخاسو [11] ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه را که تحت فشار محوری غیریکنواخت قرار دارد، بررسی کردند. از روش‌های مجانبی برای به‌دست آوردن فرمول‌های بسته برای فرکانس‌های ارتعاش طبیعی و شکل مودها استفاده نمودند. داور و همکاران [12] ارتعاش آزاد

پوسته استوانه‌ای دایره‌ای ساده ساخته شده از ماده درجه‌بندی عملکردی (FGM) تحت فشار داخلی مورد بررسی قرار دادند. از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بر اساس نظریه تقریب اول لاو در معادلات تعادل استفاده نمودند. اثرات پارامترهای مختلف را بر رفتار ارتعاش بررسی کردند. وو و همکاران [13] ویژگی‌های ارتعاشی-آکوستیک آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای چندلایه پر از مایع تحت فشار هیدرواستاتیک اولیه تحلیل کردند. معادله ارتعاش پوسته بر اساس تئوری لاو بدست آمده است. نتایج آن‌ها نشان داد که فشار هیدرواستاتیک باعث افزایش سفتی پوسته استوانه‌ای مرکب و فرکانس‌های طبیعی می‌شود. زنون و همکاران [14] ارتعاش غیرخطی و ناپایداری پوسته استوانه‌ای ارتوتروپیک با سیال جریان داخلی را بررسی کردند. در این پژوهش از معادلات غیرخطی دائل پوسته‌های کوتاه استفاده نمودند. اثر پارامترهای مختلف را بر کمناش خطی و ارتعاشات بررسی نمودند. آذرافزا و همکاران [15] تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را تحت ضربه مایل سرعت پایین توسط یک ضربه‌زننده کروی را با روش تحلیلی و عددی بررسی کردند. آذرافزا و همکاران [16] تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مستطیلی به روش تحلیلی و عددی انجام دادند و اثر پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی و جهت و محل گشودگی بر فرکانس طبیعی سازه بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که با افزایش ابعاد گشودگی میزان کاهش فرکانس طبیعی سازه، افزایش می‌یابد.

در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه تحت بار محوری و فشار داخلی بررسی شده است. معادلات تعادل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها نوشته شده‌اند. روابط کرنش-تغییرمکان و انحناء-تغییرمکان بر مبنای تقریب اول لاو نوشته شده و با جایگزینی آن‌ها در روابط تنش-کرنش، معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های تغییرمکان بدست آمده‌اند. شرایط مرزی به صورت یکسر گیردار-یکسر آزاد فرض شده است. ابتدا تحلیل بارکمانشی و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی انجام شده و بار کمانشی و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استخراج شده‌اند. سپس تحلیل ارتعاش اجباری انجام شده است. در نهایت اثر بار محوری، فشار داخلی و پارامترهای هندسی بر بار کمانشی، فرکانس‌های طبیعی، شکل مودهای پوسته و پاسخ دینامیکی پوسته بررسی شده است. لذا نوآوری مقاله حاضر، اولاً در ارائه روش حل بسته (Closed Form) و نوشتن کد سریع متلب مبتنی بر این روش و نهایتاً ارائه نمودارها و نتایج جدید و کاربردی است که برای اولین بار ارائه شده است. از دیگر قابلیت‌ها به طور مثال، با فرمولاسیون ارائه شده در روش حاضر، طراح با افزایش زمان اعمال بار به مقدار طولانی، مثلاً یک شبانه روز، می‌تواند پاسخ تغییر شکل استاتیکی پوسته را هم علاوه بر پاسخ دینامیکی سریع، استخراج نماید. محل اعمال بار و ابعاد آن، به سهولت قابل تغییر است.

2- معادلات تعادل

شکل 1، یک پوسته استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای را نشان می‌دهد. که در آن R شعاع متوسط، h ضخامت پوسته و L طول پوسته می‌باشد. u و v و w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در جهات محوری (X) ، محیطی (Z) و شعاعی (R) می‌باشند. همچنین شکل 2 نیز لایه‌چینی سطح مقطع را نشان می‌دهد.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\phi \\ N_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\circ \\ \epsilon_\phi^\circ \\ \gamma_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\phi^\circ \\ k_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\phi \\ M_{x\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\circ \\ \epsilon_\phi^\circ \\ \gamma_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\phi^\circ \\ k_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{55} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^\circ \\ \gamma_{\phi z}^\circ \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که در آن ماتریس‌های A, B, D, H به ترتیب سفتی محوری، سفتی کوپل، سفتی خمشی و سفتی برشی نامیده می‌باشند. $\epsilon_x^\circ, \epsilon_\phi^\circ, \gamma_{x\phi}^\circ, \gamma_{xz}^\circ$ و $\gamma_{\phi z}^\circ$ کرنش‌های سطح میانی و $k_x^\circ, k_\phi^\circ, k_{x\phi}^\circ$ انحناهای سطح میانی می‌باشند. رابطه بین کرنش‌ها و انحناهای سطح میانی بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت زیر می‌باشند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$(H_{ij}) = k_i \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (4)$$

k_0 به عنوان فاکتور تصحیح برش در نظر گرفته می‌شود. که مقدار آن برابر می‌باشد [4].

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^\circ \\ \epsilon_\phi^\circ \\ \gamma_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^\circ \\ k_\phi^\circ \\ k_{x\phi}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \phi} + \frac{\partial \beta_\phi}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^\circ \\ \gamma_{\phi z}^\circ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_\phi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{v}{R} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

بعد از جایگذاری معادلات (3) و (5) در معادله (1) و ساده‌سازی معادله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R q_x \\ -R q_\phi \\ -R q_z \\ -R m_x \\ -R m_\phi \end{Bmatrix} \quad (6)$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی که در پیوست (الف) آمده‌اند.

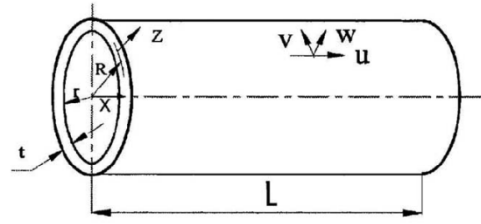


Fig. 1 Geometry and coordinate system of the cylindrical shell

شکل 1 هندسه و سیستم مختصات پوسته استوانه‌ای

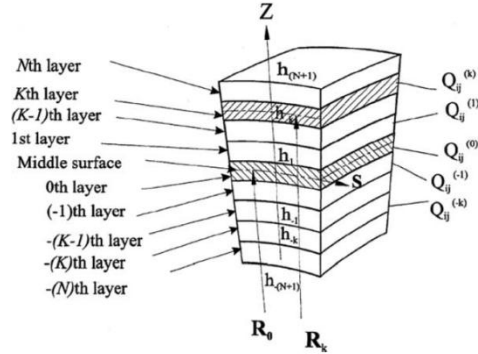


Fig. 2 stacking sequence of the cross section

شکل 2 لایه‌چینی سطح مقطع

بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه اول معادلات تعادل برای پوسته‌ای که تحت بار محوری و فشار داخلی قرار دارند به صورت زیر می‌باشند [17]:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + R \frac{\partial w}{\partial x} \right) + R q_x(x, \phi, t) &= R \left[I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right] \\ \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + R \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + Q_\phi + R N_\phi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + P \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + R \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + R q_\phi(x, \phi, t) &= R \left[\left(I_1 + \frac{2I_2}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 \beta_\phi}{\partial t^2} \right] \\ R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - N_\phi + R N_\phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P \left(R \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + R q_z(x, \phi, t) &= R I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} - R Q_x + R m_x &= R \left(I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + R \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - R Q_\phi + R m_\phi &= R \left[\left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \beta_\phi}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

که در معادله (1)، β_ϕ و β_x به ترتیب شیب در صفحات $x-z$ و $\phi-z$ می‌باشند. همچنین q_x, q_ϕ, q_r نیروهای خارجی، m_ϕ و m_x ممان‌های خارجی، P فشار داخلی پوسته و N_ϕ نیروی محوری که بر پوسته وارد می‌شوند، I_1, I_2, I_3 با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ (I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k(1, z, z^2) dz \right. \quad (2)$$

ρ_k جرم حجمی مربوط به هر لایه می‌باشد. همه خواص معادل هر لایه کامپوزیت با استفاده از قانون مخلوطها بدست می‌آید. رابطه بین نیروها و ممان‌های منتجه بر اساس تئوری کلاسیک لایه با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

3- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای پوسته استوانه‌ای با شرط مرزی گیردار- آزاد در ابتدا و انتها به صورت زیر است:
شرط مرزی گیردار:

$$u = v = w = \beta_x = \beta_\phi = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0 \quad (7)$$

شرط مرزی آزاد:

$$N_x = N_{x\phi} = Q_x = M_x = 0 \quad (8)$$

به منظور ارضای شرایط مرزی مورد نظر w, v, u و β_x و β_ϕ به صورت سری‌های فوریه دوگانه زیر (شامل تابع مودال تیری در جهت طولی و توابع مثلثاتی در جهت محیطی) تعریف می‌شوند [18,4,2,1]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \frac{d\eta_u(x)}{dx} \varphi_u(\phi) T_{mn}(t) \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \eta_v(x) \varphi_v(\phi) T_{mn}(t) \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \eta_w(x) \varphi_w(\phi) T_{mn}(t) \\ \beta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \frac{d\eta_{\beta_x}(x)}{dx} \varphi_{\beta_x}(\phi) T_{mn}(t) \\ \beta_\phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \eta_{\beta_\phi}(x) \varphi_{\beta_\phi}(\phi) T_{mn}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$ ضرایب ثابت شکل مود هستند. m تعداد نیم‌موج‌های طولی، n تعداد موج‌های محیطی و $T_{mn}(t)$ بخش زمانی تغییر مکان‌ها و شیب‌ها می‌باشد (که در تحلیل کمانش استاتیکی برابر یک در نظر گرفته می‌شود و در تحلیل ارتعاشات آزاد مساوی $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$ باید بدست آید. برای ارضای شرایط مرزی، توابع محوری $\eta_i(x)$ و محیطی $\varphi_i(\phi)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [17,4,2]:

$$\begin{aligned} \eta_i(x) &= \alpha_1 \cosh \frac{\lambda x}{L} + \alpha_2 \cos \frac{\lambda x}{L} - \sigma(\alpha_3 \sinh \frac{\lambda x}{L} - \alpha_4 \sin \frac{\lambda x}{L}) \\ &\quad (i = u, v, w, \beta_x, \beta_\phi) \\ \varphi_u(\phi) &= \varphi_w(\phi) = \varphi_{\beta_x}(\phi) = \cos n\phi \\ \varphi_v(\phi) &= \varphi_{\beta_\phi}(\phi) = \sin n\phi \end{aligned} \quad (10)$$

برای ارضای شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد باید α_i و σ_m و λ_m از رابطه زیر تعیین گردند:

$$\begin{aligned} \cosh \lambda_m \cos \lambda_m &= -1 \\ \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 1 \\ \sigma_m &= \frac{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m}{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m} \end{aligned} \quad (11)$$

4- آنالیز کمانش

تحلیل کمانش، یک تحلیل استاتیکی است، بایستی حل استاتیکی انجام شود. بنابراین برای تعیین بار محوری بحرانی کمانش، باید نیروهای و ممان‌های تحریک خارجی برابر صفر و $T_{mn}(t) = 1$ فرض شوند. با جایگذاری معادلات (9) تا (11) در معادلات (6) و استفاده از روش گالرکین و ساده‌سازی معادله زیر بدست می‌آید:

$$\delta_1 N_{cr}^2 + \delta_2 N_{cr} + \delta_3 = 0 \quad (12)$$

که در آن δ_i ضرایب ثابت و N_{cr} بار محوری بحرانی کمانش می‌باشد که بدست می‌آید.

5- آنالیز ارتعاش آزاد

به منظور حل ارتعاش آزاد تابع زمان به صورت $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$ فرض می‌شود که در آن فرکانس طبیعی می‌باشد. با اعمال روش گالرکین مشابه حل کمانش، معادله فرکانسی زیر بدست می‌آید:

$$[[k]_{mn} - \omega_{mn}^2 [M]_{mn}] \{\Delta\}_{mn} = [\Omega]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (13)$$

که در آن $[M]_{mn}$ ماتریس جرم $[k]_{mn}$ ماتریس سختی نامیده می‌شوند و $\{\Delta\}_{mn}$ بردار ضرایب ثابت شکل مود و به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\Delta\}_{mn} = [A_{mn} \ B_{mn} \ C_{mn} \ D_{mn} \ D_{mn}]^T \quad (14)$$

با قرار دادن درمیان ضرایب دستگاه معادلات (13) مساوی صفر، معادله فرکانسی پوسته استوانه‌ای تحت بار محوری و فشار داخلی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\beta_1 \omega_{mn}^{10} + \beta_2 \omega_{mn}^8 + \beta_3 \omega_{mn}^6 + \beta_4 \omega_{mn}^4 + \beta_5 \omega_{mn}^2 + \beta_6 = 0 \quad (15)$$

که در آن β_i ضرایب ثابت می‌باشند. از حل معادله (15) فرکانس‌های طبیعی بدست می‌آیند.

6- آنالیز پاسخ دینامیکی

به منظور حل ارتعاش آزاد تحریک خارجی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} q_x(x, \phi, t) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} \frac{d\eta_x(x)}{dx} \cos n\phi \right] f(t) \\ q_\phi(x, \phi, t) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{mn} \eta_\phi(x) \sin n\phi \right] f(t) \\ q_z(x, \phi, t) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn} \eta_w(x) \cos n\phi \right] f(t) \\ m_x(x, \phi, t) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn} \frac{d\eta_{\beta_x}(x)}{dx} \cos n\phi \right] f(t) \\ m_\phi(x, \phi, t) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn} \eta_{\beta_\phi}(x) \sin n\phi \right] f(t) \end{aligned} \quad (16)$$

در این رابطه بخش زمانی تابع‌های تحریک و ضرایب ثابت هستند. در این رابطه $f(t)$ بخش زمانی تابع‌ها و $X_{mn}, Y_{mn}, P_{mn}, Z_{mn}, W_{mn}$

پاسخ بالا در حالتی است که در همه جهات تحریک خارجی داشته باشیم. فرض می‌شود فقط در جهت شعاعی نیروی تحریک وارد شود و این نیرو به صورت فشار یکنواخت بر روی سطح کوچک به مساحت $(2l_1 \times 2l_2)$ اعمال شود. با توجه به شکل 3، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} q_x(x, \varphi, t) &= q_\varphi(x, \varphi, t) = m_x(x, \varphi, t) = m_\varphi(x, \varphi, t) \\ &= 0 \\ q_z(x, \varphi, t) &= Q_z(x, \varphi) f(t) \\ &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \eta_z(x) \cos n\varphi \right] f(t) \end{aligned} \quad (22)$$

سطح اعمال بار می‌تواند متغیر و هر نقطه از پوسته باشد. مختصات نقطه وسط این سطح به صورت زیر تعریف می‌شود:

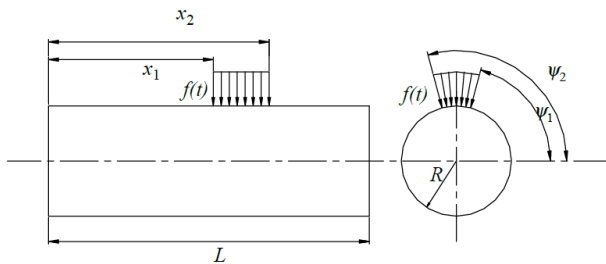


Fig. 3 Applid load on a small rectangular area

شکل 3 بار وارده بر یک سطح مستطیلی کوچک

$$\begin{aligned} x_L &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \phi_L = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \\ R(\psi_2 - \psi_1) &= 2l_1, \quad x_2 - x_1 = 2l_2 \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن x_L و ϕ_L مختصات مرکز محل اعمال بار می‌باشند. اگر توزیع بار تابع ایمپالس تحریک در جهت z (شعاعی) یکنواخت و برابر q_0 و بر سطح مستطیلی اعمال گردد، در این صورت با استفاده از اصل تعامد طرفین رابطه (22) را در $\eta_z(x) \cos n\varphi$ ضرب کرده و از طرفین انتگرال می‌گیریم. در این صورت مقدار P_{mn} به صورت زیر بدست می‌آید:

$$P_{m0} = \frac{q_0}{2\pi C_\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) \cos n\varphi dx d\varphi \quad (24)$$

و برای $n \geq 0$:

$$P_{mn} = \frac{q_0}{\pi C_\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin\left(\frac{\lambda_m x}{l}\right) \cos n\varphi dx d\varphi \quad (25)$$

که در آن C_λ برابر است با:

$$\begin{aligned} C_\lambda &= \alpha_1 \frac{L}{2\lambda_m} [\sin(\lambda_m) \sinh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) + 1] \\ &+ \alpha_2 \frac{L}{2\lambda} \sin^2(\lambda_m) - \sigma_m \alpha_3 \frac{L}{2\lambda_m} [\sin(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) \\ &- \sinh(\lambda_m) \cos(\lambda_m)] + \sigma_m \alpha_4 \left[\frac{L}{2} - \frac{L}{4\lambda} \sin(2\lambda_m) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

ضرایب ثابت هستند. با جایگذاری معادلات جابجایی فرض شده و تحریک‌های خارجی در معادلات تعادل و استفاده از نتایج ارتعاش آزاد و استفاده از روش گالرکین معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) [I_1 A_{mn} + I_2 D_{mn}] &= \ddot{T}_{mn}(t) [I_1 A_{mn} + I_2 D_{mn}] - X_{mn} f(t) \\ -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) \left[\left(I_1 + \frac{2I_2}{R} \right) B_{mn} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) E_{mn} \right] &= \ddot{T}_{mn}(t) \left[\left(I_1 + \frac{2I_2}{R} \right) B_{mn} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) E_{mn} \right] - Y_{mn} f(t) \\ -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) I_1 C_{mn} &= \ddot{T}_{mn}(t) I_1 C_{mn} - P_{mn} f(t) \\ -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) [I_2 A_{mn} + I_3 D_{mn}] &= \ddot{T}_{mn}(t) [I_2 A_{mn} + I_3 D_{mn}] - Z_{mn} f(t) \\ -\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) \left[\left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) B_{mn} + I_3 E_{mn} \right] &= \ddot{T}_{mn}(t) \left[\left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) B_{mn} + I_3 E_{mn} \right] - W_{mn} f(t) \end{aligned} \quad (17)$$

پس از استفاده از خاصیت تعامد مودها و جمع کردن طرفین روابط بالا، با انجام فاکتورگیری طرفین معادله فوق و ساده‌سازی، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم بر حسب زمان، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = G_{mn}(t) \quad (18)$$

که برابر است با:

$$\begin{aligned} G_{mn}(t) &= \frac{R+S}{J_{mn}} \\ R &= A_{mn} X_{mn} f(t) + B_{mn} Y_{mn} f(t) \\ S &= P_{mn} C_{mn} f(t) + D_{mn} Z_{mn} f(t) + E_{mn} W_{mn} f(t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} J_{mn} &= I_1(A_{mn}^2 + B_{mn}^2 + C_{mn}^2) + I_3(D_{mn}^2 + E_{mn}^2 + \frac{2}{R} B_{mn} E_{mn}) \\ &+ 2I_2(A_{mn} D_{mn} + B_{mn} E_{mn} + \frac{1}{R} B_{mn}^2) \end{aligned} \quad (20)$$

که در رابطه (18) و (19)، J_{mn} و $G_{mn}(t)$ به ترتیب نیروهای تعمیم‌یافته و جرم نرمالیز شده نامیده می‌شوند [10].

با استفاده از تبدیل لاپلاس و شرایط اولیه صفر، پس از ساده‌سازی بخش زمانی پاسخ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} T_{mn}(t) &= \frac{1}{J_{mn} \omega_{mn}} \left\{ A_{mn} X_{mn} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \right. \\ &+ B_{mn} Y_{mn} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \\ &+ C_{mn} P_{mn} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \\ &+ D_{mn} Z_{mn} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \\ &+ E_{mn} W_{mn} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \left. \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{f_0 t_1 [\pi \sin(\omega_{mn} t) - \omega_{mn} t_1 \sin(\pi t / t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 \omega_{mn}^2)}, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{f_0 t_1 \pi [\sin(\omega_{mn} t) + \sin \omega_{mn}(t-t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 \omega_{mn}^2)}, & t > t_1 \end{cases} \quad (31)$$

برای بدست آوردن نتایج، یک برنامه کامپیوتری با استفاده معادلات بدست آمده در قسمت قبل (که بر اساس تئوری تغییر شکل برسی مرتبه اول بدست آمده‌اند)، در نرم‌افزار متلب نوشته شده است. با استفاده از برنامه نوشته شده، نتایج بدست می‌آیند.

8- صحت سنجی

برای بررسی صحت معادلات و جواب‌های به دست آمده از حل تحلیلی، ابتدا لازم است که بار کماتشی، فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی بدست آمده از کد نوشته شده برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی یکسر گیر-یکسر آزاد با مراجع دیگر، نرم‌افزار و نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردند.

لازم به توضیح است که خواص مکانیکی و هندسی و شرایط مرزی برای پوسته‌هایی که مقایسه شده اند متفاوت می‌باشد. دلیل این امر این است که مراجع متفاوت می‌باشند و برای اطمینان از صحت نتایج و مقایسه باید از همان خواص استفاده کنیم که مراجع استفاده نموده‌اند. خواص مواد مورد استفاده در بررسی حاضر (شیشه /اپوکسی) می‌باشد که در جدول 1، ثبت شده اند.

جدول 1 خواص مواد مورد استفاده در تحلیل

Table 1 Properties of materials used in analysis

شماره ماده	E_{11} (Gpa)	E_{22} (Gpa)	G_{12} (Gpa)	G_{13} (Gpa)	G_{23} (Gpa)	ν_{12}	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)
1	19	7.6	4.1	4.1	1.43	0.26	1643
2	200	200	76.9	76.9	76.9	0.3	7800

در پوسته کامپوزیتی همه لایه‌ها هم‌جنس و با ضخامت یکسان در نظر گرفته شده‌اند (به جز مواردی که قید شده باشد). همچنین جنس همه پوسته‌های مورد بررسی ماده شماره 1 است، به جز مواردی که قید شده باشد. ابعاد پوسته مورد بررسی برای تحلیل ارتعاشی در جدول 2 ثبت شده‌اند (به جز مواردی که قید شده باشد).

جدول 2 ابعاد پوسته مورد استفاده در تحلیل

Table 2 Dimensions of the shell used in analysis

شعاع پوسته (m)	طول پوسته (m)	ضخامت پوسته (m)
0.5	4	0.003

لایه‌چینی در تمامی شکل‌ها [90/0/0/90] می‌باشد، به جز مواردی که قید شده باشد. برای بررسی پاسخ دینامیکی، نوع پالس سینوسی، مساحت ناحیه اعمال بار به صورت $2l_1 \times 2l_2 = 0.4 \times 0.628 m^2$ و مقدار دامنه نیرو $f_0 = -1000 [pa]$ و تعداد نیم‌موج طولی و نیم‌موج محیطی به صورت $n = 30, m = 20$ در نظر گرفته شده اند. بار پالسی به سر آزاد تیر و پاسخ نیز در همان نقطه بدست آمده است.

برای یک پوسته یکسر گیردار-یکسر آزاد با مشخصات: $L = 6 m, R = 1 m, h = 0.002 m$ ، لایه‌چینی [90/0/90] و ضخامت 3 لایه

در حالت خاصی که نقطه مرکز سطح اعمال بار در وسط طول استوانه قرار داشته باشد ($x_L = \frac{L}{2}, \varphi_L = 0$)، با استفاده از بسط توابع، پس از ساده‌سازی مقدار P_{mn} به صورت زیر بدست می‌آید:

$$n = 0, \quad P_{m0} = \frac{-q_0 L}{2C_\lambda \pi \lambda_m} (\psi_2 - \psi_1) \times [\cos(\frac{\lambda_m x_2}{L}) - \cos(\frac{\lambda_m x_1}{L})]$$

$$n > 0, \quad P_{mn} = \frac{-q_0 L}{C_\lambda \pi \lambda_m n} [\sin(n \psi_2) - \sin(n \psi_1)] \times [\cos(\frac{\lambda_m x_2}{L}) - \cos(\frac{\lambda_m x_1}{L})] \quad (27)$$

بعد از جایگذاری معادله‌های (23) و (24) در معادله (21) و ساده‌سازی، بخش زمانی پاسخ به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$T_{mn}(t) = \frac{P_{mn} C_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (28)$$

و نهایتاً پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد که تحت بار ایمپالس تعریف شده، بر اساس تئوری برهم‌نهی مودها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} C_{mn}}{N_{mn} \omega_{mn}} A_{mn} \frac{d\eta_u(x)}{dx} \cos n\varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} C_{mn}}{N_{mn} \omega_{mn}} B_{mn} \eta_v(x) \sin n\varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} C_{mn}^2}{N_{mn} \omega_{mn}} \eta_w(x) \cos n\varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

$$\beta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} C_{mn}}{N_{mn} \omega_{mn}} D_{mn} \eta_{\beta_x}(x) \cos n\varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

$$\beta_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{mn} C_{mn}}{N_{mn} \omega_{mn}} E_{mn} \eta_{\beta_\varphi}(x) \sin n\varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (29)$$

7- تابع زمانی پاسخ تغییر مکان پوسته

همانطور که در روابط (29) مشخص است، پاسخ تغییر مکان پوسته شامل یک تابع مکانی و یک تابع زمانی می‌شود. تابع مکانی پاسخ، همان شکل مود است (که از ارتعاشات آزاد بدست می‌آید) و تابع زمانی آن عبارت است از انتگرال کانولوشن، که با توجه به نوع پالس، بایستی محاسبه گردد. دوره زمانی اعمال بار ایمپالس از $t = 0$ تا $t = t_1$ که t_1 پریود طبیعی پوسته می‌باشد. انتگرال کانولوشن مربوط به پالس سینوسی معرفی شده در معادلات (29) در معادله (31) نشان داده شده است [17]:

$$\begin{cases} f(t) = f_0 \sin(\frac{\pi t}{t_1}), & 0 \leq t \leq t_1 \\ f(t) = 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (30)$$

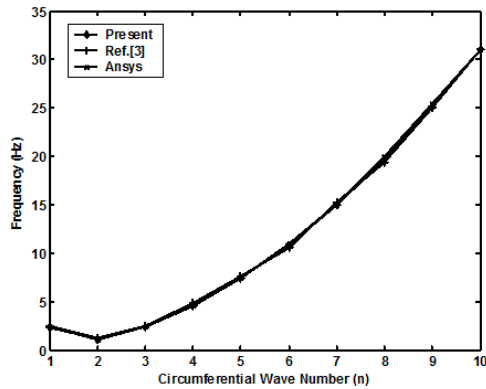


Fig. 4 Comparison of natural frequencies obtained from the present analytical method with reference [3] and software for composite cylindrical shell with clamped-free boundary condition

شکل 4 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از روش تحلیلی حاضر با مرجع [3] و نرم‌افزار برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد

به منظور صحت‌گذاری اثر فشار داخلی روی فرکانس‌های طبیعی، نتایج تحلیل فرکانسی بدست آمده از روش تحلیلی حاضر با نرم‌افزار انسیس، برای یک پوسته فلزی با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد، برای نیم‌موج طولی $m = 1$ در شکل 5 مقایسه شده‌اند. همانطور که مشخص است، نتایج با هم تطابق خوبی دارند. خواص مکانیکی پوسته فلزی مورد استفاده، ماده شماره 2 از جدول 1 و خواص هندسی مطابق جدول 2 می‌باشد. فشار داخلی برابر $P=15000$ (Pa) می‌باشد.

همچنین به منظور بررسی صحت معادلات و نتایج به دست آمده از تحلیل دینامیکی گذرا، در شکل 6 پاسخ زمانی (جابجایی شعاعی) برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی یکسر گیردار-یکسر آزاد از روش حاضر، با جواب بدست آمده از نرم‌افزار انسیس مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج تطابق خوبی با هم دارند. خواص مکانیکی پوسته کامپوزیتی مورد استفاده مطابق جدول 1 می‌باشد. لایه‌چینی پوسته به صورت $[45/0/45]$ ، ضخامت سه لایه برابر، مساحت ناحیه اعمال بار $2l_1 \times 2l_2 = 0.6 \times 0.6 m^2$ ، نوع پالس سینوسی، $f_0 = -1000 [Pa]$ و خواص هندسی پوسته کامپوزیتی به صورت روبرو می‌باشد: $h = 0.002 m, L = 6 m, R = 1 m$

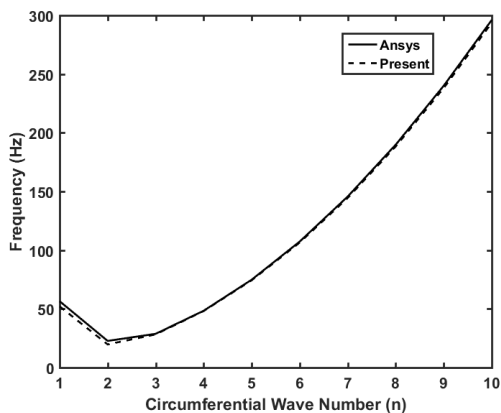


Fig. 5 Comparison of effect of pressure on the natural frequencies obtained from the present analytical method with software for metal cylindrical shell with clamped-free boundary condition

شکل 5 مقایسه اثر فشار روی فرکانس‌های بدست آمده از روش تحلیلی حاضر با نرم‌افزار برای پوسته استوانه‌ای فلزی با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد

برابر و خواص مکانیکی کامپوزیت مطابق جدول 1، بار بحرانی کمانش حاصل از روش تحلیلی و نرم‌افزار در جدول 3 مقایسه شده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود نتایج تطابق خوبی با هم دارند و در صد خطا برابر 1.3 می‌باشد.

جدول 3 مقایسه بار بحرانی کمانش پوسته با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد

Table 3 Comparison of critical buckling load for composite shell whit clamped-free boundary conditions

روش	نیم‌موج طولی (m)	موج محیطی (n)	بار بحرانی کمانش (N/m)	درصد خطا
ANSYS	1	3	15361	-
روش حاضر	1	3	15560.5	1.3

در جدول 4، فرکانس‌های طبیعی پوسته با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد، بدست آمده از روش حاضر با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردیده‌اند. همانطوریکه مشخص است تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی و آزمون تجربی حاصل شده است. مدل مورد آزمایش یک پوسته فلزی ساده (تک لایه و ایزوتروپیک) است، که جنس آن ماده شماره 2 از جدول 2 که خواص هندسی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$L=118 [mm] , R=22 [mm] , h=1 [mm]$$

در روش تجربی بدست آوردن فرکانس‌ها از آزمون مودال استفاده شده است. به منظور برآورده کردن شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد، مدل پوسته ساخته شده از یک طرف به وسیله یک گیره نگه داشته شده و سر دیگر آن آزاد می‌باشد. روی سطح جانبی مدل 24 نقطه در نظر گرفته شده است. یک شتاب سنج در یکی از نقاط سطح مدل محکم نصب شده است و به وسیله یک چکش به نقاط دیگر روی پوسته ضربه‌هایی به منظور تحریک وارد شده است. آزمون در بازه فرکانسی (0 - 6000 Hz) انجام شده و پاسخ فرکانسی پوسته رسم گردیده‌اند و از روی آن فرکانس‌های پوسته و شکل مودها بدست آمده‌اند.

جدول 4 مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای یکسر گیردار-یکسر آزاد

Table 4 Comparison of natural frequencies of clamped-free cylindrical shell

شماره مودهای طولی و محیطی (m) و (n)	مقدار فرکانس (Hz) روش تحلیلی	مقدار فرکانس (Hz) روش تجربی	درصد خطا
$m = 1, n = 1$	1948	1904	2.3
$m = 1, n = 2$	1497	1507	0.66
$m = 1, n = 3$	3945	3980	0.88
$m = 2, n = 3$	4936	4960	0.48
$m = 3, n = 1$	3233.5	3128	3.37

همچنین فرکانس‌های طبیعی پوسته کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار-یکسر آزاد در شکل 4 با مرجع [3] و نرم‌افزار برای نیم‌موج طولی $m = 1$ مقایسه شده‌اند. همانطور که مشخص است، نتایج روش تحلیلی حاضر تطابق خوبی با مرجع و نرم‌افزار دارد. خواص مکانیکی پوسته کامپوزیتی مورد استفاده، ماده شماره 1 از جدول 1 می‌باشد. لایه‌چینی پوسته به صورت $[90/0/90]$ و خواص هندسی پوسته کامپوزیتی به صورت زیر می‌باشد:

$$h = 2 mm, L = 20 m, R = 1 m, h_1 = h_3 = \frac{3h}{8}, h_2 = \frac{h}{4}$$

در شکل 8 برای $m=1$ اثر زاویه لایه‌ها روی بار کمانشی پوسته با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد بررسی شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود بار بحرانی کمانش برای همه لایه‌چینی‌ها در عدد موج محیطی 2 اتفاق افتاده است. در تعداد موج محیطی برابر 2 (نظیر بار بحرانی کمانش)، غیر از زاویه صفر درجه، برای بقیه لایه‌چینی‌ها، اثر زاویه الیاف روی بار کمانشی خیلی کم است و در سایر مقادیر موج محیطی، تأثیر زاویه الیاف اهمیت پیدا می‌کند. برای زاویه صفر درجه بار بحرانی کمانش برابر 70291 نیوتن بر متر و برای زاویه 90 درجه 47075 نیوتن بر متر می‌باشد. علت رفتار کاهشی و سپس افزایشی در شکل 8، آن است که کمترین انرژی کرنشی اعوجاجی، با توجه به هندسه، شرایط مرزی و جنس پوسته، در تعداد موج محیطی برابر دو ($n=2$) اتفاق می‌افتد. در اعداد موج غیر از $n=2$ ، انرژی اعوجاجی بیشتری برای تغییر شکل پوسته، طبق شماره موج متناظر با شکل مورد نظر، مورد نیاز است. یعنی با توجه به اصل حداقل انرژی پتانسیل، طبیعتاً در تعداد موج محیطی مساوی با 2، کمترین انرژی پتانسیل در پوسته ذخیره می‌شود. لذا مورد بحرانی کمانش، در همین تعداد موج محیطی، اتفاق می‌افتد. در شکل 9، اثر زاویه لایه‌ها بر پاسخ دینامیکی (جابجایی شعاعی) پوسته با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، بیشترین مقدار جابجایی مربوط به زاویه 30 درجه می‌باشد که برابر 0.37 میلی‌متر و کمترین مقدار جابجایی مربوط به زاویه 90 درجه می‌باشد که برابر 0.31 میلی‌متر می‌باشد. علت اینکه کمترین خیز و دامنه پاسخ، مربوط به زاویه 90 درجه است، آن است که با توجه به بارگذاری جانبی پوسته، بیشترین تقویت در راستای محیطی مورد نیاز است و با لایه‌چینی با زاویه 90 درجه، بیشترین سفتی محیطی ایجاد می‌شود از طرفی سریع‌ترین پاسخ مربوط به زاویه الیاف صفر درجه می‌باشد. دلیل آن، با توجه به شکل 6، آن است که بزرگترین فرکانس پایه، در $n=2$ مربوط به زاویه صفر درجه می‌باشد.

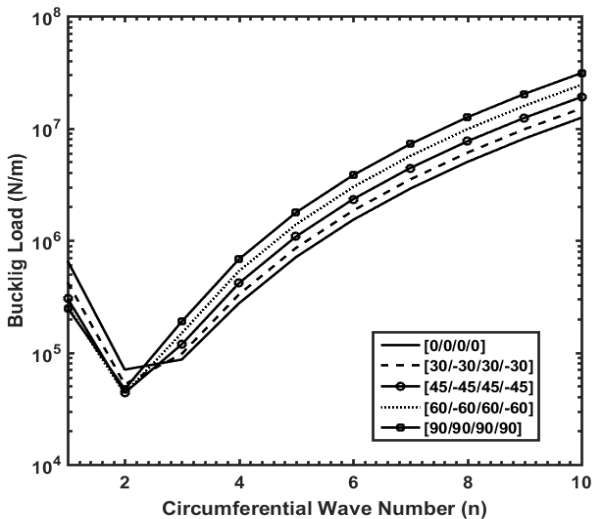


Fig. 8 Influence of fiber orientation on the buckling load of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions
شکل 8 اثر زاویه الیاف بر بار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

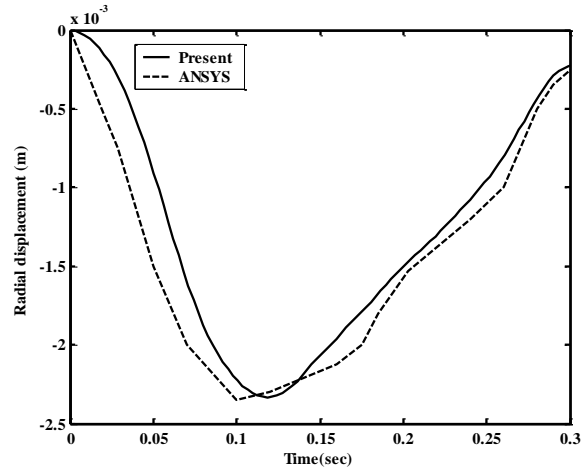


Fig. 6 Comparison of the time response (radial displacement) obtained from the present analytical method with the software for a composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions
شکل 6 مقایسه پاسخ زمانی (جابجایی شعاعی) بدست آمده از روش تحلیلی حاضر با روش عددی (نرم‌افزاری) برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

9- بررسی پارامترهای مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی

پس از اطمینان از صحت نتایج، اثر پارامترهای مختلف بر بار کمانشی، ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی بررسی خواهد شد.

1-9 اثر زاویه الیاف

یکی از عوامل مؤثر بر بار کمانشی، فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی، زاویه الیاف در هر لایه می‌باشد. در شکل 7، برای چیدمان با تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت، برای $m=1$ اثر زاویه لایه‌ها روی فرکانس‌های طبیعی پوسته با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد بررسی شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود در تعداد موج محیطی برابر 2 (نظیر فرکانس پایه)، اثر زاویه الیاف روی فرکانس کم است و در سایر مقادیر موج محیطی، تأثیر زاویه الیاف اهمیت پیدا می‌کند.

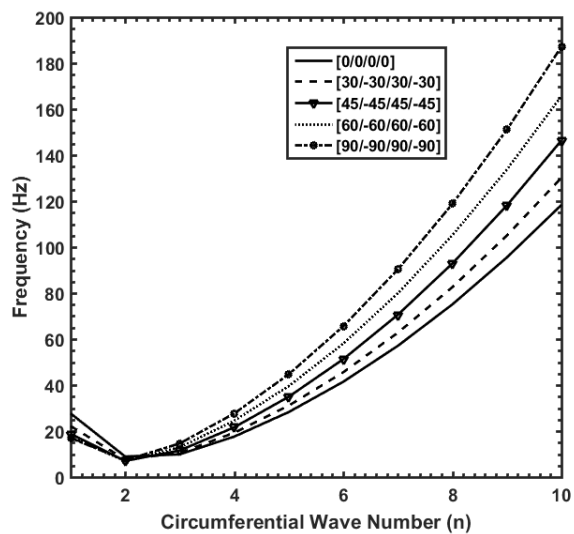


Fig. 7 Influence of fiber orientation on the natural frequency of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions
شکل 7 اثر زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

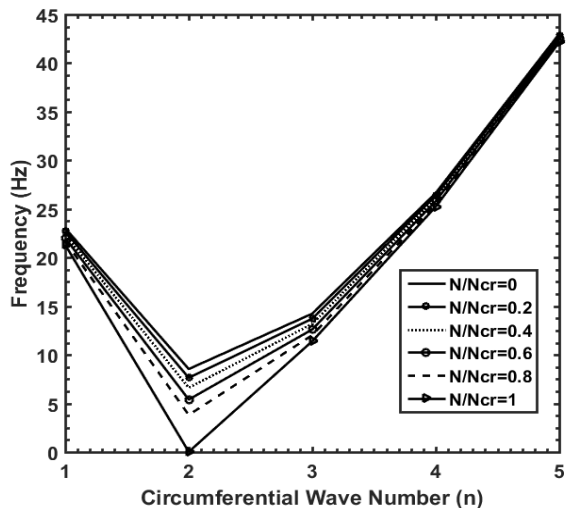


Fig. 10 Influence of compressive axial load on the natural frequency of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 10 اثر بار محوری فشاری بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

3-9- بررسی اثر فشار داخلی

در شکل‌های 12، 13 و 14 اثر فشار داخلی به ترتیب بر فرکانس‌های طبیعی، بار کمانشی و پاسخ دینامیکی (جابجایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده‌است. با افزایش فشار داخلی، پوسته صلب‌تر و در نتیجه سفتی آن افزایش می‌یابد. با توجه به شکل 12، همانطور که انتظار می‌رود با افزایش فشار داخلی، فرکانس‌ها افزایش می‌یابند. تأثیر فشار داخلی، بیشتر روی فرکانس پایه و فرکانس‌های نزدیک فرکانس پایه می‌باشد. وقتی فشار داخلی برابر 5000 پاسکال است، فرکانس طبیعی پایه مساوی 16.1 هرتز و وقتی فشار داخلی برابر 20000 پاسکال است، فرکانس طبیعی پایه مساوی 26.51 هرتز می‌باشد. یعنی وقتی فشار داخلی 4 برابر می‌شود فرکانس طبیعی پایه 1.65 برابر شده‌است. با توجه به شکل 13، با افزایش فشار داخلی، بار کمانشی افزایش می‌یابد. بیشترین تأثیر فشار داخلی، روی بار بحرانی کمانش می‌باشد. وقتی فشار داخلی برابر 5000 پاسکال است، بار بحرانی کمانش برابر 230 کیلونیوتن بر متر و وقتی فشار داخلی برابر 20000 پاسکال است، بار بحرانی کمانش برابر 595 کیلونیوتن بر متر می‌باشد. یعنی وقتی فشار داخلی 4 برابر می‌شود بار بحرانی کمانش 2.59 برابر شده‌است، یعنی 158.7% افزایش یافته‌است. شکل 14 نیز نشان می‌دهد با افزایش فشار داخلی، جابجایی شعاعی کاهش می‌یابد. همچنین زمانی که ماکزیمم دامنه اتفاق می‌افتد نیز کمتر می‌شود. وقتی فشار داخلی برابر 5000 پاسکال است، ماکزیمم جابجایی شعاعی در سیکل اول و برابر 0.125 میلی‌متر و وقتی فشار داخلی برابر 20000 پاسکال است، ماکزیمم جابجایی شعاعی برابر 0.0697 میلی‌متر می‌باشد. یعنی وقتی فشار داخلی 4 برابر می‌شود جابجایی شعاعی ماکزیمم 44% کاهش یافته‌است.

4-9- بررسی اثر نسبت طول به شعاع (L/R)

در شکل‌های 15 و 16 اثر نسبت طول به شعاع (L/R) به ترتیب بر فرکانس‌های طبیعی و بار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده‌است.

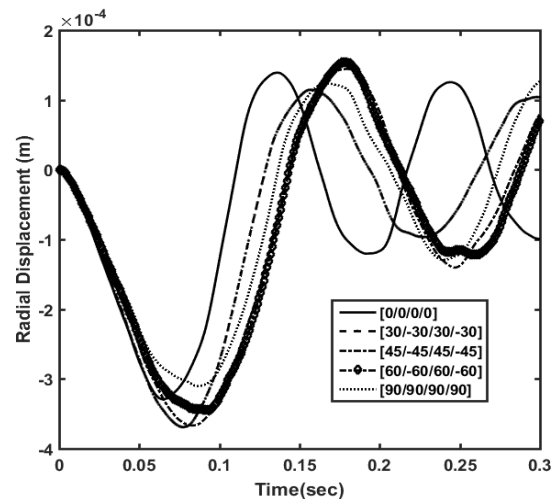


Fig. 9 Influence of fiber orientation on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 9 اثر زاویه الیاف بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

در شکل 10، اثر بار محوری فشاری بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده‌است. بار بحرانی کمانش این پوسته برابر 64377 نیوتن بر متر می‌باشد. با اعمال بار محوری فشاری کمتر از بار بحرانی کمانش، همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش بار محوری فشاری، فرکانس طبیعی کاهش یافته‌است. برای حالتی که $\frac{N}{N_{cr}} = 0.2$ فرکانس طبیعی پایه برابر 7.65 هرتز، و در حالتی که $\frac{N}{N_{cr}} = 0.8$ فرکانس طبیعی پایه برابر 3.82 هرتز می‌باشد. یعنی با چهار برابر شدن مقدار بار محوری فشاری، فرکانس طبیعی پوسته 50% کاهش یافته‌است. با توجه به اینکه جرم پوسته ثابت است، با اعمال بار محوری فشاری، سفتی پوسته کاهش یافته‌است در نتیجه فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین با وارد کردن بار محوری کششی فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. همچنین با افزایش مقدار بار محوری فشاری به ازای همه اعداد موج محیطی، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و عدد موج مربوط به فرکانس پایه تغییر نمی‌کند. به نحوی که با افزایش بار محوری فشاری، تا حد بار بحرانی کمانش، در عدد موج محیطی $n=2$ ، فرکانس طبیعی ارتعاشی، برابر صفر می‌گردد و این، به معنی کمانش یا فروپاشی پوسته می‌باشد.

2-9- بررسی اثر بار محوری فشاری

در شکل 11، اثر بار محوری فشاری بر پاسخ دینامیکی (جابجایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده‌است. بار بحرانی کمانش این پوسته برابر 64377 نیوتن بر متر می‌باشد. با اعمال بار محوری فشاری کمتر از بار بحرانی کمانش، همانطور که در این شکل مشخص است، با افزایش مقدار بار محوری فشاری، ماکزیمم جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد. برای حالتی که $\frac{N}{N_{cr}} = 0.2$ ماکزیمم تغییر مکان شعاعی برابر 0.279 mm میلی‌متر، و در حالتی که $\frac{N}{N_{cr}} = 0.8$ ماکزیمم تغییر مکان شعاعی برابر 0.757 mm میلی‌متر می‌باشد. یعنی با چهار برابر شدن مقدار بار محوری فشاری، ماکزیمم جابجایی پوسته تقریباً 2.71 برابر شده‌است. همچنین با وارد کردن بار محوری کششی جابجایی شعاعی کاهش می‌یابد.

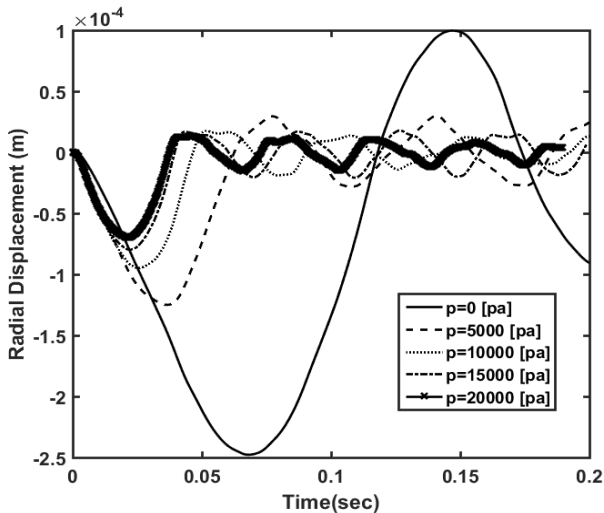


Fig. 14 Influence of internal pressure on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions
14 اثر بار فشار داخلی بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

با افزایش نسبت طول به شعاع، پوسته نرم‌تر و در نتیجه سفتی آن کاهش می‌یابد. با توجه به شکل 15، همانطور که انتظار می‌رود با افزایش نسبت طول به شعاع، فرکانس‌ها کاهش می‌یابند. مشاهده می‌شود که اثر (L/R) برای فرکانس‌های کوچک‌تر از فرکانس پایه، زیاد و برای فرکانس‌های بزرگ‌تر از فرکانس پایه، تقریباً ناچیز است. همچنین برای سه نسبت $(L/R=6, 8, 10)$ ، عدد موج محیطی فرکانس طبیعی پایه یکسان و برابر 2 می‌باشد. برای نسبت $(L/R=4)$ ، عدد موج محیطی فرکانس طبیعی پایه برابر 3 می‌باشد. برای نسبت $(L/R=4)$ ، فرکانس طبیعی پایه برابر 19.13 و برای نسبت $(L/R=8)$ ، فرکانس طبیعی پایه برابر 8.54 است. یعنی با 2 برابر شدن طول پوسته فرکانس طبیعی پایه آن تقریباً 55.36% کاهش یافته است. علت اینکه در شکل 15، با افزایش عدد موج محیطی، از $n=4$ به بعد، تغییر در مقدار فرکانس، تقریباً مستقل از طول پوسته می‌شود، آن است که انرژی اوججایی (خمشی و برشی) لازم برای تغییر شکل پوسته، تقریباً مستقل از طول می‌شود. در حالی که در تعداد موج محیطی کم، مقدار این انرژی، بسیار به طول پوسته، وابسته است. چرا که در این حالت، در طول کم پوسته، شرایط مرزی دو انتها (گیردار-آزاد) به هم نزدیک اند و لذا سهم قابل توجهی در توزیع تنش در پوسته پیدا می‌کنند. در حالی که با افزایش نسبت طول پوسته، دو مرز انتهایی، از هم دور می‌شوند و اثر آن‌ها روی توزیع تنش در پوسته، با افزایش نسبت طول به قطر پوسته، به تدریج، کاهش می‌یابد. همچنین از شکل 16 مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به شعاع، بار کمانشی نیز کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که برای سه نسبت $(L/R=6, 8, 10)$ عدد موج محیطی بار بحرانی کمانش یکسان و برابر 2 می‌باشد. برای نسبت $(L/R=4)$ عدد موج محیطی بار بحرانی کمانش برابر 3 می‌باشد. برای نسبت $(L/R=4)$ ، بار بحرانی کمانش 80.215 کیلو نیوتن بر متر، و برای نسبت $(L/R=8)$ ، بار بحرانی کمانش برابر 64.166 کیلو نیوتن بر متر است. یعنی با 2 برابر شدن طول پوسته بار بحرانی کمانش آن تقریباً 20% کاهش یافته است.

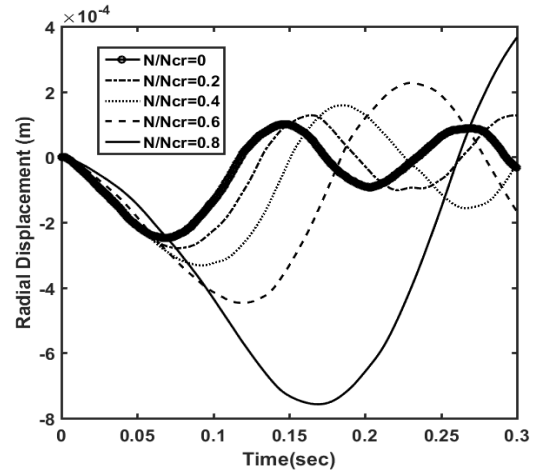


Fig. 11 Influence of compressive axial load on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 11 اثر بار محوری فشاری بر پاسخ دینامیکی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

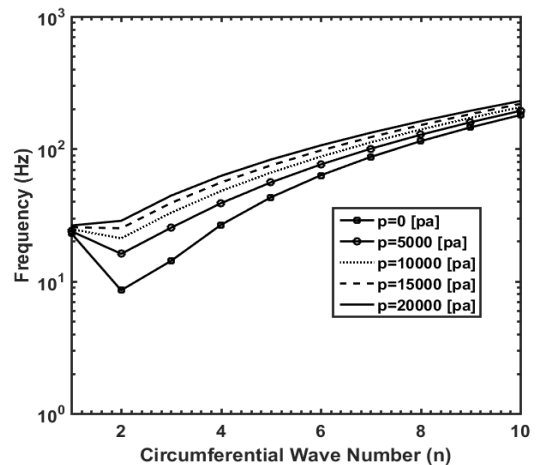


Fig. 12 Influence of internal pressure on the natural frequencies of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 12 اثر فشار داخلی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

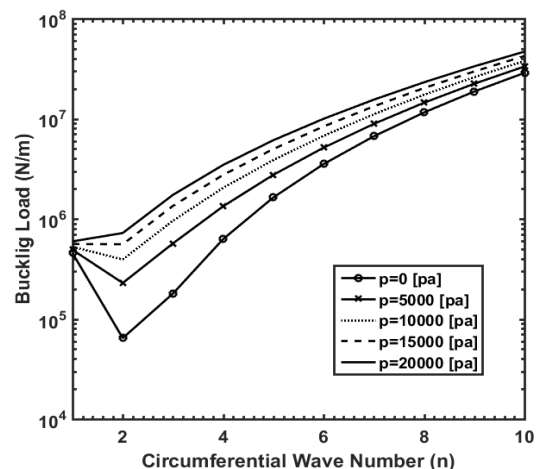


Fig. 13 Influence of internal pressure on the buckling load of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 13 اثر بار فشار داخلی بر بار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

پایه برابر 5.67 و برای نسبت (h/R=0.008)، فرکانس طبیعی پایه برابر 9.57 است. یعنی با 4 برابر شدن ضخامت پوسته فرکانس طبیعی پایه آن تقریباً 68.8% افزایش یافته است. با توجه به شکل 18 مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، بار کمانشی نیز افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که برای سه نسبت (h/R=0.004, 0.006, 0.008) عدد موج محیطی بار بحرانی کمانش یکسان و برابر 2 می‌باشد. برای نسبت (h/R=0.002)، موج محیطی بار بحرانی کمانش برابر 3 می‌باشد. برای نسبت (h/R=0.002)، بار بحرانی کمانش 9.47 کیلونیوتن بر متر، و برای نسبت (h/R=0.008)، بار بحرانی کمانش برابر 107.732 کیلونیوتن بر متر است. یعنی با 4 برابر شدن طول پوسته بار بحرانی کمانش آن تقریباً 11.4 برابر شده است. شکل 19 نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، پاسخ دینامیکی کاهش می‌یابد. بطوریکه با 2 برابر شدن نسبت ضخامت به شعاع، پاسخ دینامیکی، 73% کاهش یافته است.

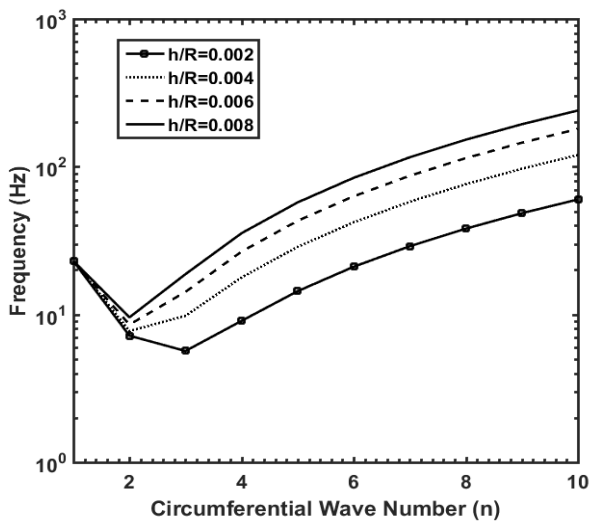


Fig. 17 Influence of (h/R) on the natural frequencies of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 17 اثر نسبت (h/R) بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

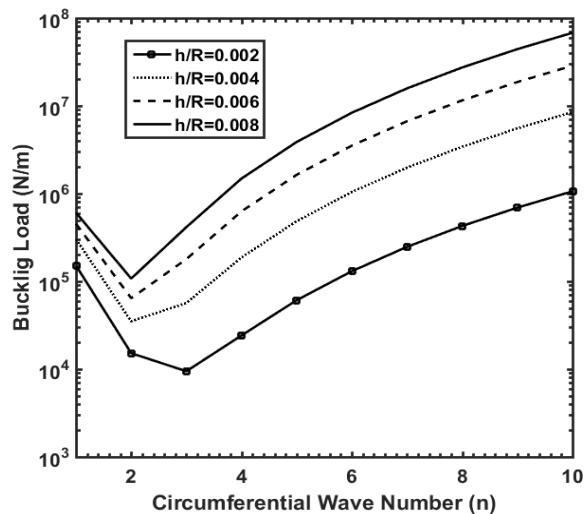


Fig. 18 Influence of (h/R) on the buckling load of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 18 اثر نسبت (h/R) بر بار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

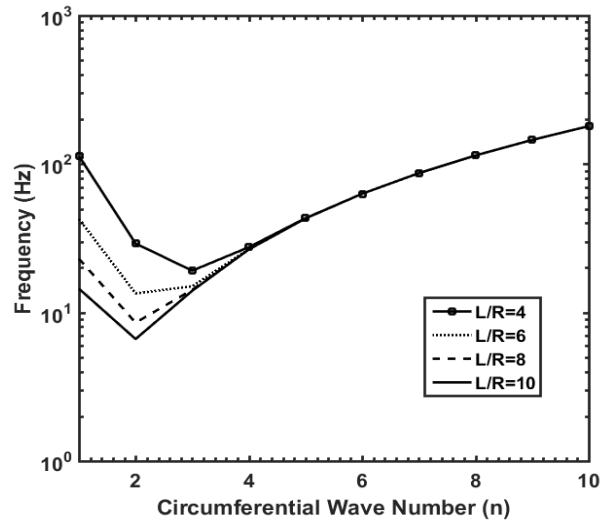


Fig. 15 Influence of (L/R) on the natural frequencies of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 15 اثر نسبت (L/R) بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

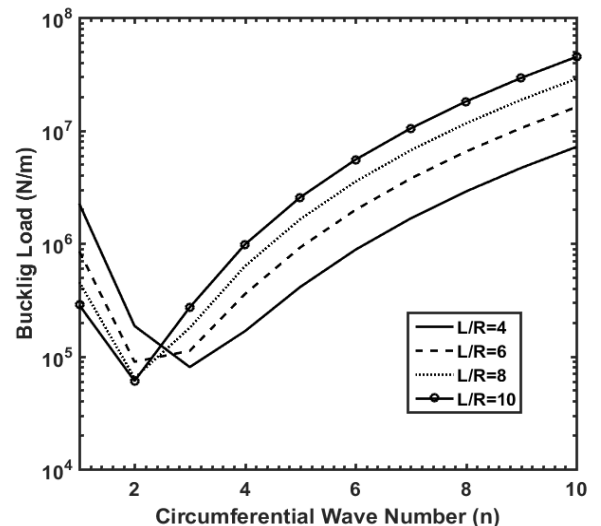


Fig. 16 Influence of (L/R) on the buckling load of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 16 اثر نسبت (L/R) بر بار کمانشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

5-9- بررسی اثر نسبت ضخامت به شعاع (h/R)

در شکل‌های 17، 18 و 19 اثر نسبت ضخامت به شعاع (h/R) به ترتیب بر فرکانس‌های طبیعی، بار کمانشی و پاسخ دینامیکی (جابجایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد نشان شده است. با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، پوسته صلب‌تر و در نتیجه سفتی آن افزایش می‌یابد. با توجه به شکل 17، همانطور که انتظار می‌رود با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس‌ها افزایش می‌یابند. مشاهده می‌شود که اثر (h/R) برای فرکانس‌های کوچک‌تر از فرکانس پایه کم و برای فرکانس‌های بزرگ‌تر از فرکانس پایه بیشتر است. همچنین برای سه نسبت (h/R=0.004, 0.006, 0.008) عدد موج محیطی فرکانس طبیعی پایه یکسان و برابر 2 می‌باشد. برای نسبت (h/R=0.002) عدد موج محیطی بار بحرانی کمانش برابر 3 می‌باشد. برای نسبت (h/R=0.002)، فرکانس طبیعی

7-9- بررسی اثر مقدار ماکزیمم بار اعمال شده بر پوسته (f_0)

در شکل 21 تأثیر مقدار ماکزیمم بار اعمال شده بر پوسته (f_0) بر پاسخ دینامیکی بر حسب زمان پوسته نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با تغییر در مقدار بار اعمال شده، فقط اندازه دامنه ارتعاش تغییر می‌کند و از لحاظ زمانی هیچ تأثیری بر نمودار تغییرات جابجایی بر حسب زمان ندارد (چون فرکانس‌های طبیعی تغییر نکرده‌اند). همچنین اندازه دامنه ارتعاش به وجود آمده، رابطه مستقیم و خطی با مقدار f_0 دارد. همچنین خطی بودن رابطه f_0 با دامنه ارتعاش را می‌توان با کنار هم قرار دادن روابط (30) و (31) نیز تحقیق کرد.

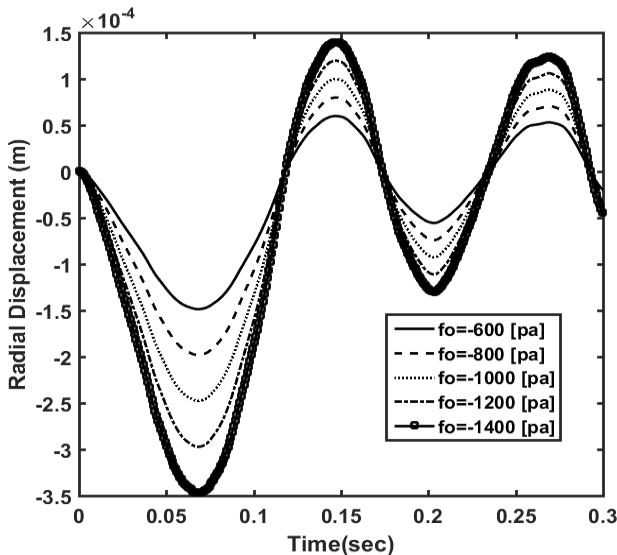


Fig. 21 Influence of f_0 on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 21 اثر f_0 بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد

8-9- بررسی اثر مختصات محل اعمال بار (X_L, φ_L)

در شکل 22 تأثیر مختصات محل اعمال بار (x_L, φ_L) بر پاسخ دینامیکی پوسته نشان داده شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، هرچه مختصات محل اعمال بار، به مختصات نقطه‌ای که در آن جابجایی را محاسبه می‌کنیم ($x = L, \varphi = 0$) نزدیک‌تر می‌شود، مقدار جابجایی شعاعی آن نقطه بیشتر می‌شود. با کمی دقت در این شکل نتیجه می‌شود که هرچه محل اعمال بار، از نقطه مورد نظر برای محاسبه پاسخ زمانی دورتر باشد، ماکزیمم جابجایی آن نقطه دیرتر اتفاق می‌افتد. دلیل این تأخیر، انتشار موج در محیط پیوسته (پوسته استوانه‌ای) می‌باشد. سرعت انتشار موج در یک محیط پیوسته محدود است. بنابراین مدتی طول می‌کشد تا از نقطه‌ای به نقطه دیگر انتقال یابد. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، با تغییر در محل اعمال بار (X_L) فقط اندازه دامنه ارتعاش (تغییر مکان) تغییر می‌کند و بعد از اتمام مدت زمان اعمال تحریک اجباری و در حالت ارتعاش آزاد، از لحاظ زمانی هیچ تأثیری بر نمودار تغییرات جابجایی بر حسب زمان ندارد (چون فرکانس‌های طبیعی تغییر نکرده‌اند). همچنین اندازه دامنه ارتعاش به وجود آمده، رابطه مستقیم و خطی با محل اعمال بار (X_L) دارد.

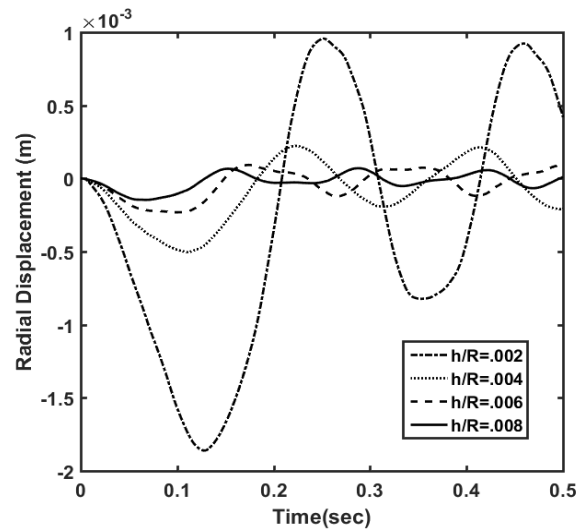


Fig. 19 Influence of (h/R) on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 19 اثر نسبت (h/R) بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد

6-9- بررسی اثر مدت زمان اعمال بار وارد بر پوسته (t_1)

در شکل 20 اثر تغییر در مدت زمان اعمال بار وارد بر پوسته (t_1)، بر پاسخ دینامیکی بر حسب زمان نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، اگر این مدت زمان به پرپود طبیعی پوسته (N.P.) که مساوی 0.1171 ثانیه است نزدیک شود، ماکزیمم جابجایی شعاعی پوسته بیشتر می‌شود. در واقع اگر مدت زمان اعمال بار سینوسی به پرپود طبیعی نزدیک شود، شکل مود نظیر فرکانس پایه و سایر شکل مودهای نظیر فرکانس‌های نزدیک به فرکانس پایه، بیشتر تحریک می‌شوند. در نتیجه مقدار جابجایی بیشتری خواهیم داشت.

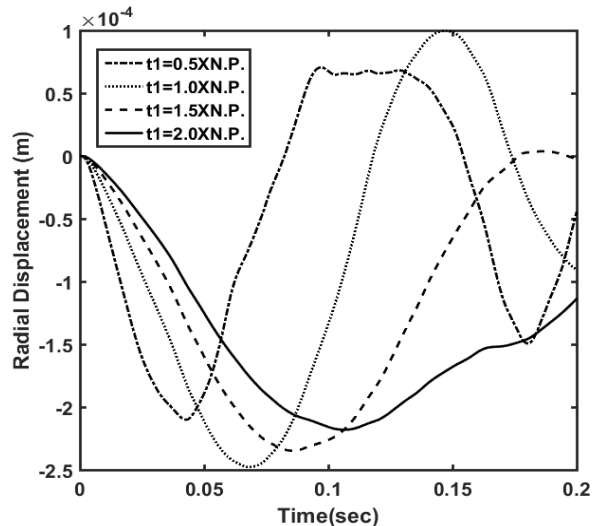


Fig. 20 Influence of duration of impact load application (as a multiple of the natural period on the surface) on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 20 اثر مدت زمان اعمال بار ضربه‌ای (به صورت مضربی از پرپود طبیعی بر روی سطح) بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد

- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بار بحرانی کماتش نیز افزایش می‌یابد و این اثر در تعداد زیاد موج محیطی (n) مشهودتر است.
- با افزایش نسبت طول به شعاع بار بحرانی کماتش می‌یابد. در تعداد کم موج محیطی با افزایش نسبت طول به شعاع، بار کماتش کاهش می‌یابد ولی در تعداد عدد موج محیطی زیاد، افزایش این نسبت باعث افزایش فرکانس می‌شود.
- بار محوری فشاری باعث کاهش همه فرکانس‌های طبیعی پوسته خصوصاً فرکانس پایه آن می‌شود.
- با افزایش نسبت طول به شعاع، تغییرات جابجایی شعاعی (دامنه ارتعاش) پوسته افزایش می‌یابد و ماکزیمم دامنه ارتعاش پوسته دیرتر اتفاق می‌افتد.
- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، تغییرات جابجایی شعاعی (دامنه ارتعاش) پوسته کاهش می‌یابد و ماکزیمم دامنه ارتعاش پوسته زودتر اتفاق می‌افتد.
- بار محوری فشاری استاتیکی، باعث افزایش تغییرات جابجایی شعاعی (دامنه ارتعاش) پوسته تحت اثر بار ضربه‌ای می‌شود. رابطه بین دامنه ارتعاش و مقدار بار محوری، غیرخطی است و وقتی بار محوری فشاری به بار بحرانی کماتش پوسته می‌رسد پاسخ دامنه تقریباً بی‌نهایت می‌شود.
- اگر مدت زمان اعمال بار ضربه‌ای نزدیک به پرپود طبیعی سازه باشد، باعث می‌شود دامنه ارتعاش پوسته افزایش پیدا کند. به این دلیل که فرکانس‌های نزدیک به فرکانس پایه، بیشتر تحریک می‌شوند.
- مقدار دامنه ارتعاش پوسته تحت اثر بار ضربه‌ای، با تغییر در اندازه بار، به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

11- فهرست علائم

h	ضخامت استوانه
h_k	ضخامت لایه k ام
R	شعاع متوسط استوانه
L	طول استوانه
x	مختصه مکانی در جهت محوری
φ	مختصه مکانی در جهت محیطی
z	مختصه مکانی در جهت شعاعی
u	مؤلفه جابجایی پوسته در جهت محوری
v	مؤلفه جابجایی پوسته در جهت محیطی
w	مؤلفه جابجایی پوسته در جهت شعاعی
$T_{mn}(t)$	توابع زمانی در مختصات تعمیم‌یافته
A_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت محوری
B_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت محیطی
C_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت شعاعی
D_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت شیب محوری
E_{mn}	ثابت شکل مود پوسته در جهت شیب محیطی
$\begin{cases} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{cases}$	مدول یانگ در جهات اصلی تک‌لایه
$\begin{cases} G_{12} \\ G_{13} \\ G_{23} \end{cases}$	مدول برشی
\bar{Q}_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته تبدیل یافته

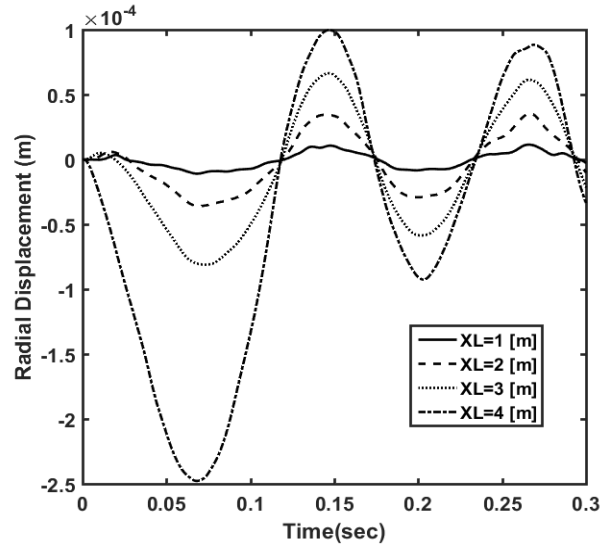


Fig. 22 Influence of location of Impact load application ($X_L = XL$, $\varphi_L = 0$) on the dynamic response of composite cylindrical shell with clamped-free boundary conditions

شکل 22 اثر محل اعمال بار ضربه‌ای ($x_L = XL$, $\varphi_L = 0 \text{ deg}$) بر پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد

10- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه تحت اثر بار محوری و فشار داخلی بررسی شده است. معادلات تعادل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها نوشته شده‌اند. روابط کرنش-تغییرمکان و انحناء-تغییرمکان بر مبنای تقریب اول لایه نوشته شده و با جایگزینی آن‌ها در روابط تنش-کرنش، معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های تغییرمکان بدست آمده‌اند. شرایط مرزی به صورت یکسر گیردار - یکسر آزاد می‌باشد. مؤلفه‌های تغییرمکان، حاصل ضرب تابع مکانی در تابع زمانی می‌باشند. مؤلفه‌های تابع مکانی به‌صورت سری‌های فوریه دوگانه در نظر گرفته شده‌اند. حل معادلات تعادل با استفاده از روش گالرکین انجام شده است. پس از حل تحلیلی، نهایتاً یک کد کامپیوتری با استفاده از متلب نوشته شده و نمودارهای مربوطه رسم شده‌اند. پس از بررسی اثر پارامترهای مختلف نتایج به صورت زیر می‌باشند:

- اثر نسبت ضخامت به شعاع فقط در تعداد زیاد موج محیطی (n) ظاهر می‌شود و در تعداد کم موج محیطی اثر آن ناچیز است. با افزایش این نسبت، فرکانس افزایش می‌یابد.
- اثر نسبت طول به شعاع فقط در تعداد کم موج محیطی (n) ظاهر می‌شود و وقتی که تعداد موج محیطی زیاد می‌شود افزایش این نسبت تأثیری روی فرکانس ندارد. با افزایش این نسبت، فرکانس کاهش می‌یابد.
- در یک چیدمان لایه‌های ثابت، زاویه الیاف روی فرکانس پایه تأثیری کمی دارد و اثر آن‌ها روی فرکانس‌های دورتر از فرکانس پایه مشهودتر است.
- فشار داخلی پوسته باعث افزایش همه فرکانس‌های طبیعی و بار کماتش پوسته، خصوصاً فرکانس پایه و بار بحرانی کماتش آن می‌شود. همچنین فشار داخلی پوسته، باعث کاهش دامنه ارتعاش و پوسته تحت اثر بار ضربه‌ای می‌شود.

η_i	تابع مودال تیری در جهت طولی	A_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی صفحه‌ای	
مؤلفه‌های تنش	$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{cases}$	B_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی کوپل	
		D_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی خمشی	
		H_{ij}	درایه‌های ماتریس سفتی برشی	
مؤلفه‌های کرنش سطح میانی	$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\phi \\ \varepsilon_{x\phi} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\phi z} \end{cases}$	$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{cases}$	اینرسی جرمی پوسته	
		t	زمان	
		t_1	زمان انتهای اعمال بار	
		m	تعداد نیم‌موج‌های طولی	
		n	تعداد موج‌های محیطی	
ضرایب پواسون	$\begin{cases} \nu_{12} \\ \nu_{21} \end{cases}$	$\begin{cases} N_x \\ N_\phi \\ N_{x\phi} \end{cases}$	منتجه‌های نیرو در سه جهت محوری، محیطی و برشی	
شیب در صفحه $(x - z)$	β_x			
	شیب در صفحه $(\phi - z)$	β_ϕ	$\begin{cases} Q_x \\ Q_\phi \end{cases}$	منتجه نیروی برشی در جهت محوری در جهت محیطی
فرکانس طبیعی نظیر مود (m, n)	ω_{mn}	N_a		
فاصله بتدای اعمال بار نسبت به مبدأ	x_1	$\begin{cases} M_x \\ M_\phi \\ M_{x\phi} \end{cases}$	منتجه‌های ممان در سه جهت محوری، محیطی و برشی	
فاصله انتهای اعمال بار نسبت به مبدأ	x_2			
زاویه لبه ابتدای اعمال بار نسبت به مبدأ	ψ_1			
زاویه لبه انتهای اعمال بار نسبت به مبدأ	ψ_2	L_{ij}	عملگرهای دیفرانسیلی	
طول سطح اعمال بار روی پوسته	L_1	k_0	فاکتور تصحیح برشی	
عرض سطح اعمال بار روی پوسته	L_2	$\begin{cases} p_x \\ p_\theta \\ p_z \end{cases}$	نیروی وارد بر المان پوسته در جهات محوری، محیطی و شعاعی	
مختصات زاویه ای نقطه وسط سطح اعمال بار	ϕ_L			

12- پیوست‌ها

$$L_{11} = [(A_{11}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2A_{16}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{A_{66}}{R} + P) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{12} = [(A_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{A_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{13} = [(A_{12} + PR) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{A_{26}}{R}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{14} = [(B_{11}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2B_{16}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{66}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{15} = [(B_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{21} = [(A_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{A_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{22} = [(A_{66}R + N_a R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2A_{26}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{A_{22}}{R} + P) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{H_{44}}{R}]$$

$$L_{23} = [(A_{26} + H_{45}) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{A_{22}}{R} + \frac{H_{44}}{R} + RP) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{24} = [(B_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{25} = [(B_{66}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2B_{26}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{22}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + H_{44}]$$

$$L_{31} = [(-A_{12} - RP) \frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{A_{26}}{R}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{32} = [-(A_{26} + H_{45}) \frac{\partial}{\partial x} - (\frac{A_{22}}{R} + \frac{H_{44}}{R} - P) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

نیروی تحریک خارجی در جهات محوری، محیطی و شعاعی	$\begin{cases} q_x \\ q_\phi \\ q_z \end{cases}$
ممان تحریک خارجی در جهت محوری و محیطی	$\begin{cases} m_x \\ m_\phi \end{cases}$
فاصله طولی لبه ابتدای اعمال بار نسبت به مبدأ	x_1
فاصله طولی لبه انتهای اعمال بار نسبت به مبدأ	x_2
ضرایب ثابت فوریه برای تعریف محل اعمال بار	$\begin{cases} X_{mn} \\ P_{mn} \end{cases}$
فشار یکنواخت اعمال شده بر روی سطح اعمال بار	q_0
ضرایب ثابت فوریه برای تعریف محل اعمال بار	$\begin{cases} X_{mn} \\ Y_{mn} \\ P_{mn} \\ Z_{mn} \\ W_{mn} \end{cases}$
نیروهای تعمیم‌یافته	G_{mn}
جرم نرمالیز شده	J_{mn}
ماتریس سفتی پوسته	$[k]_{mn}$
ماتریس جرم پوسته	$[m]_{mn}$
بردار ثوابت شکل مود	$\{\Delta\}_{mn}$

علائم یونانی

ρ	چگالی ماده
ρ_k	چگالی هر لایه
λ	ریشه معادلات غیر خطی
δ_i	ضرایب ثابت معادلات بار کمانشی
α_i	پارامتر وابسته به λ

foundation under uniform thermal field,” Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Vol. 42, pp. 1-15, 2020.

- [9] Poultagari, R., Nikkha-Bahramin, M., “Free and Forced Vibration Analysis of Stepped Circular Cylindrical Shells with Several Intermediate Supports Using an Extended Wave Method; a Generalized Approach” Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 13, pp. 2027-2058, 2016.
- [10] AzarAfza, R., MalekzadehFard, K., Golaghapour Kami, M., Pourmoayed, A. R., “Dynamic analysis of cylindrical sandwich shell with orthogonal stiffeners using high-order theory,” In Persian, AmirKabir J. Mech. Eng., Vol. 53, No. 4, pp. 2473-2492, 2021.
- [11] Elena, A. K., Gennadi, I. M., “Free vibrations of a laminated cylindrical shell subjected to nonuniformly distributed axial forces,” Mechanics of Solids, Vol. 41, No. 5, pp. 130-138, 2006.
- [12] Davar, A., Khalili, S. M. R., Hadavinia, H., “Free Vibrations of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells under Internal Pressure,” International Journal Advanced Design and Manufacturing Technology, Vol. 6, No. 4, pp. 49-58, 2013
- [13] Wu, J. h., Liu, R. J., Duan, Y., Sun, Y. D., “Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure,” International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 202, 2023.
- [14] Prado, Z. D., Goncalves, P. B., Paidoussis, M. P., “Non linear vibration and instabilities of orthotropic cylindrical shell with internal flowing fluid,” International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 52, pp. 1437-1457, 2010.
- [15] AzarAfza, R., Golkar, A. R., Davar, A., “Analytical investigation of Low-Velocity Oblique Impact on Composite Cylindrical Shells”, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 3, pp. 1106-1119, 2020.
- [16] AzarAfza, R., Aslanzadeh GoliBeiglo, S., Davar, A., “Analysis of free vibration of laminated composite cylindrical shells with rectangular cutout,” In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 10, No. 2, pp. 2209 -2196 , 2023.
- [17] AzarAfza, R., “Weight and Dynamic Optimization of Laminated Composite Cylindrical Shells,” Ph.D. Thesis, In Persian, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, September 2005.
- [18] Lee, Y. S., Lee, K. D., "On the dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads", Computers & structures, Vol. 63, No. 1, pp. 149-157, 1997.

$$L_{33} = [(N_{aR} + H_{55}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2H_{45}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{H_{44}}{R} + P) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{A_{22}}{R}]$$

$$L_{34} = [(H_{55}R - B_{12}) \frac{\partial}{\partial x} + (H_{45} - \frac{B_{26}}{R}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{35} = [(H_{45}R - B_{26}) \frac{\partial}{\partial x} + (H_{44} - \frac{B_{22}}{R}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{41} = [(B_{11}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2B_{16}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{66}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{42} = [(B_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + H_{45}]$$

$$L_{43} = [(B_{12} - H_{55}R) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{B_{26}}{R} - H_{45}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{44} = [(D_{11}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2D_{16}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{D_{66}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - H_{55}R]$$

$$L_{45} = [(D_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{D_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - H_{45}R]$$

$$L_{51} = [(B_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}]$$

$$L_{52} = [(B_{66}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2B_{26}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{B_{22}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + H_{44}]$$

$$L_{53} = [(B_{26} - H_{45}R) \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{B_{22}}{R} - H_{44}) \frac{\partial}{\partial \phi}]$$

$$L_{54} = [(D_{16}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{D_{26}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - H_{45}R]$$

$$L_{55} = [(D_{66}R) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2D_{26}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} + (\frac{D_{22}}{R}) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - H_{44}R]$$

13- مراجع

- [1] Jafari, A. A., Khalili, S. M. R., AzarAfza, R., “Transient dynamic response of composite circular cylindrical shells under radial impulse load and axial compressive loads,” Thin-Walled Structures, Vol. 43, pp. 1763-1786, 2005.
- [2] Khalili, S. M. R., AzarAfza, R., Davar, A., “Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load,” Composite Structures, Vol. 89, pp. 275-284, 2009.
- [3] Lam, K.Y., Loy, C.T., "Influence of boundary conditions and fiber orientation on the natural frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells", Composite Structures, Vol. 31, pp. 21-30, 1995.
- [4] AzarAfza, R., Khalili, S. M. R., Jafari, A. A., Davar, A., “Analysis and optimization of laminated composite circular cylindrical shells subjected axial transverse transient dynamic loads,” Thin-Walled Structures, Vol. 47, pp. 970-983, 2009.
- [5] Paknejad, R., Ashena Ghasemi, F., Malekzadeh Fard, K., “Dynamic Response of Composite Cylindrical Shell Containing Fluid Subjected to LowVelocity Impact,” In Persian, Journal of Mechanical Engineering of Tabriz University, Vol. 53, No. 1, pp. 51-60, 2023.
- [6] Ansaryan, Y., Jafari, A. A., “Investigation of Free and Forced Vibration of a Composite Circular Cylindrical Shell with Internal Fluid,” In Persian, Journal of Solid and Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 2, pp. 93-109, 2017.
- [7] Amirshjaee-Asalemi, K., Fakhreddini-Najafabadi, S., Taheri-Behrooz, F., “Numerical and Experimental Study of Carbon / Epoxy Composite Laminate Response to Low Velocity Impact,” In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 1, pp. 1461-1472, 2021.
- [8] Kian, F., Hekmatifar, M., Toghraie, D., “Analysis of forced and free vibrations of composite porous core sandwich cylindrical shells and FG-CNTs reinforced face sheets resting on visco-Pasternak