



بررسی پایداری ورق ساندویچی با هسته آگزیٹیک تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت تأثیر نیروی آیرولاستیک

کوروش خورشیدی^{1*}، هانیه نوروزیان²

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

* اراک، صندوق پستی 38156-88349، k-khorshidi@araku.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

در تحقیق حاضر، تحلیل پایداری یک ورق ساندویچی سه‌لایه با هسته آگزیٹیک تحت نیروی آیرولاستیک در شرایط مرزی ساده مورد بررسی قرار گرفته است، که در این ورق ساندویچی لایه وسط یا به اصطلاح هسته مرکزی از ساختار آگزیٹیک و لایه‌های بالایی و پایینی از جنس ماده ایزوتروپیک تشکیل گردیده است و ورق از یک طرف تحت نیروی آیرولاستیک قرار دارد. به منظور کاهش شدت ارتعاش سازه، لایه‌های بالایی و پایینی ورق بوسیله نانولوله‌های کربنی تقویت شده است. جهت تحلیل و مدل‌سازی ارتعاش ورق، از تئوری برشی اصلاح شده و نیروی آیرودینامیکی وارده از سمت جریان هوا بر روی ورق با فرض تئوری پیستون مرتبه اول استفاده شده است. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی بدست آمده است و برای حل معادلات از روش باقیمانده وزنی گلرکین استفاده شده است. برای نشان دادن اعتبار روابط حاصله و روش حل ارائه شده، نتایج این تحقیق با نتایج منتشر شده در مقالات معتبر و نتایج حل عددی با استفاده از روش گلرکین به کمک نرم‌افزارهای تجاری مقایسه شده است. نهایتاً تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد هندسی ورق ساندویچی، ابعاد هسته آگزیٹیک، فشار آیرودینامیکی و کسر حجمی نانولوله کربنی بر پایداری سازه مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

دریافت: 1403/10/18

پذیرش: 1404/02/10

کلیدواژگان

ورق ساندویچی

هسته آگزیٹیک

ارتعاش

پایداری

نیروی آیرولاستیک

Stability analysis of a sandwich plate with an auxetic core reinforced with carbon nanotubes under aeroelastic forces

Korosh Khorshidi^{1*}, Hanieh Norowzian¹

1- Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran.

* P.O.B. 38156-88349, Arak, Iran, k-khorshidi@araku.ac.ir

Keywords

Sandwich Panel, Auxetic Core, Vibration, Stability, Aeroelastic Forces

Abstract

In the present study, the stability analysis of a three-layer sandwich plate with an auxetic core under aeroelastic forces has been investigated using simply supported boundary conditions. In this sandwich plate, the middle layer, or the so-called core, is made of auxetic material, while the upper and lower layers are composed of isotropic material. The plate is subjected to aerodynamic forces from one side. To reduce the intensity of the vibrations in the structure, the upper and lower layers of the plate has been reinforced with carbon nanotubes. For the analysis and modeling of the plate's vibrations, the modified shear deformation plate theory has been employed and the aerodynamic forces applied from the airflow, assuming first-order piston theory. Using Hamilton's principle, the governing equations of motion for the vibrational behavior of the sandwich plate have been derived, and the Galerkin method with weighted residuals has been used to solve these equations. To demonstrate the validity of the derived relationships and the proposed solution method, the results of this study have been compared with results published in reputable articles and numerical results obtained using the Galerkin method with commercial software. Finally, the effects of various parameters such as the geometric dimensions of the sandwich panel, the dimensions of the auxetic core, aerodynamic pressure, and the volume fraction of carbon nanotubes on the stability of the structure have been analyzed and discussed.

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Khorshidi, K., Norowzian, H., "Stability analysis of a sandwich plate with an auxetic core reinforced with carbon nanotubes under aeroelastic forces, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 11, No. 4, pp. 2597-2610, 2025.

<https://doi.org/10.22068/jstc.2025.2048747.1909>

1- مقدمه

ورق ساندویچی با هسته آگرتیک به دلیل ویژگی‌های خاصی که دارد، در بسیاری از کاربردهای مهندسی و صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هسته‌های آگرتیک شامل موادی هستند که هنگام کشیده شدن، پهن‌تر می‌شوند (ضریب پواسون منفی) و این ویژگی به آن‌ها اجازه می‌دهد تا خصوصیات مکانیکی منحصر به فردی را ایجاد کنند. کاربردهای ورق ساندویچی با هسته آگرتیک شامل موارد شکار و جذب شوک: به دلیل خاصیت الاستیک و توانایی در توزیع بار، ورق‌های ساندویچی با هسته آگرتیک می‌توانند در کاربردهای نظامی و ایمنی مانند زره‌پوش‌ها استفاده شوند، تجهیزات پزشکی: در طراحی پروتزها و ایمپلنت‌ها، ورق‌های ساندویچی با هسته آگرتیک می‌توانند به کم کردن فشار و توزیع بهتر بار بر روی بافت‌های بدن کمک کنند، ساختارهای فضایی: در صنایع هوافضا، برای طراحی سازه‌های سبک و مقاوم که بتوانند تحت بارهای متغیر و شرایط محیطی سخت مقاومت کنند، ورق‌های ساندویچی با هسته آگرتیک بسیار مناسب هستند، کاربردهای صوتی و ارتعاشی: به دلیل توانایی کاهش ارتعاشات و جذب صدا، می‌توانند در ساخت دیواره‌های عایق صوتی و سازه‌های کنترل ارتعاش استفاده شوند، تجهیزات ورزشی: در طراحی محصولات ورزشی مانند کفش‌های ورزشی و صفحات زیر سطوح، می‌توانند به افزایش راحتی و کاهش آسیب به بدن کمک کنند و عایق حرارتی و برودتی: با توجه به ساختار خاص هسته آگرتیک، این ورق‌ها می‌توانند در بهینه‌سازی عایق حرارتی و کاهش تبادل دما مؤثر باشند. ورق‌های ساندویچی که تحت نیروی آبرو الاستیک قرار دارند، معمولاً در برنامه‌های هواشناسی و دینامیک پرواز، به عنوان اجزای سازه‌ای مانند بال‌ها، بدنه، و دیگر چیزها استفاده می‌شوند. این مواد به خوبی می‌توانند تنش‌های ناشی از جریان هوا و دیگر نیروهای دینامیکی را تحمل کنند و از آسیب به سازه جلوگیری نمایند. بنابراین، ورق ساندویچی با هسته آگرتیک گزینه‌های متنوعی را در بسیاری از صنایع به عنوان مصالح مقاوم و سبک برای کاربردهای خاص فراهم می‌آورد.

انتخاب تئوری ورق و روش حل نقش مهمی در به دست آوردن نتایج مطلوب در تجزیه و تحلیل سازه‌های ورق ایفا می‌کند. نظریه ورق نازک کلاسیک، نظریه ورق تغییر شکل برشی مرتبه اول، نظریه ورق تغییر شکل برشی مرتبه سوم و نظریه الاستیسیته سه‌بعدی آشناترین تئوری‌های ورق هستند [1-9]. در سالیان اخیر تحقیقات زیادی جهت بهبود تئوری‌های برشی مرتبه بالا انجام پذیرفته است که منجر به ارائه تئوری‌های برشی اصلاح شده نمایی، هایپربولیکی [3-9] و . . . گردیده است. المیشه و همکاران [10] تئوری جدید تغییر شکل برشی هایپربولیک برای کماتش و ارتعاش ورق هدفمند را ارائه دادند که در این تئوری با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی برای کماتش و ارتعاش آزاد ورق هدفمند، برخلاف سایر تئوری‌ها چهار معادله حاکم بر سیستم را منتج می‌شود و نیازی به ضریب تصحیح برشی ندارد و تنش برشی عرضی در ضخامت ورق به صورت سهموی تغییر می‌کند و شرایط سطوح عاری از تنش را ارضا می‌کند. روش حل ناویر در این تحلیل بکار برده شد و نتایج حاصله برای ورق با نسبت ضخامت‌های مختلف با استفاده از این تئوری به طور قابل ملاحظه‌ای دقیق‌تر از تئوری کلاسیک می‌باشد و قابل مقایسه با نظریه‌های مراتب بالاتر است. پارادهان و چاکراورتی [11] ارتعاش عرضی ورق‌های ایزوتروپیک را بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی معکوس مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق به بررسی تأثیر هندسه بر ارتعاشات آزاد ورق برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش ریلی ریتز پرداختند. فززام و حسنی [12] حل سه‌بعدی برای ارتعاش

نانورق‌های تابعی مدرج را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیکی ارائه دادند. آن‌ها تحلیل شبه هندسی خود را با استفاده از تئوری غیر محلی ارینگن انجام دادند. ژانگ و همکاران [13] ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی غیریکنواخت انجام دادند. آن‌ها در تحلیل خود میدان‌های جابجایی و چرخش را با استفاده از سری‌های دوگانه سینوسی و کسینوسی بسط دادند و نهایتاً با استفاده از روش ریلی ریتز ضرایب مجهول را یافتند. کیانی [14] ارتعاش آزاد ورق‌های مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مستقر روی تکیه‌گاه‌های متمرکز در یک نقطه را با استفاده از ضرایب لاگرانژ برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داد. خواص نانولوله‌های بکاررفته در تحلیل او در راستای ضخامت ثابت نبود و همانند مواد تابعی مدرج تغییر می‌کرد. شی و همکاران [15] با استفاده از روش سری‌های فوریه ارتعاش آزاد و اجباری ورق‌های ضخیم مرکب مستقر در بسترهای وینکلر و پسترناک را با تئوری برشی مرتبه اول بررسی کردند. آن‌ها برای ارضای شرایط مرزی مختلف از روش فنرهای مجازی در مرزها کمک گرفتند. نجفی زاده و حیدری [16] کماتش متقارن محوری ورق‌های دایروی ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی بررسی کردند. حسینی هاشمی و همکاران [17] تحلیل کماتش و ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی با استفاده از تئوری غیرمحلی و تغییر شکل برشی مرتبه سوم را با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک در کماتش و رفتار ارتعاش عرضی از نوع لوی نانو ورق مستطیلی را به انجام رساندند. همچنین ایشان حل دقیق ارتعاشات آزاد نانو ورق‌های مستطیلی میندلین را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر محلی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی را برای شرایط مرزی لوی (دو لبه ورق با تکیه‌گاه ساده و بقیه شرایط مرزی دلخواه) مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج چندین مقاله دیگر مقایسه کردند و در نهایت تأثیر نرخ ضخامت به طول و نرخ طول به عرض را بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار دادند [18].

کان و همکاران [19] تحقیقی بر روی ارتعاش و پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق ساندویچی با هسته آگرتیک انجام دادند و تأثیر ابعاد هندسی و تأثیر بارهای مکانیکی بر روی پاسخ دینامیکی و فرکانس طبیعی را بررسی کردند. لایه میانی این ورق ساندویچی از جنس آگرتیک و با ساختار لانه زنبوری بود. به منظور صحت سنجی، نتایج بدست آمده را با نتایج تجربی پروژه آگلیتی و کانینگهام [20] و نتایج تئوری ژا و شن [21] مقایسه کردند. داک و کانگ [22] نیز تحقیقی با موضوع تحلیل پاسخ دینامیکی و ارتعاش صفحات ساندویچی با هسته آگرتیک انجام دادند. در این مطالعه، هسته آگرتیک با ساختار لانه زنبوری بود و صفحه ساندویچی تحت بار انفجاری قرار گرفت و از روش حل گلکرین برای حل معادلات حاکم بر صفحه استفاده شد. مشاهده شد که تأثیر زاویه سلول آگرتیک بر روی فرکانس طبیعی از هیچ قانون خاصی پیروی نمی‌کند که نشان‌دهنده رفتار پیچیده ورق‌های ساندویچی با هسته آگرتیک است. در مطالعه‌ای دیگر، پاسخ دینامیکی صفحات آگرتیک متصل به صفحات تقویتی تحت نیروی انفجاری توسط زیهائو و همکاران [23] بررسی شد. مشاهده شد که با افزایش پارامترهای هندسی هسته آگرتیک، انحراف و تغییر شکل دینامیکی افزایش یابد و با تقویت ساختار، انحراف دینامیکی ناشی از بار انفجاری تا 59٪ کاهش یافت. تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی دایروی با هسته‌های آگرتیک توسط علیپور و شریعت [24] انجام شد. چهار شرط مرزی مختلف برای صفحه در نظر گرفته شده است. بار دیگر، حاج محمد و همکاران [25] یک

روش عددی جدید و تئوری زیگزاگ برای تحلیل صفحات آگرتیک در محیط گرم ارائه دادند. در این مطالعه، ورق ساندویچی سه لایه است که لایه مرکزی از جنس آگرتیک و صفحات تماسی بوسیله نانولوله های پلیمر-کربنی تقویت شده اند.

پایداری ورق ها و سازه ها در اثر نیروهای دینال کننده در بسیاری از شاخه های مهندسی از قبیل مهندسی هوافضا، عمران، مکانیک، سازه و غیره اهمیت بسیار زیادی یافته است. نیروهای دینال کننده نیروهای غیرپایستاری هستند که بر اساس تغییر شکل سازه جهتشان تغییر می کند. فشار آبرودینامیکی ناشی از جریان هوا یک نوع نیروی دینال کننده می باشد که معمولاً در سازه های هوایی در سرعت های بالا پدیدار می گردد. به ازای یک مقدار مشخص نیروی دینال کننده سازه ناپایدار می گردد و فلاتر یا واگرایی سازه اتفاق می افتد. در مورد اول یعنی فلاتر دامنه ای ارتعاشات ورق بصورت پیوسته افزایش می یابد و در مورد دوم یعنی واگرایی جابجایی سازه بدون ارتعاش بصورت پیوسته افزایش می یابد. پژوهشگران بسیاری، تحقیقات گسترده ای را در زمینه آبرو الاستیسیته انجام داده اند که در ادامه به برخی از آن ها اشاره شده است. سونگ و لی [26] تحلیل ارتعاشات و کنترل فلاتر ورق های کامپوزیتی در جریان مافوق صوت را تحقیق کردند. به منظور بررسی کنترل ارتعاشات آن ها وصله های پیروالکترونیک را در بالا و پایین ورق به عنوان حسگر در نظر گرفتند و اثرات پارامترهای گوناگون را روی آستانه فلاتر بررسی کردند. فرهادی و حسینی هاشمی [27] رفتار آبرو الاستیک ورق های مرکب چرخان را با استفاده از تئوری میندیلین با لحاظ کردن ترم های غیرخطی بررسی نمودند. آن ها فشار آبرودینامیکی را با تئوری پیستون مرتبه اول مدل کردند و به منظور حذف موج های شوک ناشی از چرخش ورق، ورق را داخل پره های صلب در نظر گرفتند. کوچک زاده و همکاران [28] آبرو الاستیسیته غیرخطی ورق های کامپوزیتی را با تئوری ورق کلاسیک تحلیل نمودند. آن ها معادلات کوپل دیفرانسیل پاره ای حاکم بر حرکت سیستم را با استفاده از روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمودند و نهایت پاسخ را با استفاده از روش های عددی انتگرال گیری بدست آوردند. فلاح زاده و همکاران [29] تحلیل آبرو الاستیک نانو ورق های کامپوزیت تابعی مدرج تقویت شده با نانولوله های کربنی تحت جریان مافوق صوت را انجام دادند. آن ها معادلات حاکم را با استفاده از روش های باقیمانده وزنی حل نمودند و متغیرهای مؤثر در پایداری سازه را بررسی کردند. ارتعاش ورق های تابعی مدرج تحت نیروی آبرودینامیکی توسط پراکش و همکاران [30] با استفاده از روش اجزا محدود انجام شد. آن ها اثرات اینرسی های دورانی و تغییر شکل های برشی را با استفاده از تئوری میندیلین در نظر گرفتند و نه تنها اثر غیرخطی هندسه بلکه اثرات غیرخطی نیروی آبرودینامیکی را نیز در معادلات حاکم خود وارد نمودند. جایمن و همکاران [31] به بررسی ناپایداری آبرو الاستیک ورق قرار گرفته در مسیر جریان پرداختند. آن ها تحلیل خود را یکبار برای سیال تراکم پذیر و بار دیگر برای سیال غیر قابل تراکم انجام دادند همچنین نیروی آبرو الاستیک را بصورت جرم افزوده لحاظ کردند و اثرات تراکم پذیری سیال را با یک ضریب تصحیح در جرم افزوده وارد کردند. ماهاتو و مایتی [32] تحلیل ورق های مرکب هدمند تحت تأثیر نیروی آبرودینامیکی را در محیط رطوبتی-حرارتی بررسی نمودند و تأثیر پارامترهای درصد رطوبت و تغییرات دمایی را روی آستانه فلاتر تحلیل نمودند. ژاو و همکاران [33] تحلیل آبروترمو الاستیک فلاتر ورق در جریان های مافوق صوت در شرایط مرزی گوناگون بررسی نمودند. آن ها هر بخش از میدان جابجایی را با استفاده از بسط فوریه دوگانه تشکیل دادند و از

این طریق شرایط مرزی مختلفی را در تحلیل خود بررسی نمودند. شیتو و ودنیف [34] ناپایداری آبرو الاستیک پنل های پوسته ای را در حالت سه بعدی بررسی کردند و فلاتر کوپل مود و تک مودی را برای پنل چهار طرف تکیه گاه ساده تحقیق نمودند. ژیا و همکاران [35]، در مورد رفتار ترمومکانیکی پنل های تابعی مدرج در جریان مافوق صوت پژوهش کردند. آن ها از المان های سه گره ای مثلثی مبتنی بر تئوری میندیلین به منظور لحاظ کردن اثرات برشی و همچنین تئوری ون-کارمن به منظور لحاظ کردن اثرات غیرخطی هندسه استفاده کردند. سون و ژینگ [36]، حل دقیق برای مقادیر ویژه فلاتر پنل دوبعدی کامپوزیتی را تحت تمام شرایط مرزی را با استفاده از تئوری کلاسیک و پیستون مرتبه اول یافتند. کاتسیکادلیس و بابوسکاس [37]، با استفاده از روش المان مرزی ورق های ناهمگن ضخیم را با استفاده از تئوری مرتبه اول بررسی کردند و همگرایی بسیار بالایی در روند حل مشاهده کردند و اثرات پارامترهای مختلف از قبیل فرآیند حل و پارامترهای هندسی و نیرویی را روی رفتار دینامیکی سازه تحلیل نمودند. بررسی رفتار سازه های چندلایه علی الخصوص بررسی پدیده فلاتر را می توان در تحقیقات اخیر [38-40] مشاهده نمود.

در مطالعه حاضر، تجزیه و تحلیل پایداری یک ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک تحت نیروهای آبرو الاستیک در دو شرایط مرزی ساده و گیره دار مورد بررسی قرار گرفته است. در این ورق ساندویچی لایه میانی یا به اصطلاح هسته از مواد آگرتیک و لایه های بالایی و پایینی از مواد ایزوتروپیک تشکیل شده است. ورق از یک طرف تحت تأثیر نیروهای آبرودینامیکی قرار می گیرند. برای کاهش شدت ارتعاشات در سازه، ورق با نانولوله های کربنی تقویت شده اند. برای تحلیل و مدل سازی ارتعاشات ورق، تئوری برشی اصلاح شده مرتبه بالا، همراه با نیروهای آبرودینامیکی اعمال شده از جریان هوا، با فرض تئوری پیستون مرتبه اول استفاده شد. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی استخراج شده است و برای حل این معادلات از روش گالرکین استفاده شده است. برای نشان دادن اعتبار روابط و روش حل پیشنهادی، نتایج این تحقیق با نتایج منتشر شده در مقالات معتبر و نتایج عددی به دست آمده از روش اجزای محدود با نرم افزارهای تجاری مقایسه شده است. در نهایت، تأثیر پارامترهای مختلف مانند ابعاد هندسی ورق، ابعاد هسته آگرتیک، فشار آبرودینامیکی و کسر حجمی نانولوله های کربنی بر پایداری سازه مورد تجزیه و تحلیل و بحث قرار گرفته است.

2- فرضیات، معادلات حاکم، استراتژی حل

در شکل 1 ورق ساندویچی مستطیلی به طول a ، عرض b و ضخامت h در نظر گرفته شده است. این ورق سه لایه است بطوریکه لایه بالایی و پایینی از جنس ایزوتروپیک و لایه میانی یا به اصطلاح هسته ورق از جنس آگرتیک با فرض سلول درون رو است. h_c نیز ضخامت هسته آگرتیک است. به منظور تقویت ورق های بالایی و پایینی و افزایش پایداری ورق، نانولوله های کربنی به عنوان تقویت کننده در این لایه ها تعبیه شده است. این ورق از یک سمت تحت تأثیر نیروی آبرو الاستیک با سرعت U_∞ قرار گرفته است. هدف از این تحقیق پیدا کردن معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی و بررسی پایداری سازه است.

در این شکل، t و θ به ترتیب ضخامت سلول آگرتیک و زاویه سلول آگرتیک است. d و l نیز طول تیغه های سلول هستند. با فرض تئوری ورق برشی اصلاح شده مرتبه بالا روابط جابجایی بصورت زیر است [1-9].

پایداری ورق ها و سازه ها در اثر نیروهای دینال کننده در بسیاری از شاخه های مهندسی از قبیل مهندسی هوافضا، عمران، مکانیک، سازه و غیره اهمیت بسیار زیادی یافته است. نیروهای دینال کننده نیروهای غیرپایستاری هستند که بر اساس تغییر شکل سازه جهتشان تغییر می کند. فشار آبرودینامیکی ناشی از جریان هوا یک نوع نیروی دینال کننده می باشد که معمولاً در سازه های هوایی در سرعت های بالا پدیدار می گردد. به ازای یک مقدار مشخص نیروی دینال کننده سازه ناپایدار می گردد و فلاتر یا واگرایی سازه اتفاق می افتد. در مورد اول یعنی فلاتر دامنه ای ارتعاشات ورق بصورت پیوسته افزایش می یابد و در مورد دوم یعنی واگرایی جابجایی سازه بدون ارتعاش بصورت پیوسته افزایش می یابد. پژوهشگران بسیاری، تحقیقات گسترده ای را در زمینه آبرو الاستیسیته انجام داده اند که در ادامه به برخی از آن ها اشاره شده است. سونگ و لی [26] تحلیل ارتعاشات و کنترل فلاتر ورق های کامپوزیتی در جریان مافوق صوت را تحقیق کردند. به منظور بررسی کنترل ارتعاشات آن ها وصله های پیروالکترونیک را در بالا و پایین ورق به عنوان حسگر در نظر گرفتند و اثرات پارامترهای گوناگون را روی آستانه فلاتر بررسی کردند. فرهادی و حسینی هاشمی [27] رفتار آبرو الاستیک ورق های مرکب چرخان را با استفاده از تئوری میندیلین با لحاظ کردن ترم های غیرخطی بررسی نمودند. آن ها فشار آبرودینامیکی را با تئوری پیستون مرتبه اول مدل کردند و به منظور حذف موج های شوک ناشی از چرخش ورق، ورق را داخل پره های صلب در نظر گرفتند. کوچک زاده و همکاران [28] آبرو الاستیسیته غیرخطی ورق های کامپوزیتی را با تئوری ورق کلاسیک تحلیل نمودند. آن ها معادلات کوپل دیفرانسیل پاره ای حاکم بر حرکت سیستم را با استفاده از روش گلرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمودند و نهایت پاسخ را با استفاده از روش های عددی انتگرال گیری بدست آوردند. فلاح زاده و همکاران [29] تحلیل آبرو الاستیک نانو ورق های کامپوزیت تابعی مدرج تقویت شده با نانولوله های کربنی تحت جریان مافوق صوت را انجام دادند. آن ها معادلات حاکم را با استفاده از روش های باقیمانده وزنی حل نمودند و متغیرهای مؤثر در پایداری سازه را بررسی کردند. ارتعاش ورق های تابعی مدرج تحت نیروی آبرودینامیکی توسط پراکش و همکاران [30] با استفاده از روش اجزا محدود انجام شد. آن ها اثرات اینرسی های دورانی و تغییر شکل های برشی را با استفاده از تئوری میندیلین در نظر گرفتند و نه تنها اثر غیرخطی هندسه بلکه اثرات غیرخطی نیروی آبرودینامیکی را نیز در معادلات حاکم خود وارد نمودند. جایمن و همکاران [31] به بررسی ناپایداری آبرو الاستیک ورق قرار گرفته در مسیر جریان پرداختند. آن ها تحلیل خود را یکبار برای سیال تراکم پذیر و بار دیگر برای سیال غیر قابل تراکم انجام دادند همچنین نیروی آبرو الاستیک را بصورت جرم افزوده لحاظ کردند و اثرات تراکم پذیری سیال را با یک ضریب تصحیح در جرم افزوده وارد کردند. ماهاتو و مایتی [32] تحلیل ورق های مرکب هدمند تحت تأثیر نیروی آبرودینامیکی را در محیط رطوبتی-حرارتی بررسی نمودند و تأثیر پارامترهای درصد رطوبت و تغییرات دمایی را روی آستانه فلاتر تحلیل نمودند. ژاو و همکاران [33] تحلیل آبروترمو الاستیک فلاتر ورق در جریان های مافوق صوت در شرایط مرزی گوناگون بررسی نمودند. آن ها هر بخش از میدان جابجایی را با استفاده از بسط فوریه دوگانه تشکیل دادند و از

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \zeta \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \psi \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad (9)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (10)$$

پس از محاسبه کرنش‌ها باید روابطی را برای محاسبه تنش‌ها بدست آورده که برای این کار از قانون هوک تعمیم یافته استفاده می‌شود. همانطور که در قسمت‌های قبلی ذکر شد، ورق از سه لایه تشکیل شده است. برای هر سه صفحه، روابط تنش-کرنش با استفاده از قانون هوک تعمیم یافته بصورت زیر تعریف می‌شود [9-1].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^t \\ \sigma_y^t \\ \sigma_{xy}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^t & Q_{12}^t & 0 \\ Q_{21}^t & Q_{22}^t & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^t \\ \sigma_{xz}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^t & 0 \\ 0 & Q_{55}^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \sigma_{xy}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^c & Q_{12}^c & 0 \\ Q_{21}^c & Q_{22}^c & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^c \\ \sigma_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^c & 0 \\ 0 & Q_{55}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^b \\ \sigma_y^b \\ \sigma_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^b & Q_{12}^b & 0 \\ Q_{21}^b & Q_{22}^b & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^b \\ \sigma_{xz}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}^b & 0 \\ 0 & Q_{55}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

بالانویس t و b مربوط به لایه‌های فوقانی و تحتانی ورق است که هر دو ماده ایزوتروپیک است و بالانویس C مربوط به هسته ورق می‌باشد که جنس آن از ماده‌ی آگرتیک است. Q_{ij} نیز ثوابت الاستیک صفحه‌ای در محور هر ماده است که بصورت زیر تعریف می‌شود [9-1].

که E ، G و ν به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول حجمی و ضریب پواسون ماده ایزوتروپیک است. باید توجه کرد که پس از اعمال نانولوله‌های کربنی روی صفحات تحتانی و فوقانی، لایه‌های ایزوتروپیک تبدیل به لایه‌های کامپوزیتی می‌شوند و دو فاز نانولوله‌های کربنی و زمینه (لایه ایزوتروپیک) بوجود می‌آید. برای محاسبه خواص لایه کامپوزیتی روابط زیر تعریف شده است [1].

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (17)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (18)$$

$$Q_{33} = Q_{44} = Q_{55} = G \quad (19)$$

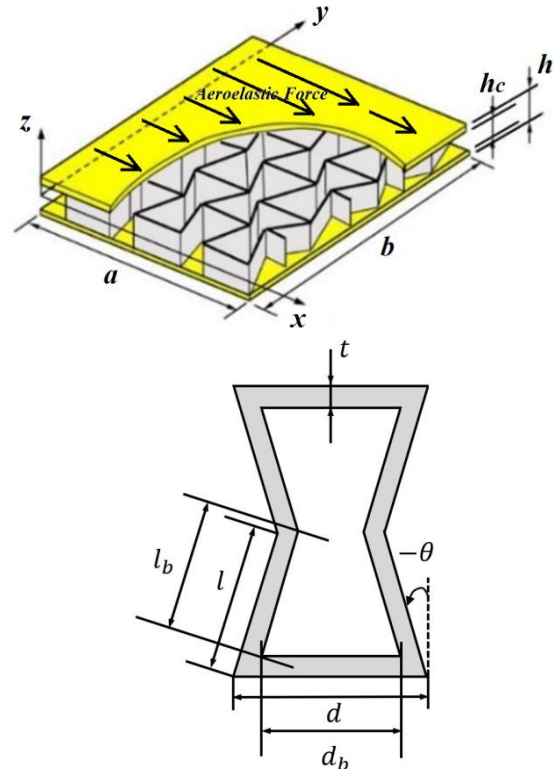


Fig. 1 Sandwich plate, geometric dimensions and coordinate system and 2D re-entrant honeycomb auxetic structure and unit cell with dimensions

شکل 1 ورق ساندویچی، ابعاد هندسی و سیستم مختصات و ساختار آگرتیک لانه زنبوری دو بعدی و سلول واحد با ابعاد

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \xi(x, y, t) \quad (1)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - g(z) \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \psi(x, y, t) \quad (2)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (3)$$

که $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ جابه‌جایی درون صفحه و $w(x, y, t)$ جابه‌جایی عرضی صفحه است؛ $\xi(x, y, t)$ و $\psi(x, y, t)$ نیز به ترتیب زوایای پیچشی حاصل از خمش در صفحه xOz و yOz است. $g(z)$ و $f(z)$ توابع پیوسته هستند که بر اساس تئوری مورد نظر بصورت زیر تعریف می‌شوند [9-1].

$$f(z) = z \left(\frac{3}{h} - \frac{4z^2}{h^3} \right) \quad (4)$$

بر اساس میدان جابه‌جایی که در بالا ذکر شد، جابه‌جایی یک نقطه شامل دو جزء است، جزء اول که مطابق با تئوری صفحه کلاسیک است و جزء دوم حاصل از تئوری مسئله است. با فرض روابط کرنش خطی، چنانچه کرنش‌های عمودی (ε_{xx} و ε_{yy}) و کرنش‌های برشی (ε_{xy} و ε_{yz} ، ε_{xz})

در نظر گرفته شود، میدان کرنش در دستگاه مختصات کارتزین با فرض تغییر شکل‌های کوچک، از طریق روابط زیر بدست می‌آیند [9-1].

انرژی پتانسیل حاصل گردیده و این رابطه را برای هر سه لایه بسط داده می شود.

$$\delta U = \frac{1}{2} \int (N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + S_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + S_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + P_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial x} + T_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + T_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + Q_{xz} \zeta + Q_{yz} \psi) dA \quad (35)$$

در رابطه (35)، متجه های تنش برای هر سه لایه بصورت زیر تعریف می شود:

$$N_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \sigma_{xx}^t dz \quad (36)$$

$$N_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \sigma_{yy}^t dz \quad (37)$$

$$N_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \tau_{xy}^t dz \quad (38)$$

$$S_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \sigma_{xx}^t dz \quad (39)$$

$$S_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \sigma_{yy}^t dz \quad (40)$$

$$S_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} g(z) \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} g(z) \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} g(z) \tau_{xy}^t dz \quad (41)$$

$$P_{xx} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \sigma_{xx}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \sigma_{xx}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \sigma_{xx}^t dz \quad (42)$$

$$P_{yy} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \sigma_{yy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \sigma_{yy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \sigma_{yy}^t dz \quad (43)$$

$$P_{xy} = \int_{h_0}^{h_1} f(z) \tau_{xy}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} f(z) \tau_{xy}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} f(z) \tau_{xy}^t dz \quad (44)$$

$$Q_{xz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{xz}^t dz \right) \quad (45)$$

$$E_{11} = \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m \quad (20)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (21)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (22)$$

$$V_{CNT} + V_m = 1 \quad (23)$$

$$v = V_{CNT} v^{CNT} + V_m v^m \quad (24)$$

$$\rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (25)$$

که V_{CNT} ، E_{11}^{CNT} ، G_{12}^{CNT} و v^{CNT} به ترتیب کسر حجمی، مدول الاستیسیته، مدول حجمی، ضریب پواسون و چگالی نانولوله های کربنی است و η_1 ، η_2 و η_3 پارامترهای مؤثر نانولوله های کربنی است. E_m ، V_m ، G_m و v^m به ترتیب کسر حجمی، مدول الاستیسیته، مدول حجمی، ضریب پواسون و چگالی ماده ایزوتروپیک است. E_{11} ، E_{22} ، G_{12} و v به ترتیب ضرایب الاستیسیته، ضریب حجمی، ضریب پواسون و چگالی لایه ایزوتروپیک پس از اعمال تقویت کننده کربنی (لایه کامپوزیتی) است. طبق روابط اصلاح شده گیبسون، خواص مؤثر هسته آگرتیک بصورت زیر محاسبه می شوند [1].

$$E_1^c = E(\eta_3)^3 \frac{\eta_1 - \sin\theta}{\cos^3\theta [1 + (\tan^2\theta + \eta_1 \sec^2\theta)\eta_3^2]} \quad (26)$$

$$E_2^c = E \frac{\eta_3^3}{\cos\theta(\eta_1 - \sin\theta)\tan^2\theta\eta_3^2} \quad (27)$$

$$v_{12}^c = -\frac{\sin\theta(1 - \eta_3^2)(\eta_1 - \sin\theta)}{\cos^2\theta [1 + (\tan^2\theta + \eta_1 \sec^2\theta)\eta_3^2]} \quad (28)$$

$$v_{21}^c = -\frac{\sin\theta(1 - \eta_3^2)}{(\tan^2\theta + \eta_3^2)(\eta_1 - \sin\theta)} \quad (29)$$

$$G_{12}^c = E \frac{\eta_3^3}{\eta_1(1 + 2\eta_1)\cos\theta} \quad (30)$$

$$G_{13}^c = G \frac{\eta_3 \cos\theta}{2\cos\theta} \left[\frac{\eta_1 - \sin\theta}{1 + 2\eta_1} + \frac{\eta_1 - 2\sin^2\theta}{2(\eta_1 - \sin\theta)} \right] \quad (31)$$

$$G_{23}^c = G \frac{\eta_3 \cos\theta}{\eta_1 - \sin\theta} \quad (32)$$

$$\rho^c = \rho \frac{\eta_3(\eta_1 + 2)}{2\cos\theta(\eta_1 - \sin\theta)} \quad (33)$$

که $\eta_1 = d/l$ و $\eta_3 = t/l$ است. بالانویس c نشان دهنده خواص مربوط به هسته آگرتیک است. E_1^c و E_2^c مدول الاستیسیته لایه آگرتیک، v_{12}^c و v_{21}^c نسبت های پواسون لایه آگرتیک، G_{12}^c ، G_{13}^c و G_{23}^c مدول های حجمی لایه آگرتیک و ρ^c چگالی لایه آگرتیک است. در حالت کلی، انرژی پتانسیل را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود. در این تحقیق بدلیل سه لایه بودن صفحه، برای هر صفحه رابطه انرژی پتانسیل را مطابق زیر نوشته می شود [9-1].

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xz} \varepsilon_{xz}) dV \quad (34)$$

با جایگزین کردن معادلات (1) تا (33) در رابطه (34)، بسط روابط حاصله و مشتق گیری و در نظر گرفتن تغییرات جزئی از مؤلفه های جابه جایی و سپس تبدیل انتگرال حجم به انتگرال روی سطح به رابطه ای نهایی برای

که I_k ممان‌های اینرسی هر سه لایه است که از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$I_1 = \int_{h_0}^{h_1} \rho dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho dz \quad (55)$$

$$I_2 = \int_{h_0}^{h_1} \rho g(z)^2 dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho g(z)^2 dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho g(z)^2 dz \quad (56)$$

$$I_3 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z)^2 dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z)^2 dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z)^2 dz \quad (57)$$

$$I_4 = \int_{h_0}^{h_1} \rho g(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho g(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho g(z) dz \quad (58)$$

$$I_5 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z) dz \quad (59)$$

$$I_6 = \int_{h_0}^{h_1} \rho f(z)g(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \rho f(z)g(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \rho f(z)g(z) dz \quad (60)$$

نیروهای خارجی اعمال شده روی ورق ساندویچی بصورت نیروی خارجی ناپایستار است. این نیروی همان نیروی آیرودینامیکی می‌باشد و با استفاده از تئوری پیستون مرتبه اول بدست می‌آید. برای شبیه‌سازی رفتار آیرودینامیک، یک تئوری آیرودینامیکی محاسباتی کارآمد برای الگوسازی مطلوب آن ضروری است. بنابراین تئوری پیستون که یک ارتباط ساده بین فشار و تغییر شکل سطح ایجاد می‌کند، انتخاب می‌شود. این تئوری در طول زمان به منظور افزایش دقت تحت تأثیر اصلاحاتی قرار گرفته است و برای ورق (جسم دوبعدی) بصورت رابطه زیر ارائه شده است [38].

$$\Delta p = \frac{2q_a}{\beta} \left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} \sin\theta \right) + \frac{1}{U_\infty} \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} \quad (61)$$

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}, \quad q_a = \rho_\infty U_\infty^2 \quad (62)$$

که θ زاویه جریان با محور X ، M عدد ماخ جریان آیرولاستیک، ρ_∞ چگالی جریان و q_a فشار دینامیکی حاصل از جریان روی ورق می‌باشد. کار انجام شده توسط نیروی آیرودینامیکی بر روی ورق از رابطه زیر بدست می‌آید [38].

$$W = \int (\Delta p w) dA \quad (63)$$

به منظور استفاده از اصل همپلتون، از رابطه کار وریشن گیری می‌کنیم.

$$\delta W = \int (\Delta p \delta w) dA \quad (64)$$

از اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم بر صفحه استفاده می‌شود و این اصل بصورت زیر بیان می‌شود [9-1].

$$Q_{yz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \tau_{yz}^t dz \right) \quad (46)$$

$$T_{xz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{xz}^t dz \right) \quad (46)$$

$$T_{yz} = K_s \left(\int_{h_0}^{h_1} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^b dz + \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^c dz + \int_{h_2}^{h_3} \left(\frac{\partial g(z)}{\partial z} + 1 \right) \tau_{yz}^t dz \right) \quad (48)$$

که K_s ضریب تصحیح برشی است که برای تئوری‌های برشی مرتبه بالا برابر با 1 است. h_0, h_1, h_3 و h_4 مختصات ضخامت لایه‌های ورق است که بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$h_0 = -\frac{h_2}{2} - h_3 \quad (49)$$

$$h_1 = -\frac{h_2}{2} \quad (50)$$

$$h_2 = \frac{h_2}{2} \quad (51)$$

$$h_3 = \frac{h_2}{2} + h_1 \quad (52)$$

که h_1, h_2 و h_3 به ترتیب ضخامت لایه تحتانی، لایه میانی و لایه فوقانی است. انرژی جنبشی کل ورق بصورت رابطه زیر نوشته می‌شود و باید این رابطه را برای هر لایه بسط دهیم [9-1].

$$T = \frac{1}{2} \int \rho [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dV \quad (53)$$

که در این رابطه، ρ چگالی هر لایه است. پس از تغییرات گیری و جایگذاری روابط جابه‌جایی (1) تا (3) در رابطه (53)، بسط دادن رابطه حاصله و تبدیل انتگرال حجم به انتگرال سطح، رابطه نهایی انرژی جنبشی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \int \rho \left[I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &+ I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \\ &+ 2I_4 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + 2I_4 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + 2I_6 \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \\ &+ 2I_6 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} + 2I_5 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ &\left. + 2I_5 \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] dA \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
 & B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\
 & + A_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
 & + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
 & - G_4 \frac{\partial w}{\partial x} - G_6 \zeta - G_3 \frac{\partial w}{\partial x} \\
 & = I_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
 & C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
 & + D_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + 2E_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
 & - F_4 \frac{\partial w}{\partial y} - F_6 \psi - F_3 \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_6 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{71}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
 & \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} \\
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{12}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{12}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{12}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}
 \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{11}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{11}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{11}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}
 \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{21}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{21}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{21}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}
 \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{h_0}^{h_1} Q_{22}^t \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_1}^{h_2} Q_{22}^c \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & + \int_{h_2}^{h_3} Q_{22}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \\
 & \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}
 \end{aligned} \tag{75}$$

$$\int_0^t (\delta T + \delta W_e - \delta U) dt = 0 \tag{65}$$

که δ نشان دهنده تغییر نسبت به x و y یا به اصطلاح وریشن است. با جایگزین کردن روابط نهایی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی و کار خارجی در اصل همیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاش ورق ساندویچی بر حسب مؤلفه های جابه جایی بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 & B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\
 & + A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
 & + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \\
 & = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
 & + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
 & = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
 & + D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + 2E_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
 & = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 & B_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \\
 & + A_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
 & + C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + C_4 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \\
 & + D_3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + D_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\
 & + 2E_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + 4E_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2E_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
 & + 2E_4 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - F_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\
 & - F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - F_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - G_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & - 2G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - G_4 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
 & - G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \Delta p \\
 & = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - I_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \\
 & - I_4 \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial t^2} - I_6 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{69}$$

$$\int_A (C_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + C_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial y^3} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} + \omega^2 (I_1 \tilde{v} + I_5 \tilde{\psi}) + I_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}) \chi_2 dx dy = 0 \quad (85)$$

$$\int_A (B_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} + B_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + A_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 \tilde{\zeta}}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x \partial y^2} + C_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + C_4 \frac{\partial^3 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial y^3} + D_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} + D_4 \frac{\partial^3 \tilde{\psi}}{\partial y^3} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x \partial y^2} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} + 4E_5 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x \partial y^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial x^2 \partial y} - F_5 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} - F_3 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} - F_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - F_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} - G_5 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - 2G_2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - G_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} - G_4 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x} - G_1 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} - \Delta \tilde{p} + \omega^2 (I_1 \tilde{w} - I_2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y^2} - I_4 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - I_6 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} - I_6 \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x}) \chi_3 dx dy = 0 \quad (86)$$

$$\int_A (B_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + B_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x \partial y^2} + B_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + 2E_4 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x \partial y} - G_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - G_6 \tilde{\zeta} - G_3 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \omega^2 (I_3 \tilde{\zeta} + I_5 \tilde{u} + I_6 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}) \chi_4 dx dy = 0 \quad (87)$$

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\} = \int_{h_1}^{h_2} Q_{33}^C \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz + \int_{h_2}^{h_3} Q_{33}^b \{1, f(z), g(z), f(z)g(z), g(z)^2, f(z)^2\} dz \quad (76)$$

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\} = \int_{h_1}^{h_2} Q_{44}^t \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz + \int_{h_2}^{h_3} Q_{44}^c \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz + \int_{h_3}^{h_4} Q_{44}^b \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz \quad (77)$$

$$\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\} = \int_{h_1}^{h_2} Q_{55}^t \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz + \int_{h_2}^{h_3} Q_{55}^c \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz + \int_{h_3}^{h_4} Q_{55}^b \left\{ 1, \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \frac{\partial g(z)}{\partial z}, \frac{\partial f(z)\partial g(z)}{\partial z^2}, \frac{g(z)^2}{\partial z^2}, \frac{f(z)^2}{\partial z^2} \right\} dz \quad (78)$$

برای تحلیل شرایط مرزی حل دقیقی در دسترس نمی باشد لذا جهت تحلیل این موارد از روش های عددی استفاده می شود. در این بخش تحلیل پایداری و رفتار ارتعاشی صفحه ساندویچی با هسته آگرتیک تحت نیروی آبرودینامیکی با استفاده از روش گلرکین ارائه شده است. با توجه به فرض حرکت هارمونیک پاسخ بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(x,y)e^{i\omega t} \quad (79)$$

$$v(x,y,t) = \tilde{v}(x,y)e^{i\omega t} \quad (80)$$

$$w(x,y,t) = \tilde{w}(x,y)e^{i\omega t} \quad (81)$$

$$\zeta(x,y,t) = \tilde{\zeta}(x,y)e^{i\omega t} \quad (82)$$

$$\psi(x,y,t) = \tilde{\psi}(x,y)e^{i\omega t} \quad (83)$$

اکنون می بایستی مقدار باقیمانده را مینیمم کرد. بدین منظور معادلات (66) تا (71) را در تابع وزن ضرب کرده و روی سطح انتگرال گرفته می شود.

$$\int_A (B_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + E_1 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + 2E_3 \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}}{\partial y^2} + \omega^2 (I_1 \tilde{u} + I_5 \tilde{\zeta} + I_4 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}) \chi_1 dx dy = 0 \quad (84)$$

تکیه‌گاه چهار طرف ساده

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{v}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{w}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\psi}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\zeta}(x,y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (95)$$

تکیه‌گاه چهار طرف گیردار

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y) = \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{v}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \\ \bar{w}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\psi}(x,y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\zeta}(x,y) = \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (96)$$

معادلات حاصل در فرم ماتریسی بصورت رابطه (62) نوشته می‌شود.

$$([K][Q] + [C][\dot{Q}] + [M][\ddot{Q}]) = 0 \quad (97)$$

در رابطه‌ی فوق $[M]$ ماتریس جرم، $[C]$ ماتریس استهلاکی، $[K]$ ماتریس سختی و Q بردار مودال یا ضرایب مجهول توابع سعی ورق ساندویچی می‌باشند. برای حل معادله (97) می‌توانیم معادله (98) را اضافه کنیم، زیرا میرایی آیرودینامیکی استفاده شده در این سیستم تناسبی نیست.

$$([M][\dot{Q}] - [M][\ddot{Q}]) = 0 \quad (98)$$

با در نظر گرفتن معادلات (97) و (98) داریم

$$([R][\dot{q}] - [S][q]) = 0 \quad (99)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \quad (100)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} \dot{Q} \\ Q \end{bmatrix} \quad (102)$$

با فرض جواب‌هایی به شکل $[q] = [f]e^{Pt}$ و جایگذاری آن‌ها در معادله (99)، معادله زیر را می‌توان نوشت:

$$(\Omega[R] - [S])[q] = 0 \quad (103)$$

$$\int_A (C_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + C_4 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} + C_6 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y} + D_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + D_4 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + D_6 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + E_2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + 2E_4 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} + E_6 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + E_6 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x \partial y} - F_4 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - F_6 \bar{\psi} - F_3 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \omega^2 (I_3 \bar{\psi} + I_5 \bar{v} + I_6 \frac{\partial \bar{w}}{\partial y})) \chi_5 dx dy = 0 \quad (88)$$

که در رابطه (86) داریم

$$\Delta \bar{p} = \frac{2q_a}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \sin \theta \right) \quad (89)$$

در روابط بدست آمده χ_i ها توابع وزن دار مورد استفاده در دامنه حل مسئله می‌باشند. توابع تقریب $\bar{u}(x,y)$ ، $\bar{v}(x,y)$ ، $\bar{w}(x,y)$ ، $\bar{\psi}(x,y)$ و $\bar{\zeta}(x,y)$ بصورت رابطه (59) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\bar{u}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{m,n} \bar{u}(x,y) \quad (90)$$

$$\bar{v}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{m,n} \bar{v}(x,y) \quad (91)$$

$$\bar{w}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{m,n} \bar{w}(x,y) \quad (92)$$

$$\bar{\psi}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \psi_{m,n} \bar{\psi}(x,y) \quad (93)$$

$$\bar{\zeta}(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \zeta_{m,n} \bar{\zeta}(x,y) \quad (94)$$

در رابطه‌ی فوق $u_{m,n}$ ، $v_{m,n}$ ، $w_{m,n}$ ، $\psi_{m,n}$ ، $\zeta_{m,n}$ ثوابت مجهول هستند که پس از مینیمم کردن خطا حاصل می‌شوند؛ $\bar{u}(x,y)$ ، $\bar{v}(x,y)$ ، $\bar{w}(x,y)$ ، $\bar{\psi}(x,y)$ ، $\bar{\zeta}(x,y)$ توابع سعی می‌باشند که باید حداقل شرایط مرزی ضروری را ارضا نمایند با توجه به اینکه ورق ساندویچی در دو حالت تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بررسی می‌شود، توابع سعی (95) و (96) بکار برده می‌شود. توابع سعی باید حداقل شرایط مرزی ضروری (هندسی) را ارضا نمایند. با توجه به اینکه ورق ساندویچی مذکور در دو حالت چهار طرف تکیه‌گاه ساده و چهار طرف تکیه‌گاه گیردار در نظر گرفته شده است، توابع سعی بصورت زیر تعریف می‌شوند.

ابتدا نتایج حاصل از ارتعاش آزاد ورق تک لایه ایزوتروپیک، سپس نتایج حاصل از ارتعاش آزاد ورق ساندویچی سه لایه با نتایج حل تحلیلی و نهایتاً نتایج حاصل از ورق ایزوتروپیک تحت نیروی آیرولاستیک با مراجع معتبر مقایسه شده‌اند.

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق ایزوتروپیک

Table 3 Dimensionless natural frequencies of isotropic plate

روش	فرکانس 1	فرکانس 2	فرکانس 3	فرکانس 4
[38]	19.0653	45.487	45.489	69.811
[39]	19.0840	45.585	45.585	69.819
کار حاضر	19.0689	45.496	45.496	69.891

در جدول 3 فرکانس طبیعی بی‌بعد $\bar{\omega} = \omega \frac{a}{h} \sqrt{12\rho(1-\nu_c^2)/E_c}$ برای ورق تک لایه ایزوتروپیک به طول 1 متر و ضخامت 0/1 متر تحت شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده با نتایج موجود در دو مرجع مختلف که یکی بر پایه‌ی تئوری ردی و دیگری بر پایه‌ی تئوری میندلین می‌باشد، مقایسه گردیده است. در جدول 4 مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک به طول 1 متر و ضخامت 0/01 متر در شرایط مرزی تماماً ساده که بصورت عددی محاسبه شده‌اند با نتایج تحلیلی ارائه شده است.

جدول 4 فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک

Table 4 Natural frequencies of three-layer sandwich plate with auxetic core

روش	فرکانس 1	فرکانس 2	فرکانس 3
کار حاضر	23.747	55.474	64.616
آباکوس	23.522	55.349	64.567

با مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحقیق حاضر و نتایج بدست آمده از مراجع مختلف و شبیه‌سازی اجزا محدود مشاهده می‌شود که روش و نتایج حاصله قابل اعتماد و استناد می‌باشند.

فلاتر یک ناپایداری خود تحریک دینامیکی می‌باشد که معمولاً در ورق‌های نسبتاً نازک یا سازه‌های پوسته‌گون به دلیل برهمکنش بین نیروهای اینرسی، سختی سازه و جریان هوای روی سازه (نیروی آیرودینامیکی) در رژیم‌های مافوق صوت اتفاق می‌افتد. قبل از اینکه فلاتر اتفاق بیافتد، ارتعاشات اتفاقی در سازه مشاهده گردیده است به طوریکه دامنه‌ی این ارتعاشات کسر کوچکی از ضخامت سازه می‌باشد. زمانی که فشار دینامیکی جریان به مقدار بحرانی خود می‌رسد، دامنه‌ی ارتعاشات سازه افزایش چشم‌گیری پیدا می‌کند و به مرتبه‌ای بزرگ‌تر از ضخامت پل می‌رسد و همین موجب بوجود آمدن تنش بسیار زیادی در سازه می‌گردد که اگر مقدار تنش ناشی از فلاتر، از تنش تسلیم سازه عبور کند شکست ناگهانی در سازه رخ می‌دهد. حتی اگر تنش ناشی از فلاتر از تنش تسلیم هم عبور نکند در دراز مدت باعث بروز خستگی در سیستم می‌شود. با توجه به اهمیت فلاتر، در این قسمت تأثیر پارامترهای مختلف بر پایداری سیستم و آستانه فلاتر مورد بررسی می‌گیرد. فشار آیرودینامیکی برابر با $\lambda = \frac{2\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M^2-1}}$ می‌باشد. برای رسم نمودارها و جداول $h/a = 0.1$ ، $h_c/a = 0.09$ در نظر گرفته شده است؛ در غیر این صورت مقادیر آن‌ها برای هر جدول یا شکل به طور خاص مشخص شده‌اند.

که در رابطه (103) Ω مقدار ویژه ورق ساندویچی می‌باشد. با ضرب نمودن رابطه (103) در $[S]^{-1}$ معادله مقدار ویژه به صورت زیر نتیجه خواهد شد

$$\left([S]^{-1}[R] - \frac{1}{P}[I]\right)[q] = 0 \quad (104)$$

جواب غیربدیهی رابطه 104 زمانی به دست می‌آید که دترمینان زیر برابر صفر باشد:

$$\det\left([S]^{-1}[R] - \frac{1}{P}[I]\right) = 0 \quad (105)$$

فرکانس‌های مدل ارائه‌شده را می‌توان به سادگی به صورت $\Omega = \Omega_R + i\omega$ با حل معادله مشخصه فوق، یعنی معادله (105)، به دست آورد. در این معادله، Ω_R میرایی آیرودینامیکی و ω نشان‌دهنده فرکانس طبیعی سیستم است. فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌توان با صفر کردن نیروی آیرودینامیکی ($U_\infty = 0$) به دست آورد. با افزایش نیروی آیرودینامیکی، مقادیر ویژه و توابع ویژه ساختار تغییر می‌کنند و در نهایت علامت میرایی آیرودینامیکی در یک فشار دینامیکی بحرانی (λ_{cr}) از منفی به مثبت تغییر می‌کند. در واقع، ناپایداری در این فشار دینامیکی بحرانی شروع می‌شود و دامنه نوسان به صورت نمایی با زمان افزایش می‌یابد.

3- تحلیل نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی رفتار ارتعاشی ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک تحت نیروی آیرولاستیک و با تقویت‌کننده‌های کربنی به روش گلرکین برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و گیردار با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده ارائه شده است. بدلیل اینکه تاکنون تحقیقی با این موضوع انجام نشده است، مرجعی برای اعتبار سنجی نتایج در دسترس نمی‌باشد. به منظور اعتبار سنجی و صحت سنجی نتایج، ابتدا ارتعاش آزاد ورق تک لایه ایزوتروپیک بررسی شده است و نتایج بدست آمده با مراجع معتبر صحت سنجی شده است. سپس ورق ساندویچی سه لایه با نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی گردیده و با فرکانس‌های طبیعی حاصل از این تحقیق مقایسه شده است. در نهایت، تأثیر پارامترهای مختلف را بر پایداری ورق سه لایه با اعمال تقویت‌کننده کربنی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص ماده ایزوتروپیک و خواص ساختار آگرتیک که جهت بدست آوردن نتایج عددی استفاده شده است به ترتیب در جداول 1 و 2 ارائه گردیده است.

جدول 1 خواص ماده ایزوتروپیک [1]

Table 1 Properties of isotropic material[1]			
$h_p(m)$	$E(Gpa)$	ν	$\rho(kg/m^3)$
0.005	69	0.3	2800

جدول 2 خواص ماده آگرتیک [1]

Table 2 Properties of the auxetic material[1]				
$h_c(m)$	η_1	η_3	ν_c	$\theta (degree)$
0.09	2	0.01	0.3	-30

طول و عرض ورق نیز برابر با 1 متر است و ارتفاع ورق مجموع ارتفاع سه لایه $h = 2h_b + h_c$ است. اعتبارسنجی در سه قسمت انجام شده است؛

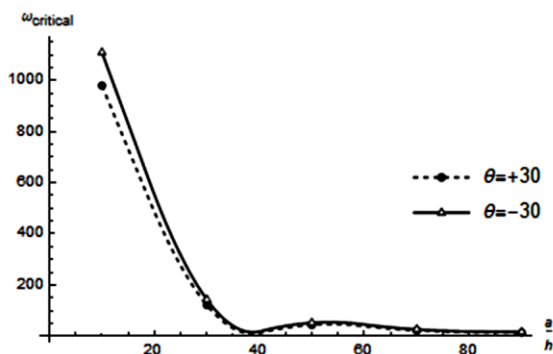


Fig. 3 Effect of sandwich plate thickness with simply supported boundary conditions on the critical frequency of the structure

شکل 3 اثر ضخامت ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده بر فرکانس بحرانی سازه

جدول 6 اثر تغییرات نسبت طول به عرض بر تغییرات فرکانس بحرانی و فشار آیرودینامیکی بحرانی سیستم

Table 6: Effect of changes in length to width ratio on changes in critical frequency and critical aerodynamic pressure of the system

$\omega_{critical}$	$\lambda_{critical}$	a/b	θ_1 زاویه جریان
980.299	102.019	1	0
590.780	158.419	1.5	
447.690	231.436	2	
1015.120	108.065	1	35
622.364	182.351	1.5	
467.219	273.071	2	
1020.390	108.813	1	45
647.410	199.569	1.5	
484.354	305.857	2	
996.112	104.131	1	65
729.506	247.461	1.5	
555.992	420.996	2	
974.182	100.922	1	90
963.967	292.931	1.5	
874.651	756.957	2	

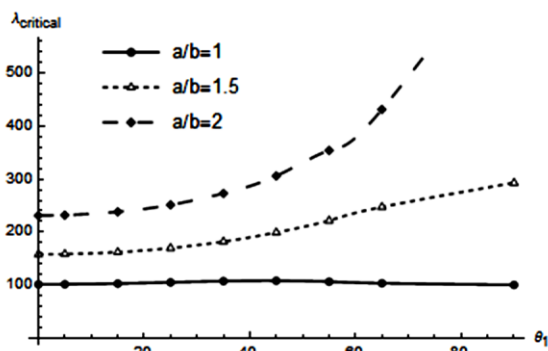


Fig. 4 Effect of flow angle on variation of critical aerodynamic pressure of a structure with a simply support boundary conditions

شکل 4 اثر زاویه جریان بر تغییرات فشار آیرودینامیکی بحرانی سازه با تکیه گاه ساده

مطابق جدول 6 در ضخامت ثابت، افزایش نسبت زاویه جریان آیرولاستیک باعث افزایش فشار آیرودینامیکی بحرانی می گردد به گونه ای که نرخ این افزایش با افزایش a/b زیاد می گردد. همچنین با بررسی شکل 4 می توان دریافت که زاویه ی جریان آیرودینامیکی تأثیر بسیار محسوسی روی پایداری سیستم می گذارد و با افزایش زاویه ی جریان تا 45 درجه مقدار آستانه فلاتر به تعویق می افتد که البته مقدار این تغییر به طور قابل ملاحظه -

تأثیر نسبت طول به ضخامت ورق بر پایداری سیستم

در جدول 5، شکل 2 و شکل 3 اثر ضخامت بر پایداری سیستم و فرکانس بحرانی سیستم در شرایط مرزی تماماً ساده نشان داده شده است. این نتایج برای دو زاویه سلول آگرتیک متفاوت بدست آمده است. مطابق شکل 2 با افزایش نسبت طول به ضخامت فشار آیرودینامیکی بحرانی افزایش پیدا می کند اما نرخ این افزایش در $a/h > 40$ بسیار آهسته بوده و مشاهده می شود که در این بازه تقریباً فشار آیرودینامیکی بحرانی ثابت می گردد. این در حالیست که در $a/h < 40$ نرخ این تغییرات، مقدار قابل ملاحظه ای می باشد و تغییر کوچکی در a/h باعث تغییر زیادی در فشار آیرودینامیکی بحرانی می شود. علاوه بر این، فشار بحرانی ورق با زاویه منفی سلول آگرتیک بیشتر از زاویه مثبت آن است که نشان دهنده پایداری بیشتر سیستم در شرایط زاویه منفی سلول آگرتیک است. مطابق شکل 3 با افزایش نسبت طول به ضخامت، فرکانس بحرانی یا همان فرکانس در زمان وقوع فلاتر کمتر می شود و این حاکی از اینست که در صورت وقوع فلاتر کنترل ورق ساندویچی با نسبت طول به ضخامت بیشتر در مقایسه با ورق ساندویچی با نسبت طول به ضخامت کمتر بسیار مشکل تر می باشد.

جدول 5 تأثیر نسبت طول به ضخامت ورق ساندویچی بر پایداری سیستم

Table 5 Effect of the length to thickness ratio of the sandwich plate on the stability of the system.

$\omega_{critical}$	$\lambda_{critical}$	a/h	θ
969.632	102.918	10	
122.005	134.728	30	
44.417	138.228	50	30
22.715	139.224	70	
13.758	139.640	90	
1109.210	99.242	10	
143.437	142.850	30	
52.464	147.965	50	-30
26.891	149.442	70	
16.297	150.058	90	

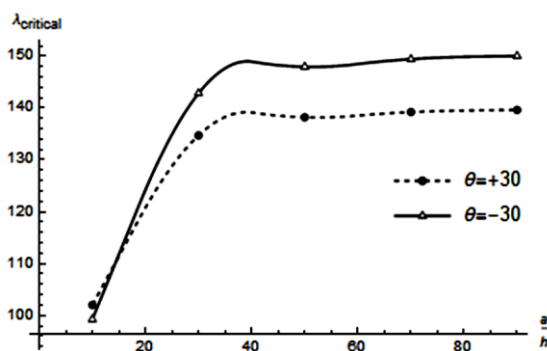


Fig. 2 Effect of sandwich plate thickness with simply supported boundary conditions on the critical aerodynamic pressure of the structure

شکل 2 اثر ضخامت ورق ساندویچی با شرایط مرزی ساده بر فشار آیرودینامیکی بحرانی سازه

تأثیر نسبت طول به عرض ورق بر پایداری سیستم

در جدول 6 و شکل 4 اثرات نسبت طول به عرض ورق ساندویچی بر فشار آیرودینامیکی بحرانی سیستم به ازای زوایای جریان مختلف در شرایط مرزی کاملاً ساده نشان داده شده است.

کربنی و فشار آبرودینامیکی بوده است. برای تحلیل سیستم مفروض در تحلیل حاضر از تئوری برشی اصلاح شده استفاده گردیده است.

(1) افزایش فشار آبرودینامیکی باعث می شود که شکل مودهای ارتعاشی به یکدیگر نزدیک شوند و در فشار آبرودینامیکی خاصی ناپایداری فلاتر رخ دهد.

(2) با افزایش ضخامت ورق ساندویچی، سختی و استحکام سازه افزایش می یابد و متعاقباً فرکانس های طبیعی آن زیاد می شود. همچنین شایان ذکر است که با افزایش نسبت طول به ضخامت، فشار آبرودینامیکی بحرانی افزایش پیدا می کند اما نرخ این افزایش در $a/h > 40$ بسیار آهسته بوده و مشاهده می شود که در این بازه تقریباً فشار آبرودینامیکی بحرانی ثابت می گردد. این در حالی است که در $a/h < 40$ نرخ این تغییرات، مقدار قابل ملاحظه ای می باشد و تغییر کوچکی در a/h باعث تغییر زیادی در فشار آبرودینامیکی بحرانی می شود.

(3) با افزایش نسبت طول به عرض ورق، فرکانس های سیستم و فشار آبرودینامیکی بحرانی آن افزایش پیدا می کند. در واقع با کاهش عرض ورق در طول ثابت، درجه آزادی ورق کاهش می یابد که این امر سبب افزایش سختی و در نتیجه باعث افزایش فرکانس های سیستم و آستانه فلاتر آن می گردد. نرخ این افزایش در نسبت های پایین طول به عرض آهسته می باشد و در نسبت های بالاتر این افزایش، شیب تندتری به خود می گیرد.

(4) با اعمال تقویت کننده های کربنی روی لایه های فوقانی و تحتانی ورق ساندویچی، استحکام ورق افزایش می یابد، ورق سخت تر می شود و فرکانس طبیعی آن بیشتر می شود. هرچه درصد حجمی تقویت کننده های کربنی بیشتر شود، استحکام ورق بیشتر می شود و فرکانس طبیعی زیادتر می شود.

(5) با اعمال تقویت کننده های کربنی روی لایه های فوقانی و تحتانی ورق ساندویچی، ناحیه ناپایداری ورق کاهش می یابد و هرچه درصد حجمی تقویت کننده کربنی بیشتر شود، طول ناحیه ناپایداری کمتر می شود.

(6) به طور کلی زاویه ی جریان آبرودینامیکی تأثیر زیادی روی پایداری و شکل مودهای سیستم دارد. برای ورق ساندویچی مشاهده شده است که با افزایش زاویه جریان تا 45 درجه فشار آبرودینامیکی بحرانی به بیشترین مقدار خود می رسد ولی بعد از 45 درجه افزایش زاویه جریان باعث کم شدن فشار آبرودینامیکی بحرانی می گردد.

(7) با افزایش ضخامت لایه آگرتیک، استحکام ورق ساندویچی بیشتر می شود و ورق سخت تر می شود به همین دلیل فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است. از مقایسه دو زاویه سلول آگرتیک می توان دریافت که هرچه زاویه منفی سلول آگرتیک کمتر باشد، مقدار فرکانس طبیعی بیشتر است.

(8) زاویه سلول آگرتیک بر فرکانس های سیستم و پایداری سیستم تأثیر می گذارد. فشار بحرانی ورق با زاویه منفی سلول آگرتیک بیشتر از زاویه مثبت آن است که نشان دهنده پایداری بیشتر سیستم در شرایط زاویه منفی سلول آگرتیک است.

ای به نسبت طول به عرض یا به طور دقیق تر به ابعاد ورق ساندویچی بستگی دارد. به طوری که برای ورق ساندویچی مربعی وقتی زاویه جریان از 0 تا 45 افزایش می یابد فشار آبرودینامیکی تنها حدود شش درصد زیاد می شود؛ این درحالیست که برای ورق ساندویچی مستطیلی با $a/b = 2$ به ازای افزایش زاویه جریان از صفر به 45، فشار آبرودینامیکی حدود 32 درصد زیاد می شود. به عبارت ساده تر هر چه نسبت طول به عرض ورق ساندویچی بیشتر باشد، زاویه ی جریان اثر بیشتری بر روی پایداری آن می گذارد.

تأثیر تقویت کننده کربنی بر پایداری سیستم

به منظور تقویت ورق ساندویچی و افزایش پایداری سیستم از تقویت کننده های کربنی استفاده می شود. در جدول 7 تأثیر کسرهای حجمی متفاوت تقویت کننده کربنی بر منطقه ناپایداری ارائه گردیده است.

جدول 7 تأثیر کسرهای حجمی متفاوت تقویت کننده کربنی بر منطقه ناپایداری
Table 7 Effect of different volume fractions of carbon reinforcement on the instability zone

طول منطقه ناپایداری	$\lambda_{critical}$	کسرهای حجمی تقویت کننده کربنی (V_{CNT})
	$\omega_{critical}$	
389.898	$81.892 < \lambda_{critical} < 471.790$	5%
	$1066.07 < \omega_{critical} < 1907.02$	
233.314	$70.317 < \lambda_{critical} < 303.632$	10%
	$1137.66 < \omega_{critical} < 1855.72$	
192.095	$66.903 < \lambda_{critical} < 257.999$	12%
	$1164.07 < \omega_{critical} < 1832.37$	
143.066	$62.568 < \lambda_{critical} < 205.634$	15%
	$1202.27 < \omega_{critical} < 1799.21$	
90.674	$56.775 < \lambda_{critical} < 147.449$	20%
	$1259.77 < \omega_{critical} < 1751.04$	

همانطور که در نتایج ارائه شده در جدول 7 ملاحظه می گردد، با افزایش فشار آبرودینامیکی مودهای ارتعاشی به یکدیگر نزدیک می شوند و در یک فشار آبرودینامیکی خاص این مودها کاملاً به یکدیگر منطبق می شوند؛ این فشار آبرودینامیکی خاص همان فشار بحرانی می باشد. با افزایش فشار آبرودینامیکی از یک مقدار مشخص به بالا، شکل مودها از هم جدا می شوند و انطباق شکل مودها از بین می رود و سازه پایدار می شود. بازه ای از مقادیر فشار آبرودینامیکی که شکل مودها برهم منطبق هستند، منطقه ناپایداری نامیده می شود. این گفته در جدول 7 نشان داده شده است. با افزایش کسر حجمی تقویت کننده کربنی، طول منطقه ناپایداری کمتر می شود و پایداری سازه افزایش می یابد.

4- جمع بندی و نتیجه گیری

در تحقیق حاضر تحلیل پایداری ورق ساندویچی سه لایه با هسته آگرتیک با اعمال تقویت کننده های کربنی تحت نیروی آبروالاستیک برای شرایط مرزی ساده بررسی شده است. در این تحلیل با بدست آوردن انرژی های جنبشی ورق، انرژی پتانسیل ورق و کار نیروهای خارجی شامل نیروی آبرودینامیکی، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی سازه بدست آمده و با استفاده از روش تقریبی باقیمانده وزنی، مقادیر فرکانسی و شکل مودهای ورق ساندویچی بدست آمده است. برای مدل سازی نیروی آبرودینامیکی وارده به سیستم از تئوری پیستون مرتبه اول استفاده گردیده است. پارامترهای متغیر در این تحلیل ابعاد هندسی ورق ساندویچی، ضخامت لایه آگرتیک، زاویه سلول آگرتیک، پارامترهای هندسی سلول آگرتیک، نسبت های حجمی تقویت کننده

5- مراجع

[1] Khorshidi, K., Savvafi, S., Zobeid, S., "Forced vibration of a three-layer cylindrical shell with an auxetic core containing fluid under the influence of shock load using high-order shear deformation theories," *Mechanics of Advanced and Smart Materials*, vol. 3, no. 4, pp. 431-464, 2024.

- theory," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 51, pp. 29-43, 2015.
- [18] Hosseini-Hashemi, S., Zare, M., Nazemnezhad, R., "An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nanoplates via nonlocal elasticity," *Composite Structures*, vol. 100, pp. 290-299, 2013.
- [19] Tran Quoc Quan, Vu Minh Anh, Vinyas Mahesh, Nguyen Dinh Duc, "Vibration and nonlinear dynamic response of imperfect sandwich piezoelectric auxetic plate," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024.
- [20] Aglietti, G. S., Cunningham, P. R., "Is a simple support really that simple," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 257, no. 2, pp. 321-335, 2002.
- [21] Xian-Kun, X., Hui-Shen, S., "Vibration of postbuckled FGM hybrid laminated plates in thermal environment," *Engineering Structures*, vol. 30, no. 9, pp. 2420-2435, 2008.
- [22] Duc, N. D., Cong, P. H., "Nonlinear dynamic response and vibration of sandwich composite plates with negative Poisson's ratio in auxetic honeycombs," *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 20, pp. 692-717, 2016.
- [23] Li, Y., Che, Z., Xiao, D., Wu, W., Fang, D., "The dynamic response of shallow sandwich arch with auxetic metallic honeycomb core under localized impulsive loading," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 122, pp. 224-237, 2018.
- [24] Alipour, M. M., Shariyat, M., "Analytical layerwise free vibration analysis of circular/annular composite sandwich plates with auxetic cores," *International Journal of Mechanical Materials Design*, doi:10.1007/s10999-015-9321-2, 2015.
- [25] Hajmohammad, M. H., Nouri, A. H., Zarei, M. S., Kolahchi, R., "A new numerical approach and visco-refined zigzag theory for blast analysis of auxetic honeycomb plates integrated by multiphase nanocomposite face sheets in hygrothermal environment," *Engineering with Computers*, doi:10.1007/s00366-018-0655-x, 2018.
- [26] Song, Z.-G., Li, F.-M., "Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate," *Composite Structures*, vol. 94, no. 2, pp. 702-713, 2012.
- [27] Farhadi, S., Hosseini-Hashemi, S. H., "Aeroelastic behavior of cantilevered rotating rectangular plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 316-328, 2011.
- [28] Kouchakzadeh, M. A., Rasekh, M., Haddadpour, H., "Panel flutter analysis of general laminated composite plates," *Composite Structures*, vol. 92, no. 12, pp. 2906-2915, 2010.
- [29] Fazlzadeh, S. A., Poursmaeeli, S., Ghavanloo, E., "Aeroelastic characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates under a supersonic flow," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 285, pp. 714-729, 2015.
- [30] Prakash, T., Singha, M. K., Ganapathi, M., "A finite element study on the large amplitude flexural vibration characteristics of FGM plates under aerodynamic load," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 47, no. 5, pp. 439-447, 2012.
- [31] Jaiman, R. K., Parmar, M. K., Gurugubelli, P. S., "Added mass and aeroelastic stability of a flexible plate interacting with mean flow in a confined channel," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 81, no. 4, 041006, 2014.
- [32] Mahato, P. K., Maiti, D. K., "Aeroelastic analysis of smart composite structures in hygro-thermal environment," *Composite Structures*, vol. 92, no. 4, pp. 1027-1038, 2010.
- [33] Zhou, K., Huang, X., Zhang, Z., Hua, H., "Aero-thermo-elastic flutter analysis of coupled plate structures in supersonic flow with general boundary conditions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 430, pp. 36-58, 2018.
- [34] Shitov, S., Vedenev, V., "Flutter of rectangular simply supported plates at low supersonic speeds," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 69, pp. 154-173, 2017.
- [2] Khorshidi, K., Shabani, Y., "Free vibration analysis of sandwich plates with magnetorheological smart fluid core by using modified shear deformation theory," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 8, no. 4, pp. 1826-1835, 2022.
- [3] Keshavarzian, M., Najafzadeh, M. M., Khorshidi, K., Yousefi, P., Alavi, M., "Improved high-order analysis of linear vibrations of a thick sandwich panel with an electro-rheological core by using exponential shear deformation theory," *Journal of Solid Mechanics*, vol. 14, no. 1, 2022.
- [4] Khorshidi, K., Karimi, M., "Fluid-structure interaction of vibrating composite piezoelectric plates using exponential shear deformation theory," *Mechanics of Advanced Composite Structures*, vol. 7, no. 1, pp. 59-69, 2020.
- [5] Khorshidi, K., Ghasemi, M., "Buckling analysis of functionally graded rectangular microplate in thermal environment based on exponential shear deformation theory using the modified couple stress theory," *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, vol. 8, no. 4, pp. 179-196, 2018.
- [6] Khorshidi, K., Fallah, A., "Effect of exponential stress resultant on buckling response of functionally graded rectangular plates," *Journal of Stress Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 27-33, 2017.
- [7] Khorshidi, K., Fallah, A., Siahpush, A., "Free vibrations analysis of functionally graded composite rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory in thermal environment," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 4, no. 1, pp. 109-120, 2017.
- [8] Khorshidi, K., Fallah, A., "Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 113, pp. 94-104, 2016.
- [9] Khorshidi, K., Asgari, T., Fallah, A., "Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory," *Mechanics of Advanced Composite Structures*, vol. 2, no. 2, pp. 79-93, 2015.
- [10] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I., "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 4, pp. 237-247, 2011.
- [11] Pradhan, K. K., Chakraverty, S., "Transverse vibration of isotropic thick rectangular plates based on new inverse trigonometric shear deformation theories," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 94, pp. 211-231, 2015.
- [12] Farzam Rad, A., Hassani, B., Karamodin, A. (Eds.), "Free vibration analysis of FG nano plates using quasi-3D hyperbolic refined plate theory and the isogeometric approach," *Proceedings of the International Congress on Science and Engineering*, 2018.
- [13] Zhang, H., Shi, D., Wang, Q., "An improved Fourier series solution for free vibration analysis of the moderately thick laminated composite rectangular plate with non-uniform boundary conditions," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 121, pp. 1-20, 2017.
- [14] Kiani, Y., "Free vibration of carbon nanotube reinforced composite plate on point supports using Lagrangian multipliers," *Meccanica*, vol. 52, no. 6, pp. 1353-1367, 2017.
- [15] Shi, D., Zhang, H., Wang, Q., Zha, S., "Free and forced vibration of the moderately thick laminated composite rectangular plate," *Shock and Vibration*, vol. 2017, 7820130, 2017.
- [16] Najafzadeh, M., Heydari, H., "An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, no. 3, pp. 603-612, 2008.
- [17] Hosseini-Hashemi, S., Kermajani, M., Nazemnezhad, R., "An analytical study on the buckling and free vibration of rectangular nanoplates using nonlocal third-order shear deformation plate

- [35] Xia, W., Zhao, X., Li, D., Shen, S., "Nonlinear flutter response of pre-heated functionally graded panels," *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, vol. 1850012, 2018.
- [36] Sun, Q., Xing, Y., "Exact eigensolutions for flutter of two-dimensional symmetric cross-ply composite laminates at high supersonic speeds," *Composite Structures*, vol. 183, pp. 358-370, 2018.
- [37] Katsikadelis, J. T., Babouskos, N. G., "Flutter instability of laminated thick anisotropic plates using BEM," *Acta Mechanica*, vol. 229, no. 2, pp. 613-628, 2018.
- [38] Khorshidi, K., Karimi, M., "Flutter analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets in thermal environment," *Aerospace Science and Technology*, vol. 95, 105461, 2019.
- [39] Zarastvand, MR., Ghassabi, M., Talebitooti, R., "Prediction of acoustic wave transmission features of the multilayered plate constructions: A review," *Journal of Sandwich Structures & Materials*, vol. 24 (1), 218-293, 2022.
- [40] Zarastvand, MR., Ghassabi, M., Talebitooti, R., "A review approach for sound propagation prediction of plate constructions," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 28, 2817-2843, 2021.