



دستیابی به خواص بهینه مکانیکی مدول برشی، مدول حجمی و سفتی محوری با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژی

محسن احمدی¹، مجتبی حقیقی‌یزدی^{2*}، مریم مهنما³، علی‌رضا مشکی⁴

1- 4- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران

3- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران

* تهران، صندوق پستی 1439957131، mohaghghi@ut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

از سالیان نه‌چندان دور و به‌خصوص اخیراً، ایجاد موادی مطلوب چه از لحاظ مواد تشکیل‌دهنده و چه با خواص مورد انتظار از سوی متخصصین پیگیری می‌شده است. در این بین ریزساختارها به جهت حالت بهینه و دقت محاسبات مورد توجه‌اند. ریزساختارها همان مواد ناهمگنی هستند که طی یک فرآیند بهینه‌سازی معماری‌های ساختارشان بهینه می‌شود. در این مقاله فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی برای طراحی ریزساختار چندفازی الاستیک با استفاده از فاکتور جبران‌سازی و روش همگن‌سازی عددی پیاده‌سازی می‌شود. طی این مطالعه بهینه‌سازی عددی با اعمال محاسبات روی متغیرهای طراحی متشکل از درصد حجمی هر فاز در هر المان انجام می‌گیرد. روش حل مسئله بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر تقسیم به چند سری زیرمسئله بهینه‌سازی دوفازی است که وظیفه انجام آن با یک عمل‌گر مرسوم دوفازی به عنوان یک عمل‌گر درون فضای بهینه‌سازی است. در این پژوهش به مقادری برابر 0.7264، 0.4447 و 0.3008 برای خاصیت‌های مدول برشی، حجمی و سفتی محوری دست پیدا کردیم. در یک دید کلی، میزان محاسبات و دشواری مسئله به تعداد فازهای شرکت‌کننده در فرآیند طراحی ساختار وابسته است. تا پیش از این مطالعه برای ریزساختارهای متناوب، متقارن و دوفازی به این سوال پاسخ داده شده است. طی مطالعه حاضر ما با تشکیل تانسورهای خواص مواد به صورت تابعی از درصد حجمی به مسئله طرح‌شده پاسخ می‌دهیم. این راه‌حل با تعریف یک فضای طراحی و میدانی منظم از مرزهای بالا و پایین دستگاه مختصات محلی انجام می‌گیرد. مرزهایی که حفظ آن‌ها موجب انسجام و استانداردسازی برای کارهای بعدی در زمینه طراحی ریزساختارهای چندفازی است.

دریافت: 1402/11/29

پذیرش: 1403/03/23

کلیدواژگان

ریزساختارهای چندفازی،

سلول پایه متناوب،

همگن‌سازی عددی،

بهینه‌سازی توپولوژی

Achieving optimal mechanical properties of shear modulus, bulk modulus and axial stiffness using topology optimization

Mohsen Ahmadi¹, Mojtaba Haghighi-Yazdi^{2*}, Maryam Mahnama³, Alireza Moshki⁴

1, 2, 3, 4- School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14399-57131, Tehran, Iran, mohaghghi@ut.ac.ir

Keywords

Materials Design,
Topology Optimization,
SIMP Method,
Numerical Homogenization,
Multi Phase Microstructures

Abstract

It has been created for several years and in particular, the materials that make up the composition and the expected properties are followed by experts. Meanwhile, microstructures are considered for the optimal mode and accuracy of calculations. Microstructures are heterogeneous materials whose structure is optimized by an optimization process. In this thesis, topology optimization design for multiphase elastic microstructure is implemented using compensation factor and numerical homogenization method. During this study, numerical optimization is performed by applying calculations on design changes consisting of volume percentage of each phase in each element. The technique of solving the topology optimization problem is divided into several series of two-phase subproblems, which performs its task with a conventional two-phase operator as an operator in the optimization space. In this research, values equal to 0.7264, 0.4447 and 0.3008 were obtained. In general, the calculation rate of a view depends on the number of phases involved in the structure design process. Until this study, this question has been answered for symmetric, symmetrical and two-phase microstructures.

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Ahmadi, M., Haghighi-Yazdi, M., Mahnama, M., Moshki, A., "Achieving optimal mechanical properties of shear modulus, bulk modulus and axial stiffness using topology optimization," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 11, No. 1, pp. 2391-2400, 2024.

https://doi.org/10.22068/JSTC.2024.2016020.1870

1- مقدمه

معکوس یک مسئله‌ای با تعیین ابتدایی خواص رفتاری و به دست آوردن خواص ساختاری سیستم است. او ادعا می‌کند که فرمول‌بندی ارائه شده که در 2 بعد تدوین شده است قابل تعمیم به محاسبات 3 بعد نیز است. همچنین مطرح می‌کند که بسیاری از مواد به صورت خرپا و دیسک پیوسته برای ایجاد خواص مورد نظر قابل طراحی هستند [16]. زیگموند [7] در کار دیگر خود روی ساختن ریزساختار متناوب در 2 و 3 بعد متمرکز شد. او بار دیگر نیز بر روی روش همگن‌سازی عددی معکوس متمرکز شده است. مسئله یافتن ساده‌ترین ریزساختار ممکن با خصوصیات الاستیک تعیین شده به عنوان یک مسئله همگن‌سازی معکوس نامیده می‌شود و به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی برای یافتن ریزساختار با کمترین وزن ممکن که پاسخگوی الزامات رفتاری مشخص می‌باشد، فرموله شده است. ایده او پیاده‌سازی خرپا و قابی نازک بود که کمترین وزن را در نظر بگیرد. در 2 بعد از 120 عضو و در 3 بعد 2016 عضو به کاربرد تا بتواند به نسبت‌های پواسون -1 ، 0 و 0.5 دست یابد.

در این مطالعه با استفاده از روش بهینه‌سازی توپولوژی، همگن‌سازی عددی و الگوریتم فاز فعال متناوب^۸ دستیابی به خواص بیشینه مطلوب امکان‌پذیر شد. آن چه در این تحقیق مهم می‌نماید تلفیق این روش‌ها با هم به نحوی که هیچ‌گونه تداخلی بین توابع اعمالی ایجاد نگردد، خواهد بود. چرا که ممکن هست فرآیند حل مسئله بهینه‌سازی برای طراحی ریزساختاری به طور مثال با تابع هدفی مانند مدول برشی، برای تابع هدفی دیگر نظیر سفتی محوری پاسخ مناسبی به دست ندهد. و این به آن معنی خواهد بود که سعی شده است تا به میزان ممکن دربرگیرندگی حالت‌های مختلف در توابع هدف مختلف با کسر حجمی‌های مختلف از هر فاز شرکت‌کننده در ریزساختار وجود داشته باشد.

طی تحقیق روند حل مسئله از توزیع فازها در جز حجمی نماینده^۹ (RVE) آغاز می‌شود. سپس تجزیه مسئله چند فازی به $p/(p-1)/2$ زیر مسائل دوتایی برای استفاده از کارهای علمی گذشته و همچنین ساده‌سازی مسئله ادامه کار خواهد بود. همچنین در این کار تلاش می‌شود که از تلفیق بهینه‌سازی ساختاری در 2 بعد به طراحی ریزساختار در 3 بعد نتیجه شود. از همه مهم‌تر رعایت دربرگیرندگی برای طراحی‌های آینده بوده است. برای به‌روزرسانی متغیرها از سیمپ بهره‌گیری می‌شود چه این که موفقیت این مطالعه بستگی زیادی به این مقطع دارد. برای ادامه و همگرا کردن مسئله با حدود دقت تعریف شده باید خواص موثر با استفاده از همگن‌سازی تعیین شود و این همان تعیین تابع هدف مسئله خواهد بود. محاسبات فیلترینگ و حساسیت یک تابع هدف با توجه به قیدها و دقت‌هایی که کمی پیش‌تر اشاره شد کار را به سوی همگرایی رهنمون می‌کند. تطبیق و تبدیل فضای حل به چگالی المان-های چارچوب مسئله بر عهده روش معیار بهینگی گذاشته شده است. در صورت اقلنا شرایط مسئله و تامین همگرایی چرخه حل بسته، و در غیر این صورت تا منتج شدن به مطلوب ادامه خواهد یافت.

2- همگن‌سازی

تجزیه و تحلیل یک مساله مقدار مرزی برای یک فضای سلولی با ناهمگنی‌های منظم و متناوب، بسیار دشوار می‌باشد. روشی که برای غلبه کردن بر این فرآیند معمولاً همگن‌سازی نامیده می‌شود و به صورت تئوری دقیق ریاضی

اخیراً کاربرد مواد ناهمگن به طور چشم‌گیر افزایش داشته است، از این مواد می‌توان آلایزهای فلزی و کامپوزیت‌های رشته‌ای را که رفتار مکانیکی مناسبی ارائه می‌دهند نام برد. ناهمگنی‌های موجود در این مواد می‌طلبد که محاسبات متناسب با پاسخی که از آن‌ها انتظار داریم، اندیشیده شود. طی سال‌های اخیر بهینه‌سازی توپولوژی^۱ به عنوان روش شناسایی فرم برای طراحی به سرعت در حال توسعه بوده است. برنامه‌های کاربردی زمینه‌های مختلف مهندسی مانند مکانیک سازه^۲، جریان سیال^۳، مسائل انتقال حرارت^۴ و غیره را به زودی در بر می‌گیرد. فو و همکاران [1] طی مطالعه‌ای یک ریزساختار جدید همسانگرد جامد با روش پارامتر جبران‌ساز بر اساس کسرهای حجم عنصری و فیلترگذاری موجود توسعه دادند. قابلیت ساخت از نتایج شبیه‌سازی انتخاب شده با فناوری مدل‌سازی رسوب ذوب شده (FDM)^۵ تأیید می‌شوند. این مطالعه نشان داد که روش پیشنهادی قادر به تولید توپولوژی‌های خود پستی‌بانی همگرا است که با استفاده از FDM قابل چاپ هستند. دلیل موضوعیت یافتن طراحی ناهمگن سلول پایه^۶ که همان کوچک‌ترین جزء تکرارپذیر فضای طراحی متناوب است، ریزساختاری است که با توجه به فرآیندهای ساخت پیشرفته‌ای که در حال بهتر شدن هستند، دشواری محاسبات پیچیده آن وجود ندارد و البته برای این مهم نیز که بتوان از چاپ‌گرهای پیشرفته برای تجسم این ریزساختارها توان عملیاتی دیجیتالی متوقع بود [1]. لیو و همکارانش [2] ضمن خلاصه کردن و ارائه روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی پیشرفته برای انواع AM⁷ طراحی سلول واحد، طراحی ساختار مکعبی نمونه‌های اولیه 3 بعدی را ارائه کردند.

به هر حال قابلیت تولید ساختارهای متنوع با معماری‌هایی دقیق در اندازه‌های کوچک با طرح‌های توسعه‌ای در حال پیشرفت، موقعیت‌های ویژه‌ای در اختیار قرار می‌دهد [3]. کانسو و همکارانش [4] به یک ساختار شبکه‌ای دست یافتند که از پیوندهای استیلین و بنزن ساخته شده است و برای محدوده‌ای از ثوابت الاستیک مختلف و مواد ناهمسانگردی استفاده می‌شود. طی این کار از تکنیک‌های مدل‌سازی مولکولی بهره جسته است. محدوده‌هایی از مدول الاستیسیته 20 تا 117 گیگاپاسکال و نسبت پواسون -0.94 تا 1.4 طی این کار قابل دسترسی است. آن‌ها هدف خود را از انجام تحقیق‌شان اطلاع بیش‌تر در زمینه پلیمرهای لانه‌زنبوری آکوستیکی و رفتار انتقالی مکانیکی و جرم بیان کرده‌اند. در مطالعات آن‌ها ساختار لانه‌زنبوری برای نشان دادن کارایی فیلترگذاری بررسی شده است. فوجی و همکاران [5] با بهره‌گیری از کدنویسی به ایجاد ریزساختارهایی با دو فاز پرداختند. ایشان الگوهایی برای چینش فازها کنار هم را با استفاده از پارامترهایی ارائه دادند که پارامترها در واقع توابعی از چگالی‌های فازها بودند. شایان ذکر است ایشان نیز به مانند بسیاری دیگر از محققان این رشته از سیمپ^۸ برای به‌روزرسانی پارامترهای طراحی استفاده کرده‌اند. زیگموند در کارش ماتریس سازنده را برای مواد نیمه محدود ارائه داد. او در تحقیقش مسئله را با معکوس کردن فرآیند یافتن یک ماده با ضرایب همگن حل کرد و اولین تحقیقات برای کمینه نرمی توسط او انجام شد. طی این مقاله در جریان همگن‌سازی از روش انرژی متقابل المان‌ها بهره گرفته شده است. او طی این کار برای حالت 2 بعدی و مسئله را برای نسبت پواسون -1 و خواص اکسترمومی (بیشینه یا کمینه) حل کرده است. مسئله همگن‌سازی

⁷ AM (Additive Manufacturing)

⁸ SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)

⁹ ALTERNATING ACTIVE-PHASE ALGORITHM

¹⁰ Representative Volume Element (RVE)

¹ Topology optimization

² Structural mechanics

³ Fluid flow

⁴ Heat transfer

⁵ Fused Deposition Modeling

⁶ Unit cell

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

1-2- مفهوم سیمپ

در حال حاضر و از دهه هشتاد میلادی یکی از مطلوب‌ترین روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی، روش سیمپ بوده است. در واقع این روش، جریمه‌سازی مواد (میکروساختارها) همسانگرد جامد که دارای چگالی‌های میانی هستند، را انجام می‌دهد. مدع اصلی این روش بهینه‌سازی بندسو^[10] بود. از مزایای روش سیمپ می‌توان به تعریف ساده و مستقیم توپولوژی که با استفاده از چگالی نسبی بین صفر (نبود ماده) و یک (وجود ماده) تغییر می‌کند، استفاده از المان‌های محدود برای تحلیل مسأله، نیازمند بودن به شبکه‌بندی المان‌ها به علت متغیر بودن درصد حجمی آن‌ها و همچنین توانمندی قابل قبول در غلبه بر ناپایداری عددی و رسیدن به هم‌گرایی فرآیند طراحی ریز ساختار نام برد^[11]. مسأله بهینه‌سازی توپولوژی با المان‌های همسانگرد (حاوی ماده پایه) یا حفره‌ای (عدم وجود ماده پایه)، معمولاً شامل تعداد بسیار زیادی از این المان‌ها می‌باشند. به دلیل وجود این تعداد زیاد برای مقادیر گسسته مسئله (تعداد بسیار زیاد صفر و یک)، روش‌های جستجو مستقیم هزینه محاسباتی بسیار بالایی خواهند بود، لذا این موضوع عامل بازدارنده برای استفاده از این روش‌ها می‌باشد. بنابراین، استفاده از فرمولاسیون متغیرهای پیوسته توصیه می‌شود. در نظر گرفتن متغیرهای طراحی به صورت پیوسته به معنای تعریف بازه از صفر تا یک، قطعاً مشخص کردن وضعیت نهایی متغیرهای طراحی میانی را به دنبال دارد. بنابراین ایده مطرح شده در روش سیمپ برای جریمه‌سازی این متغیرهای میانی (المان‌های خاکستری)، راه‌حل بسیار مناسبی برای این مسئله می‌باشد. برای به کارگیری روش سیمپ در حوزه طراحی مواد، مقدار ماده‌ای (ماده همسانگرد مفروض به عنوان ماده پایه) که باید درون فضای حجمی از هر المان قرار داده شود، چگالی ρ_e هر المان تعریف می‌گردد. در توپولوژی‌های میکروساختاری دو فازی (جامد-حفره)، $\rho_e = 0$ به معنای تهی بودن المان و $\rho_e = 1$ به این معنی است که این المان، ماده پایه مفروض (جامد همسانگرد) است. برای تابع میان‌یابی در روش سیمپ^[12] رابطه‌ای توانی بین سفتی و چگالی المان‌ها برقرار می‌باشد. در واقع مدول یانگ هر المان بر حسب این روش به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E_e = \rho_e^q E_0 \quad (3)$$

محدوده متغیرهای طراحی (چگالی‌های هر المان) $0 \leq \rho_e \leq 1$ می‌باشد و E_0 مدول یانگ ماده پایه همسانگرد و q ($q \geq 1$) پارامتر جریمه‌سازی هستند. در واقع چگالی‌هایی که بین صفر و یک قرار دارند، تحت فرآیند جریمه‌سازی قرار می‌گیرند تا در نهایت وضعیت آن‌ها از نظر جامد و حفره بودن، مشخص گردد. بنابراین با اتصال المان‌های محتوی ماده، توپولوژی سلول واحد از میکروساختارهای متناوب مواد ساخته می‌شود و المان‌های بدون ماده نیز نشان‌دهنده فضاهای خالی سلول واحد می‌باشند. بر اساس الگوریتم فاز فعال متناوب از حدس اولیه آغاز و تا تعیین چگالی هر المان برای هر کدام از زیرمسئله‌ها پایان داده می‌شود؛ در صورت عدم همگرایی به گام سوم می‌رود و سپس تا حصول همگرایی و اقناع شرایط حاکم بر مسئله طراحی ریزساختار روند ادامه می‌یابد.

پایه‌سازی می‌شود. تئوری ریاضی همگن‌سازی که تاکنون توسعه پیدا کرده است، به عنوان یک رویکرد جایگزین برای پیدا کردن خواص موثر ماده همگن‌سازی شده معادل (مانند خواص میکروساختار کامپوزیت‌ها و مواد پیشرفته) مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از مفهوم توزیع میکروساختارهای کامپوزیتی، روش همگن‌سازی می‌تواند برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی ساختاری استفاده شود. مسئله‌ای که پیشنهاد می‌شود جایگزین کردن میکروساختارهای متناوب کامپوزیتی با یک نوع مدل ماده‌ای معادل می‌باشد. به طور کلی، این تئوری مستقیماً فرمول‌های تحلیلی یا الگوریتم‌های عددی مناسب را برای بدست آوردن پاسخ مسائل مهندسی فراهم نمی‌کند. بنابراین، فاصله‌ای میان تئوری ریاضی همگن‌سازی و مکانیک مواد مرکب وجود دارد. این فاصله موجود، به صورت یک مانع اصلی برای گسترش کاربرد روش‌های تئوری ریاضی همگن‌سازی در کارهای عملی می‌باشد. برای حل این موضوع، مدل میکروساختاری همگن‌سازی و فرمولاسیون آن بایستی به خوبی اثبات شود.

در ادامه این قسمت فرآیند برای به دست آوردن تانسور الاستیسیته همگن‌سازی شده که مبنای اصلی طراحی مواد برای بهینه‌سازی توپولوژی می‌باشد، اشاره می‌شود.

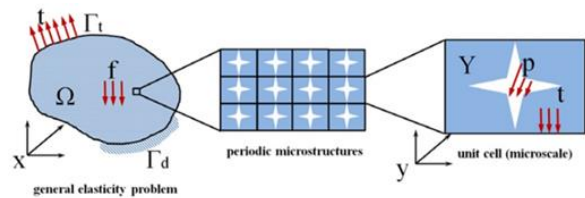


Fig. 1 The problem of an optimization process

شکل 1 یک مسئله (فرآیند) بهینه‌سازی^[8]

در این جا جامد الاستیک غیرهمگن که دامنه‌ای به اندازه Ω را در فضای R^3 اشغال می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. مرز هموار Γ متشکل از Γ_d (که در آن جابجایی‌ها توصیف می‌شوند) و مرز کششی Γ_t (که در آن نیروهای حجمی و کششی اعمال می‌شوند) می‌باشد. برای شرایط مرزی کل سیستم، اشتراکی میان سطح مرزی تحت کشش سطحی و سطح مرزی تحت جابجایی وجود ندارد، یعنی $\Gamma_d \cap \Gamma_t = \emptyset$. سلول واحد Y از میکروساختار مورد نظر در فضای R^3 بر حسب ابعاد سلول پایه در دستگاه مختصات میکروسکوپی به صورت $Y = [0, \gamma_1] \times [0, \gamma_2] \times [0, \gamma_3]$ تعریف می‌شود. همان‌طور که در [8] مشاهده می‌شود، سلول پایه مورد نظر مستطیلی می‌باشد و مرز حفره آن در اگر u میدان جابجایی باشد که تعادل ساختار الاستیک را تعیین می‌کند و v میدان جابجایی مجازی در نظر گرفته شود که به لحاظ سینماتیکی قابل قبول باشد، فرم دو سوپه انرژی^[9] برای کار مجازی داخلی یک ساختار الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} E_{pqrs} \varepsilon_{rs}^{(ij)} \varepsilon_{pq}^{(kl)} d\Omega \quad (1)$$

که در رابطه فوق E_{ijkl}^H تانسور سفتی می‌باشد که در کل دامنه متغیر است و $\varepsilon_{ij}(u)$ به صورت زیر برحسب جابجایی‌ها تعریف می‌گردد:

¹ Tensor
² Bendsøe

2-2- تصحیح سیمپ

مدول یانگ هر المان به وسیله تابع میان‌یابی زیر حاصل می‌شود:

$$E_e = E(\rho_e) = E_{min} + \rho_e^q (E_0 - E_{min}) \quad (4)$$

در رابطه فوق E_{min} سفتی ماده نرم (حفره) و یا فازی که در الگوریتم فاز فعال متناوب مقدار کمتری نسبت به سفتی فاز دیگر دارد، می‌باشد که به منظور جلوگیری از تکینگی¹ ماتریس سفتی در فرآیند المان محدود با مقدار بسیار کوچک غیر صفر در نظر گرفته می‌شود.

3-2- الگوریتم فاز فعال متناوب

تشریح الگوریتم متناوب فاز فعال در این بخش ارائه خواهد شد. در حال حاضر کدهای علمی و تجاری زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی باینری² بر اساس روش‌های مختلف وجود دارد. انگیزه برای توسعه الگوریتم فاز فعال متناوب، ارائه یک چارچوب کلی برای تبدیل کدهای بهینه‌سازی توپولوژی فاز باینری به چندگانه با حداقل تلاش و اصلاحات است. علاوه بر این، حفظ کارایی و استحکام الگوریتم‌های اصلی نیز از دیگر عواملی است که در کار حاضر مورد توجه قرار گرفته است. از آن‌جا که این الگوریتم به اندازه کافی کلی است، ارائه در این‌جا به صورت خلاصه است تا امکان استفاده از این الگوریتم در کلاس‌های مختلف از مشکلات بهینه‌سازی توپولوژی فراهم شود.

الگوریتم فاز فعال متناوب شامل تکرار بیرونی است که در آن

$$p \cdot \frac{p-1}{2} \quad (5)$$

ریزمسائل بهینه‌سازی توپولوژی فاز باینری به صورت جزئی، با استفاده از یک حل‌کننده بهینه‌سازی توپولوژی مناسب فاز باینری حل می‌شوند. این روش می‌تواند به صورت مستقل (موازی) یا متوالی به ترتیب مانند تکرارهای ژاکوبی³ و گاوس-سایدل⁴ انجام شود [13]. در حین حل هر زیرمسئله، توپولوژی $p-2$ فاز به عنوان آخرین مقادیر شناخته شده ثابت می‌شود و آن‌هایی که از دو مرحله باقی‌مانده (فاز فعال)، متغیر خواهند بود. اگر مراحل فعال با اشتراک‌های a و b مشخص شود، از $\rho_{a,b}$ برای نشان دادن بردار طراحی استفاده می‌شود که در آن ρ_a و ρ_b می‌تواند تغییر کند و برای ρ_i برای $i \neq \{a, b\}$ ثابت باشد. در فضای طراحی رابطه $\sum_{i=1}^p \rho_i = 1$ و در هر چرخه از فرآیند زیر مسئله‌سازی رابطه‌های زیر حکم‌فرما خواهد بود:

$$r_{ab} = 1 - \sum_{i=1, i \neq \{a,b\}}^p \rho_i \quad (6)$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$\rho_b = r_{ab} - \rho_a \quad (7)$$

که در آن‌ها r_{ab} باقی‌مانده درصد حجمی هنگام حل هر زیر مسئله است.

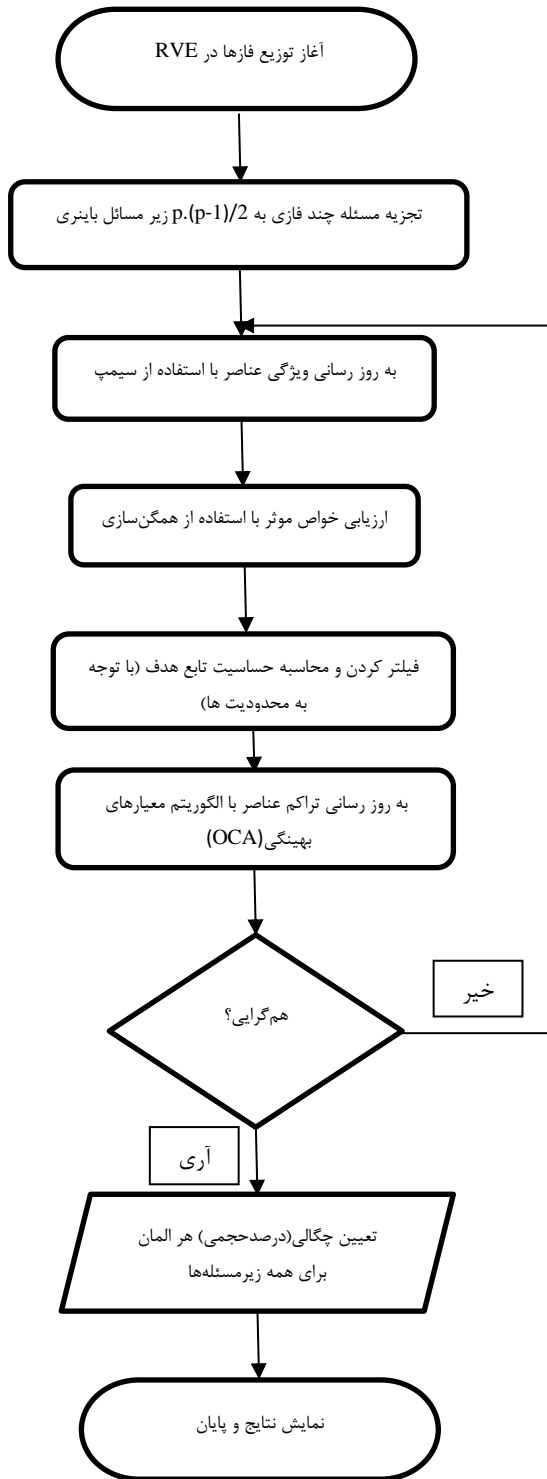


Fig. 2 The flowchart of solving the multiphase topology optimization process problem

شکل 2 روندنمای حل مساله (فرآیند) بهینه‌سازی توپولوژی چند فازی

4. Gauss-Seidel

1. Singularity
2. binary
3. Jacobi

بنابراین، یک الگوریتم فاز فعال متناوب، یک حل‌کننده بهینه‌سازی توپولوژی فاز مناسب است. از این پس به عنوان حل‌کننده بهینه‌سازی داخلی، این حل‌کننده نامیده می‌شود. به طور کلی می‌توان گفت با اصلاح الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی فاز باینری، حل‌کننده بهینه‌سازی داخلی آسان است. اولین اصلاح مورد نیاز، جایگزینی اپراتور خواص مواد فاز باینری با متناظر نمونه چند فاز مربوطه آن، در تناظر است. در الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی فاز باینری، فضای طراحی قابل قبول، ساختار ساده‌ای دارد.

4-2- الگوریتم معیار بهینگی¹

همان‌طور که در گام ششم روندنمای شکل 2 دیده می‌شود اجزای اصلی مسائل بهینه‌سازی دو فازی عبارتند از روش سیمپ (مواد همسانگرد جامد با جبران-سازی) [14] و تکنیک همگن‌سازی مجانبی [15 و 16] همراه با الگوریتم معیارهای بهینه [14]. مزیت اصلی کاربرد مشترک همگن‌سازی مجانبی و روش سیمپ، که تا حدی به دلیل محبوبیت آنها است، در استفاده آن‌ها از پارامترهای هر عنصر حوزه گسسته به عنوان متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی نهفته است [15]. از میان روش‌های مختلف موجود برای انجام طراحی ریزساختار، در اینجا از OCA [14]، برای به روز رسانی چگالی عنصر با فازهای تشکیل دهنده استفاده شده است. با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژی فاز باینری بر اساس OCA [14]، کسر حجمی بهینه دو فاز فعال محاسبه می‌شود. باید بیان کرد که OCA با حل تابع لاگرانژ زیرمشکلات پیاده‌سازی می‌شود و فرآیند به روز رسانی این روش بر اساس یک طرح به روز رسانی اکتشافی پیشنهاد شده در [16] است. اجزای اصلی این چارچوب الگوریتم فاز فعال متناوب، OCA مبتنی بر روش سیمپ و همگن‌سازی مجانبی است. روش پیشنهادی به شیوه قابل اعتنایی ساختارهای مرکب متخلخل و غیر متخلخل سه فازی را در فضایی کلی طراحی می‌کند. علاوه بر این، در تمام بهینه‌سازی‌های جستجوی توپولوژی، دو فاز از سه فاز همیشه نامرتب بودند تا ظرفیت طرح ترکیبی پیشنهادی را نشان دهند.

3- نتایج

در این مطالعه برای کسب ریزساختارهای تکرارشونده از تعداد 10000 المان مربعی استفاده شده است. انتخاب این تعداد المان برای مطالعه حاضر مناسب می‌نماید، چه این که ژیا و بریتکوف [9] در کارشان این تعداد المان را مبنا قرار داده است. پر واضح است که می‌توان تعداد المان‌ها را افزایش داد اما شدت افزایش محاسبات و تاثیر آن بر پارامتر زمان به گونه‌ای است که بایستی به حدی بهینه از المان و دقت محاسباتی اکتفا کرد. مقدار مدول الاستیسیته برای فازها عبارتند از 1، 2 و برای فاز تهی 10^{-9} واحد در نظر گرفته شده است. همچنین نسبت پواسون ماده ایزوتروپ نیز در محاسبات انجام شده مقداری برابر با 0.3 فرض می‌شود. همچنین مقادیر شعاع فیلترسازی $rf \leq 0.3$ اعمال می‌شود. برای انجام فرآیند همگن‌سازی مقدار پارامتر جبران-سازی $q \geq 3$ شایان ذکر است که معمولاً این پارامتر برای توابع هدف لزوماً به صورت یکسان اعمال نمی‌شود؛ البته موارد مشابه هم در این موضوع وجود دارند. باید بدانیم تابع هدف بر مبنای تانسور سفتی ریزساختار تشریح می‌شود. دسته‌ای از مواد دارای مدول برشی اکسترمومی هستند، نه صفحه تقارن و سه ثابت مستقل در تانسور الاستیسیته‌شان دارند. برای بهینه‌سازی مدول برشی باید پارامترهایی از تانسور نرمی (معکوس تانسور سفتی) که

3-1- بهینه‌سازی مدول برشی

برای انجام فرآیند بهینه‌سازی مدول برشی تابع هدفی که پیش‌بینی می‌شود رابطه زیر است:

$$Max. Shear = Q(3.3) \quad (8)$$

نتایج به دست آمده از فرآیند بهینه‌سازی مدول برشی در شکل‌های 3 تا 8 آمده است که در آن‌ها پیش‌فرض الگوی RGB (قرمز، سبز آبی) بوده است البته این پیش‌فرض همواره به هم‌گرایی فرآیند و یا عدم تقارن در ماتریس سازنده منجر نمی‌شود ناچار اعمال تغییراتی در جانشانی فازهای تشکیل دهنده الزامی می‌نماید. با هر تغییری هم می‌بایست فرآیند طراحی محکوم به هم‌گرایی شود (مانند آن‌چه در شکل‌های 3 تا 8 آمده است) و هم ماتریس متقارن با دقت خواسته شده به دست دهد (مانند رابطه 9).

$$[E^H]_{75\%(37.5\%-37.5\%)} = \begin{bmatrix} 0.1530 & 0.1013 & 0 \\ 0.1013 & 0.1530 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1009 \end{bmatrix} \quad (9)$$

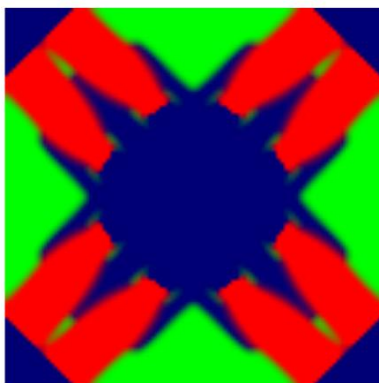


Fig. 3 The designed microstructure with a volume fraction of 0.375 and of phase 1 (blue) and phase 2 (green) of solid phases and 0.25 of void phase (red) and a shear modulus equal to 0.0258 in two dimensions
شکل 3 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.375 و از فاز 1 (آبی) و فاز 2 (سبز) از فازهای جامد و 0.25 از فاز تهی رنگ (قرمز) و مدول برشی برابر با 0.0258 در دو بعد

¹ Optimality Criteria Algorithm

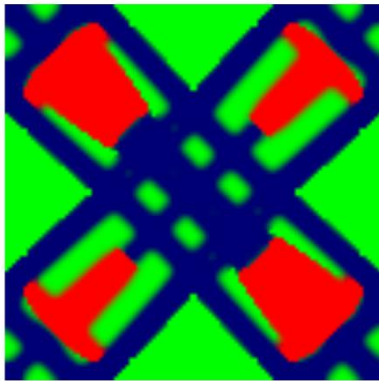


Fig. 7 The designed microstructure with a volume fraction of 0.20 and 0.45 respectively from phase 1 (red) and phase 2 (blue and 0.35 green for void) of solid phases and shear modulus equal to 0.0111 in two dimensions

شکل 7 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.20 و 0.45 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی و 0.35 سبز برای تهی) از فازهای جامد و مدول برشی برابر با 0.0111 در دو بعدی

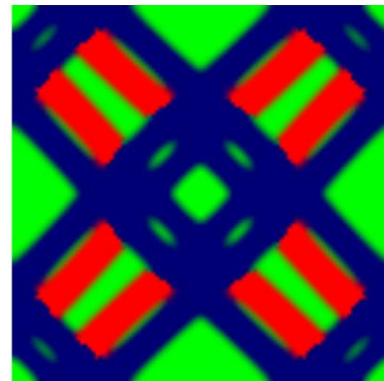


Fig. 4 The designed microstructure with a volume fraction of 0.2 and 0.55 respectively of phase 1 (red) and phase 2 (blue and 0.25 green representative of the void phase) of solid phases and a shear modulus equal to 0.0222

شکل 4 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.2 و 0.55 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی، و 0.25 سبز نماینده فاز تهی) از فازهای جامد و مدول برشی برابر با 0.0222

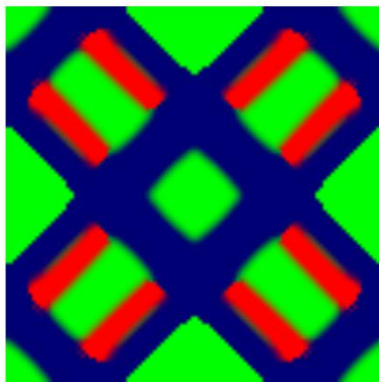


Fig. 8 The designed microstructure with a volume fraction of 0.15 (red) and 0.50 (blue and 0.35 for the void phase) of phase 1 and phase 2 of solid phases and shear modulus equal to 0.0197 in two dimensions, respectively

شکل 8 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.15 (قرمز) و 0.50 (آبی و 0.35 سبز برای فاز تهی) از فاز 1 و فاز 2 از فازهای جامد و مدول برشی برابر با 0.0197 در دو بعد

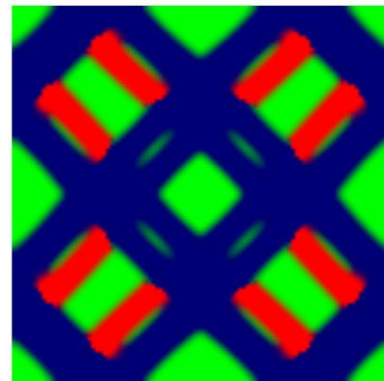


Fig. 5 the designed microstructure with volume percentage of 0.15 and 0.60, respectively, of phase 1 (red) and phase 2 (blue and green representing the void phase) of solid phases and shear modulus equal to 0.0330 in two dimensions

شکل 5 ریزساختار طراحی شده با درصد حجمی به ترتیب 0.15 و 0.60 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی و سبز نماینده فاز تهی) از فازهای جامد و مدول برشی برابر با 0.0330 در دو بعد

همان طور که از نتایج پیداست، با افزایش درصد حجمی فازهای جامد مدول برشی افزایش می‌یابد، اما برای افزایش درصد حجمی فاز سفت‌تر این خاصیت لزوماً افزایش نمی‌یابد (شکل 7). البته افزایش درصد حجمی فازهای جامد همواره افزایش مدول حجمی را به دنبال دارد، چرا که توزیع همه آن روی کل چینش ریزساختار و تانسور سازنده همگن‌سازی شده تاثیر مستقیم دارد، اما برای درصد حجمی فاز سفت‌تر به طور قطع نمی‌توان این ادعا را طرح کرد.

با دقت در نتایج به دست آمده به وضوح می‌بینیم که افزایش درصد حجمی فازهای جامد عموماً به افزایش خاصیت مورد نظر تابع هدف منجر می‌شود و البته می‌توان حتی عنوان کرد که افزایش درصد حجمی فازی که سفتی آن نسبت به فازهای دیگر بیشتر است، تاثیر بیش‌تری نیز دارد. البته در این باره ممکن است نمونه یا نمونه‌هایی بر رد این ادعا وجود داشته باشد مانند شکل 5 در مقایسه با شکل 4، که البته در همان شکل 5 نیز دارای تقارن کامل و ماتریس متقارنی نیست و می‌توان آن را ساختاری نه‌چندان مطلوب دانست. شایان ذکر است که در طراحی ریزساختار ما آزادی عمل مطلق در انتخاب فازها

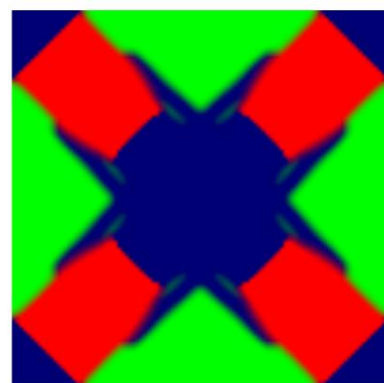


Fig. 6 The designed microstructure with a volume fraction of 0.325 of phase 1 (red) and phase 2 (green and 0.35 blue for the void phase) of solid phases and a shear modulus equal to 0.0209 in two dimensions.

شکل 6 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.325 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (سبز و 0.35 آبی برای فاز تهی) از فازهای جامد و مدول برشی برابر با 0.0209 در دو بعد

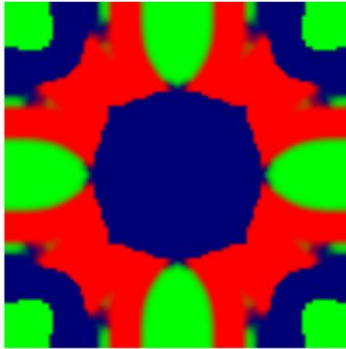


Fig. 9 The designed microstructure with a volume fraction of 0.375 of phase 1 (red) and phase 2 (blue and 0.25 green for the void phase) of the solid phases and the volume modulus (bulk) is equal to 0.2553 in two dimensions and 0.1910 in three dimensions

شکل 9 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.375 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی و 0.25 سبز برای فاز تهی) از فازهای جامد و مدول حجمی (بالک) برابر با 0.2553 در دو بعد و 0.1910 در سه بعد

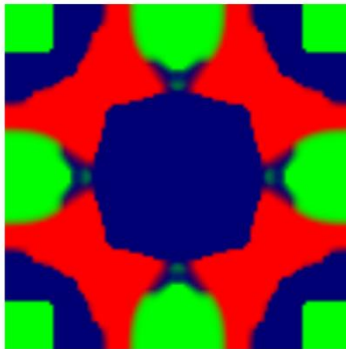


Fig. 10 The designed microstructure with a volume fraction of 0.35 (red) and 0.40 (blue and 0.25 for the void phase) of phase 1 and phase 2 of the solid phases and volume modulus equal to 0.2798 in two dimensions and 0.1965 in three dimensions, respectively

شکل 10 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.35 (قرمز) و 0.40 (آبی و 0.25 سبز برای فاز تهی) از فاز 1 و فاز 2 از فازهای جامد و مدول حجمی برابر با 0.2798 در دو بعد و 0.1965 در سه بعد

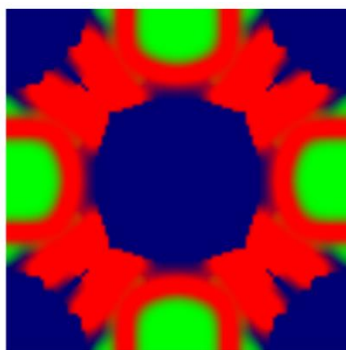


Fig. 11 The designed microstructure with a volume fraction of 0.425 of phase 1 (blue) and phase 2 (red and 0.15 green for the void phase) of the solid phases and a volume modulus equal to 0.3679 in two dimensions and 0.2915 in three dimensions

شکل 11 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.425 از فاز 1 (آبی) و فاز 2 (قرمز و 0.15 سبز برای فاز تهی) از فازهای جامد و مدول حجمی برابر با 0.3679 در دو بعد و 0.2915 در سه بعد

و به ویژه درصد حجمی هایشان نداریم و این امر تا حدی امری تجربی و تکنیکی انگاشته می‌شود. چه این که در طراحی ریزساختار دو بعدی چند فازی با نسبت پواسون منفی با ابتکارهایی نه‌چندان مانوس باز هم به هدف مورد نظر منجر نگشت. شایان توجه است که ریزساختارهای به دست آمده در این روش با استفاده از شعاع فیلتر 5 و یا 6 و ضریب جبران‌سازی 5 و یا غالباً 6 انجام گرفته است که به هیچ صورت به این معنی نیست که این بیش‌ترین مقدار تابع هدف طی این شرایط خواهد بود. چه این که در [7] مقدار یک تابع هدف با استفاده از دو ضریب جبران‌سازی متفاوت به دست آمده است که البته تفاوت اندکی در آن مقدار دارند قابل چشم‌پوشی است.

2-3- بهینه‌سازی مدول حجمی (بالک)¹

به منظور بهینه‌سازی مدول حجمی می‌بایست هم‌زمان مدول الاستیسیته موثر و نسبت پواسون موثر ریزساختار بهینه شود. برای بهینه‌سازی مدول حجمی تابع هدفی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$Max. Bulk = \left(\frac{Q(1,1) + Q(2,2) + Q(1,2) + Q(2,1)}{2} \right) \quad (10)$$

نتایج فرآیند بهینه‌سازی مدول حجمی برای ریزساختار سه بعدی چندفازی در حالت درصدهای حجمی مختلف در شکل‌های 9 تا 12 ارائه شده است. این شکل‌ها بهینه را نشان می‌دهند.

همان‌گونه که در شکل‌های 9 تا 12 مشاهده می‌شود، این مجموعه از نتایج با لحاظ سه نکته گردآوری شده‌اند؛ نخست آن که می‌بایست در موقع دریافت نتیجه نهایی درصد حجمی فازهای شرکت‌کننده در فرآیند همگن و بهینه‌سازی با درصد حجمی تعیین شده در آغاز فرآیند نباید تفاوت زیادی داشته باشد. دوم این که فازهای تشکیل شده در هر شکل به سهولت قابل تفکیک و از همه مهم‌تر به تعداد فازها تفاوت رنگی دیده شود که این ناشی از ماتریس درصدهای حجمی بزرگی است که یکی از تابع‌های فرآیند کدنویسی را شامل می‌شود. سوم این که تانسور الاستیسیته همگن‌سازی شده با تانسور الاستیسیته یک ماده ارتوتروپیک منطبق باشد یعنی که نه صفحه تقارن و سه ثابت مستقل در تانسور الاستیسیته‌شان داشته باشند که در تانسورهای ارائه شده قابل تصدیق است. نکته‌ای شایان گفتن است که جابه‌جایی ترکیب رنگی فازهای تشکیل دهنده است که باید برای توضیح آن معیار در این حالت ماتریس درصد حجمی نهایی و همگن شده است نه رنگ فازها، البته با حس مهندسی و شماتیک نیز قابل تشخیص است که کدام فازها با توجه به درصد حجمی‌شان متعلق به کدام رنگ هستند.

3-3- بهینه‌سازی سفتی محوری²

طی این مرحله از تحقیق نتایج بهینه‌سازی سفتی محوری در حالت دو بعدی ریزساختار چندفازی به نمایش گذارده می‌شود. طبیعی است در این بخش باید تابع هدف به منظور حصول نتیجه در حالت دو بعدی پیاده‌سازی شود. مطابق رابطه‌ای که در زیر می‌آید مجموع دو تانسور³ ماتریس همگن‌سازی شده الاستیسیته می‌بایست بهینه شود.

$$Max. Axial. Stiff. = (Q(1,1) + Q(2,2)) \quad (11)$$

1. bulk
2. Axial stiffness

3. tensor

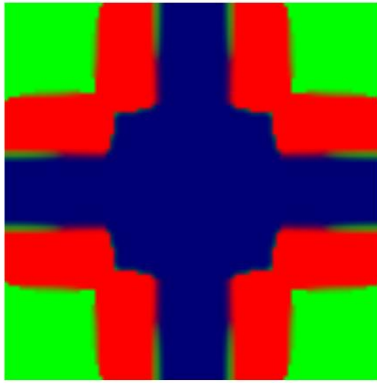


Fig. 14 The designed microstructure with a volume fraction of 0.35 (red) and 0.40 (blue and 0.25 for the void phase) of phase 1 and phase 2 of solid phases and axial stiffness equal to 0.2966 in two dimensions

شکل 14 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.35 (قرمز) و 0.40 (آبی) و 0.25 سبز برای فاز تهی) از فاز 1 و فاز 2 از فازهای جامد و سفتی محوری برابر با 0.2966 در دو بعد

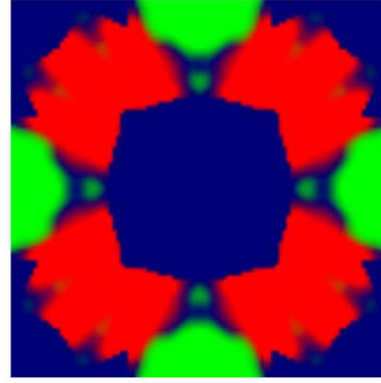


Fig. 12 The designed microstructure with a volume fraction of 0.40 (red) and 0.45 (blue and 0.15 void for green) of phase 1 and phase 2 of solid phases and volume modulus equal to 0.5083 in two dimensions and 0.3008 in three dimensions

شکل 12 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی به ترتیب 0.40 (قرمز) و 0.45 (آبی) و 0.15 تهی برای سبز) از فاز 1 و فاز 2 از فازهای جامد و مدول حجمی برابر با 0.5083 در دو بعد و 0.3008 در سه بعد

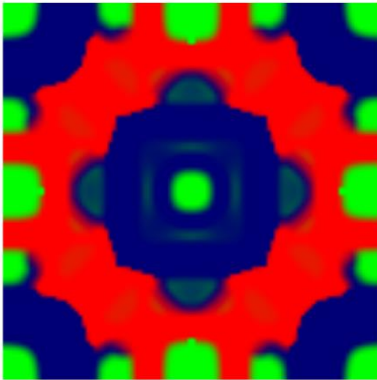


Fig. 15 The designed microstructure with a volume fraction of 0.425 of phase 1 (red) and phase 2 (blue and 0.15 green for the void phase) of solid phases and axial stiffness equal to 0.2767 in two dimensions and 0.3359 in three dimensions

شکل 15 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.425 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی) و 0.15 سبز برای فاز تهی) از فازهای جامد و سفتی محوری برابر با 0.2767 در دو بعد و 0.3359 در سه بعد

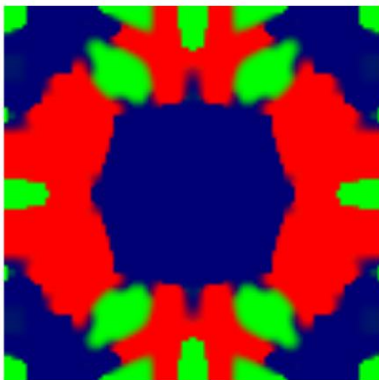


Fig. 16 The designed microstructure with a volume percentage of 0.40 of phase 1 (red) and 0.45 (blue and 0.15 green for the void phase) of phase 2 of solid phases and axial stiffness equal to 0.2944 in two dimensions

شکل 16 ریزساختار طراحی شده با درصد حجمی 0.40 از فاز 1 (قرمز) و 0.45 (آبی) و 0.15 سبز برای فاز تهی) از فازهای جامد و سفتی محوری برابر با 0.2944 در دو بعد



Fig. 13 The designed microstructure with a volume fraction of 0.375 of phase 1 (red) and phase 2 (blue and 0.25 green for the void phase) of solid phases and axial stiffness equal to 0.2889 in two dimensions and 0.3062 in three dimensions

شکل 13 ریزساختار طراحی شده با کسر حجمی 0.375 از فاز 1 (قرمز) و فاز 2 (آبی) و 0.25 سبز برای فاز تهی) از فازهای جامد و سفتی محوری برابر با 0.2889 در دو بعد و 0.3062 در سه بعد

سعی شده است در این قسمت برای درصدهای حجمی مختلف و البته ممکن گردآوری شود. در هر قسمت از نمونه‌گیری درصدهای حجمی بر مبنای وجود ماده و تغییرات در فازهای مادی و صرف نظر از فاز تهی (حفره¹) صورت گرفته است.

نتایج حاصل از بهینه‌سازی سفتی محوری برای طراحی ریزساختار متناوب در شکل‌های 13 تا 16 آمده است که در آن‌ها سفتی محوری تابع هدف لحاظ شده است که همان‌طور که اشاره شد ترتیب جاگذاری فازها در مواردی به جابه‌جایی نیاز پیدا کرده است تا هم‌گرایی حاصل و تقارن ماتریس سازنده تامین شود.

1. void

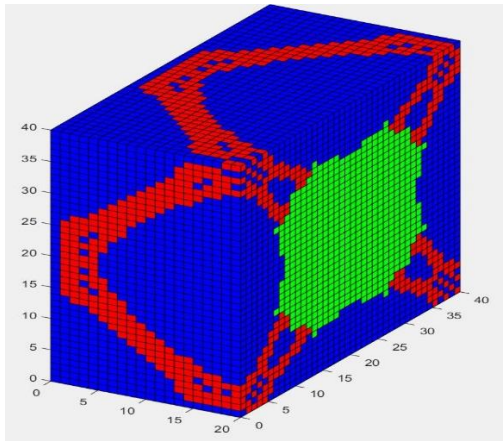


Fig. 17 The designed microstructure with volume percentage of 30 of phase 2 and 20 of phase 1 of solid phases and volume modulus equal to 0.7264 (Hashin-Shtrikman criterion: 0.7869)

شکل 17 ریزساختار طراحی شده با درصد حجمی 30 از فاز 2 و 20 از فاز 1 از فازهای جامد و مدول حجمی برابر با 0.7264 (معیار هشین-اشتریکمان: 0.7869)

روش به کار برده شده برای طراحی از آن چنان دقتی برخوردار است که تنها کمتر از 7٪ با معیار هشین-اشتریکمان تفاوت دارد. این الگو (معیار هشین-اشتریکمان) برای محاسبه مدول حجمی (بالک) ریزساختاری که تقارن مکعبی دارد (مانند ریزساختارهایی که در بالا ارائه شد) به ترتیب زیر نگاشته می‌شود:

$$K_{max}^{HS} = \frac{1}{\frac{\rho^1}{K^1+4/3G_{max}} + \frac{\rho^2}{K^2+4/3G_{max}} + \frac{\rho^3}{K^3+4/3G_{max}}} \quad (13)$$

به طوری که مقدار G_{max} از رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$G_{max} = \frac{E_{max}}{2(1+\nu)} \quad (14)$$

در رابطه بالا صورت کسر سفتی بیشینه است و ν نسبت پواسون همان است، که برای حل مسئله 0.3 فرض می‌شود.

5- نتیجه‌گیری

طی این فرآیند تحقیق و تحلیل دست‌یابی به خواص بهینه مکانیکی مدول برشی، حجمی و سفتی محوری مورد مطالعه قرار گرفت. و مدول برشی (=0.7264) ریزساختار با دقتی بالا نسبت به معیار هشین-اشتریکمان (=0.7869) منتج شد. به‌علاوه امکان‌سنجی دسترسی به ضریب پواسون منفی با تابع هدفی که ژیا معرفی کرده است مورد چالش واقع شد. این الگوریتم طراحی ریزساختار به محققان امکان می‌دهد که بتوانند مواد و ساختارهای دلخواه را با اعمال توابع هدف گوناگون دست‌یافتنی‌تر بدانند. همچنین می‌توان با الگوریتم زیر توابع هدفی جدید را برای ساختارهای جدید مورد آزمون و خطا و حتی ابداع قرار دهند.

جدول 1 نتایج بهینه‌سازی ریزساختاری

Table 1 Microstructural optimization results

مقدار عددی خاصیت مکانیکی بهینه شده	درصد حجمی فاز 1 و فاز 2 (به ترتیب)	خاصیت مکانیکی
0.2291	(37.5 و 37.5)	مدول برشی
0.2689	(55 و 20)	مدول برشی
0.3319	(60 و 15)	مدول برشی
0.1580	(32.5 و 32.5)	مدول برشی
0.1522	(45 و 20)	مدول برشی
0.2004	(50 و 15)	مدول برشی
0.1910	(37.5 و 37.5)	مدول حجمی (بالک)
0.1965	(40 و 35)	مدول حجمی (بالک)
0.2915	(42.5 و 42.5)	مدول حجمی (بالک)
0.3008	(45 و 40)	مدول حجمی (بالک)
0.3062	(37.5 و 37.5)	سفتی محوری
0.3270	(40 و 35)	سفتی محوری
0.3359	(42.5 و 42.5)	سفتی محوری
0.4447	(45 و 40)	سفتی محوری

با بررسی نتایج به دست آمده از بهینه‌سازی سفتی محوری این امر مشهود است که با افزایش درصد حجمی کل، سفتی محوری نیز افزایش می‌یابد؛ چرا که توزیع همه آن روی کل چینش ریزساختار و تانسور سازنده همگن‌سازی شده تاثیر مستقیم دارد، اما برای درصد حجمی فاز سفت‌تر به طور قطع نمی‌توان این ادعا را طرح کرد.

واضح است که نتایج درصد حجمی کم‌تر از 75٪ که آورده نشده به این دلیل است که ریزساختارهایی با آن مشخصات برای نمونه 65٪ فاز جامد برای بهینه‌سازی سفتی محوری تشکیل نشده است. البته بر خلاف شکل 7 که برای مدول حجمی یک عدم پیوستگی در نتایج پدید آمده بود، خوش‌بختانه در این جا حتی با نبود ریزساختارهایی کم‌تر از 75٪ فاز جامد، این عدم پیوستگی دیده نمی‌شود و پیوسته با افزایش درصد حجمی کلی و هم‌چنین فاز 2، سفتی محوری نیز افزوده می‌شود (جدول 1).

4- اعتبارسنجی

به منظور پیگیری کارایی و اعتبار روش مورد استفاده، ریزساختاری را در فضای سه بعدی طراحی شد (شکل 17) تا بتوان آن را با الگویی به نام هشین-اشتریکمان¹ که مورد ارجاع است. تطبیق داد. این طراحی حداقل می‌بایست یک المان 40تایی متقارن باشد و البته شدت و زمان محاسبات را چندین برابر می‌کند. به‌علاوه با توجه به حجم سنگین محاسباتی که این طراحی سه بعدی به دنبال داشت و انتظار می‌رفت که در ماتریس سازنده احیانا عدم تقارن‌هایی (هر چند بسیار نزدیک به صفر) مشاهده شود اما همان‌گونه که در رابطه 12 دیده می‌شود کاملا تقارن دارد.

$$[E^H]_{50\%(30\%-20\%)} = \begin{bmatrix} 0.7546 & 0.3379 & 0.3379 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3379 & 0.7546 & 0.1748 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3379 & 0.1748 & 0.7546 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3171 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3171 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3171 \end{bmatrix} \quad (12)$$

1 Hashin-Shtrikman (HS)

- [14] Bendsoe, M. P., Sigmund, O., "Topology optimization: theory, methods, and applications," Springer Science & Business Media. 2013.
- [15] Hassani, B., Hinton, E., "A review of homogenization and topology optimization I—homogenization theory for media with periodic structure, " Computers & Structures, Vol.69, No.6, pp. 707–717. 1998.
- [16] Hassani, B., Hinton, E., "A review of homogenization and topology optimization II—analytical and numerical solution of homogenization equations, " Computers & Structures, Vol.69, No.6, pp. 719–738. 1998.
- [17] Xia, L., Breitkopf, P., "Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab, " Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.52, No.6, pp. 1229–1241. 2015.
- [18] Bendsoe, M. P., Sigmund, O., "Optimization of structural topology, shape, and material, " Springer. Vol. 414. 1995.

6- فهرست علائم

Q	مجموع انرژی‌های متقابل المان‌ها ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
E^H	تانسور الاستیسیته همگن شده
rf	عدد شعاع فیلتر
u	جاب‌جایی
r	باقی‌مانده درصد حجمی
q	ضریب جبران‌ساز
p	فاز
N	تعداد المان

علائم یونانی

ρ	درصد حجمی
ε	کرنش
Ω	حجم المان (m^3)

7- مراجع

- [1] Fu, Y. F., Rolfe, B., Chiu, L. N., Wang, Y., Huang, X., Ghabraie, K., "Design and experimental validation of self-supporting topologies for additive manufacturing," Virtual Physical Prototyping, Vol. 14, No.4, pp. 382–394. 2019.
- [2] Liu, J., Gaynor, A. T., Chen, S., Kang, Z., Suresh, K., Takezawa, A., Li, L., Kato, J., Tang, J., & Wang, C. C., "Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing," Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.57, No. 6, pp. 2457–2483. 2018.
- [3] Osanov, M., Guest, J.K., "Topology Optimization for Architected Materials Design," Annual Review of Materials Research, Vol. 46, pp. 211–233. 2016.
- [4] Nkansah, M. A., Evans, K. E., Hutchinson, I. J., "Modelling the mechanical properties of an auxetic molecular network". Philosophical Magazine A, Vol.69, No.5, 993–1010. 1994.
- [5] Fujii, D., Chen, B. C., Kikuchi, N., "Topology optimization for compliant mechanisms using the homogenization method". 2001.
- [6] Wu, C. H., Tseng, K. Y., "Topology optimization of structures using modified binary differential evolution. Structural and Multidisciplinary Optimization," Vol. 42, pp. 939–953. 2010.
- [7] Sigmund, O., "Tailoring Materials with Prescribed Elastic Properties," International Journal of Solids and Structures, Vol.32, No.14, pp. 2101–2117. 1995.
- [8] Wang, Y., "Topological shape optimization of microstructures materials using level set methods," Doctoral dissertation, University of California, Berkeley. 2015.
- [9] Xia, L., Breitkopf, P., "Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab," Structural and Multidisciplinary Optimization," Vol.52, No.6, pp.1229–1241. 2015.
- [10] Bendsoe, M. P., Sigmund, O., "Material interpolation schemes in topology optimization Archive of Applied Mechanics," Vol.69, No.9–10, 635–654. 1999.
- [11] Ghabraee, K., "Optimizing the topology of plate structures using the SIMP method and removing checkered areas by stress and strain smoothing." Journal of Technical Faculty of Tehran University. 2007.
- [12] Sigmund, O. A., "99 line topology optimization code written in matlab," Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.21, No.2, pp. 120–127. 2001.
- [13] Tavakoli, R., Mohseni, S. M., "Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems," a 115-line Matlab implementation. 2014.