



حل تحلیلی انتقال حرارت ناپایا در استوانه فلز کامپوزیت به کمک تئوری لایه‌ای و روش حل دیفرانسیل مربعات

علی اصغر معصومی^{۱*}، غلامحسین رحیمی شرعرباف مقدس^۲، غلامحسین لیاقت^۲

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
۲- استاده، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، aa.masumi@modares.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله حل تحلیلی انتقال حرارت ناپایا در استوانه فلزی و فلز کامپوزیت به کمک تئوری لایه‌ای و روش حل دیفرانسیل مربعات بررسی می‌شود. بدین منظور پنج نمونه از مخزن استوانه‌ای فلزی و فلز کامپوزیت مورد تحلیل انتقال حرارت ناپایا قرار گرفته شده است. شرایط حرارتی حاکم بر مسئله از یک شرایط کاربردی و تجربی استخراج شده است. هدف از این تحقیق بررسی رفتار انتقال حرارت در مخازن مذکور می‌باشد. لذا ابتدا معادلات حاکم بر انتقال حرارت در یک مخزن استوانه‌ای چند لایه بدست آمده و سپس با توجه به رفتار متفاوت لایه‌های مختلف در انتقال حرارت جهت بررسی دقیق انتقال حرارت در لایه‌ها از تئوری لایه‌ای استفاده خواهد شد. پس از استخراج روابط حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری لایه‌ای این روابط به فرم معادلات ماتریسی مربوط به روش حل دیفرانسیل مربعات نوشته شده و برای حل معادلات بدست آمده به فرم دیفرانسیل مربعات از کد برنامه نویسی متلب استفاده شده است. پس از استخراج نتایج به بحث و بررسی چگونگی تغییرات دما در لایه‌های مختلف و نحوه رفتار حرارتی در این مخازن پرداخته شده و آنگاه برای صحت گذاری نتایج حل بدست آمده از تئوری لایه‌ای و روش حل دیفرانسیل مربعات، مدلسازی و تحلیل عددی انتقال حرارت یکی از مخازن مورد نظر در نرم افزار المان محدود آباکوس صورت گرفته است. نتایج بدست آمده از این نرم افزار با نتایج برنامه نویسی بدست آمده با تئوری لایه‌ای و روش حل دیفرانسیل مربعات مورد مقایسه قرار گرفته شده و در انتها روش حل استفاده شده با روش حل دقیق معادلات انتقال حرارت در چند مرجع دیگر مقایسه شده است.</p>	<p>دریافت: ۹۵/۱۱/۱۱ پذیرش: ۹۵/۱۲/۲۳</p> <p>کلیدواژه‌گان: دیفرانسیل مربعات مخزن فلز کامپوزیت تئوری لایه‌ای آنالیز انتقال حرارت المان محدود</p>

Transient heat transfer analysis in composite metal cylindrical vessel using the layerwise theory and differential quadrature method

Ali Asghar Masoumi^{*}, Gholam Hosain Rahimi Sharbaf Moghadas, Gholam Hosain Liyaghat

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115143, Tehran, Iran, aa.masumi@modares.ac.ir.

Keywords
Differential quadrature,
Composite metal vessel
Layerwise theory
Heat transfer analysis
Finite element

Abstract
In this paper, transient heat transfer analysis in composite metal cylindrical vessel will be investigated using the layerwise theory and differential quadrature method. For this purpose, five samples from the metallic cylindrical vessel and composite metal cylindrical vessel has been under transient heat transfer analysis. Thermal conditions of governing the issue has been extracted from a practical and experimental conditions. The aim of this research is study and investigate the behavior of heat transfer in the vessels mentioned. Therefore, the governing equations of heat transfer is achieved in a multilayered cylindrical vessel. Due to the different behavior of multilayer cylindrical in heat transfer, the analysis is to be done using the layerwise theory in order to obtain more accuracy. Then, the governing equations of heat transfer are derived for this vessel and are solved by differential quadrature method. In differential quadrature method, to solve the governing relations, these equations must be in the form of the matrix equations. The MATLAB programming code to be used to solve this matrix equations. After extracting result, temperature changes and heat transfer behavior in multilayer cylindrical vessel versus time have been discussed. To validate the resulting solution of the layerwise theory and differential quadrature method, modeling and numerical analysis of heat transfer in Abaqus finite element software done and the results of this software were compared with the solution of differential quadrature. Finally, the results of this study have been compared with exact solution of heat transfer equations in the several reference

۱- مقدمه
تجهیزات و سازه‌ها (با حفظ مقاومت مکانیکی) و کاهش هزینه‌ها منجر می‌شود. امروز استفاده از مواد مرکب برای ساخت تجهیزات، ماشین آلات و سازه‌ها توسعه چشمگیری پیدا کرده است. استفاده از این مواد به سبک سازی تجهیزات و سازه‌ها (با حفظ مقاومت مکانیکی) و کاهش هزینه‌ها منجر می‌شود. استفاده از این مواد در بعضی صنایع مانند صنایع شیمیایی، پره‌های توربین-های گازی، صنایع نظامی، هوافضا و مانند آن کاربرد فراوان دارد. بررسی‌های

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:
Masoumi, A. A. Rahimi Sharbaf Moghadas, G. H. and Liyaghat, G. H., "Transient heat transfer analysis in composite metal cylindrical vessel using the layerwise theory and differential quadrature method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 3, pp. 347-358, 2017.

جهت مشتقات زمانی و با کمک کد برنامه نویسی متلب¹ استفاده می‌شود. نتایج بدست آمده با تحلیل انتقال حرارت در نرم افزار المان محدود آباکوس و حل سایر مراجع مورد مقایسه قرار خواهد گرفت.

۲- معادلات حاکم بر انتقال حرارت استوانه کامپوزیتی

در این بخش به بررسی روابط حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی پرداخته می‌شود به طور کلی رابطه انتقال حرارت در مواد اورتوتروپ به صورت رابطه (1) می‌باشد [19].

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه (1)، q شار حرارتی و \bar{k}_{ij} ضرایب انتقال حرارت هدایتی کامپوزیت در دستگاه اصلی یا مرجع می‌باشد. شکل 1 مختصات اصلی و فرعی در کامپوزیتها را نشان می‌دهد مختصات اصلی یا مرجع (XYZ) همیشه ثابت می‌باشد ولی مختصات فرعی ($x_1x_2x_3$) با چرخش زوایای پیچش الیاف در کامپوزیت تغییر خواهد نمود به طوری که محور X در راستای الیاف، محور Y عمود بر راستای الیاف در صفحه لایه کامپوزیتی و محور Z عمود بر صفحه لایه قرار دارند و این دو مختصات به مقدار زاویه θ با هم اختلاف دارند.

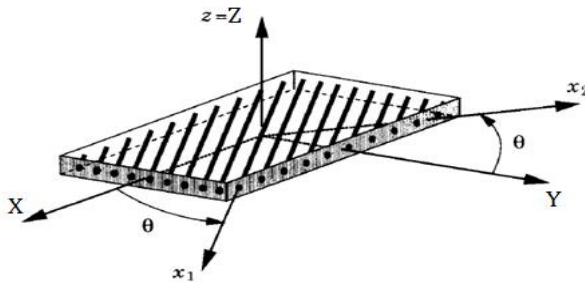


Fig. 1 On-axis and off-axis coordinate system

شکل 1 دستگاه مختصات اصلی و فرعی

مطابق قاعده رفت و برگشتی در ترمودینامیک، تانسور ضرایب هدایت باید متقارن باشد یعنی برای تمامی مواد موجود در طبیعت بایستی $k_{ij} = k_{ji}$ همچنین بر اساس قانون دوم ترمودینامیک مقادیر روی قطر اصلی تانسور ضریب هدایت مثبت هستند و بین درآیه‌ها بایستی رابطه زیر برقرار باشد [19].

$$k_{ii}k_{jj} \geq k_{ij}^2 \quad \text{for: } i \neq j$$

شکل 2 یک استوانه با رشته پیچی الیاف به دور آن را نشان می‌دهد در این شکل r, θ, z مختصات اصلی یا مرجع در سیستم مختصات استوانه‌ای می‌باشد L خط مماس بر روی استوانه در جهت الیاف و t خط مماس بر روی استوانه در جهت θ می‌باشد. زاویه بین L و t می‌باشد که زاویه بین مختصات اصلی و فرعی می‌باشد. قانون فوریه در انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای مطابق رابطه (2) می‌باشد [19].

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

علمی بیشتر بر رفتار این مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی متمرکز بوده و کمتر به بررسی پدیده انتقال حرارت در این مواد پرداخته شده است. تاکنون فعالیت‌هایی در زمینه تحلیل انتقال حرارت در مواد غیر ایزوتروپ انجام شده است. تحلیل‌های اولیه عمدتاً بر انتقال حرارت یک بعدی در کریستال‌های غیر ایزوتروپ متمرکز بوده است [1-2] به تدریج و با توسعه دانش مواد مرکب، انتقال حرارت در این مواد نیز مورد توجه قرار گرفت. مقاله موله‌ن [3] در مورد پدیده‌های پخش غیردائم در استوانه اورتوتروپیک یکی از اولین فعالیت‌ها در این زمینه است. امروز نیز فعالیت‌های مستمری در راستای ارائه فرمول‌بندی-های جدید و بررسی انتقال حرارت در مواد مرکب صورت می‌گیرد در این زمینه می‌توان به مقالات گولچان [4] و شی کیانگ [5] اشاره کرد. گیرینگارد [6] به بررسی تئوری انتقال حرارت و تعیین خواص هدایتی در مواد مرکب را مورد بررسی قرار داد. بررسی انتقال حرارت در فرآیند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه می‌توان به پژوهش حسن و همکاران [7] در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره کرد. در این پژوهش شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لایه‌های کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهم [8] به تحلیل انتقال حرارت کاربردی به روش المان محدود در مواد غیرایزوتروپ پرداخته است. در زمینه ارائه تحلیل‌های دقیق حرارتی برای مواد مرکب نیز تلاش‌هایی انجام شده است. به عنوان نمونه سان [9] حل تحلیلی انتقال حرارت یک بعدی غیردائم را در بلوک کامپوزیتی ارائه کرده است. اولسوکا [10] نیز با استفاده از توابع گرین و فرمول‌بندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسطه‌های کامپوزیتی به دست آورده است. لو و همکاران [11-12] حل‌های دقیقی را برای انتقال حرارت غیردائم در استوانه کامپوزیتی در جهات شعاع و محور استوانه و در شرایط مرزی و اولیه مختلف ارائه کرده است. بهادر و همکاران [13] یک حل تحلیلی برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در فین-های استوانه‌ای با ضرایب هدایت گرمایی اورتوتروپ ارائه داده و نتایج را با حل عددی به روش اجزاء محدود مقایسه نموده اند. کیهانی و همکاران [14-15] حل تحلیلی دقیق و همچنین حل تحلیلی عمومی هدایت در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای در جهت‌های شعاعی و زاویه‌ای را مورد بررسی قرار داده اند این حل تنها برای لوله‌های کامپوزیتی و مخازنی با نسبت طول به شعاع زیاد معتبر است. امیری و همکاران [16] حل دقیق ناپایا انتقال حرارت در مخزن استوانه‌ای کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. مه‌پاترا و همکاران [17] تعیین ضریب هدایت کامپوزیت ترکیب شده از غبار چوب و اپوکسی را مورد بررسی قرار دادند آنها به این نتیجه رسیدند که کامپوزیت با 35.5 درصد غبار چوب و چسب اپوکسی می‌تواند عایق مناسبی باشد. موسائی و همکاران [18] حل دقیق انتقال حرارت پایدار در استوانه و کره جدار ضخیم را انجام دادند. با توجه به مقالات بررسی شده ملاحظه می‌گردد که در هیچ یک از مقالات مورد بررسی تحلیل انتقال حرارت ناپایا با استفاده از تئوری لایه‌ای وجود ندارد. در حل‌های ارائه شده عمدتاً معادله توزیع دما در راستای ضخامت بدست نیامده و دما بصورت یکنواخت و ثابت فرض شده است. در تحقیق حاضر تحلیل و بررسی انتقال حرارت ناپایا در مخزن استوانه‌ای برای پنج نمونه از مخزن فلزی و فلز کامپوزیت با استفاده از تئوری لایه‌ای پرداخته می‌شود. میدان دما در تمام مخازن در راستای ضخامت بدست خواهد آمد. پس از استخراج روابط حاکم بر حرارت با استفاده از تئوری لایه‌ای جهت حل معادلات حاکم از روش عددی دیفرانسیل مربعات به همراه روش نیومارک

¹ Matlab

$$k_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + (m_1^2 k_{11} + n_1^2 k_{22}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + (n_1^2 k_{11} + m_1^2 k_{22}) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2 m_1 n_1 (k_{11} - k_{22}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z} = \rho c_p \quad (6)$$

۲- معادلات حاکم در تئوری لایه‌ای

در این بخش به بررسی معادلات حاکم انتقال حرارت با استفاده از تئوری لایه‌ای پرداخته می‌شود دلیل اصلی استفاده از این تئوری نسبت به تئوری کلاسیک، تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه بالاتر دقت این تئوری در پیش بینی رفتار دمایی در ضخامت استوانه می‌باشد چون نمودار گردایان دما در راستای ضخامت استوانه دارای تغییرات غیر خطی بوده و تئوری های مذکور با پیش بینی رفتار خطی دارای دقت مناسبی در تحلیل دمایی نخواهد بود از طرفی چون مخزن مورد تحلیل در این تحقیق یک مخزن غیر ایزوتروپ می‌باشد لذا با توجه به پیچیدگی رفتار دمایی و یکسان نبودن این رفتار در همه لایه‌ها برای پیش بینی درست رفتار دمایی در این لایه‌ها از تئوری لایه-ای در این تحقیق استفاده شده است. دما بصورت شماتیک در تئوری لایه‌ای در شکل 4 نشان داده شده است میدان دما به فرم تئوری لایه‌ای برای پوسته استوانه‌ای متقارن را می‌توان به صورت رابطه (7) نوشت [20-24].

$$T(r, z, t) = \sum_{l=1}^{N_l} T_l(z, t) \varphi^l(r) \quad N_l = N_e + 1 \quad (7)$$

در رابطه فوق، I نمایانگر شماره نود انتگرالگیری، تابع φ^I یک تابع درونیاب برای تئوری لایه‌ای، N_e تعداد لایه، و N_l تعداد نود انتگرالگیری می‌باشد. شکل 4 نمودار شماتیک تابع درونیاب به صورت خطی را نشان می‌دهد. تعداد N_e لایه، برای لایه‌های انتگرالگیری می‌توان در نظر گرفت. باید دقت نمود که این تعداد مستقل از تعداد لایه تشکیل دهنده کامپوزیت می‌باشد.

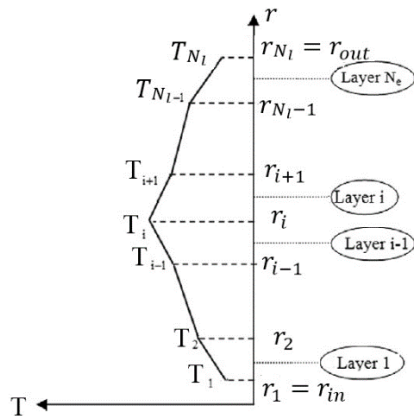


Fig. 4 Schematic diagram of temperature changes and the linear approximation function $\varphi^l(r)$ used in the layerwise theory
 شکل 4 نمودار شماتیک تغییرات دما و تابع تقریب خطی $\varphi^l(r)$ استفاده شده در تئوری لایه‌ای

با جاگذاری معادله (7) در معادله (6) می‌توان نوشت:

$$\delta \sum_{l=1}^{N_l} T_l \frac{\partial^2(\varphi^l)}{\partial r^2} k_{22} + \sum_{l=1}^{N_l} \frac{T_l k_{22}}{r} \frac{\partial(\varphi^l)}{\partial r} + \sum_{l=1}^{N_l} (k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta) \varphi^l \frac{\partial^2(T_l)}{\partial z^2} = \sum_{l=1}^{N_l} \rho_0 c_p \frac{\partial(T_l \varphi^l)}{\partial t} \quad (8)$$

تابع درونیاب خطی به صورت رابطه (9) تعریف می‌شود [23].

$$\varphi^l(r) = 1 - \frac{r-r_1}{r_2-r_1} \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

اگر مانند شکل 3 شار حرارتی در المانی از یک استوانه در نظر گرفته شود و بالانس انرژی در این المان نوشته شود معادله (2) به شکل معادله 4 نوشته خواهد شد.

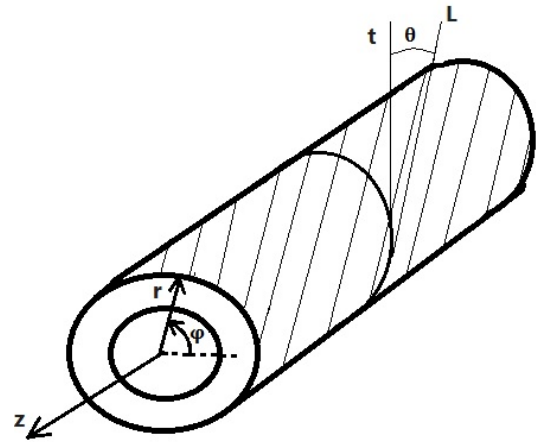


Fig. 2 Direction of fibers in a cylindrical laminate

شکل 2 جهت الیاف در یک استوانه چند لایه کامپوزیتی

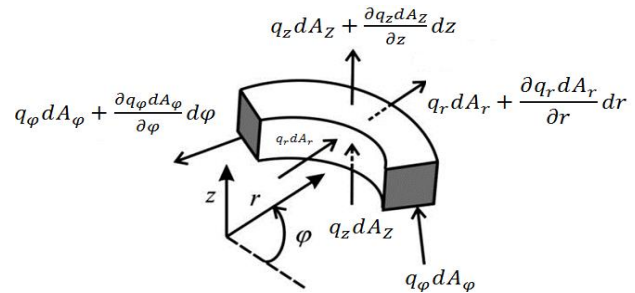


Fig. 3 Heat fluxes in a cylindrical element

شکل 3 شارهای حرارت در یک المان استوانه‌ای

در شکل 3 مقادیر اندازه سطوح و حجم المان عبارتند از:

$$dA_r = r d\theta dz \quad dA_\theta = dr dz \quad dA_z = r d\theta dr \quad dV = r dr d\theta dz \quad (3)$$

$$\bar{k}_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{k}_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \bar{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\bar{k}_{12} + \bar{k}_{21}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial r} + (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} + \frac{\bar{k}_{13}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} + (\bar{k}_{23} + \bar{k}_{32}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

در رابطه (4) چگالی ρ و ثابت گرمای ویژه و ماتریس \bar{k} با رابطه

(5) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= k_{22} \\ \bar{k}_{22} &= m_1^2 k_{11} + n_1^2 k_{22} \\ \bar{k}_{33} &= n_1^2 k_{11} + m_1^2 k_{22} \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 0 \\ \bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = m_1 n_1 (k_{11} - k_{22}) \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه فوق k_{11} ضریب هدایت حرارتی در جهت الیاف، k_{22} ضریب

هدایت حرارتی در جهت عمود بر الیاف، m_1 و n_1 به ترتیب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ می‌باشد با جاگذاری رابطه (5) در رابطه (4) می‌توان نوشت:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta)}{\rho_0 c_p} \varphi^I \varphi^J dr = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{(k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta)}{\rho_0 c_p} \varphi^I \varphi^J dr = C^{IJ} \quad (18)$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi^I \varphi^J dr = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \varphi^I \varphi^J dr = D^{IJ} \quad (19)$$

با جاگذاری معادلات (16) تا (19) در رابطه (15) سیستم معادلات تشکیل یافته به صورت رابطه (20) خواهد بود:

$$\delta E = \int_{\Omega} \left(\sum_{I=1}^{N_I} \sum_{J=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{IJ} + T_I B^{IJ} + \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} C^{IJ} - \frac{\partial(T_I)}{\partial t} D^{IJ} \right) \delta T_J dA \quad (20)$$

با جاگذاری معادله (20) در معادله (13) و با استفاده از اصل اولر-لاگرانژ در حل معادلات می‌توان معادلات حاکم بر دما در یک استوانه چند لایه با استفاده از تئوری لایه‌ای را بصورت رابطه (21) نوشت:

$$\sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{I1} + T_I B^{I1} + \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} C^{I1} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{\partial(T_I)}{\partial t} D^{I1} \right) \\ \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{I2} + T_I B^{I2} + \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} C^{I2} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{\partial(T_I)}{\partial t} D^{I2} \right) \\ \vdots \\ \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{IN_I} + T_I B^{IN_I} + \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} C^{IN_I} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{\partial(T_I)}{\partial t} D^{IN_I} \right) \quad (21)$$

در این رابطه $\{T_1\}, \dots, \{T_{N_I}\}$ دما در نودهای انتگرال‌گیری می‌باشد. بنابراین به تعداد نودهای انتگرال‌گیری، معادله تشکیل می‌گردد. برای انتگرال‌گیری ترم‌های مشتق دوم در رابطه بالا می‌توان از رابطه (22) استفاده نمود.

$$\sum_{I=1}^{N_I} \sum_{J=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{IJ} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\sum_{J=2}^{N_e} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) E^{IJ} \right) + \left(\frac{2T_2 - 2T_1}{(r_2 - r_1)^2} \right) E^{I1} + \left(\frac{2T_{N_e} - 2T_{N_I}}{(r_{N_e} - r_{N_I})^2} \right) E^{IJ} = \sum_{I=1}^{N_I} \sum_{J=1}^{N_I} (K_{diff}^{IJ}) \begin{Bmatrix} \{T_1\} \\ \{T_2\} \\ \vdots \\ \{T_{N_I}\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

با در دست داشتن معادلات، باید از یک روش عددی برای حل معادلات استفاده نمود. در این قسمت از روش دیفرانسیل مربعات برای حل معادلات استفاده شده است. کلیات این روش در ادامه توضیح داده خواهد شد.

۴- روش حل دیفرانسیل مربعات

مطابق مبانی نظری در تئوری دیفرانسیل مربعات مشتق مرتبه اول نسبت به یک متغیر از رابطه (23) بدست می‌آید [28-29].

$$\frac{\partial T(x_i, y)}{\partial x} = T^{(1)}(x_i, y) = \sum_{j=1}^{N_x} a_{ij} T(x_j, y), \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (23)$$

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k) M^{(1)}(x_j)}, \quad \text{for } i \neq j \quad (24)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N_x} (x_i - x_k) \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{N_x} a_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} a_{ij} \quad (26)$$

در معادلات فوق $T(x_j, y)$ مقدار تابع در نقطه x_j و $T^{(1)}(x_i, y)$ مقدار مشتق اول تابع $T(x, y)$ در نقطه x_i ، N_x تعداد نقاط شبکه‌بندی شده در

$$\varphi^I(r) = \begin{cases} \frac{r - r_{I-1}}{r_I - r_{I-1}} & r_{I-1} \leq r \leq r_I \\ 1 - \frac{r - r_I}{r_{I+1} - r_I} & r_I \leq r \leq r_{I+1} \end{cases}, \quad I = 2, 3, \dots, N_e$$

$$\varphi^1(r) = 1 - \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

$$\varphi^{N_I}(r) = \frac{r - r_{N_e}}{r_{N_e+1} - r_{N_e}}, \quad r_{N_e} \leq r \leq r_{N_e+1} \quad (9)$$

مشتق اول توابع فوق به شکل رابطه (10) می‌باشد.

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial r} = - \frac{1}{r_2 - r_1} \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

$$\frac{\partial \varphi^I}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{r_I - r_{I-1}}, & r_{I-1} \leq r \leq r_I \\ -\frac{1}{r_{I+1} - r_I}, & r_{N_e} \leq r \leq r_{N_e+1} \end{cases} \quad I = 2, 3, \dots, N_e$$

$$\frac{\partial \varphi^{N_I}}{\partial r} = \frac{1}{r_{N_e+1} - r_{N_e}} = \Gamma^I \quad r_{N_e} < r < r_{N_e+1} \quad (10)$$

مشتق مرتبه دوم توابع درونیاب مساوی صفر خواهد بود. برای جبران این مساله از روش تفاضل محدود در کنار تئوری لایه‌ای کمک گرفته شده است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) \varphi^I: \text{ لایه‌های داخلی}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{2T_{N_e} - 2T_{N_e+1}}{(r_{N_e+1} - r_{N_e})^2} \right) \varphi^I: \text{ لایه بالایی}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \sum_{I=1}^{N_I} \left(\frac{2T_2 - 2T_1}{(r_2 - r_1)^2} \right) \varphi^I: \text{ لایه پائینی} \quad (11)$$

بنابراین با در دست داشتن مشتقات تابع درونیاب، فرم معادله ترمودینامیک به صورت رابطه (12) خواهد بود:

$$k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \sum_{I=1}^{N_I} \frac{T_I k_{22}}{r} \Gamma^I + \sum_{I=1}^{N_I} (k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta) \varphi^I \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} = \sum_{I=1}^{N_I} \rho_0 c_p \varphi^I \frac{\partial(T_I)}{\partial t} \quad (12)$$

معادلات حاکم برای تئوری لایه‌ای را می‌توان با استفاده از اصل تغییرات

[25-27] به صورت رابطه (13) نوشت.

$$\int_0^t (\delta E) dt = 0 \quad (13)$$

در معادله فوق $\delta E = E \cdot \delta T$ فرم تغییرات معادله حرارت بوده و به صورت رابطه (14) نوشته خواهد شد:

$$\delta E = \int_{\Omega} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \sum_{I=1}^{N_I} \frac{T_I k_{22}}{r} \Gamma^I + \sum_{I=1}^{N_I} (k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta) \varphi^I \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} - \sum_{I=1}^{N_I} \rho_0 c_p \varphi^I \frac{\partial(T_I)}{\partial t} \right) (\sum_{J=1}^{N_I} \delta T_J \varphi^J) dr dA \quad (14)$$

در معادله (14) ضخامت پوسته استوانه‌ای می‌باشد با جاگذاری معادله (11) در معادله (14) می‌توان نوشت:

$$\delta E = \int_{\Omega} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sum_{I=1}^{N_I} k_{22} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) \varphi^I + \sum_{I=1}^{N_I} \frac{T_I}{r} \Gamma^I k_{22} + \sum_{I=1}^{N_I} (k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta) \varphi^I \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} - \sum_{I=1}^{N_I} \rho_0 c_p \varphi^I \frac{\partial(T_I)}{\partial t} \right) (\sum_{J=1}^{N_I} \delta T_J \varphi^J) dr dA = \int_{\Omega} \left(\sum_{I=1}^{N_I} \sum_{J=1}^{N_I} \left(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k_{22} \left(\frac{T_{I+1} + T_{I-1} - 2T_I}{(r_{I+1} - r_I)^2} \right) \varphi^I \varphi^J + T_I \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\Gamma^I \varphi^I k_{22}}{r} + \frac{\partial^2(T_I)}{\partial z^2} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (k_{22} \cos^2 \theta + k_{11} \sin^2 \theta) \varphi^I \varphi^J - \frac{\partial(T_I)}{\partial t} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_0 c_p \varphi^I \varphi^J \right) \delta T_J \right) dr dA \quad (15)$$

ساده سازی معادله فوق در روابط (16) تا (19) بیان شده است:

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{k_2}{\rho_0 c_p} \right) \varphi^I \varphi^J dr = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left(\frac{k_2}{\rho_0 c_p} \right) \varphi^I \varphi^J dr = E^{IJ} \quad (16)$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\Gamma^I \varphi^I \left(\frac{k_2}{\rho_0 c_p} \right)}{r} dr = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Gamma^I \varphi^I \left(\frac{k_2}{\rho_0 c_p} \right)}{r} dr = B^{IJ} \quad (17)$$

۵-حل مسئله

در این مطالعه پنج نمونه مخزن جهت تحلیل در نظر گرفته شده است شرایط عمومی شامل طول، شعاع و ضخامت همه مخازن به ترتیب 1000، 65 و 6 میلیمتر می‌باشد. نمونه اول یک مخزن فلز کامپوزیت با ضخامت 2 میلیمتر آلومینیوم به عنوان لاینر و 4 میلیمتر کامپوزیت، نمونه دوم یک مخزن فلز کامپوزیت با ضخامت 2 میلیمتر لاینر فولادی و 4 میلیمتر کامپوزیت، نمونه سوم یک مخزن کامپوزیتی، نمونه چهارم یک مخزن آلومینیومی و مخزن پنجم یک مخزن فولادی می‌باشد. مشخصات حرارتی مواد مورد استفاده شامل فولاد، آلومینیوم و کامپوزیت تی 700 در جداول 1 تا 3 ذکر شده است. این مخزن که جهت شرایط کاربردی و عملی خاصی استفاده می‌شود داخل آن تحت گازهای داغ ناشی از سوخت احتراق یک سوخت دو پایه قرار دارد. با استفاده از نرم افزار بالستیک داخلی دمای گاز داخل مخزن 3150 درجه سلسیوس بدست آمده است. مخزن در طول زمانی 13 میلی ثانیه در معرض این گاز قرار خواهد داشت. لایه بیرون مخزن با هوای محیط در تماس می‌باشد.

جدول ۱ خواص حرارتی آلومینیوم [30-33]

مقدار	واحد	خواص
2700	$\rho(kg/m^3)$	چگالی
900	$c_p(\frac{J}{kg \cdot ^\circ K})$	ضریب گرمای ویژه
24	$\alpha(\frac{1}{^\circ K} \cdot 10^{-6})$	ضریب انبساط گرمایی
210	$k(\frac{W}{m \cdot ^\circ K})$	هدایت گرمایی

جدول ۲ خواص حرارتی فولاد 4340 [30-33]

مقدار	واحد	خواص
7800	$\rho(kg/m^3)$	چگالی
460	$c_p(\frac{J}{kg \cdot ^\circ K})$	ضریب گرمای ویژه
12.4	$\alpha(\frac{1}{^\circ K} \cdot 10^{-6})$	ضریب انبساط گرمایی
44	$k(\frac{W}{m \cdot ^\circ K})$	هدایت گرمایی

جدول ۳ خواص حرارتی کامپوزیت تی 700 با درصد حجمی الیاف پنجاه درصد [32-35]

مقدار	واحد	خواص
1600	$\rho(kg/m^3)$	چگالی
800	$c_p(\frac{J}{kg \cdot ^\circ K})$	ضریب گرمای ویژه
3.1	$\alpha_{11}(\frac{1}{^\circ K} * 10^{-6})$	ضریب انبساط گرمایی طولی
24.7	$\alpha_{22}(\frac{1}{^\circ K} * 10^{-6})$	ضریب انبساط گرمایی عرضی
7.46	$k_{11}(\frac{W}{m \cdot ^\circ K})$	هدایت گرمایی طولی
0.56	$k_{22}(\frac{W}{m \cdot ^\circ K})$	هدایت گرمایی عرضی

جهت x و a_{ij} ماتریس ضرایب وزنی برای مشتق اول می‌باشد. در روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته ضرایب وزنی بر اساس روش میانجیابی لاگرانژ پایه‌ریزی می‌شوند و عناصر غیر قطری ماتریس وزنی از رابطه (24) و برای عناصر قطری از رابطه (26) بدست می‌آیند.

مشتق مرتبه دوم نسبت به یک متغیر از رابطه (27) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 T(x_i, y)}{\partial x^2} = T^{(2)}(x_i, y) = \sum_{j=1}^{N_x} b_{ij} T(x_j, y), \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (27)$$

$$b_{ij} = 2a_{ij} \left(a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad \text{for } i \neq j \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^{N_x} b_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad b_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} b_{ij} \quad (29)$$

جهت مشتقات بالاتر عناصر غیر قطری ماتریس وزنی از رابطه (30) و عناصر قطری ماتریس وزنی از رابطه (31) استفاده می‌شود.

$$c_{ij}^{(m)} = m \left(c_{ii}^{(m-1)} c_{ij}^{(m-1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad (30)$$

$$\text{for } i \neq j \ \& \ m = 2, \dots, N_x - 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x$$

$$\sum_{j=1}^{N_x} c_{ij}^{(m)} = 0 \quad \text{or} \quad c_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} c_{ij}^{(m)} \quad (31)$$

مانند روابط فوق روابط روش دیفرانسیل مربعات در جهت y به صورت رابطه (32) بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial T(x, y_i)}{\partial y} = T^{(1)}(x, y_i) = \sum_{j=1}^{N_y} A_{ij} T(x, y_j), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N_y \quad (32)$$

$$A_{ij} = \frac{M^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_k) \cdot M^{(1)}(y_j)}, \quad \text{for } i \neq j \quad (33)$$

$$M^{(1)}(y_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N_y} (y_i - y_k) \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{N_y} A_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} A_{ij} \quad (35)$$

در معادلات فوق $T(x, y_i)$ مقدار تابع در نقطه y_i و $T^{(1)}(x, y_i)$ مقدار مشتق اول تابع $T(x, y)$ در نقطه y_i ، N_y تعداد نقاط شبکه‌بندی شده در جهت y و A_{ij} ماتریس ضرایب وزنی برای مشتق اول می‌باشد. مشتق مرتبه دوم نسبت به یک متغیر در جهت y از رابطه (36) و (37) بدست می‌آید:

$$B_{ij} = 2A_{ij} \left(A_{ii} - \frac{1}{y_i - y_j} \right), \quad \text{for } i \neq j \quad (36)$$

$$\sum_{j=1}^{N_y} B_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij} \quad (37)$$

جهت مشتقات بالاتر در جهت y روابط به شکل رابطه (38) و (39) خواهد شد.

$$C_{ij}^{(m)} = m \left(C_{ii}^{(m-1)} C_{ij}^{(m-1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j} \right) \quad (38)$$

$$\text{for } i \neq j \ \& \ m = 2, \dots, N_y - 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y$$

$$\sum_{j=1}^{N_y} C_{ij}^{(m)} = 0 \quad \text{or} \quad C_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} C_{ij}^{(m)} \quad (39)$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots, N_y \ \& \ m = 1, 2, \dots, N_y - 1$$

$$K_{diff}^{1N_l} + (B^{1N_l})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_1\} + (B^{2N_l})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_2\} + \dots + (B^{N_l N_l})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_{N_l}\} + C^{1N_l}[b_{ij}]\{T_1\} + C^{2N_l}[b_{ij}]\{T_2\} + \dots + C^{N_l N_l}[b_{ij}]\{T_{N_l}\} = D^{1N_l}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_1\} + D^{2N_l}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_2\} + \dots + D^{N_l N_l}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_{N_l}\} \quad (43)$$

بنابراین فرم نهایی ماتریس معادلات حاکم بر مساله به صورت رابطه (44) بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N_l} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N_l 1} & K_{N_l 2} & \dots & K_{N_l N_l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T_1\} \\ \{T_2\} \\ \vdots \\ \{T_{N_l}\} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1N_l} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2N_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N_l 1} & \Lambda_{N_l 2} & \dots & \Lambda_{N_l N_l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{T}_1\} \\ \{\dot{T}_2\} \\ \vdots \\ \{\dot{T}_{N_l}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

در معادلات فوق B^{IJ} ، C^{IJ} و D^{IJ} از معادلات (16) تا (19) بدست می‌آید، K_{diff}^{IJ} از معادله (22) محاسبه می‌شود، $\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}$ دلتای کرونیگر یا ماتریس مشخصه و واحد، M_0 و N_z تعداد المان در جهت Z و \emptyset ، $T_1 \dots T_{N_l}$ و $\dot{T}_1 \dots \dot{T}_{N_l}$ دما و تغییرات دما بر حسب زمان در نودها، N_l تعداد نقاط شبکه‌بندی شده در جهت ضخامت استوانه، I و J شمارنده تعداد نودها در معادلات انتگرالی لایه‌ای، K_{IJ} و Λ_{IJ} با معادلات (45) و (46) بدست می‌آید.

$$K_{IJ} = (B^{IJ})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}] + C^{IJ}[b_{ij}] + K_{diff}^{IJ} \quad (45)$$

$$\Lambda_{IJ} = D^{IJ}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}] \quad (46)$$

شرایط مرزی در این مسئله مطابق روابط (47) و (48) تعریف می‌شود.

$$r = r_{Ne} : K_{Ne} \frac{\partial T}{\partial r} + h_{out}(T_{N_l} - T_{out}^{out}) - q_{out} = 0 \quad (47)$$

$$r = r_0 : -K_1 \frac{\partial T}{\partial r} + h_{in}(T_1 - T_{in}^{in}) - q_{in} = 0 \quad (48)$$

در روابط فوق h_{in} و h_{out} ضریب انتقال حرارت هوای محیط و گازهای داغ، K_{Ne} و K_1 ضریب هدایت حرارتی لایه آخر و اول T_{out}^{out} و T_{in}^{in} دمای هوای محیط و گازهای داغ، q_{in} و q_{out} مقدار شار حرارتی تابشی در خارج و داخل استوانه می‌باشد و از معادله (49) و (50) بدست می‌آید.

$$q_{in} = A\epsilon\sigma(T_1^4 - T_{in}^{in 4}) \quad (49)$$

$$q_{out} = A\epsilon\sigma(T_{N_l}^4 - T_{out}^{out 4}) \quad (50)$$

در رابطه (49) و (50) A سطح مقطع تابش ϵ ضریب صدور ماده که بین صفر و یک می‌باشد و σ ثابت بولتمن می‌باشد که برابر مقدار $5.6 \times 10^{-8} (\frac{W}{m^2 K^4})$ می‌باشد. از آنجا که لمینیت استوانه‌ای از لایه‌های متعددی تشکیل شده است لذا در بین لایه‌ها باید شرط مرزی همزمان پیوستگی دما و پیوستگی شار دما وجود داشته باشد. اگر $r = r_i$ مرز بین دو لایه i و $i+1$ باشد بنابراین در این شعاع:

$$T_{i+1}(r_i, t) = T_i(r_i, t) \quad (51)$$

$$K_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(r_i, t)}{\partial r} = K_i \frac{\partial T_i(r_i, t)}{\partial r} \quad (52)$$

معادله (44) با استفاده از برنامه کامپیوتری در نرم افزار متلب حل شده و در قسمت بحث و نتایج مورد بررسی قرار گرفته است.

برای ضریب انتقال حرارت جابجائی مقدار $10 \frac{W}{m^2 K}$ جهت هوای خارج یا هوای محیط و مقدار $37500 \frac{W}{m^2 K}$ جهت گازهای داغ داخل مخزن در مقدار ماکزیمم از مراجع [36-39] محاسبه شده است. با توجه به تغییرات فشار بدست آمده داخل مخزن از نتایج تست تجربی در مرجع [40] نمودار تغییرات ضریب انتقال حرارت جابجائی گازهای داغ نسبت به زمان مطابق شکل 5 فرض می‌شود. برای حل مسئله معادلات حاکم بر انتقال حرارت در تئوری لایه‌ای (معادله (21)) را با استفاده از معادلات ارائه شده به روش دیرانسلیل مربعات (معادلات (23) تا (39)) می‌توان به فرم معادلات قابل حل عددی به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T_i}{\partial z} = \sum_{k=1}^{N_z} a_{i,k} T_{i,k,j} = [a_{ij}][T_i]$$

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \sum_{k=1}^{N_z} b_{i,k} T_{i,k,j} = [b_{ij}][T_i] \quad (40)$$

در معادلات فوق $[T_i]$ دما در نودها N_z تعداد نقاط شبکه‌بندی شده در جهت Z و $[a_{ij}]$ و $[b_{ij}]$ ماتریس ضرایب وزنی برای مشتق اول و دوم می‌باشد. لذا با توجه به توضیحات داده شده دسته اول از معادلات حاکم به صورت رابطه (41) خواهد شد.

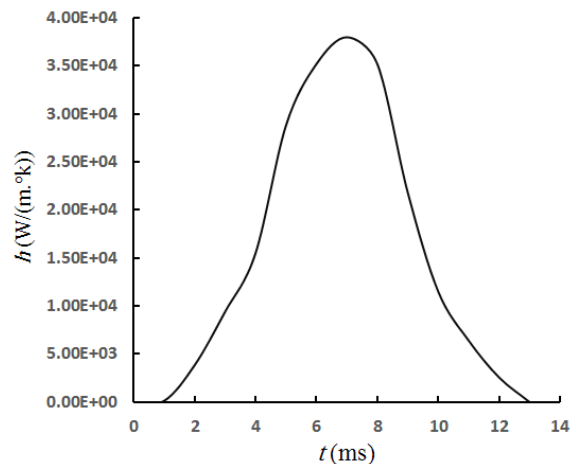


Fig. 5 change of convective heat transfer coefficient in heat gases versus time

شکل 5 تغییرات ضریب انتقال حرارت جابجائی گازهای داغ نسبت به زمان

$$K_{diff}^{11} + (B^{11})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_1\} + (B^{21})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_2\} + \dots + (B^{N_l 1})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_{N_l}\} + C^{11}[b_{ij}]\{T_1\} + C^{21}[b_{ij}]\{T_2\} + \dots + C^{N_l 1}[b_{ij}]\{T_{N_l}\} = D^{11}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_1\} + D^{21}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_2\} + \dots + D^{N_l 1}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_{N_l}\} \quad (41)$$

دسته دوم معادلات حاکم به صورت رابطه (42) می‌باشند:

$$K_{diff}^{12} + (B^{12})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_1\} + (B^{22})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_2\} + \dots + (B^{N_l 2})[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{T_{N_l}\} + C^{12}[b_{ij}]\{T_1\} + C^{22}[b_{ij}]\{T_2\} + \dots + C^{N_l 2}[b_{ij}]\{T_{N_l}\} = D^{12}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_1\} + D^{22}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_2\} + \dots + D^{N_l 2}[\delta_{(M_0N_z, M_0N_z)}]\{\dot{T}_{N_l}\} \quad (42)$$

دسته N_l ام معادلات حاکم به صورت رابطه (43) می‌باشند:

۶- بحث و نتایج

مدل با مشخصات ذکر شده در بخش قبل با استفاده از روابط حاکم بر تئوری لایه‌ای و روش دیفرانسیل مربعات مورد تحلیل حرارتی قرار گرفته شده است. ابتدا برای اینکه در تمام حالت‌های مختلف تحلیل به حالت بهینه‌ای از تعداد لایه‌های تئوری لایه‌ای رسیده شود تحلیلی جهت این کار در نظر گرفته شده است. چون که اگر تعداد لایه‌های لایه‌ای در انجام تحلیل کم انتخاب شود حل مسئله از دقت خوبی برخوردار نمی‌باشد و از طرفی در نظر گرفتن تعداد لایه‌های بیشتر از مقدار بهینه زمان حل مسئله را طولانی کرده و شرایط رسیدن به جواب را مشکل می‌کند لذا این تحلیل برای مخزن نمونه اول (شامل 2 میلیمتر لاینر آلومینیوم و 4 میلیمتر کامپوزیت) انجام شده است چون در این مسئله هر دو شرایط فلز و کامپوزیت وجود دارد. نتایج حاصل از این تحلیل در شکل (6) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است تغییرات دما بر حسب زمان در لایه‌های مختلف از تئوری لایه‌ای از مقدار صفر درجه سلسیوس شروع به افزایش کرده تا زمان 7 میلی ثانیه به مقدار اوج خود رسیده و از این زمان به بعد شروع به کاهش می‌نماید تا به مقدار بین 100 تا 150 درجه سلسیوس در زمان 13 میلی ثانیه می‌رسد روند تغییرات نمودار تقریباً مانند تغییرات نمودار ضریب حرارت جابجائی گازهای داغ داخل مخزن می‌باشد. هر چه تعداد لایه‌های لایه‌ای افزایش می‌یابد مقدار دما در ماکزیمم آن کمتر خواهد شد بجز در تعداد لایه 2 که روند تغییرات متفاوتی از سایر نمودارها دارد که این به دلیل عدم درک روند تغییرات دما بدلیل دقت کم در این تعداد لایه و یا به عبارتی خطی شدن روند تغییرات دما در کل ضخامت مورد نظر می‌باشد. از طرفی با افزایش تعداد لایه‌های لایه‌ای نمودارها به یکدیگر نزدیکتر شده به طوری که از تعداد 12 لایه به بعد این نمودارها اختلاف چندانی با یکدیگر نداشته و تقریباً بر هم منطبق می‌باشد لذا با توجه به تمام جهات اعم از بررسی دقت نتایج و مقدار زمان حل برای هر مسئله مقدار 12 لایه به عنوان تعداد لایه بهینه انتخاب شده و تمام تحلیل‌های حرارتی که در ادامه ذکر خواهد شد بر مبنای این تعداد لایه انجام شده است. در شکل 7 تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه اول (شامل 2 میلیمتر لاینر آلومینیوم و 4 میلیمتر کامپوزیت) نشان داده شده است.

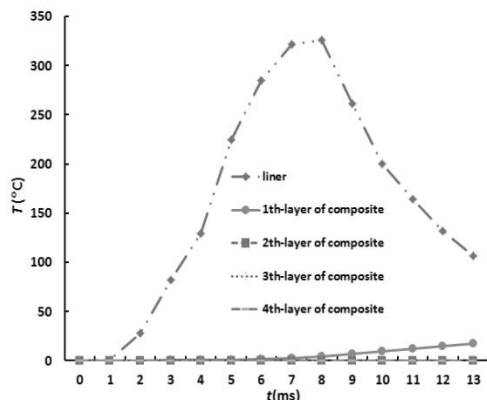


Fig. 7 Temperature changes versus time in the first sample

شکل 7 نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه اول

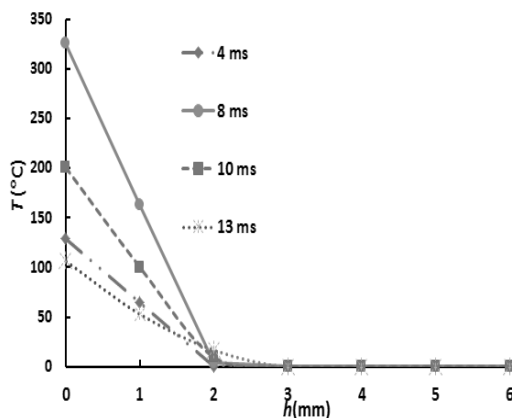


Fig. 8 Temperature changes versus thickness in the first sample

شکل 8 نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن نمونه اول

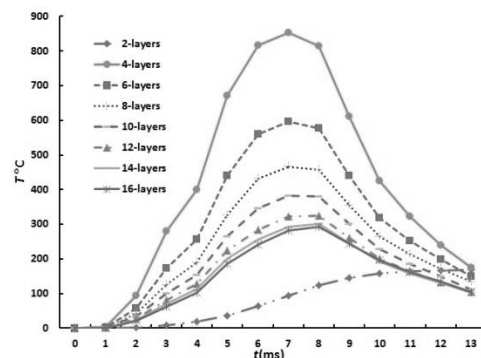


Fig. 6 Temperature changes versus time for liner of the first sample vessel in the number of different layers layerwise

شکل 6 نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در لاینر مخزن نمونه اول در تعداد لایه‌های مختلف لایه‌ای

مطابق این شکل و با توجه به در معرض قرار داشتن لاینر با گازهای داغ داخل مخزن دما در لاینر از مقدار صفر درجه سلسیوس شروع به افزایش

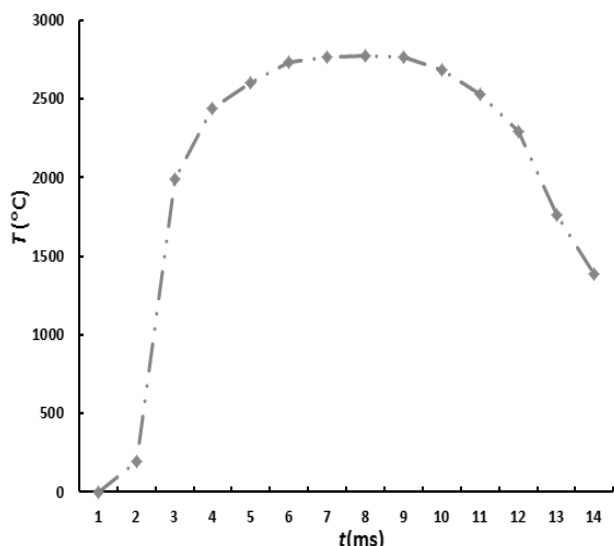


Fig. 11 Temperature changes versus time in the third sample

شکل ۱۱ نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه سوم

در شکل ۱۳ تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه چهارم (شامل ۶ میلیمتر آلومینیوم) نشان داده شده است. مطابق این شکل تغییرات دما از مقدار صفر درجه سلسیوس شروع به افزایش کرده تا زمان ۷ میلی ثانیه به مقدار ۳۲۱ درجه سلسیوس به ماکزیمم خود رسیده و از این زمان به بعد شروع به کاهش می‌نماید تا به مقدار بین ۱۰۶ درجه سلسیوس در زمان ۱۳ میلی ثانیه می‌رسد. با توجه به ضریب هدایت نسبتاً بالا در آلومینیوم دما در ضخامت مخزن بالا نرفته و نسبت مخزن نوع دوم و سوم دارای دمای کمتری در سطح مخزن می‌باشد.

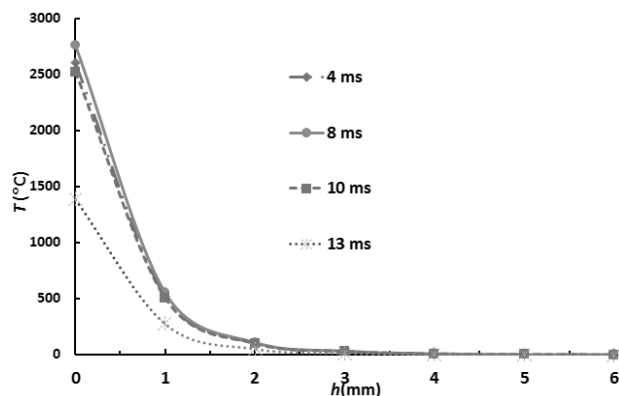


Fig. 12 Temperature changes versus thickness in the third sample

شکل ۱۲ نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن نمونه سوم

در شکل ۱۴ نمودار تغییرات درجه حرارت در راستای ضخامت این مخزن نشان داده شده است. مطابق این شکل تغییرات دما با شیب نسبتاً ملایمی از سطح داخلی مخزن شروع می‌شود و تا مقدار ۱۰ تا ۲۰ درجه سلسیوس در زمانهای مختلف در سطح مخزن تغییر می‌کند. در شکل ۱۵ تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه پنجم (شامل ۶ میلیمتر فولاد) نشان داده شده است. مطابق این شکل تغییرات دما از مقدار صفر درجه سلسیوس شروع به افزایش کرده تا زمان ۷ میلی ثانیه به مقدار ۱۰۵۶ درجه سلسیوس به مقدار ماکزیمم خود رسیده و از این زمان به بعد شروع به کاهش می‌نماید تا به مقدار بین ۲۹۷ درجه سلسیوس در زمان ۱۳ میلی ثانیه می‌رسد.

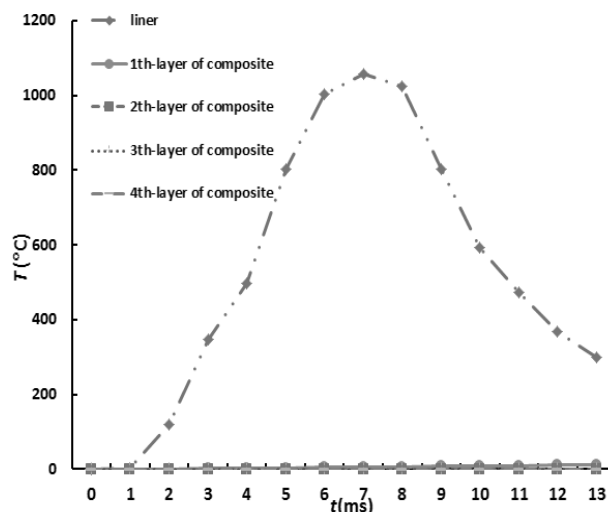


Fig. 9 Temperature changes versus time in the second sample

شکل ۹ نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه دوم

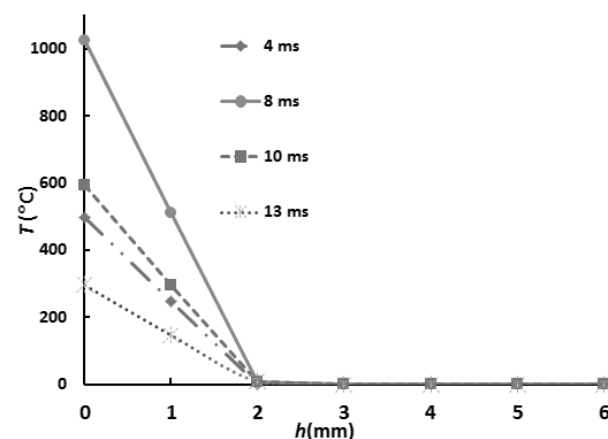


Fig. 10 Temperature changes versus thickness in the second sample

شکل ۱۰ نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن نمونه دوم

در شکل ۱۱ تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه سوم (شامل ۶ میلیمتر کامپوزیت) نشان داده شده است. مطابق این شکل تغییرات دما از مقدار صفر درجه سلسیوس شروع به افزایش کرده تا زمان ۷ میلی ثانیه به مقدار ۲۷۷۲ درجه سلسیوس به ماکزیمم خود رسیده و از این زمان به بعد شروع به کاهش می‌نماید تا به مقدار بین ۱۳۸۹ درجه سلسیوس در زمان ۱۳ میلی ثانیه می‌رسد. با توجه به ضریب هدایت بسیار پایین کامپوزیت دما در سطح داخلی این نوع مخزن به مقدار زیادی بالا رفته است. در شکل ۱۲ نمودار تغییرات درجه حرارت در راستای ضخامت این مخزن را نشان می‌دهد. مطابق این شکل در ۱ میلیمتر اول از ضخامت شیب تغییرات دما زیاد بوده و در ضخامت بین ۱ تا ۳ میلیمتر این شیب نسبتاً ملایم شده و از ضخامت ۳ تا ۶ میلیمتر شیب تغییرات تقریباً صفر می‌باشد.

در شکل ۱۰ نمودار تغییرات درجه حرارت در راستای ضخامت این مخزن را نشان می‌دهد. مطابق این شکل در ۲ میلیمتر اول از ضخامت شیب تغییرات دما زیاد بوده و در ضخامت بین ۲ تا ۶ میلیمتر این شیب ناچیز شده و تقریباً صفر می‌باشد. در این نمودار روند تغییرات دما در مخزن هم مانند مخزن نمونه اول بوده که بیشترین و کمترین شیب تغییرات دمایی به ترتیب در زمان ۸ و ۱۳ میلی ثانیه اتفاق افتاده است.

سلسیوس در زمان‌های مختلف در سطح مخزن تغییر می‌کند. شیب تغییرات دما در زمانهای 10 و 4 میلی ثانیه تقریباً مثل هم می‌باشد. مطابق این شکل شیب تغییرات دما در 13 میلی ثانیه از همه زمانها دارای شیب کمتری بوده و تقریباً به حالت پایدار انتقال حرارت نزدیک می‌باشد.

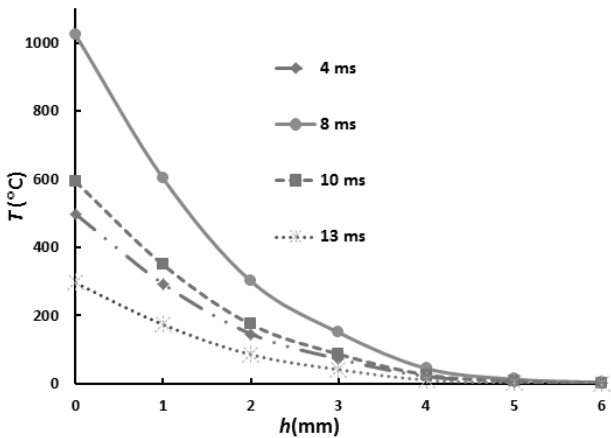


Fig. 16 Temperature changes versus thickness in the fifth sample
شکل ۱۶ نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن نمونه پنجم

در شکل 17 تغییرات دما در راستای ضخامت در نمونه مخزن‌های مختلف در زمان 13 میلی ثانیه نشان داده شده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است شیب تغییرات دما در راستای ضخامت بجز مخزن نوع سوم تقریباً یکسان بوده و دارای شیب ملایمی در ضخامت 0 تا 2 میلیمتر بوده و از ضخامت 2 تا 6 میلیمتر تقریباً این شیب برابر صفر می‌باشد. در مخزن نوع سوم بدلیل تمام کامپوزیت بودن دارای تغییرات دمایی نسبتاً بالا در ضخامت 0 تا 2 میلیمتر بوده و از ضخامت 2 تا 6 میلیمتر روند تغییرات دما در ضخامت این مخزن هم مانند سایر مخازن می‌باشد. جهت اعتبار سنجی حل برنامه در مسئله مورد نظر دو مورد اعتبارسنجی انجام شده است مورد اول مقایسه حل برنامه با حل انتقال حرارت در نرم افزار المان محدود آباکوس می‌باشد در این اعتبارسنجی مخزن نوع چهارم (6 میلیمتر ضخامت آلومینیوم) در نرم افزار آباکوس مدلسازی شده و تحلیل انتقال حرارت بر روی آن انجام شده است شکل (۱۸) نتایج این تحلیل را نشان می‌دهد.

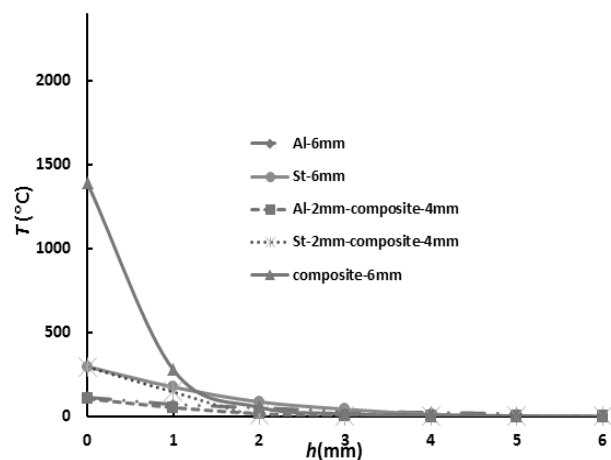


Fig. 17 Temperature changes versus thickness in various vessels at 13 milliseconds

شکل ۱۷ نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن‌های مختلف در زمان ۱۳ میلی ثانیه

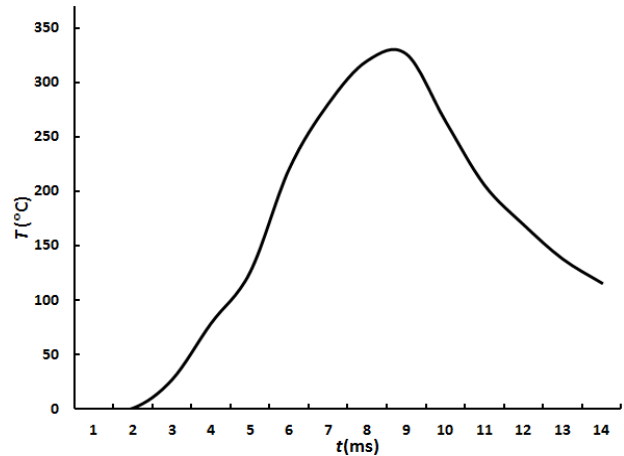


Fig. 13 Temperature changes versus time in the fourth sample
شکل ۱۳ نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه چهارم

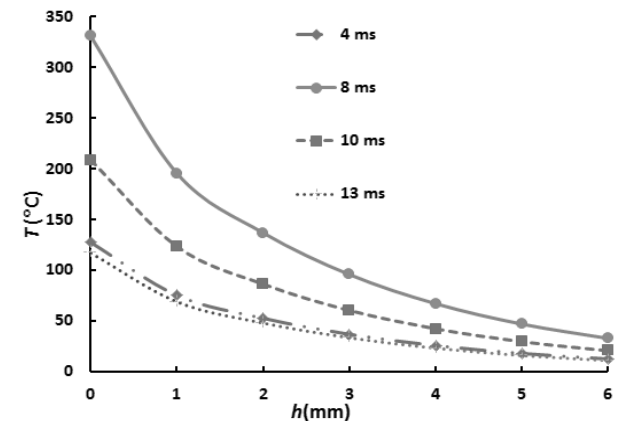


Fig. 14 Temperature changes versus thickness in the fourth sample
شکل ۱۴ نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت در مخزن نمونه چهارم

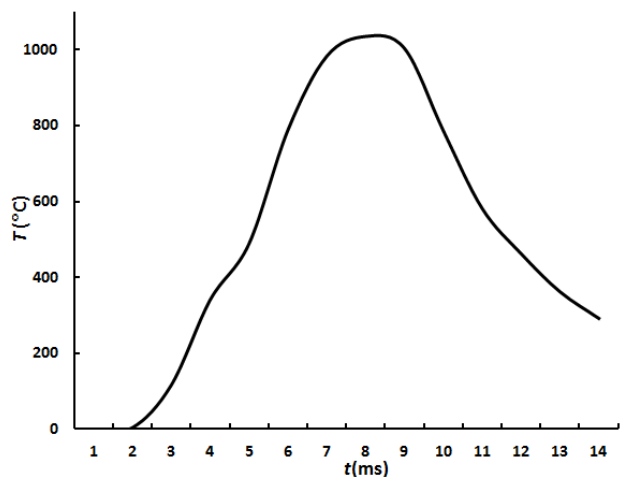


Fig. 15 Temperature changes versus time in the fifth sample
شکل ۱۵ نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در مخزن نمونه پنجم

در شکل 16 نمودار تغییرات درجه حرارت در راستای ضخامت این مخزن نشان داده شده است. مطابق این شکل تغییرات دما در زمان 8 میلی ثانیه با شیب نسبتاً تندی از سطح داخلی مخزن شروع شده و بعد از ضخامت 4 میلیمتر این شیب کم شده و به سمت شیب صفر نزدیک می‌شود مطابق این شکل تغییرات دما در سطح خارجی مخزن از مقدار 1 تا 5 درجه

$$r_0 = 1, r_1 = 2, r_2 = 4, k_1 = 5, k_2 = 1, \rho_1 = \rho_2 = c_{p1} = c_{p2} = 1, T(r_0, t) = 1, T(r_2, t) = 0$$

همانطور که در این شکل نشان داده شده است تحلیل انتقال حرارت در این نرم افزار با در نظر گرفتن تعداد نقاط مختلف انتگرال گیری انجام شده است (لازم بذکر است تحلیل انتقال حرارت در آباکوس با روش انتگرال گیری سیمپسون و با انتخاب تعداد نقاط انتگرال گیری انجام می شود) و نتایج بدست آمده از دمای سطح داخل مخزن در این شکل نشان داده شده است. در این شکل علامت اختصاری ال دلیو¹ و اف ای ام² نشان دهنده روش تئوری لایه-ای و روش المان محدود می باشد. همانطور که در این شکل نشان داده شده است با بالا رفتن تعداد لایه در تئوری لایه‌ای اختلاف بین دو روش حل المان محدود و تئوری لایه‌ای کمتر خواهد شد از طرفی روش حل انجام شده در نرم افزار آباکوس با توجه به توضیحات در راهنمای نرم افزار استفاده از تئوری خطی می باشد و این اختلاف در روش تئوری خطی با تئوری لایه‌ای قابل قبول می باشد و اگر هر چه قدر تعداد لایه‌ها را افزایش دهیم نمی توان این دو نمودار را بر هم منطبق نمود چون روش حل این دو فرق می کند

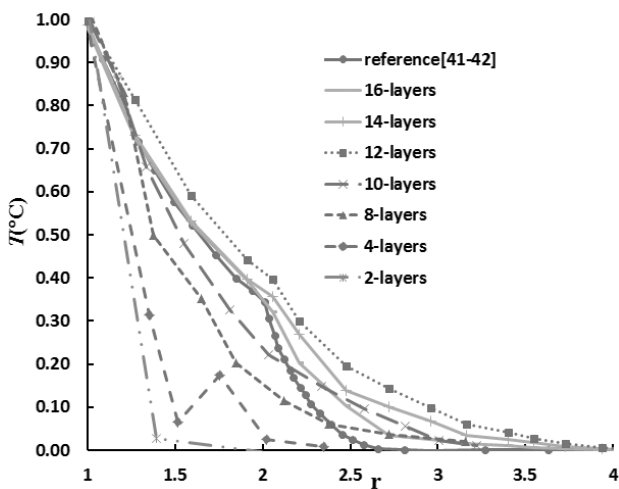


Fig. 19 Comparison of temperature changes versus thickness in the layerwise theory with the exact solution results in other references

شکل ۱۹ مقایسه نمودار تغییرات دما بر حسب ضخامت مخزن در حل تئوری لایه‌ای با حل دقیق مراجع دیگر

۷- جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی تحلیل انتقال حرارت به کمک تئوری لایه‌ای در مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت با روش دیفرانسیل مربعات پرداخته شد لذا در ابتدا معادلات انتقال حرارت حاکم بر یک چند لایه استوانه‌ای بدست آمد. پس از استخراج روابط حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری لایه‌ای این روابط به فرم معادلات ماتریسی مربوط به روش حل دیفرانسیل مربعات استخراج شده و سپس برای حل معادلات بدست آمده به فرم دیفرانسیل مربعات از کد برنامه نویسی متلب کمک گرفته شده است. در بحث و بررسی نتایج پنج نمونه مخزن مورد تحلیل انتقال حرارت با روش مذکور قرار گرفت که پس از استخراج نتایج تحلیل حرارت به بررسی چگونگی تغییرات دما در این مخازن پرداخته شد. نتایج بدست آمده در این تحقیق را می توان به صورت زیر بیان نمود.

- با افزایش تعداد لایه‌ها دقت نتایج حل افزایش یافته و به مقدار دقیق نتایج نزدیک تر خواهد شد طوری که از یک تعداد لایه به بالا این نتایج به هم نزدیک شده و تفاوت چندانی با یکدیگر نخواهند داشت و این تعداد لایه مقدار بهینه لایه اختصاص یافته در آن مسئله خواهد بود و تعداد لایه بهینه در مسئله حاضر مقدار ۱۲ لایه انتخاب شد.
- نتایج بدست آمده در مخازن فلز و کامپوزیت شامل مخازن نمونه اول و دوم نشان داد که تغییرات حرارت در فلز بسیار متفاوت تر از لایه‌های

همانطور که در این شکل نشان داده شده است تحلیل انتقال حرارت در این نرم افزار با در نظر گرفتن تعداد نقاط مختلف انتگرال گیری انجام شده است (لازم بذکر است تحلیل انتقال حرارت در آباکوس با روش انتگرال گیری سیمپسون و با انتخاب تعداد نقاط انتگرال گیری انجام می شود) و نتایج بدست آمده از دمای سطح داخل مخزن در این شکل نشان داده شده است. در این شکل علامت اختصاری ال دلیو¹ و اف ای ام² نشان دهنده روش تئوری لایه-ای و روش المان محدود می باشد. همانطور که در این شکل نشان داده شده است با بالا رفتن تعداد لایه در تئوری لایه‌ای اختلاف بین دو روش حل المان محدود و تئوری لایه‌ای کمتر خواهد شد از طرفی روش حل انجام شده در نرم افزار آباکوس با توجه به توضیحات در راهنمای نرم افزار استفاده از تئوری خطی می باشد و این اختلاف در روش تئوری خطی با تئوری لایه‌ای قابل قبول می باشد و اگر هر چه قدر تعداد لایه‌ها را افزایش دهیم نمی توان این دو نمودار را بر هم منطبق نمود چون روش حل این دو فرق می کند

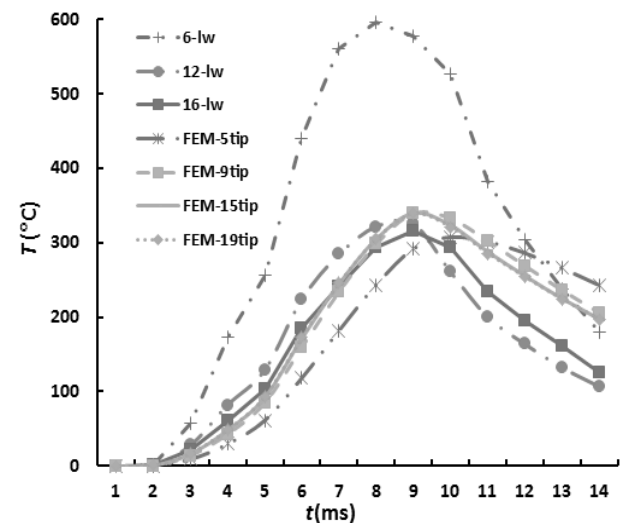


Fig. 18 Comparison of temperature changes versus time in heat transfer solution abaqus software with the layerwise theory

شکل ۱۸ مقایسه نمودار تغییرات دما بر حسب زمان در حل انتقال حرارت نرم افزار آباکوس با تئوری لایه‌ای

. چنانچه در این نمودار مشاهده می شود در تعداد ۶ لایه نتایج دما در زمان ۱۴ میلی ثانیه نزدیکتر به مقدار بدست آمده در آباکوس می باشد چون در تعداد لایه کمتر نتیجه نهایی به نتیجه تئوری خطی نزدیکتر خواهد شد. مقایسه روند تغییرات دما در تحلیل انتقال حرارت با نرم افزار آباکوس و تئوری لایه‌ای نشان می دهد نتایج بدست آمده از نرم افزار نوشته شده با تئوری لایه‌ای به درستی انجام شده است. مورد دوم اعتبار سنجی مقایسه حل نرم افزار نوشته شده با نتایج حل دقیق در دو مرجع [41-42] می باشد. اگر چه برای شرایط مسئله مورد نظر در این تحقیق نمی توان در مراجع دیگر مانند این مسئله پیدا کرد ولی در این دو مرجع حل دقیقی از یک مخزن استوانه‌ای کامپوزیتی دو لایه انجام شده است که شرایط موجود در این مسئله در نرم افزار نوشته شده با تئوری لایه‌ای مدل شده که نتایج این تحلیل در شکل ۱۹ نشان داده شده است. مشخصات مخزن استوانه‌ای کامپوزیتی دو لایه مورد نظر در ادامه آورده می شود.

¹layerwise

² Finite element method-thickness integration points

- [10] Oseloka, O., "Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach" *Journal of Computers & Chemical Engineering*, Vol. 26, No. 1, pp. 1621-1632, 2002.
- [11] Lu, X. Tervola, P. and Viljanen, M., "Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 348-341, 2006.
- [12] Lu, X., Tervola, P. and Viljanen, M., "Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 1107-1114, 2006.
- [13] Bahadur, R. and Bar-Cohen, A., "Orthotropic Thermal Conductivity Effect on Cylindrical Pin Fin Heat Transfer" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 2, pp. 1155-1162, 2007.
- [14] Kayhani, M. H. Shariati, M. Norouzi, M. Demneh, M. K., "Exact Solution of Conductive Heat Transfer in Cylindrical Composite Laminate" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 83, pp. 83-94, 2009. *Heat Mass Transfer*
- [15] Kayhani, M. H. Norouzi, A. Amiri Delouei, A., "A General Analytical Solution for Heat Conduction in Cylindrical Multilayer Composite Laminates" *International Journal of Thermal Science*, Vol. 52, No. 1, pp. 73-82, 2012.
- [16] Amiri Delouei, A. Kayhani, M. H. Norouzi, M., "Exact Analytical Solution of Unsteady Axi-symmetric Conductive Heat Transfer in Orthotropic Cylindrical Composite Laminates" *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, No. 15, pp. 4427-4436, 2012.
- [17] Mohapatra, R. C. Mishrab, A. Choudhury, B. B., "Determination of Thermal Conductivity of Pine Wood Dust Filled Epoxy Composites" *Thermal Science, OnLine-First*, 2016.
- [18] Moosaie, A. and Panahi Kalus, H., "Exact solution of steady nonlinear heat conduction in exponentially graded cylindrical and spherical shells with temperature-dependent properties" *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 3, No. 3, pp. 301-306, 2016. (In Persian)
- [19] Ozisik, M. N., "Heat Conduction" Second ed., Wiley, New York, 1993.
- [20] Barbero, E. J. Reddy, J. N., "Modeling of Delamination in Composite Laminates Using a Layer-Wise Plate Theory" *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28, No. 3, pp. 373-388, 1991.
- [21] Robbins, D. H. Reddy, J. N., "Modeling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, No. 3, pp. 655-677, 1993
- [22] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis" Second ed., CRC PRESS, New York, 2003.
- [23] Noack, J. Rolfes, R. Tessmer, J., "New Layerwise Theories and Finite Elements for Efficient Thermal Analysis of Hybrid Structures" *Composite and Structures*, Vol. 81, No. 3, pp. 2525-2538, 2003.
- [24] Nosier, A. Kapania, R. K. and Reddy, J. N., "Free Vibration Analysis of Laminated Plates Using a Layerwise Theory" *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journals*, Vol. 31, No. 12, pp. 2335-2346, 1993.
- [25] Reddy, J. N., "Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics" Second ed., John Wiley, New York, 2002.
- [26] Oden, J. T. and Reddy, J. N., "Variational Methods in Theoretical Mechanics" Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [27] Lanczos, C., "The Variational Principles of Mechanics" The University of Toronto Press, Toronto, 1964.
- [28] Shu, C., "Differential Quadrature and Its Application in Engineering" London, Springer-Verlag, pp. 10-150, 2000.
- [29] Bert, C. W., and Malik, M., "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: a review" *Applied Mechanic Review*, Vol. 49, No. 1, pp. 1-28, 1996.
- [30] AISI Alloy , <http://www.azom.com/article.aspx>, available in 20, March 2016.
- [31] <http://www.memsnet.org/material/>, available in 20, March 2016.
- [32] Touloukian, Y. S. Ho, C. Y., "Thermophysical Properties of Matter, Plenumpress" New York, pp. 740, 1972.

کامپوزیت بوده و با پیشروی از مرکز تولید دما به سمت لایه‌های بیرونی در ضخامت استوانه مقدار تغییرات دما در لایه‌های کامپوزیت بسیار کمتر خواهد شد.

- تغییرات دما در مخزن نمونه سوم یعنی مخزن تمام کامپوزیتی از سایر مخازن بالاتر بود و این مخزن با توجه به افزایش قابل توجه دما در سطح آن نمی‌تواند مخزن مناسبی جهت تحمل این دما باشد.
- با توجه به لحاظ نمودن تمامی جهات اعم از وزن و تحمل دمایی در مخزن، نمونه مخزن نوع اول یعنی مخزن فلز کامپوزیت با لاینر آلومینیومی بهترین انتخاب برای شرایط کاری در تحقیق حاضر می‌باشد.
- از مقایسه حل این تحقیق با حل مراجع دیگر می‌توان نتیجه گرفت که نتایج بدست آمده در روش حل این تحقیق تقریباً با نتایج حل مراجع دیگر که به حل دقیق مسئله پرداخته‌اند موافقت می‌کند و با افزایش تعداد لایه‌های تئوری لایه‌ای می‌توان منحنی حل بدست آمده از این روش را تقریباً بر منحنی حل دقیق منطبق نمود.
- از جمله نتایج این تحقیق بررسی روش حل دیفرانسیل مربعات در حل معادلات حاکم و نقاط ضعف و قوت این روش بود که با مقایسه نتایج بدست آمده از حل معادلات دیفرانسیل با روش دیفرانسیل مربعات و حل عددی المان محدود به این نتیجه رسیده شد که این روش در حل معادلات با هندسه منظم، بسیار ساده، کاربردی و دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. یکی از نقاط قوت این روش حل صریح و مستقیم معادلات بوده و از تشکیل ماتریس اسمبل شده بسیار بزرگ که عمدتاً در حل معادلات با روش المان محدود رخ می‌دهد جلوگیری شده و در نتیجه زمان حل و خطای محاسباتی در آن بسیار کم خواهد شد و از جمله نقاط ضعف این روش می‌توان به عدم توانایی این روش در حل مسئله با هندسه‌های پیچیده و همچنین اعمال شرایط مرزی مشکل‌تر در سیستم معادلات اشاره کرد.

۸-مراجع

- [1] Wooster, W. A., "A Textbook in Crystal Physics," First ed., Cambridge University Press, London, pp. 455, 1957.
- [2] Nye, J. F., "Physical Properties of Crystals," Second ed., Clarendon Press, London, pp. 309, 1985.
- [3] Mulholland, G. P., "Diffusion through Laminated Orthotropic Cylinders," *Proceedings of The 5th International Heat Transfer Conference, Tokyo, Japon*, pp. 250-254, 1974.
- [4] Golovchan, V. T. and Artemenko, A. G., "Heat Conduction of Orthogonally Reinforced Composite Material, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*," Vol. 51, No. 2, pp. 944-949, 2004.
- [5] Shi-qiang, D. Jia-chan, L., "Homogenized Equations for Steady Heat Conduction in Composite Materials with Dilutely-Distributed Impurities," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 167-173, 2005.
- [6] Greengard, L. Lee, J. Y., "Electrostatics and Heat Conduction in High Contrast Composite Materials," *Journal of Computational Physics*, Vol. 211, No. 1, pp. 64-76, 2006.
- [7] Hassan, N. Thompson, J. E. Batra, R. C. Hulcher, A.B. Song, X. and Loos, A. C., "A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process," *Journal of Reinforced Plastics And Composites*, Vol. 24, No. 8, pp. 869-888, 2005.
- [8] Newnham, P. and Abrate, S., "Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids Application to Manufacturing Problems," *Journal of Reinforced Composites and Plastics*, Vol. 12, No. 1, pp. 854-864, 1993.
- [9] Sun, Y. Wichman, I. S., "On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, No. 6-7, pp. 1555-1559, 2004.

- [33] All the Materials you need for Scientific and Industrial Research and Manufacturing, <http://www.goodfellow.com/E/Carbon-EpoxyComposite-Tube.html>. available in 20, March 2016.
- [34] Johnson, R. R. Kural, M. H. Mackey, G. B., "Thermal expansion properties of composite materials" NASA Contractor Report 165632, 1981.
- [35] Wei, W. Rongjin, H. Chuanjun, H. Zhao, Y. Li, S. Laifeng, L., "Cryogenic Performances of T700 and T800 Carbon Fibre-Epoxy Laminates" Proceedings of the School of Materials Science and Engineering, Tianjin University, China, 2015.
- [36] Nelson, C. W. Ward, J. R., "Calculation of Heat Transfer to The Gun Barrel Wall" Ballistic Research Laboratory Aberdeen Proving Ground, Maryland, March 1981.
- [37] Ian, J., "Understanding and Predicting Gun Barrel Erosion" Weapons Systems Division, August, 2005.
- [38] Qu, P. Qiang, L. Zhen Y., "Thermal Analyses of Midwall Cooling Gun Tubes Based on Liquid-solid Coupled Method" Journal of Information & Computational Science, Vol. 11, No. 9, pp. 3241-3250, 2014.
- [39] Qu, P. Qiang, Li. Shufang, Yang., "Thermal Analyses and Experimental Validation of External Cooling Method for a Gun Barrel" Journal of Information & Computational Science Vol. 11, No. 13, pp. 4759-4767, 2014.
- [40] Masoumi, A. A. Rahimi, G. H. and Leyaghat, G. H., "Experimental and Numerical Analysis of Composite metal Vessel under Dynamic Loading" Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 5, pp. 51-62, 2016. (In Persian)
- [41] Mikhail, M. D. Ozisiki, M. N. Vulchakov, N. L., "Diffusion in Composite Layers with Automatic Solution of the Eigenvalue Problem" International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 26, No.8, pp. 1131-1141, 1983.
- [42] Johnston, P. R., "Diffusion in Composite Media: Solution with Simple Eigenvalues and Eigenfunctions" Mathl. Comput. Modelling Vol. 15, No. 10, pp. 115-123, 1991.