

بررسی ناپایداری دینامیکی پنل های استوانه ای کامپوزیت چندلایه با کاربرد تئوری لایروایز مرتبه اول برشی و روش نوار محدود اسپلاین

محمد رضا محمودآبادی^۱، حمیدرضا اویسی^{۲*}، جمشید فضیلتی^۳

۱- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۳- استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه فضایی ایران، پژوهشکده سامانه های فضاوردی، تهران

* Ovesy@aut.ac.ir، ۱۵۸۷۵۴۴۱۳، تهران

چکیده

در این مقاله تئوری لایروایز صفحات ارائه شده توسط ردی، به منظور تحلیل ناپایداری دینامیکی پنل های استوانه ای کامپوزیتی چندلایه ضخیم با استفاده از روش نوار محدود، مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ناپایداری پارامتری، یکی از انواع ناپایداری تحت اثر نیروهای دینامیکی است که در آن نیروهای داخل صفحه اعمالی به سازه دارای تغییرات هارمونیک یا متناوب با زمان هستند. با فرض میدان جابه جایی مبتنی بر تئوری لایروایز شامل ترم های مرتبه اول برشی، روابط کرنش-تغییر مکان خطی و خصوصیات ماده ارتوتروپیک الاستیک خطی، اصل کار مجازی به منظور تحلیل عددی مدل نوار محدود مورد استفاده قرار گرفته است. به منظور ارائه میدان جابه جایی فرضی برای تحلیل معادلات حاکم، از روش نوار محدود اسپلاین مرتبه ۳ استفاده می شود. مقادیر فرکانس های طبیعی و بار بحرانی کمانش پنل های استوانه ای کامپوزیت، با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده محاسبه و مرزهای ناپایداری دینامیکی، با استفاده از تقریب مرتبه اول بولوتین استخراج شده است. نتایج ارائه شده شامل بررسی تاثیرات تغییر در شرایط مرزی، نوع لایه چینی، نسبت طول به ضخامت و انحنای پنل بوده و تاثیر این تغییرات بر مرزهای فرکانس ناپایداری دینامیکی، مورد تحقیق و مقایسه قرار گرفته است.

کلیدواژگان

ناپایداری دینامیکی، پنل استوانه ای، لایروایز، نوار محدود اسپلاین، کامپوزیت چندلایه

Dynamic instability analysis of laminated composite cylindrical panels using the first order shear deformation layerwise theory and spline finite strip method

Mohammad Reza Mahmoudabadi¹, Hamid Reza Ovesy^{2*}, Jamshid Fazilati³

1- Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

3- Astronautics Research Institute, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran

* P.O.B. 158754413 Tehran, Iran, Ovesy@aut.ac.ir

Abstract

In this paper, layerwise plates theory presented by Reddy is used in order to analyze the dynamic instability of thick laminated composite cylindrical panels using the third order Bz-spline finite strip method. Parametric instability is a kind of instability under dynamic in-plane forces that change harmonically. The displacement field based on first-order shear deformation assumptions is incorporated into the layerwise theory. The principles of virtual work in conjunction with linear elastic properties of the orthotropic material are implemented to develop the governing equations. The natural frequencies and the critical buckling loads of cylindrical composite panels are calculated and the boundaries of the dynamic instability are extracted by using Bolotin first order approximation. The presented results include the effects of changes in boundary conditions, lay-up sequence, the length to thickness ratio and the curvature of the panel on the boundaries of dynamic instability frequency.

Keywords

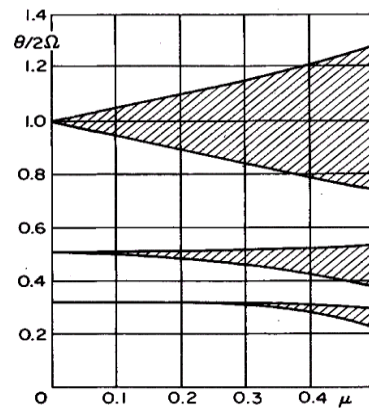
Dynamic instability, cylindrical panel, Layerwise, spline finite strip, laminated composite

مجموعه‌ای از بارگذاری‌های هارمونیک توصیف کرد. بدین وسیله اهمیت بررسی پایداری سازه‌ها قابل توجه بوده و تعیین مرزهای ناپایداری اهمیت خاصی پیدا می‌کند. تحقیق جامعی در مورد مسئله پایداری سازه‌ها تحت بارگذاری پریودیک توسط بولوتین [۲] ارائه شده است. برت و بیرمن [۳] (۱۹۸۸) به صورت تحلیلی، ناپایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای با طول محدود و شرایط مرزی لولایی تحت بارگذاری محوری به شکل پارامتریک را مورد بررسی قرار دادند. تئوری مورد استفاده آن‌ها تئوری مرتبه اول برشی برای پوسته‌ها بوده است. آرژنتو و اسکات [۴] (۱۹۹۳) نیز پاسخ پارامتریک سیلندرهای استوانه‌ای را به لحاظ تئوریک توسعه دادند. تئوری مورد استفاده آن‌ها تئوری کلاسیک صفحات چندلایه بوده است. ان‌جی و لم [۵] (۱۹۹۹) پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه را تحت بارگذاری ترکیبی استاتیکی و دینامیکی، با تئوری‌های مختلف پوسته همانند دائل^۲، لاو^۴ و فلوگه^۵ مورد بررسی قرار دادند. متد مورد استفاده آن‌ها برای تحلیل معادله نوع متیو-هیل، تقریب بولوتین بوده است. همچنین ان‌جی، لم و ردی [۶] (۱۹۹۹) پایداری دینامیکی پنل‌های استوانه‌ای را با در نظر گرفتن تاثیرات برش عرضی مورد تحلیل قرار دادند. ساهو و داتا [۷] (۲۰۰۱) ناپایداری دینامیکی پنل‌های چند انحنایی را در معرض بارگذاری‌های فشاری استاتیکی و پریودیک داخل صفحه برای بارگذاری منفرد و گسترده موضعی با استفاده از تحلیل المان محدود بررسی کردند. در کار آن‌ها تئوری مرتبه اول برشی به منظور مدل کردن پنل‌ها مورد استفاده قرار گرفت.

ونگ و دوو [۸] (۲۰۰۲) متد نوارمحدود بی‌بزر اسپلین مرتبه سوم را برای تحلیل ناپایداری دینامیکی صفحات چندلایه کامپوزیت با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای صفحات، مورد استفاده قرار دادند. مرزهای ناپایداری در کار آن‌ها با تقریب بولوتین مشخص شد. فضیلتی و اویسی [۹] (۲۰۱۲) مرزهای جداکننده ناپایداری و پایداری دینامیکی را برای سازه‌های جدار نازک چندلایه کامپوزیت با استفاده از دو روش مختلف نوارمحدود به نام‌های نیمه‌تحلیلی و اسپلین تحت بارگذاری پریودیک درون صفحه‌ای، مورد بررسی قرار دادند. ناپایداری دینامیکی پنل‌های مورد تحقیق آن‌ها با کاربرد متد نوار محدود، بررسی و روابط آن‌ها با استفاده از اصل کار مجازی مورد تحلیل واقع شد. ناپایداری دینامیکی مورد تحلیل در کار حاضر، با توسعه کاربرد تئوری لایروایز مرتبه اول به منظور تحلیل پنل‌های ضخیم‌تر همراه بوده است.

تحلیل رفتار یک سازه همچون بررسی ارتعاشات آزاد، تحلیل کمانش و بررسی ناپایداری دینامیکی آن، بستگی زیادی به ترکیب تغییرشکل برشی و تئوری مورد استفاده به منظور بررسی این رفتارها دارد. زمانی که خصوصیات مواد در لایه‌چینی‌ها اختلاف قابل توجهی با هم نداشته باشد، استفاده از تئوری‌های تک‌لایه معادل، مناسب خواهد بود ولی از آن‌جا که این تئوری‌ها بر مبنای توابع و جابه‌جایی‌های پیوسته در ضخامت چندلایه می‌باشند، قادر به در نظر گرفتن ناپیوستگی‌های کرنش‌های برشی عرضی، در فضای بین‌لایه‌ای برای لایه‌های دارای خصوصیات با سختی متفاوت نیستند. به دلایل تعادلی، تنش‌های عرضی در هر فضای بین‌لایه‌ای باید پیوسته باشند ولی با توجه به تغییر در مشخصات فیزیکی و مکانیکی لایه‌های مختلف در چندلایه‌های کامپوزیتی، کرنش‌های عرضی در بین لایه‌ها دچار ناپیوستگی می‌شوند [۱۰]. بنابراین برای تئوری‌های تک‌لایه معادل، تغییرشکل‌های موضعی، تنش‌ها و در بعضی موارد پاسخ کلی چندلایه، همانند فرکانس‌های طبیعی به خوبی تعیین نمی‌شود.

امروزه با توجه به معیارهای طراحی مورد نظر متخصصان و پژوهشگران حوزه مهندسی، استفاده از مواد کامپوزیتی تقویت شده توسط الیاف، به صورت گسترده در صنایع مختلفی از قبیل ساخت اتومبیل، صنایع کشتی‌سازی و صنعت هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر این اجزاء تحت بارهای فشاری درون صفحه‌ای قرار گیرند، مهم‌ترین تهدیدکننده عملکرد عادی آن‌ها، مسئله ناپایداری، افت سختی و ظرفیت باربری است. بنابراین بررسی معیارهای پایداری در طراحی و ساخت چنین اجزای سازه، دارای اهمیت فراوان است و یکی از مهمترین معیارهای طراحی محسوب می‌شود. در مقاله حاضر ناپایداری دینامیکی^۱ که مورد بحث می‌باشد، برای سیستم‌هایی موضوعیت دارد که در شرایط بارگذاری استاتیکی رفتار کماتشی غیرکنترلی و شدید از خود بروز می‌دهند. بولوتین^۲ نیز بر طبق همین تعریف، مسائل را تحت اثر شرایط بارگذاری دینامیکی متغیر با زمان به صورت هارمونیک مورد بررسی قرار داده و نشان داده است که تمام سیستم‌های سازه‌ای که در برابر بارگذاری استاتیکی با شرایط ناپایدار مواجه می‌شوند، قطعاً در شرایط بارگذاری هارمونیک نیز دچار ناپایداری خواهند شد. در این دست از مسائل، نوع نیروی اعمال شده به صورت ترکیبی از نیروهای استاتیکی و دینامیکی می‌باشد و فرکانس بارگذاری دینامیکی به شکل پارامتری و کلی در نظر گرفته می‌شود و هدف از انجام این تحلیل‌ها، یافتن نمودارهایی بر اساس فرکانس بارگذاری و شدت بارگذاری است. در این نمودارها مرزهای متناظر با پایداری و ناپایداری سازه مشخص شده و نواحی مربوط به هر قسمت از قسمت دیگر مجزا می‌شود. در حالت کلی، ایده پایداری با توجه به معادلات متیو وجود پاسخ‌های محدود برای این معادله است. شرایط بحرانی در این موارد، مرزهای جداکننده مناطق ناپایداری و پایداری می‌باشد [۱] (شکل ۱).



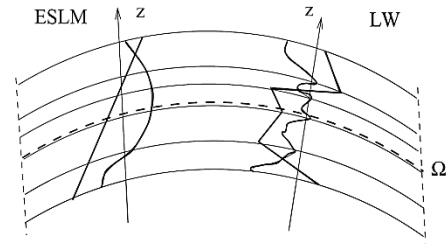
شکل ۱ شکل نوعی تفکیک مناطق پایداری و ناپایداری بر حسب فرکانس بی بعد تحریک سازه $(\theta/2\omega)$ نسبت به پارامتر تحریک (μ) (قسمت هاشور خورده بیانگر بخش ناپایدار است) [۲]

در حالت کلی کلیه سازه‌ها که در معرض بارگذاری‌های متناوب قرار می‌گیرند، نیاز به بررسی پایداری آن‌ها وجود دارد. بارگذاری متناوب اعمالی بر روی سازه‌ها، همانند آن‌چه که بارگذاری بر روی مثلا سازه هواپیما وجود دارد، از این نوع می‌باشد. تمامی این بارگذاری‌های متناوب را می‌توان به صورت

4. Love
5. Flugge

1. Dynamic instability
2. Bolotin
3. Donnell

شکل ۲ تفاوت بین میدان جابه‌جایی تئوری‌های لایروایز و تئوری‌های تک‌لایه معادل را در یک چندلایه نشان می‌دهد.



(۱)

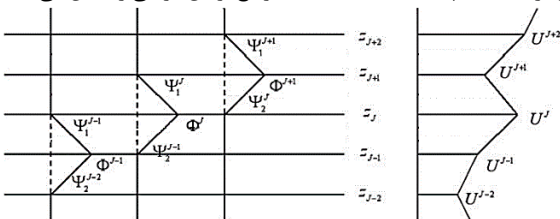
شکل ۱ تفاوت بین میدان جابه‌جایی لایروایز (LW) و تئوری‌های تک‌لایه معادل (ESLM) در یک چندلایه کامپوزیتی [۱۱].

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\phi_x(x, y) + \sum_{j=1}^{N+1} U^j(x, y)\phi^j(z) \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z\phi_y(x, y) + \sum_{j=1}^{N+1} V^j(x, y)\phi^j(z) \\ w(x, y, z) = w^0(x, y) \end{cases}$$

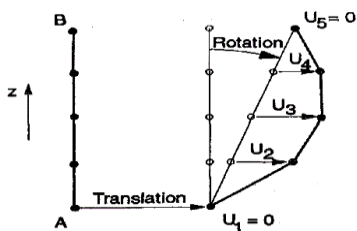
که (u^0, v^0, w^0) جابه‌جایی صفحه میانی در نقطه $(x, y, 0)$ بوده و U^j و V^j ضرایب مجهول مربوط به بسط لایروایز هستند. برای بسط لایروایز نیاز است که ضخامت چندلایه به تعدادی زیر بازه، با نام لایه‌های عددی لایروایز تقسیم شود. تعدادی گره در ضخامت چندلایه توزیع می‌شود که این لایه‌های عددی در فضای بین آن‌ها واقع می‌شوند. N در حالت کلی تعداد لایه‌های کامپوزیت در چندلایه است ولی با توجه به این که در مقاله حاضر تعداد لایه‌های عددی لایروایز با تعداد لایه‌های کامپوزیت برابر است، تعداد گره‌های فرضی در ضخامت برای بسط لایروایز $N+1$ خواهد بود. $\phi^j(z)$ نیز توابع پیوسته لایروایز به منظور تکه‌تکه‌سازی مولفه‌های درون صفحه‌ای در راستای ضخامت هستند و در این مقاله به صورت توابع جابه‌جایی لاگرانژی خطی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\phi^j(z) = \begin{cases} 0 & z < z_{j-1} \\ \psi_2^{j-1}(z) = \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & z_{j-1} < z < z_j \\ \psi_1^j(z) = \frac{z - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} & z_j < z < z_{j+1} \\ 0 & z_{j+1} < z \end{cases} \quad (2)$$

z_j موقعیت گره‌ها را در ضخامت مشخص می‌کند. شکل ۳ یک نمای کلی را برای بسط لایروایز بدون در نظر گرفتن سایر درجات آزادی میدان جابه‌جایی کل، نشان می‌دهد. شکل ۴ نیز، یک نمای کلی برای یکی از مولفه‌های جابه‌جایی کل با در نظر گرفتن هر دوی تئوری‌های مرتبه اول برشی و تئوری لایروایز در ضخامت چندلایه نسبت به خط مرجع نرمال عرضی را نشان می‌دهد.



شکل ۲. نمای کلی از میدان جابه‌جایی چند لایه در تئوری لایروایز.



شکل ۳. نمای کلی از میدان جابه‌جایی چند لایه در تئوری لایروایز با در نظر گرفتن ترم‌های تئوری تغییرشکل مرتبه اول [۱۰].

به منظور رفع محدودیت‌های ایجاد شده ناشی از استفاده از تئوری‌های تک‌لایه معادل و همچنین کاهش هزینه محاسباتی تئوری الاستیسیته سه-بعدی، تئوری‌های لایروایز ارائه شده‌اند. این تئوری‌ها میدان جابه‌جایی واحدی را برای هر لایه در نظر می‌گیرند و برای کل چندلایه شرایط ایجاد پیوستگی C^0 را ایجاد می‌کنند که باعث می‌شود مولفه‌های جابه‌جایی در راستای ضخامت پیوسته، اما به منظور ایجاد امکان پیوستگی تنش برشی عرضی در بین لایه‌ها، مشتقات این مولفه‌های جابه‌جایی در بعضی از نقاط ناپیوسته باشند. روش استفاده شده در این مقاله بر اساس تئوری لایروایز شامل ترم‌های مربوط به تغییرشکل برشی مرتبه اول است و جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای به صورت لایروایز در ضخامت تغییر، می‌کنند.

نمونه‌هایی از تحلیل‌هایی که بر اساس تئوری لایروایز ردی ارائه شده است را می‌توان در کارهای ژانگ و وانگ [۱۲-۱۵] مشاهده کرد که بر اساس روش نوار محدود، صورت گرفته است. ستکوویچ و ووکسانوویچ [۱۶] [۲۰۰۹] مدل میدان جابه‌جایی لایروایز ردی را برای تحلیل خمش، ارتعاشات آزاد و کماتش چندلایه‌های کامپوزیت و صفحات ساندوویچی به کار بردند. مدل مورد استفاده آن‌ها، با فرض تغییرات خطی تکه‌تکه پیوسته برای مولفه‌های جابه‌جایی داخل صفحه و جابه‌جایی عرضی ثابت در ضخامت صفحه ارائه شد.

در مقاله حاضر، ابتدا فرمولاسیون مربوط به تحلیل ارتعاشات آزاد، بار بحرانی کماتش و بررسی ناپایداری دینامیکی با استفاده از تئوری لایروایز مرتبه اول برشی، استخراج شده و محاسبات مربوطه بر اساس روش انرژی با انتگرال-گیری عددی به ازای توابع شکل طولی اسپلاین و عرضی لاگرانژی خطی است که با برنامه‌نویسی متلب انجام شده است و نتایج حاصل شده از این تحلیل‌ها با مراجع معتبر مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- فرمول‌ها و روابط حاکم

۱-۲- میدان جابه‌جایی

میدان جابه‌جایی در کار حاضر به صورت ترکیبی از تئوری‌های مرتبه اول برشی و لایروایز ارائه شده است و تعداد لایه‌های لایروایز، معادل با تعداد لایه‌های چندلایه کامپوزیتی در نظر گرفته شده است. باید توجه داشت که ۱- لایه‌های کامپوزیت برای مدل سالم کاملاً به یکدیگر متصل هستند ۲- ماده در هر لایه الاستیک خطی بوده و سه صفحه تقارن بر آن حاکم می‌باشد. ۳- کرنش‌ها کوچک هستند و ۴- از بسط لایروایز برای مولفه جابه‌جایی خارج از صفحه صرف‌نظر می‌شود. میدان جابه‌جایی (u, v, w) در نقطه (x, y, z) به صورت زیر است:

باید توجه داشت که در استفاده از هر دو تئوری لایروایز و مرتبه اول برشی متغیرهای مربوط به تئوری مرتبه اول برشی، امکان اتصال المان‌های مجاور را از دست ندهند؛ به همین منظور اصلاحات زیر نیز باید لحاظ گردد.

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left[(\dot{u}^0)^2 + (\dot{v}^0)^2 + (\dot{w}^0)^2 + \frac{1}{12} h^2 [\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2] \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N I^{lk} [\dot{U}^l \dot{U}^k + \dot{V}^l \dot{V}^k] \right\} dx dy \\ U_e &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \langle NMT^l \rangle \langle \varepsilon^{(0)} \varepsilon^{(1)} \varepsilon^{(l)} \rangle^T + \langle QO^{l,z} \rangle \langle \gamma^{(0)} \gamma^{(l,z)} \rangle^T \right\} dx dy \\ U_g &= \frac{1}{2} h \iint_{\Omega} \left\{ \sigma_x \left[(u_{,x}^0)^2 + (v_{,x}^0)^2 + (w_{,x}^0)^2 + \frac{1}{12} h^2 [\phi_{x,x}^2 + \phi_{y,x}^2] \right] \right\} dx dy \end{aligned} \right. \quad (10)$$

که U^l و V^l مربوط به J امین گره در امتداد ضخامت هستند و همچنین می‌باشد و ρ نیز چگالی جرمی سازه است. باید توجه

داشت که در محاسبه کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر سیستم به صورت تنش‌های اولیه U_g ، تنها از ترم‌های غیرخطی مربوط به میدان جابه‌جایی مرتبه اول استفاده شده است و نیازی به استفاده از ترم‌های غیرخطی مربوط به بسط لایروایز نمی‌باشد. در حالت کلی، تاثیر مولفه جابه‌جایی عرضی $(w_{,x}^0)$ بر همه ترم‌های غیرخطی دیگر غالب است و حتی در نظر نگرفتن بقیه ترم‌ها محاسبات را دچار خطای زیادی نخواهد کرد. با این حال در کار حاضر، ترم‌های جابه‌جایی غیرخطی درون صفحه‌ای لایه میانی نیز با اضافه کردن ترم‌های چرخش در نظر گرفته شده است.

روند انتگرال‌گیری توابع انرژی رابطه ۱۰ بر اساس روش عددی انتگرال در نقاط گاوسی مشابه آن‌چه در روش اجزاء محدود متداول است، می‌باشد. این روش انتگرال‌گیری با وجود افزایش حجم محاسبات به دلیل کاهش بازه تحلیل به دلیل عددی بودن، زمان تحلیل را به صورت قابل توجهی کاهش می‌دهد. انتگرال‌های انرژی مربوط به انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل و کرنشی سازه که در رابطه ۱۰ بیان شدند را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد.

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} d^T K_e d \\ U_g &= \frac{1}{2} d^T K_g d \\ T &= \frac{1}{2} d^T M \dot{d} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

که ماتریس‌های M ، K_e و K_g به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی الاستیک و سختی هندسی سازه محسوب می‌شوند که ماتریس‌های مربعی با ابعاد درجات آزادی سیستم هستند و با انتگرال‌گیری از روابط متبوع محاسبه می‌شوند.

همچنین برای نتیجه‌های تنش داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T^l\} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [B^K] \\ [B] & [D] & [D^{zK}] \\ [B^l] & [D^{lz}] & [D^{lK}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(l)}\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \{O\} \\ \{Q^{l,z}\} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} [A]^s & [B^{K,z}]^s \\ [B^l]^s & [D^{lK,zz}]^s \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(K,z)}\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U^l &= U^{N+1} = 0 \\ V^l &= V^{N+1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

۲-۲- روابط کرنش-تغییرمکان

روابط کرنش-تغییرمکان، برای کرنش خطی بر اساس فرمولاسیون سندرس در نظر گرفته شده است که با در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی رابطه (۱) به صورت تفکیک شده به شکل زیر خواهد بود.

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(0)} + z \varepsilon_x^{(1)} + \phi^l \varepsilon_x^{(l)} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^{(0)} + z \varepsilon_y^{(1)} + \phi^l \varepsilon_y^{(l)} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)} + \phi^l \gamma_{xy}^{(l)} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

و برای کرنش‌های برشی داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^{(0)} + \phi_{,z}^l \gamma_{yz}^{(l)} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^{(0)} + \phi_{,z}^l \gamma_{xz}^{(l)} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

که برای صفحه تخت:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= u_{,x}^0 & \varepsilon_x^{(1)} &= \phi_{x,x} & \varepsilon_x^{(l)} &= U_{,x}^l \\ \varepsilon_y^{(0)} &= v_{,y}^0 & \varepsilon_y^{(1)} &= \phi_{y,y} & \varepsilon_y^{(l)} &= V_{,y}^l \\ \gamma_{xy}^{(0)} &= u_{,y}^0 + v_{,x}^0 & \gamma_{xy}^{(1)} &= \phi_{x,y} + \phi_{y,x} & \gamma_{xy}^{(l)} &= U_{,y}^l + V_{,x}^l \\ \gamma_{yz}^{(0)} &= w_{,y}^0 + \phi_{,y} & \gamma_{yz}^{(l,z)} &= V^l & & \\ \gamma_{xz}^{(0)} &= w_{,x}^0 + \phi_{,x} & \gamma_{xz}^{(l,z)} &= U^l & & \end{aligned} \right. \quad (6)$$

و برای پوسته استوانه‌ای:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= u_{,x}^0 & \varepsilon_x^{(1)} &= \phi_{x,x} & \varepsilon_x^{(l)} &= U_{,x}^l \\ \varepsilon_y^{(0)} &= v_{,y}^0 + w^0/R & \varepsilon_y^{(1)} &= \phi_{y,y} & \varepsilon_y^{(l)} &= V_{,y}^l \\ \gamma_{xy}^{(0)} &= u_{,y}^0 + v_{,x}^0 & \gamma_{xy}^{(1)} &= \phi_{x,y} + \phi_{y,x} & \gamma_{xy}^{(l)} &= U_{,y}^l + V_{,x}^l \\ \gamma_{yz}^{(0)} &= w_{,y}^0 + \phi_{,y} - v^0/R & \gamma_{yz}^{(l,z)} &= V^l & & \\ \gamma_{xz}^{(0)} &= w_{,x}^0 + \phi_{,x} & \gamma_{xz}^{(l,z)} &= U^l & & \end{aligned} \right. \quad (7)$$

۲-۳- روابط متشکله

روابط متشکله برای K امین لایه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\sigma\}^{(k)} = [Q]^{(k)} \cdot \{\varepsilon\}^{(k)} \quad (8)$$

تحلیل مسئله با استفاده از اصل کار مجازی صورت می‌گیرد که انرژی کل سازه برای یک نوار شامل انرژی جنبشی T و انرژی کرنشی تغییرشکل‌های الاستیک سازه U_e و کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر سیستم به صورت تنش‌های اولیه U_g به صورت زیر تعریف می‌شوند.

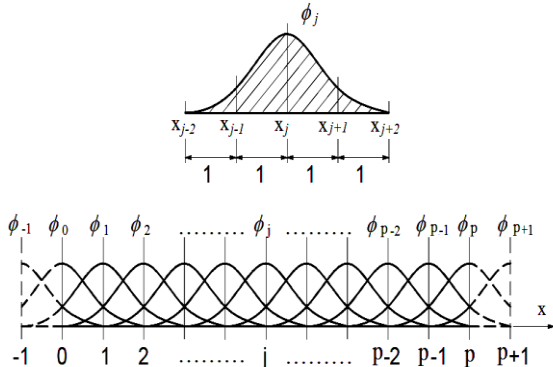
$$\Pi = U_e + U_g - T \quad (9)$$

که:

تعدادی گره در نظر گرفته می‌شود. به طور کلی توابع اسپلاین، توابع چندجمله‌ای تک‌ای هستند که شرایط پیوستگی مورد نیاز را ارضاء می‌کنند. این توابع دارای خواص مطلوبی هستند به طوری که آن‌ها را به یک وسیله ریاضی قدرتمند برای درون‌یابی و رسم منحنی تبدیل کرده است. توابع بی‌زیر اسپلاین مرتبه ۳ دارای ویژگی‌های مناسبی هستند. از جمله این ویژگی‌ها می‌توان به توانایی این توابع در ایجاد پیوستگی مورد نیاز برای تحلیل که توانایی پیوستگی C^2 را فراهم می‌آورد، اعمال شرایط مرزی متنوع و یا دلخواه و همچنین قدرت میانجی‌ابی و ارائه پاسخ همگرا شده به ازای توابع اسپلاین کم، می‌باشد که این مورد آخر، به عنوان یک برتری نسبی خوب نسبت به المان‌های مورد استفاده در روش المان محدود مطرح است. تابع اسپلاین متناظر با گره در مختصات طولی η_j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{j-2} \\ (x - X_{j-2})^3 & X_{j-2} < x < X_{j-1} \\ 1 + 3(x - X_{j-1}) + 3(x - X_{j-1})^2 - 3(x - X_{j-1})^3 & X_{j-1} < x < X_j \\ 1 + 3(x_{j+1} - x) + 3(x_{j+1} - x)^2 - 3(x_{j+1} - x)^3 & X_j < x < X_{j+1} \\ (x_{j+2} - x)^3 & X_{j+1} < x < X_{j+2} \\ 0 & X_{j+2} < x \end{cases} \quad (17)$$

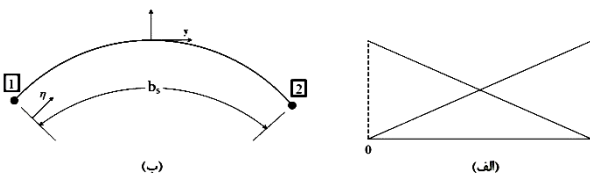
همچنین شکل ۶ مقادیر این توابع را در بازه متبوع نشان می‌دهد.



شکل ۵ سری توابع بی‌زیر اسپلاین مرتبه ۳ در امتداد یک خط گرهی (پایین) و تابع بی‌زیر اسپلاین مرتبه ۳ به ازای مختصات عمومی نوار (بالا)

توابع شکل لاگرانژی خطی همان‌گونه که در شکل ۷ نشان داده شده است، به منظور بررسی عرض سازه به صورت زیر برای گره‌های عرضی یک نوار قابل بیان است.

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \eta \\ N_2 = \eta \end{cases}, \quad \eta = \frac{y}{b_s} \quad (18)$$



شکل ۶ تابع میان‌یابی لاگرانژی خطی (راست) و مختصه عرضی یک نوار با دو خط گرهی (چپ)

که:

$$([A], [B], [D], [B^K], [D^{2K}], [D^{JK}]) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2, \phi^K, z\phi^K, \phi^l \phi^K) dz \quad (14)$$

$$([A]^s, [B^{K,z}]^s, [D^{JK,zz}]^s) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^s (1, \phi_{,z}^K, \phi_{,z}^l \phi_{,z}^K) dz \quad (15)$$

باید توجه داشت که در رابطه ۱۲ ماتریس ضرایب کرنش‌ها، متقارن بوده و اندیس‌های J و K تنها به منظور ارجاع مناسب بین منته‌های تنش حاکم و کرنش‌های متناظر آن اعمال شده است. همچنین توجه به این نکته نیز مهم به نظر می‌رسد که بردار ماتریسی مربوط به منته‌های تنش و همچنین بردار ماتریسی مربوط به کرنش‌ها و ضرایب آن نیز با توجه به تعداد گره‌های عددی لایرواز حاکم بر مسئله، تعیین می‌شوند.

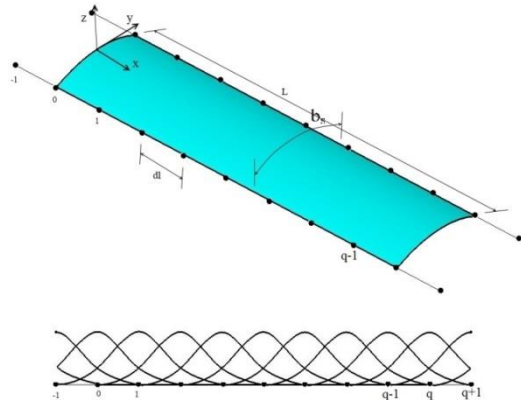
همچنین به منظور اصلاح توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت چندلایه، از ضریب تصحیح برشی (k^2) استفاده شده است که در منته‌های تنش برشی عرضی ضرب می‌شود.

۴-۲- میدان جابه‌جایی

میدان جابه‌جایی فرضی با در نظر گرفتن تئوری لایرواز مرتبه اول و با کاربرد روش نوار محدود اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ U^j \\ V^j \end{cases} = N_{(r)}^j \begin{bmatrix} \phi & & & & & & \\ & \phi & & & & & \\ & & \phi & & & & \\ & & & \phi & & & \\ & & & & \phi & & \\ & & & & & \phi & \\ & & & & & & \phi \end{bmatrix} \begin{cases} d_{u_i}^j \\ d_{v_i}^j \\ d_{w_i}^j \\ d_{\varphi_x}^j \\ d_{\varphi_y}^j \\ d_{U^j}^j \\ d_{V^j}^j \end{cases} \quad (16)$$

که ϕ توابع طولی از نوع بی‌زیر اسپلاین مرتبه ۳ و N توابع عرضی از نوع لاگرانژی خطی هستند. المان‌های مورد استفاده در روش نوار محدود در یک راستا کشیده شده‌اند که به هر کدام از آن‌ها یک نوار گفته می‌شود (شکل ۵).



شکل ۴ المان نواری پوسته به همراه توابع اسپلاین در امتداد خطوط گرهی

با در نظر گرفتن توابع لاگرانژی خطی به منظور بررسی عرضی سازه، هر نوار از دو خط گرهی تشکیل خواهد شد که در امتداد هر کدام از این خطوط

شکل زیر می‌رسیم که شامل دو قسمت سختی استاتیکی و سختی دینامیکی است.

$$M\ddot{d} + (K_e - K_g^s - K_g^d \cos(\omega t))d = 0 \quad (25)$$

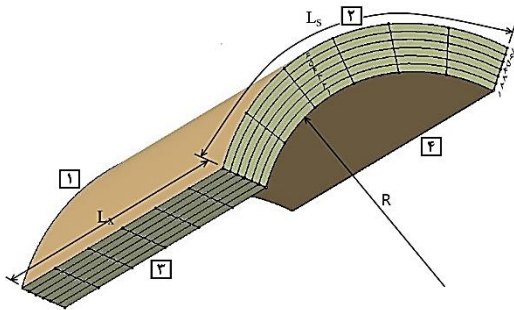
این رابطه، معادله تعادل سازه تحت بارگذاری مذکور است که به منظور بررسی رفتار ناپایداری دینامیکی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. این معادله دیفرانسیل مشابه شکل عمومی معادله دیفرانسیل موسوم به معادله متیو یا در شکل عمومی تر آن، معادله هیل که به معادله متیو-هیل^۱ نیز شهرت دارد مطرح می‌شود.

با تقریب مرتبه اول بولوتین برای حل این معادله، به دو مجموعه معادله مقدار ویژه می‌رسیم که نمایانگر دو شاخه محدوده پایین و بالای فرکانس‌های ناپایداری دینامیکی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} K_e - K_g^s + 0.5K_g^d & 0 \\ 0 & K_e - K_g^s - 0.5K_g^d \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\omega^2 \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = 0 \quad (26)$$

۳- نتایج

در این قسمت نتایج مربوط به تحلیل فرکانس‌های طبیعی، بارهای بحرانی کماتش و ناپایداری دینامیکی با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده بیان گردیده و به منظور صحت‌آزمایی با سایر مراجع، مورد مقایسه قرار خواهد گرفت. شکل ۸ یک پنل استوانه‌ای چندلایه کامپوزیت با تعداد ۶ لایه کامپوزیت که معادل با ۶ لایه عددی لایروایز می‌باشد را نشان می‌دهد. تعداد گره‌های عددی لایروایز نیز در شکل ۷ حاضر است. ابعاد این پنل استوانه‌ای در شکل قابل مشاهده است.



شکل ۷ پنل استوانه‌ای چندلایه کامپوزیت با ابعاد متناظر

لازم به ذکر است که برای پنل تخت، طول پنل در روابط به صورت L نمایش داده شده است.

برای شرایط مرزی وارد بر سازه نیز به این صورت عمل شده است که شرایط مرزی لولایی در روابط به صورت رابطه زیر اعمال می‌شود:

$$(27)$$

لازم به ذکر است که تابع درون‌یابی خطی پیوستگی تابع را تا مرتبه C^1 فراهم می‌آورد.

۲-۵- تحلیل ناپایداری پارامتری

بر طبق تعریف، یک سازه الاستیک زمانی که تحت یک تغییر شکل کوچک قرار می‌گیرد، اگر در میزان انرژی کل سازه تغییری اتفاق نیافتد در تعادل باقی می‌ماند. که در واقع این شرط، به شرط تعادل سازه الاستیک بر اساس مینیمم انرژی سازه معروف است که به شکل زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\delta\Pi = 0 \quad (19)$$

با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی کل سازه، به فرم عمومی معادله تعادل سازه بر حسب درجات آزادی سیستم می‌رسیم.

$$M\ddot{d} + (K_e - K_g)d = 0 \quad (20)$$

از رابطه فوق رابطه فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} (K_g = 0) \rightarrow M\ddot{d} + K_e d = 0 \\ (d = e^{i\omega t}) \rightarrow (K_e - \omega_n^2 M)d = 0 \end{cases} \quad (21)$$

در غیاب اثرات اینرسی این معادله به معادله مقدار ویژه کماتش استاتیکی به شکل معادله زیر تبدیل می‌شود که بار بحرانی کماتش سازه (σ_{cr}) از آن قابل محاسبه است.

$$(\dot{d} = 0) \rightarrow (K_e - \lambda K_g)d = 0 \quad (22)$$

همان‌طور که از اسم ناپایداری دینامیکی مشخص است، سازه مورد تحلیل در معرض نیروهای پارامتریک درون صفحه ای قرار دارد. در واقع می‌توان نیروهای وارد بر سازه که در مقاله حاضر به صورت تک محوری مورد بررسی قرار می‌گیرند را به صورت مجموعه‌ای از یک نیروی ثابت و بی‌تغییر (σ^s) و یک نیروی هارمونیک (با تغییرات کسینوسی) (σ^d) بیان کرد که به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\sigma = \sigma^s + \sigma^d \cos(\omega t) \quad (23)$$

که σ بیانگر نیروی کلی وارد بر سازه است. می‌توان مقادیر مربوط به σ^s و σ^d را با تعریف دو پارامتر اندازه بارگذاری a^s و a^d و با استفاده از تنش بحرانی سازه نیز به شکل زیر نمایش داد.

$$\sigma = a^s \sigma_{cr} + a^d \sigma_{cr} \cos(\omega t) \quad (24)$$

با وارد کردن این ضریب بار، در معادله انرژی تنش اولیه بیان شده در رابطه ۱۰ و سپس وارد کردن مقادیر انرژی جدید در رابطه ۱۹ به رابطه‌ای به

مقادیر حاصل به ازای تعداد ۸ تابع اسپلاین در امتداد طول صفحه و تعداد ۳۰ نوار محدود در راستای عرضی صفحه نتیجه‌گیری شده‌اند. باید توجه داشت که از ویژگی‌های تئوری لایروایز در نظر گرفتن بعد ضخامت چندلایه با افزودن درجات آزادی در این راستا می‌باشد و همچنین با افزایش تعداد گره‌های عددی لایروایز در ضخامت همگرایی دقیق‌تری از نتیجه حاصل خواهد شد. جدول ۱ روند این همگرایی را برای مسئله حاضر به خوبی مشخص کرده است. Nn بیانگر تعداد گره‌های عددی لایروایز در ضخامت است که با توجه به دلایلی که پیش از این بیان شد، عدد آن ۱ واحد از تعداد لایه‌های کامپوزیت بیشتر می‌باشد.

۳-۲ بررسی تاثیر تغییر ضخامت بر روی فرکانس اصلی ارتعاشات آزاد مربوط به صفحات ارتوتروپ چندلایه با لایه‌چینی متعام

یک پنل مربعی تخت کامپوزیت دولایه با لایه‌چینی $(0^\circ/90^\circ)$ در نظر گرفته شده است و مشخصات ماده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} E_1 = 40E_2, & \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, & G_{23} = 0.5E_2 \end{cases} \quad (30)$$

ضخامت هر لایه $\frac{h}{2}$ می‌باشد و مقادیر فرکانس طبیعی به صورت بدون بعد از رابطه زیر محاسبه شده‌اند:

$$\omega = p \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{1}{E_2} \rho} \quad (31)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت شرایط مرزی چهار طرف صفحه لولایی در نظر گرفته شده است. ضریب تصحیح برشی نیز $(k^2 = 5/6)$ در نظر گرفته شده است.

شکل ۹ نتایج مربوط به فرکانس بدون بعد مسئله حاضر را با در نظر گرفتن نسبت‌های مختلف طول پنل به ضخامت آن (L/h) ، نشان می‌دهد. به منظور تأیید اعتبار نتایج حاصل، مقادیر محاسبه شده با مراجع مختلف مقایسه شده است.

$$\begin{cases} x=0, L_x : \begin{cases} u^0 \neq 0, & v^0 = 0, & w^0 = 0 \\ \varphi_x \neq 0, & \varphi_y = 0 \\ U^I \neq 0, & V^I = 0 \end{cases} \\ y=0, L_y : \begin{cases} u^0 = 0, & v^0 \neq 0, & w^0 = 0 \\ \varphi_x = 0, & \varphi_y \neq 0 \\ U^I = 0, & V^I \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

و برای شرایط مرزی درگیر کامل:

$$\begin{cases} x=0, L_x : \begin{cases} u^0 = 0, & v^0 = 0, & w^0 = 0 \\ \varphi_x = 0, & \varphi_y = 0 \\ U^I = 0, & V^I = 0 \end{cases} \\ y=0, L_y : \begin{cases} u^0 = 0, & v^0 = 0, & w^0 = 0 \\ \varphi_x = 0, & \varphi_y = 0 \\ U^I = 0, & V^I = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (28)$$

طریقه بیان شرایط مرزی در تمامی نتایج نیز از سمت چپ به راست به ترتیب شماره‌گذاری در شکل ۸ می‌باشد. بارگذاری نیز در قسمت‌های ۱ و ۳ بر پنل وارد می‌شود.

۳-۱- تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات و پنل‌های استوانه‌ای

۳-۱-۱ بررسی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد مربوط به صفحات ایزوتروپ به عنوان اولین مسئله به منظور صحت‌آزمایی محاسبات، یک ورق تخت مربعی جدار ضخیم که دارای نسبت ضخامت به طول $(h/L = 0.1)$ می‌باشد، بررسی خواهد شد. مشخصات مکانیکی این صفحه توسط مدول الاستیسیته (E) ، چگالی (ρ) و نسبت پواسون (ν) تعریف می‌شود که نسبت پواسون برابر با ۰٫۳، در نظر گرفته شده است. E و ρ می‌توانند مقادیر دلخواه داشته باشند زیرا جواب مسئله با رابطه زیر به صورت بی‌بعد بیان خواهد شد.

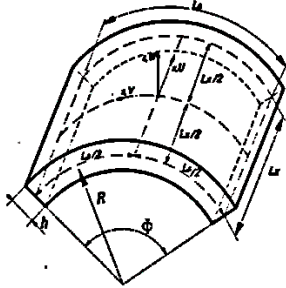
$$\omega = p \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{E} \rho} \quad (29)$$

که در این رابطه فرکانس اصلی صفحه (p) بر حسب رادیان بر ثانیه (rad/s) می‌باشد. در جدول ۱ مقادیر ۶ فرکانس طبیعی اول به صورت بی‌بعد محاسبه شده و مقادیر حاصل با مراجع مختلف مقایسه شده‌اند. شرایط مرزی حاکم بر صفحه به صورت چهار طرف لولایی ساده در نظر گرفته شده است و فاکتور تصحیح برشی نیز $(k^2 = 5/6)$ می‌باشد.

جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد صفحه ایزوتروپ با بررسی روند همگرایی با افزایش تعداد لایه‌های عددی لایروایز در ضخامت.

۶	۵	۴	۳	۲	۱	Nn	تئوری
۴۱٫۷۱۴	۴۱٫۷۱۴	۳۴٫۲۰۷	۲۲٫۲۶۰	۲۲٫۲۶۰	۹٫۳۱۵		الاستیسیته سه‌بعدی [۱۷]
۴۱٫۵۸	۴۱٫۵۸	۳۴٫۱۱	۲۲٫۲۲	۲۲٫۲۲	۹٫۳۱		مرتب‌بندی بالایی برشی [۱۸]
۴۱٫۴۷	۴۱٫۴۷	۳۴٫۰۴	۲۲٫۱۹	۲۲٫۱۹	۹٫۳۰		مرتب‌بندی بالایی برشی [۱۹]
۴۸٫۱۵۹	۴۸٫۱۵۹	۳۸٫۵۲۷	۲۴٫۰۷۹	۲۴٫۰۷۹	۹٫۶۳۲		کلاسیک صفحات [۲۰]
۴۱٫۹۲۱	۴۱٫۵۴۲	۳۴٫۰۷۱	۲۲٫۲۱۰	۲۲٫۱۹۷	۹٫۳۰۳		لایروایز نوار محدود [۲۱]

۴۲,۳۰۸	۴۱,۵۲۲	۳۴,۲۴۳	۲۲,۴۸۰	۲۲,۲۱۱	۹,۳۴۴	۱	لایروایز مرتبه اول نوار محدود اسپلاین
۴۲,۳۰۸	۴۱,۵۲۲	۳۴,۲۴۳	۲۲,۴۸۰	۲۲,۲۱۱	۹,۳۴۴	۲	
۴۱,۸۷۰	۴۱,۰۸۰	۳۳,۹۴۱	۲۲,۳۴۸	۲۲,۰۷۸	۹,۳۱۹	۳	
۴۱,۶۸۶	۴۰,۸۹۵	۳۳,۸۱۴	۲۲,۲۹۳	۲۲,۰۲۲	۹,۳۰۹	۴	
۴۱,۵۹۵	۴۰,۸۰۳	۳۳,۷۵۱	۲۲,۲۶۵	۲۱,۹۹۵	۹,۳۰۴	۵	
۴۲,۳۰۸	۴۱,۵۲۲	۳۴,۲۴۳	۲۲,۴۸۰	۲۲,۲۱۱	۹,۳۴۴		لایروایز مرتبه اول برشی



شکل ۹ هندسه پنل استوانه ای با ابعاد متناظر

همچنین نتایج ارائه شده توسط رابطه زیر بی‌بعد می‌شوند.

$$\omega = p \frac{L_x^2}{h} \sqrt{\frac{1}{E_2} \rho} \quad (۳۳)$$

جدول ۲ نتایج مربوط به مسئله حاضر را ارائه می‌کند.

روند بررسی همگرایی در کار حاضر، تابع عوامل مختلفی می‌باشد. در این‌جا بایستی به تاثیر شرایط مرزی برای بررسی همگرایی نیز توجه داشت. هر کدام از این شرایط مرزی دارای رفتار خاص مربوط به خود هستند و برای هر کدام از آن‌ها نیاز به بررسی متفاوت همگرایی مسئله از نظر تعداد توابع اسپلین و تعداد نوار محدود مورد استفاده، وجود دارد.

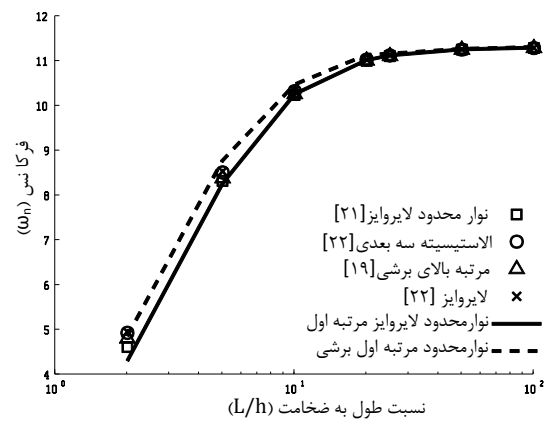
۳-۱-۴ بررسی تاثیر شرایط مرزی بر بار بحرانی کماتش مربوط به پنل‌های ارتوتروپ چندلایه با لایه چینی متعامد

پنل تخت مربعی با لایه چینی متعامد مفروض است. هدف تعیین بار بحرانی کماتش می‌باشد که به ازای لایه چینی‌های متعامد متقارن و نامتقارن، بررسی‌ها صورت خواهد گرفت. مشخصات ماده مورد استفاده بر اساس رابطه ۳۰ تعیین شده است و مقادیر بار بحرانی کماتش به شکل زیر، بی‌بعد شده‌اند.

$$\bar{\lambda} = \sigma_{cr} \frac{L^2}{E_2 h^2} \quad (۳۴)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت شرایط مرزی چهار طرف صفحه لولایی در نظر گرفته شده است.

نتایج مربوط به بار بحرانی بدون بعد، مسئله حاضر را در نظر گرفتن نسبت‌های مختلف طول پنل به ضخامت آن در جدول ۳ نشان داده شده است. به منظور تأیید اعتبار نتایج حاصل، مقادیر محاسبه شده با مراجع مختلف مقایسه شده است. نتایج همگرایی برای کار حاضر نیز با توجه به نسبت طول به ضخامت آن متغیر می‌باشد. برای این مسئله روند همگرایی به ازای تعداد ۱۰ تابع اسپلین در طول همچنین برای تعداد نوار محدود نیز برای نسبت‌های



شکل ۸ تغییر فرکانس طبیعی اصلی پنل تخت دو لایه با لایه چینی (۰°/۹۰°) برای نسبت‌های مختلف ضخامت

مقادیر محاسبه شده در شکل ۹ به ازای در نظر گرفتن تعداد ۸ تابع اسپلین در طول صفحه و تعداد نوار محدود مورد نیاز برای همگرایی کامل جواب، محاسبه شده‌اند. به هر میزان که نسبت طول به ضخامت افزایش یابد، نیاز به بررسی بیشتر همگرایی وجود دارد. در مقایسه بین دقت تئوری‌های مختلف، مشخص می‌شود که با ضخیم‌تر شدن سازه اختلاف بین نتایج تئوری مرتبه اول برشی نسبت به تئوری‌های تک‌لایه معادل و حتی تئوری لایروایز معمولی، بیشتر می‌شود که حاکی از دقت بالاتر این تئوری است.

۳-۱-۳ بررسی تاثیر شرایط مرزی بر فرکانس اصلی ارتعاشات آزاد مربوط به پنل‌های ارتوتروپ چندلایه با لایه چینی متعامد

در مسئله حاضر یک پنل استوانه‌ای با لایه چینی متعامد متقارن (۰°/۹۰°/۰°) را به منظور تحلیل در نظر می‌گیریم. مشخصات ماده مورد تحلیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} E_1 = 25E_2, & \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, & G_{23} = 0.2E_2 \end{cases} \quad (۳۲)$$

با توجه به شکل ۱۰. *Error! Reference source not found.* نسبت $(L_x/h = 10)$ و $(L_x/L_s = 1)$ برای پنل استوانه‌ای مفروض است. مقادیر پاسخ به ازای $(R/L_x = 5, 20)$ و برای شرایط مرزی مختلف، بررسی و نتیجه کار به منظور تایید صحت با مراجع مختلف مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است.

را به صورت بدون بعد با رابطه ۳۴ و به ازای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف نشان می‌دهد.

برای در نظر گرفتن تاثیر افزایش لایه‌های چندلایه در میزان پاسخ سازه، یک پنل استوانه‌ای با نسبت طول به ضخامت $(L_x/L_s = 5, 10)$ مفروض است. چهار طرف صفحه دارای شرایط مرزی لولایی می‌باشد. لایه‌چینی پنل به صورت متغیر و به شکل $[0^\circ/90^\circ/\dots]_k$ می‌باشد که در این جا k بیانگر تعداد لایه می‌باشد. مشخصات ماده مورد نظر نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} E_1 = 25E_2, & \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, & G_{23} = 0.6E_2 \end{cases} \quad (35)$$

طول ۱۰، ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ به ترتیب برای ۳۰، ۳۶، ۵۰ و ۱۰۰ نوار محدود می‌باشد.

۳-۱-۵ بررسی تاثیر بررسی تاثیر نسبت طول به ضخامت بر بار بحرانی کمانش مربوط به پنل های ارتوتروپ چندلایه با لایه‌چینی متعامد پنل استوانه‌ای با لایه‌چینی $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ مفروض است. شرایط مرزی پنل به صورت ۴ طرف لولایی بوده و نسبت طول به عرض آن $(L_x/L_y = 1)$ و شعاع به طول آن $(R/L_x = 20)$ است. خصوصیات ماده در هر لایه به صورت رابطه ۳۲ تعریف می‌شود. جدول ۴ بارهای بحرانی کمانش

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد پنل استوانه‌ای سه‌لایه با لایه‌چینی $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ و با در نظر گرفتن شرایط مرزی و نسبت‌های ابعادی مختلف

SSFC	SSFS	SSFF	SSCC	SSSC	SSSS	تئوری
$R/L_x = 5$						
۶,۱۱۳۶	۴,۲۹۸۳	۳,۷۶۷۲	۱۶,۰۲۳	۱۳,۸۶۰	۱۱,۸۳۹	تغییرشکل برشی نوع لاو [۲۳]
۶,۱۲۳	۴,۳۱۲	۳,۷۸۳	۱۶,۰۲۸	۱۳,۸۶۶	۱۱,۸۴۶	مرتب‌بالای برشی [۲۴]
۵,۹۶۶۰	۴,۳۰۶۵	۳,۷۸۷۵	۱۴,۵۴۳۰	۱۲,۷۸۹۱	۱۱,۲۰۹۷	نوار محدود لایروایز
۶,۱۹۰۳	۴,۳۲۲۴	۳,۸۰۰۴	۱۶,۴۱۲۵	۱۴,۲۸۹۶	۱۲,۲۱۹۳	نوارمحدود مرتبه اول برشی
$R/L_x = 20$						
۶,۰۸۸۹	۴,۳۲۳۲	۳,۷۸۸۶	۱۵,۹۹۹	۱۳,۸۲۵	۱۱,۷۹۳	تغییرشکل برشی نوع لاو [۲۳]
۶,۰۸۹۰	۴,۳۲۲	۳,۷۸۹	۱۵,۹۹۹	۱۳,۸۲۵	۱۱,۷۹۳	مرتب‌بالای برشی [۲۴]
۵,۹۳۹۳	۴,۳۲۷۷	۳,۸۰۴۸	۱۴,۵۱۰۲	۱۲,۷۴۶۹	۱۱,۱۵۷۶	نوار محدود لایروایز
۶,۱۶۳۵	۴,۳۴۳۷	۳,۸۱۷۷	۱۶,۳۹۰۲	۱۴,۲۵۷۳	۱۲,۱۷۵۱	نوارمحدود مرتبه اول برشی

جدول ۳ بار بحرانی کمانش برای پنل تخت مربعی چندلایه با لایه‌چینی‌های متعامد برای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف

نسبت طول به ضخامت				متد تحلیلی	لایه‌چینی
۱۰۰	۵۰	۲۰	۱۰		
۱۲,۹۴۲	۱۲,۸۹۵	۱۲,۵۷۷	۱۱,۵۶۳	مرتب‌بالای برشی [۱۸]	$(0^\circ/90^\circ)$
۱۲,۹۳۴	۱۲,۸۷۹	۱۲,۵۱۰	۱۱,۳۴۹	مرتب‌اول برشی [۲۵]	
۱۲,۹۳۹	۱۲,۸۸۴	۱۲,۵۱۵	۱۱,۳۵۳	مرتب‌اول برشی [۱۸]	
۱۳,۰۳۳	۱۲,۹۶۷	۱۲,۵۲۰	۱۱,۱۶۹	مرتب‌اول برشی [۲۶]	
۱۲,۹۹۹۸	۱۲,۹۲۸۹	۱۲,۴۳۴۳	۱۰,۹۷۶۷	لایروایز مرتبه اول	
۱۳,۰۱۴۲	۱۲,۹۴۹۴	۱۲,۵۵۳۶	۱۱,۳۵۸۸	مرتب‌اول برشی	
۳۵,۹۷۱	۳۵,۴۱۹	۳۱,۶۳۷	۲۳,۳۴۹	مرتب‌بالای برشی [۱۸]	$(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$
۳۵,۸۵۱	۳۵,۲۵۴	۳۱,۶۲۵	۲۳,۴۰۹	مرتب‌اول برشی [۲۵]	
۳۵,۹۵۵	۳۵,۳۵۶	۳۱,۷۰۷	۲۳,۴۷۱	مرتب‌اول برشی [۱۸]	
۳۶,۱۹	۳۵,۵۶۱	۳۱,۷۴۷	۲۳,۲۳۶	مرتب‌اول برشی [۲۶]	
۳۶,۱۰۲۶	۳۵,۲۸۵۵	۳۱,۱۰۳۱	۲۲,۰۱۹۲	لایروایز مرتبه اول	
۳۶,۱۲۶۶	۳۵,۵۲۱۸	۳۱,۷۱۶۷	۲۳,۲۷۷۶	مرتب‌اول برشی	

میزان همگرایی در کار حاضر نیز بر اساس تعداد ۸ تابع اسپلاین در طول صفحه و تعداد ۴۰ نوار محدود برای هر دو نسبت طول به ضخامت، مورد بررسی قرار گرفته است.

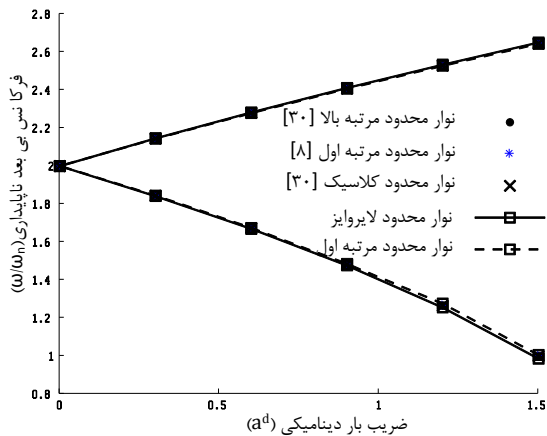
جدول ۵ نتایج همگرا شده برای مدل حاضر را برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت و به ازای تعداد لایه‌های مختلف، با نتایج سایر مراجع مورد صحت‌سنجی قرار می‌دهد.

جدول ۴ بار بحرانی کمانش برای پنل استوانه‌ای ارتوتروپ با لایه‌چینی $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ برای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف

	L_x/h				تئوری
	۱۰۰	۵۰	۳۰	۲۰	
					۱۰
	۳۵,۸۹۱	۳۵,۳۳۴	۳۴,۰۸۶	۳۱,۹۱۱	۲۳,۹۷۶
مرتبه اول برشی [۲۶]					
	۳۶,۸۵	۳۵,۴۰	-	۳۱,۷۹	۲۳,۹۷
مرتبه اول برشی [۲۷]					
	۳۶,۸۶	۳۵,۴۲	۳۴,۰۴	۳۱,۹۱	۲۴,۱۹
مرتبه اول برشی [۲۸]					
	۳۷,۰۴	۳۶,۱۳	-	۳۵,۸۸	۳۵,۸۴
کلاسیک صفحات [۲۸]					
	۳۵,۷۷۶۰	۳۵,۱۲۲۱	۳۳,۲۶۳۲	۳۰,۶۴۹۴	۲۲,۸۱۳۸
لایروایز مرتبه اول					
	۳۵,۸۸۴۲	۳۵,۵۵۸۱	۳۴,۱۰۲۱	۳۱,۹۶۳۵	۲۴,۰۰۶۰
مرتبه اول برشی					

جدول ۵ بار بحرانی کمانش برای پنل استوانه‌ای ارتوتروپ با لایه‌چینی‌های مختلف و برای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف

	تعداد لایه‌ها				تئوری	L_x/h
	۵	۴	۳	۲		
						۵
	۰,۲۹۷۳	۰,۲۷۶۳	۰,۲۶۶۰	۰,۲۲۲۷	مرتبه بالای برشی [۲۹]	
	۰,۳۰۹۳	۰,۲۸۲۸	۰,۲۹۶۴	۰,۲۳۴۴	مرتبه اول برشی [۲۶]	
	۰,۲۹۳۴۹	۰,۲۶۷۲۶	۰,۲۸۶۵۹۱	۰,۲۰۶۷۷	لایروایز مرتبه اول	
	۰,۳۰۸۱	۰,۲۷۹۱۵	۰,۲۹۲۶۳	۰,۲۱۸۸۲	مرتبه اول برشی	
						۱۰
	۰,۱۵۶۱	۰,۱۴۰۰	۰,۱۴۲۴	۰,۰۸۷۹	مرتبه بالای برشی [۲۹]	
	۰,۱۶۰۱	۰,۱۵۰۶	۰,۱۴۹۸	۰,۰۹۵۶	مرتبه اول برشی [۲۶]	
	۰,۱۵۹۸۱	۰,۱۴۵۲۵	۰,۱۴۷۶۷	۰,۰۹۲۱۵	لایروایز مرتبه اول	
	۰,۱۶۲۲۴	۰,۱۵۰۱۷	۰,۱۵۱۵۲	۰,۰۹۵۹۲	مرتبه اول برشی	



شکل ۱۱ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی متعامد متقارن $(a_s = 0)$ با شرایط مرزی چهار طرف لولایی $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$

شکل ۱۲ مرزهای ناپایداری را به ازای افزایش بار استاتیکی وارد بر صفحه، به نمایش گذاشته است. مقادیر پاسخ با مراجع معتبر مقایسه شده است و مقادیر فرکانس نسبت به فرکانس طبیعی سازه بی‌بعد شده‌اند.

۲-۳- تحلیل ناپایداری دینامیکی

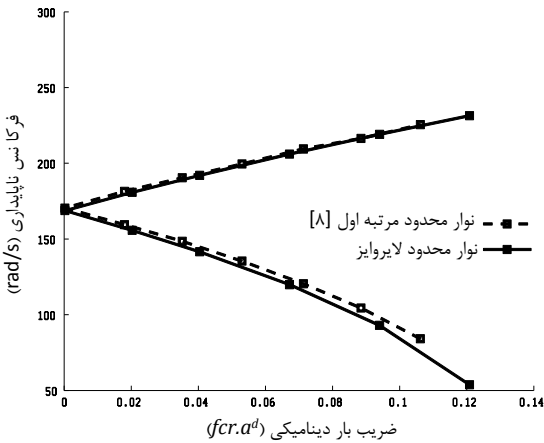
۱-۲-۳ تحلیل ناپایداری دینامیکی صفحات ارتوتروپ چهار لایه با لایه چینی متعامد
پنل تخت مربعی چهار لایه با لایه‌چینی متعامد متقارن $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ با شرایط مرزی چهار طرف صفحه لولایی مفروض است. طول و عرض صفحه برابر با ۱۰ اینچ و نسبت طول به ضخامت L/h آن برابر با ۲۵ می‌باشد. مشخصات ماده مورد استفاده عبارت است از:

$$\begin{cases} E_1 = 40E_2, & E_2 = 10^6 \text{ psi (6.8982 GPa)} & \nu_{12} = 0.25 \\ G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, & G_{23} = 0.5E_2, & \rho = 1. \text{ lbs}^2/\text{in}^4 \end{cases} \quad (36)$$

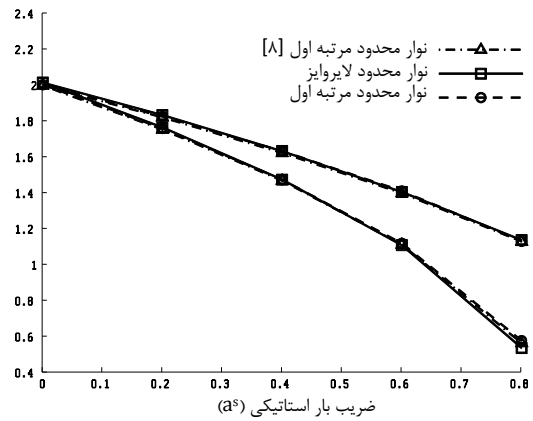
ضریب تصحیح برشی نیز در این جا به صورت $(k^2 = 5/6)$ در نظر گرفته شده است. شکل ۱۱ نتایج همگرا شده برای مدل حاضر را ارائه و با مراجع معتبر مورد بررسی و صحت‌سنجی قرار می‌دهد. مقادیر فرکانس طبیعی بر رادیان بر ثانیه می‌باشد.

$(-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ)$ در نظر می‌گیریم. همه مشخصات و ابعاد مورد استفاده در این جا مطابق با قسمت قبل است. نتایج مربوط به تعیین مناطق ناپایداری برای شرایط مرزی چهار طرف صفحه لولایی و چهار طرف صفحه درگیر کامل ارائه خواهد شد.

در ادامه مناطق ناپایداری مربوط به این لایه‌چینی‌ها با در نظر گرفتن شرایط مرزی لولایی و همچنین درگیر ارائه و مورد مقایسه قرار می‌گیرد.



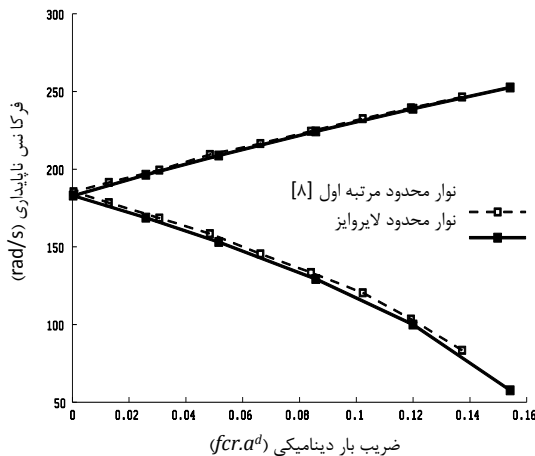
شکل ۱۰ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی پادمتقارن $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ با شرایط مرزی چهار طرف لولایی به ازای تغییرات ضریب بار استاتیکی $(a_s = 0)$.



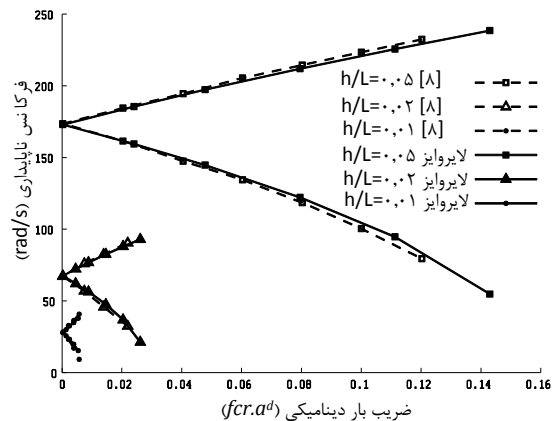
شکل ۱۱ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی متعام متقارن $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ با شرایط مرزی چهار طرف لولایی برای نسبت‌های مختلف ضخامت $(a_s = 0)$.

برای تعیین تاثیر نسبت ضخامت در فرکانس شروع ناپایداری پارامتریک هارمونیک و همچنین عرض ناحیه ناپایداری سازه، شکل ۱۳ ارائه شده است. محور عمودی، فرکانس بارگذاری و محور افقی آن مولفه دینامیکی بارگذاری را نشان می‌دهد. همچنین ضریب بار بحرانی کمانش نیز از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$f_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E_2} \quad (37)$$



شکل ۱۲ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی پادمتقارن زاویه چین $(-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ)$ با شرایط مرزی چهار طرف لولایی $(a_s = 0)$.

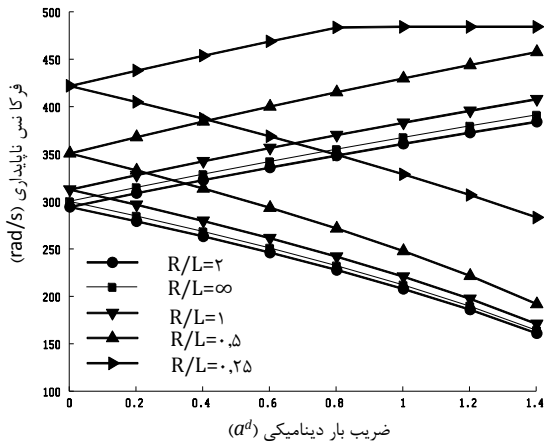


شکل ۱۳ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی متعام متقارن $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ با شرایط مرزی چهار طرف لولایی برای نسبت‌های مختلف ضخامت $(a_s = 0)$.

همان‌طور که از شکل ۱۳ مشخص است، با نازک‌تر شدن پل، فرکانس پایه ناپایداری کاهش یافته و مرزهای ناپایداری از هم باز می‌شوند. به دلیل کاهش در بار بحرانی کمانشی سازه، محدوده شاخه‌های مرزهای ناپایداری نیز کوچک‌تر می‌شود.

۲-۲-۳ تحلیل ناپایداری دینامیکی صفحات ارتوتروپ چهار لایه با لایه چینی زاویه ای

به منظور بررسی لایه‌چینی‌های مختلف برای چند لایه کامپوزیت، یک پل تخت متقارن $(-45^\circ/-45^\circ/45^\circ/45^\circ)$ و پاد



شکل ۱۶ مرزهای ناپایداری صفحه چهارلایه کامپوزیت با لایه چینی متقارن متعامد ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) با تغییر در انحنای پنل ($a_s = 0$).

همان‌گونه که از شکل ۱۷ مشخص است، با کاهش نسبت شعاع انحنا پنل به طول آن، فرکانس پایه ناپایداری افزایش یافته است.

۲-۲-۲ تحلیل ناپایداری دینامیکی پنل استوانه‌ای ارتوتروپ چهارلایه با لایه چینی زاویه‌ای

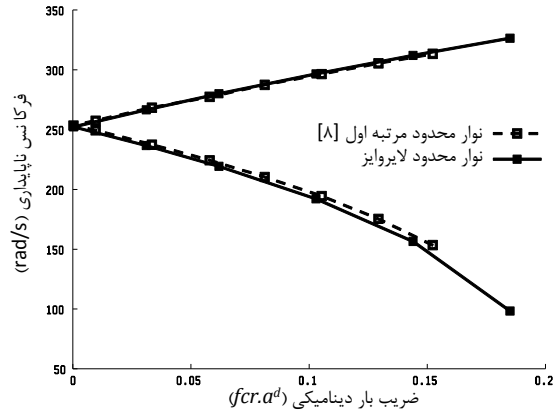
پنل استوانه‌ای جدار ضخیم سه‌لایه با لایه چینی متعامد و متقارن مفروض است. به منظور بررسی پنل استوانه‌ای لایه‌چینی متعامد متقارن ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) در نظر گرفته شده است. هندسه زیر به منظور بررسی پنل در نظر گرفته شده است.

$$L_x/R = 0.25, \quad L_x/L_s = 1.0, \quad L_x/h = 1.0 \quad (39)$$

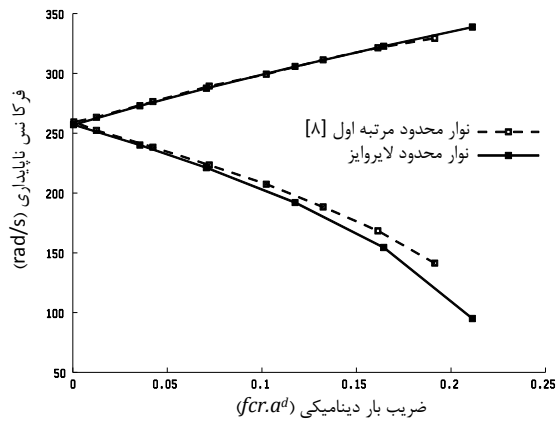
هدف بررسی ناپایداری دینامیکی این لایه‌چینی‌ها تحت تاثیر بارگذاری طولی پارامتری با در نظر گرفتن ضریب استاتیکی ثابت می‌باشد. خصوصیات ماده مورد استفاده به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} E_1 = 40E_2, & E_2 = 10^6 \text{psi} (6.8982 \text{Gpa}) \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5E_2, & \nu_{12} = 0.25 \end{cases} \quad (40)$$

نخستین هدف، یافتن منطقه ناپایداری به ازای بارگذاری طولی با ضریب استاتیکی ۰٫۲ می‌باشد. شرایط مرزی مورد استفاده در مدل حاضر به صورت متغیر و از چپ به راست وضعیت انتها، کناره، انتهای دوم و کناره دوم را نشان می‌دهد و C، S و F به ترتیب نماینده شرایط لولایی، درگیر و آزاد هستند. مقادیر مربوط به فرکانس بارگذاری دینامیکی به صورت بدون بعد و با رابطه ۲۷ محاسبه می‌شود. نتایج کار حاصل، با نتایج ارائه شده توسط فضیلتی مورد صحت‌آزمایی و سنجش قرار می‌گیرد. شکل ۱۸ نتایج تحلیل حاضر را برای شرایط لایه چینی ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) و برای شرایط مرزی متفاوت نشان می‌دهد.



شکل ۱۴ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی پادمتقارن زاویه چین ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) با شرایط مرزی چهار طرف درگیر کامل ($a_s = 0$).



شکل ۱۵ مرزهای ناپایداری صفحه چهار لایه کامپوزیت با لایه چینی پادمتقارن زاویه چین ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$) با شرایط مرزی چهار طرف درگیر کامل ($a_s = 0$).

۲-۲-۲ تحلیل اثر انحنای بر تعیین مرزهای ناپایداری دینامیکی پنل استوانه‌ای کامپوزیت چهارلایه با لایه چینی متعامد

به منظور تحقیق اثر تغییر در شعاع انحنا پنل، مدل ارائه شده در قسمت‌های قبلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل در نظر گرفته شده به صورت پنل چهار-لایه کامپوزیت با لایه چینی ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) با شرایط مرزی چهار طرف لولایی در نظر گرفته شده است. ابعاد پنل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} L_x/L_s &= 1.0, & L_x/h &= 1.0 \\ R/L_x &= \infty, 2, 1, 0.5, 0.25 \end{aligned} \quad (38)$$

شکل ۱۷ اثر این تغییر در شعاع انحنا را بر مرزهای ناپایداری مدل به نمایش گذاشته است.

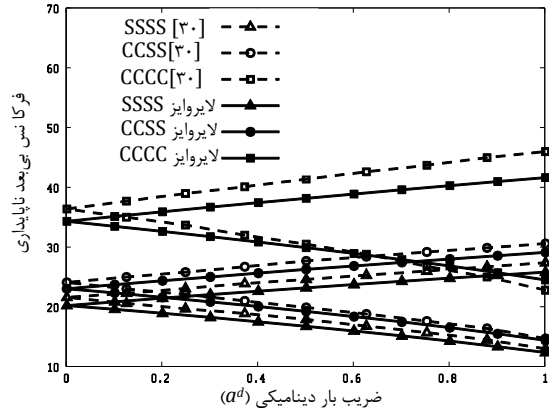
ضخامت پنل یا پوسته	h
شعاع انحنای پوسته	R
سختی‌های کششی-برشی درون صفحه‌ای	A_{ij}
سختی‌های خمشی	D_{ij}
سختی‌های برشی	A_{ij}^s
کوپلینگ سختی‌های درون صفحه‌ای و خمشی	B_{ij}
مولفه‌های جابه‌جایی گره I ام در بسط لایروایز	U^I, V^I, W^I
تعداد گره‌های لایروایز در ضخامت چندلایه	Nn
انرژی جنبشی سازه	T
انرژی کرنشی سازه برای تغییرشکل‌های الاستیک	U_e
کار انجام شده توسط نیروهای وارد بر سیستم به صورت تنش‌های اولیه	U_g
ماتریس جرم سازه	M
ماتریس سختی الاستیک سازه	K_e
ماتریس سختی هندسی سازه	K_g
ماتریس سختی هندسی تحت بار استاتیکی	K_g^s
ماتریس سختی هندسی تحت بار دینامیکی	K_g^d
بار بحرانی کمانش	σ_{cr}
ضریب بار استاتیکی	a^s
ضریب بار دینامیکی	a^d

علائم یونانی

مولفه‌های کرنش عمودی	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$
مولفه‌های تنش عمودی	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$
مولفه‌های کرنش برشی	$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$
توابع شکل بی‌بیزر اسپلین مرتبه ۳	ϕ_3
چرخش عمود عرضی حول محور x	ϕ_x
چرخش عمود عرضی حول محور y	ϕ_y
توابع میانمایی عمومی برای بیان جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای در ضخامت	ϕ^I
توابع میانمایی عمومی برای بیان جابه‌جایی عرضی در ضخامت	ψ^I
انرژی پتانسیل کل سازه	Π
فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم	ω_n
فرکانس تحریک	ω
چگالی سازه	ρ
ضریب پواسون	ν

۶- مراجع

- [1] Mahmoudabadi, M. R.: Finite strip analysis of parametric instability of laminated composite cylindrical shells with delaminations. MSc Thesis, Amirkabir University, Iran, 2014.
- [2] V. V. e. Bolotin, "The Dynamic Stability of Elastic Systems. Volume 1," DTIC Document 1962.
- [3] Bert, Charles W., and Victor Birman. "Parametric instability of thick, orthotropic, circular cylindrical shells." *Acta Mechanica* 71.1-4 (1988):



شکل ۱۷ مرزهای ناپایداری صفحه سه‌لایه کامپوزیت با لایه چینی متعامد با شرایط مرزی مختلف ($\alpha_s = 0.2$)

با توجه به ضخیم بودن پنل مورد بررسی تعداد ۶ تابع اسپلین به همراه ۳۰ نوار محدود نتایج همگرا شده را ارائه می‌کند. همان‌طور که در شکل نیز مشخص است، برای شرایط مرزی چهار طرف صفحه لولایی کمترین میزان فرکانس پایه ناپایداری حاکم است و با افزایش پیچیدگی و سخت‌تر شدن شرایط مرزی، فرکانس پایه ناپایداری که دو برابر فرکانس اصلی سازه است، بزرگتر می‌شود. در مورد عرض منطقه ناپایداری نیز برای شرایط مرزی چهار طرف درگیر، محدوده ناپایداری بزرگتری وجود خواهد داشت.

۴- نتیجه‌گیری

تئوری لایروایز بر پایه تئوری مرتبه اول برشی با ارائه یک تحلیل جامع از صفحات و پوسته‌های ضخیم، امکان بررسی صفحه را در امتداد ضخامت و در سه بعد فراهم می‌آورد. با مروری بر نتایج حاصل از تحلیل با این تئوری، تاثیر آن بر تعیین و حدود مرزهای ناپایداری ناشی از بارگذاری هارمونیک در مقایسه با سایر تئوری‌ها مشهود بوده و پاسخ واقعی‌تری از مسئله حاصل می‌شود.

روش نوار محدود نیز با توجه به ویژگی‌های منحصر به فردش برای یک سری سازه‌های خاص امتداد یافته در یک جهت، امکان ارائه پاسخ دقیق از سازه را فراهم می‌آورد. این روش با توجه به تعداد درجات آزادی کمتری که نسبت به تئوری المان محدود به منظور ارائه پاسخ همگرا شده نیاز دارد، می‌تواند بسیاری از حجم محاسباتی اضافه شده به منظور تحلیل که در نتیجه استفاده از روش لایروایز تحمیل می‌شود، را جبران کند. از ترکیب این تئوری‌ها نتایج خوبی به منظور بررسی فرکانس‌های طبیعی، بارهای بحرانی کمانش و تعیین مرزهای ناپایداری و پایداری دینامیکی سازه حاصل شده است.

۵- فهرست علائم

توابع شکل عرضی نوار محدود	N
ماتریس‌های ضرایب ستونی وابسته به زمان	d^x
طول پنل یا پوسته	L
تعداد توابع اسپلین طولی	q
مولفه‌های جابه‌جایی درون صفحه‌ای مربوط به سطح میانی	u^0, v^0
مولفه‌های جابه‌جایی کل درون صفحه‌ای مربوط	u, v
مولفه جابه‌جایی خارج از صفحه سطح میانی	w^0
مولفه جابه‌جایی کل خارج از صفحه	w

- [22] A. Nosier, R. K. Kapania, and J. Reddy, "Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory," *AIAA journal*, vol. 31, pp. 2335-2346, 1993.
- [23] A. Messina and K. P. Soldatos, "Influence of edge boundary conditions on the free vibrations of cross-ply laminated circular cylindrical panels," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 106, p. 2608, 1999.
- [24] Wang, S., and Y. Zhang. "Buckling, post-buckling and delamination propagation in debonded composite laminates Part 2: Numerical applications." *Composite Structures* 88.1 (2009): 131-146.
- [25] A. Chakrabarti and A. H. Sheikh, "Buckling of laminated composite plates by a new element based on higher order shear deformation theory," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 10, pp. 303-317, 2003.
- [26] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, W. Karunasena, and T. Tran-Cong, "Buckling and vibration analysis of laminated composite plate/shell structures via a smoothed quadrilateral flat shell element with in-plane rotations," *Computers & Structures*, vol. 89, pp. 612-625, 2011.
- [27] L. R. Kumar, P. Datta, and D. Prabhakara, "Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading," *Composite structures*, vol. 60, pp. 171-181, 2003.
- [28] M. Di Sciuva and E. Carrera, "Static buckling of moderately thick, anisotropic, laminated and sandwich cylindrical shell panels," *AIAA journal*, vol. 28, pp. 1782-1793, 1990.
- [29] H. Matsunaga, "Vibration and stability of cross-ply laminated composite shallow shells subjected to in-plane stresses," *Composite structures*, vol. 78, pp. 377-391, 2007.
- [30] Fazilati, J.: Higher order finite strip dynamic instability analysis of composite stiffened cylindrical panels having cutouts under parametric in-plane loads. Phd Thesis, Amirkabir University, Iran, 2011.
- [4] Argento, A., and R. A. Scott. "Dynamic instability of layered anisotropic circular cylindrical shells, Part I: Theoretical development." (1993).
- [5] Ng, T. Y., and K. Y. Lam. "Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories." *Acta mechanica* 134.3-4 (1999): 147-167.
- [6] Ng, T. Y., K. Y. Lam, and J. N. Reddy. "Dynamic stability of cylindrical panels subjected to non-uniform harmonic loading." *International Journal of Solids and Structures* 36.23 (1999): 3483-3496.
- [7] Sahu, S. K., and P. K. Datta. "Parametric instability of doubly curved panels subjected to non-uniform harmonic loading." *Journal of sound and vibration* 240.1 (2001): 117-129.
- [8] S. Wang and D. Dawe, "Dynamic instability of composite laminated rectangular plates and prismatic plate structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 1791-1826, 2002.
- [9] Fazilati, J., and H. R. Ovesy. "Dynamic instability analysis of composite laminated thin-walled structures using two versions of FSM." *Composite Structures* 92.9 (2010): 2060-2065.
- [10] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*/JN Reddy: CRC press, 2004.
- [11] E. Carrera, "Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 9, pp. 87-140, 2002.
- [12] Zhang, Yingshun, Simon Wang, and Björn Petersson. "Large deflection analysis of composite laminates." *Journal of materials processing technology* 138.1 (2003): 34-40.
- [13] Zhang, Y., and S. Wang. "Buckling, post-buckling and delamination propagation in debonded composite laminates: Part 1: Theoretical development." *Composite Structures* 88.1 (2009): 121-130.
- [14] Wang, S., and Y. Zhang. "Buckling, post-buckling and delamination propagation in debonded composite laminates Part 2: Numerical applications." *Composite Structures* 88.1 (2009): 131-146.
- [15] Zhang, Xiuqin, Simon Wang, and Yingshun Zhang. "Stress and failure analysis of laminated composites based on layerwise B-spline finite strip method." *Composite Structures* 92.12 (2010): 3020-3030.
- [16] Četković, M., and Dj Vuksanović. "Bending, free vibrations and buckling of laminated composite and sandwich plates using a layerwise displacement model." *Composite Structures* 88.2 (2009): 219-227.
- [17] S. Srinivas, C. Joga Rao, and A. Rao, "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates," *Journal of sound and vibration*, vol. 12, pp. 187-199, 1970.
- [18] J. Reddy and N. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 98, pp. 157-170, 1985.
- [19] K. Cho, C. Bert, and A. Striz, "Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory," *Journal of sound and vibration*, vol. 145, pp. 429-442, 1991.
- [20] W. Soedel, *Vibrations of shells and plates*: CRC Press, 2004.
- [21] S. Wang and Y. Zhang, "Vibration analysis of rectangular composite laminated plates using layerwise B-spline finite strip method," *Composite structures*, vol. 68, pp. 349-358, 2005.