



نشریه علمی پژوهشی
کامپوزیت
علوم و فناوری
http://jstc.iust.ac.ir



ارتعاش آزاد ورق ساندویچی با هسته آگزتیک در تماس با سیال با تئوری تک لایه معادل

کوروش خورشیدی^{1*}، علیرضا پاکرویان²، پیمان یوسفی³، علی پورمهدی⁴

- 1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک
2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اراک، اراک
3- دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اراک، اراک
4- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک
* اراک، صندوق پستی 38156-88439، k-khorshidi@araku.ac.ir

چکیده

در این مقاله، به بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک مستقر در دیواره یک مخزن سیال پرداخته شده است. ورق ساندویچی شامل دو رویه آلومینیومی و یک هسته لانه‌زنبوری آگزتیک از جنس آلومینیوم می‌باشد. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل مالک و گیبسون، از یکی از جدیدترین مدل‌ها (مدل تورنابن) نیز استفاده شده است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی سه نوع مدل تحلیلی پیشنهاد داده شده‌اند و مزایا و معایب آنها با هم مقایسه شده‌اند. از نوع مدل تحلیلی تک‌لایه معادل برای مدل‌سازی ورق ساندویچی دارای شرط مرزی ناوبر و در تماس با سیال استفاده شده‌اند. سیال، ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی) در نظر گرفته شده است. روش‌های حل حاضر، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال با استفاده از نتایج تحقیقات سایر محققان و نیز نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت سنجی شده‌اند. سرانجام اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر روی فرکانس‌های طبیعی مرطوب مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

اطلاعات مقاله:

دریافت: 1404/07/15
پذیرش: 1404/12/02

کلیدواژگان

ارتعاش آزاد
ورق ساندویچی
هسته آگزتیک
برهم‌کنش ورق و سیال

Free vibration of auxetic-core sandwich panel in fluid by equivalent single layer theory

Korosh Khorshidi^{1*}, Alireza Pakrouyan², Peyman Yousefi², Ali Pourmahdi¹

- 1- Department of mechanical engineering, Arak University, Arak, Iran
2- Department of mechanical engineering, Islamic Azad University, Arak, Iran
* P.O.B. 38156-88439, Arak, Iran, k-khorshidi@araku.ac.ir

Keywords

Free vibration
Sandwich Panel
Auxetic Core
Fluid-Structure Interaction

Abstract

In this study, the free vibration characteristics of a rectangular sandwich panel with an auxetic honeycomb core mounted on the wall of a fluid-filled tank have been investigated. The sandwich panel consists of two aluminum face sheets and an auxetic honeycomb core made of aluminum. For the homogenization of the honeycomb core, in addition to the Gibson and Ashby model, one of the latest models (the Turna-Ban model) has been also employed. Three types of analytical models have been proposed for modeling the sandwich panel, and their advantages and disadvantages have been compared. An equivalent single-layer analytical model has been used to model the sandwich panel under Navier boundary conditions and in contact with fluid. The fluid has been considered ideal (incompressible, inviscid, and irrotational). The proposed solution methods, the homogenization relations of the honeycomb core, and the mathematical framework of the panel-fluid interaction have been validated using results from previous studies as well as three-dimensional finite element analysis. Finally, the effects of various parameters such as the tank-to-panel length ratio, fluid height from the bottom edge of the panel, the position of the panel on the tank wall, and the honeycomb cell geometry on the wet natural frequencies have been investigated.

1- مقدمه

آگزتیک (نسبت پواسون منفی) نسبت به مواد با نسبت پواسون مثبت مقاومت ضربه بهتر و جذب انرژی بالاتری دارند، از این رو بسیار مورد توجه محققان می‌باشند. برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل

ورق‌های ساندویچی در حوزه‌های مختلف مهندسی مانند خودروسازی، هوافضا، صنایع دریایی و مهندسی عمران کاربردهای وسیعی دارند. این ورق‌ها معمولاً از دو رویه با مقاومت بالا و یک هسته سبک وزن (معمولاً از جنس فوم یا لانه‌زنبوری) تشکیل شده‌اند. ورق‌های ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Khorshidi, K., Pakrouyan, A., Yousefi, P., Pourmahdi, A., "Free vibration of auxetic-core sandwich panel in fluid by equivalent single layer theory," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 12, No. 3, pp. 2792-2809, 2026.
https://doi.org/10.22068/jstc.2026.2073996.1939

توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه‌زنبوری است به طوری که بتوان آن را بصورت یک لایه اورتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند.

ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری به دلیل خواص مطلوب مانند نسبت استحکام به وزن بالا و جذب انرژی عالی، کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف مهندسی مانند هوافضا، صنایع دریایی، قطارهای سریع‌السیر و خودروسازی پیدا کرده‌اند. برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه‌زنبوری است به طوری که بتوان آن را بصورت یک لایه اورتوتروپیک معادل، تحلیل کرد. به منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، از مهم‌ترین پارامترها در طراحی سازه‌ها هستند. این مشخصه‌ها می‌توانند به طور مستقل مورد استفاده قرار گیرند (مثلاً فرکانس‌های طبیعی تعیین شده را می‌توان به عنوان نمادی از میزان خرابی سازه در نظر گرفت) و یا به عنوان جزئی از روند سایر تحلیل‌ها مورد توجه باشند. تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری از سال‌های دور مورد توجه محققان بوده است. اخیراً ترابی و همکاران [1] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی به تحلیل ارتعاش و فلاتر ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دوزنقه‌ای پرداختند و بیدگلی و همکاران [2] با استفاده از آن ارتعاش آزاد پوسته‌های ساندویچی لانه‌زنبوری دو انحنایی با رویه‌های پیزوالکتریک را بررسی کردند. با استفاده از همین تئوری، پاسخ‌های دینامیکی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک با رویه‌های ایزوتروپیک توسط نگون و فام [3] و با رویه‌های ایزوتروپیک تقویت شده با سفت‌کننده‌های مشبک توسط کونگ و همکاران [4] تعیین شدند. [5] با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری را تعیین کردند. آن‌ها نشان دادند که با کاهش ضخامت رویه‌ها اختلاف بین فرکانس‌های غیرخطی و خطی کاهش می‌یابد. [6] به منظور تحلیل ارتعاش آزاد و عایق‌بندی صوتی ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگزتیک مدرج تابعی از تئوری تغییرشکل برشی تانژانت‌های پربولیک استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از تحلیل کوپل ارتعاشی - آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی را به دست آوردند و نشان دادند که مقادیر این فرکانس‌ها با نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد سیستم برابر هستند. برای پوسته‌های چند لایه، هوانگ [7] به منظور اصلاح اثر شرط پیوستگی تنش‌های برشی بین لایه‌ها، با افزودن ضرایب تصحیح برشی به تئوری مرتبه سوم ردی، آن را بهبود داد. او ضرایب تصحیح برشی را از طریق مقایسه با معادلات الاستیسیته و با استفاده از یک فرآیند تکراری تعیین کرد.

روش پرکاربردتر برای تعیین نتایج دقیق ورق‌های ساندویچی نسبتاً ضخیم استفاده از تئوری‌های لایه‌ای مرتبه بالا است. فراستیک [8] به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت ورق‌های ساندویچی با هسته نرم دو مدل مختلط (مدل اول) و جابجایی (مدل دوم) را پیشنهاد دادند. آن‌ها در مدل دوم برای رویه‌ها از تئوری کلاسیک استفاده کردند و برای هسته

جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای و عرضی را به ترتیب با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه سوم و دوم مختصه ضخامت تقریب زدند. ورق‌های در تماس با سیال، بخش‌های اصلی بدنه کشتی‌ها، زیردریایی‌ها، سازه‌های دریایی، مخازن سوخت و بسیاری از وسایل صنعتی دیگر را تشکیل می‌دهند. رفتار ارتعاشی این ورق‌ها نسبت به حالت خشک متفاوت بوده و به دلیل اثر جرم افزوده سیال فرکانس‌های طبیعی آن‌ها کاهش می‌یابند [9-10]. در دهه اخیر مطالعات متعددی در زمینه پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی یک ورق در تماس با سیال انجام شده است. حسینی هاشمی و همکاران [11] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی و روش حل ریتز اثر سیال با طول بی‌نهایت را بر روی مشخصه‌های ارتعاش آزاد ورق‌های ایزوتروپیک و چندلایه بررسی کردند. خورشیدی و فرهادی [12] و خورشیدی و بخششی [13] با استفاده از سه تئوری کلاسیک، مرتبه اول تغییرشکل برشی و مرتبه سوم تغییرشکل برشی ارتعاش آزاد ورق‌های چندلایه و مدرج تابعی در تماس با سیال محدود را بررسی کردند. خورشیدی و همکاران [14] با استفاده از دو روش تجربی آنالیز مودال ارتعاشی و آکوستیکی فرکانس‌های طبیعی ورق‌های ایزوتروپیک قائم در تماس با سیال محدود را به دست آوردند و نشان دادند که نتایج حاصل از این دو روش تقریباً برابر هستند. خورشیدی و کریمی [15] با استفاده از تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی و روش حل گالرکین کریمی و همکاران [16] با استفاده از تئوری مرتبه پنجم تغییر شکل برشی و روش حل ریتز فرکانس‌های طبیعی نانورق‌های پیزوالکتریک و میکروورق‌های مدرج تابعی در تماس با سیال را تعیین کردند. بخششی و مهبادی [17] اثر امواج سطح آزاد سیال را به صورت جداگانه بر روی ارتعاش آزاد میکروورق‌های مدرج تابعی در تماس با سیال محدود بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که حرکت نوسانی سیال باعث تقویت فرکانس‌های طبیعی می‌شود ولی اثر آن زمانی ملموس است که هم سیال خیلی سنگین باشد (مانند جیوه) و هم ورق خیلی نازک باشد. اخیراً رامیان و همکاران [18-19] به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی قائم و افقی در تماس با سیال محدود پرداختند. آن‌ها برای مدل‌سازی هسته انعطاف‌پذیر از مدل دوم فراستیک استفاده کردند. این مطالعات اثر برخی پارامترها مانند جنس لایه‌ها و نسبت ضخامت هسته به رویه‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند. خورشیدی و نوروزیان [20] به بررسی پایداری ورق ساندویچی با هسته آگزتیک و لایه‌های تقویت‌شده در معرض نیروی آیروالاستیک پرداختند. معادلات با تئوری برشی اصلاح‌شده و روش گالرکین حل و نتایج با مقالات معتبر مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای هندسی، فشار آیرودینامیکی و کسر حجمی نانولوله کربنی بر پایداری تحلیل شده است. نتایج نشان می‌دهد که این پارامترها نقش مهمی در افزایش یا کاهش پایداری سازه دارند. دیلک آتیلا یولجو و همکاران [21] به تأثیر الگوی ساختار هسته آکسیتیک و شرایط مرزی را بر رفتار ارتعاشی پانل‌های ساندویچی مورد بررسی قرار دادند. سه نوع هسته آکسیتیک چاپ سه‌بعدی شامل تتراشیرال، آنتی‌تتراشیرال و هگزاجیرال با رویه‌های کامپوزیتی الیاف شیشه/اپوکسی تحلیل و آزمایش شدند. نتایج نشان داد که هسته‌های هگزاجیرال عملکرد دینامیکی بهتری داشته و فرکانس طبیعی بالاتری ایجاد می‌کنند. خورشیدی و همکاران [22] ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای سه‌لایه، حاوی سیال غیرلزج و تحت بار ضربه‌ای را بررسی کردند. هر سه لایه از جنس آلومینیوم و لایه مرکزی ساخته شده از ساختار آگزتیک لانه‌زنبوری درون رو لحاظ شده است. با استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا و اصل همپلتون معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده و از روش باقیمانده وزنی گالرکین حل شده‌اند. سیستم با هر

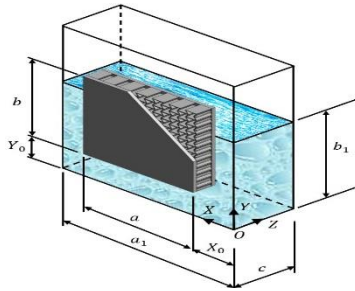


Fig. 1 Auxetic honeycomb sandwich plate with a coordinate system in contact with fluid

شکل 1 ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک با یک سیستم مختصات در تماس با سیال

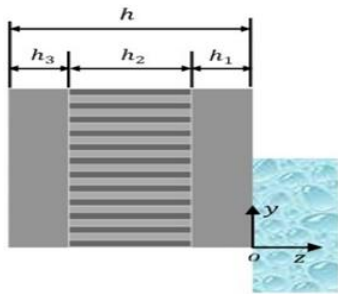


Fig. 2 Origin of the coordinate system located at the interface between the plate and the fluid

شکل 2 مبدأ سیستم مختصات به‌جای روی سطح تماس ورق و سیال

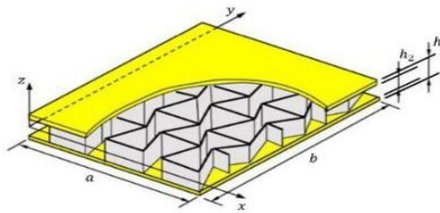


Fig. 3 Geometry-dependent auxetic honeycomb sandwich panel

شکل 3 ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک وابسته به هندسه

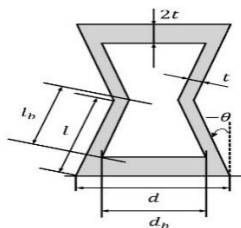


Fig. 4 Geometric properties of a commercial re-entrant honeycomb cell

شکل 4 مشخصات هندسی سلول لانه‌زنبوری درون‌رو تجاری

در شکل‌های 3 و 2 برای توصیف حرکت ورق ساندویچی از سیستم مختصات $o-xyz$ استفاده شده است، با این تفاوت که در شکل 1 مبدأ سیستم مختصات به‌جای سطح میانی ورق روی سطح تماس ورق و سیال قرار گرفته است.

1-2- میدان جابجایی

برای ورق‌های ساندویچی نشان داده شده در شکل‌های 1 و 3، ابتدا میدان جابجایی با توجه به تئوری مرتبه سوم برشی به‌صورت زیر نوشته می‌شود [20]:

دو شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بررسی کردند. فنگ و همکاران [23] یک روش طراحی معکوس مبتنی بر مدل تولیدی عمیق برای تولید سلول‌های آگزیٹیک سه‌بعدی با نسبت پواسون منفی توسعه یافته است. نتایج نشان می‌دهند که تیرهای ساندویچی حاصل، فرکانس طبیعی بالاتری نسبت به روش‌های متداول دارند و رفتار ارتعاشی آن‌ها تحت تأثیر عواملی چون پیکربندی هسته، نسبت ضخامت ورق به هسته، شرایط مرزی و محیط حرارتی قرار دارد. حیدری‌سروشجانی و همکاران [24] که تأثیر هسته‌های آگزیٹیک بر ویژگی‌های ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی دارای بریدگی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش تحلیلی بررسی شده است. روش پیشنهادی با به‌کارگیری تکنیک دوبعدی و تقسیم‌بندی پوسته به پنل‌های مختلف، دقت بالایی در مدل‌سازی نواحی با جزئیات هندسی بالا مانند بریدگی‌ها دارد. همچنین، نتایج با سیگنال‌های لرزشی و صوتی تأیید شده و برتری روش نسبت به مدل‌سازی اجزای محدود اثبات می‌شود.

هدف مقاله حاضر بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگزیٹیک مستقر در دیواره یک مخزن سیال می‌باشد. ورق ساندویچی شامل دو رویه آلومینیومی و یک هسته لانه‌زنبوری آگزیٹیک از جنس آلومینیوم می‌باشد. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل مالک و گیبسون، از یکی از جدیدترین مدل‌ها (مدل تورنابن) نیز استفاده شده است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی سه نوع مدل تحلیلی پیشنهاد داده شده‌اند و مزایا و معایب آنها با هم مقایسه شده‌اند. از نوع مدل ناویر و در تماس با سیال استفاده شده‌اند. سیال، ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی) در نظر گرفته شده است. روش‌های حل حاضر، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال با استفاده از نتایج تحقیقات سایر محققان و نیز نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت سنجی شده‌اند. سرانجام اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر روی فرکانس‌های طبیعی مربوط مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

2- استخراج و حل معادلات حاکم

مطابق شکل 1 یک ورق ساندویچی آلومینیومی با تکیه‌گاه‌های ساده و رویه‌های یکسان و هسته متشکل از سلول‌های لانه‌زنبوری درون‌رو در دیواره یک مخزن سیال قرار داده شده است. طول، عرض، ضخامت و ضخامت هسته ورق ساندویچی به ترتیب a ، b ، h_2 و h هستند. طول و عرض مخزن و ارتفاع سیال به ترتیب a_1 ، c و b_1 می‌باشند. سیستم مختصات $O-XYZ$ در گوشه پایین مخزن قرار داده شده است. X_0 و Y_0 موقعیت ورق را در دیواره مشخص می‌کنند. سایر دیواره‌ها و کف مخزن صلب می‌باشند.

در شکل 3 یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک خشک با شرایط مرزی نوع لوی نشان داده شده است، به‌طوری‌که لبه‌های ورق در $x=0$ و $x=a$ دارای تکیه‌گاه ساده هستند و لبه‌های آن در $y=0$ و $y=b$ ترکیبی از شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد می‌باشند.

$$Q_{44}^{(i)} = \kappa_{23} G_{23}^{(i)} \quad (d-3)$$

$$Q_{55}^{(i)} = \kappa_{13} G_{13}^{(i)} \quad (e-3)$$

$$Q_{66}^{(i)} = G_{12}^{(i)} \quad (f-3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (g-3)$$

به‌طوری‌که $i = 1, 3$ نمایانگر رویه‌های ایزوتروپیک با مدول‌های یانگ و برشی E_0 و G_0 ، نسبت پواسون ν_0 و چگالی ρ_0 می‌باشند. همچنین $i = 2$ نشان‌دهنده هسته لانه‌زنبوری آگزتیک با نسبت پواسون درون‌صفحه‌ای منفی $(\nu_{21}^{(2)}$ و $\nu_{12}^{(2)})$ می‌باشد. به‌طوری‌که مقدار این ضرایب به مشخصه‌های هندسی سلول لانه‌زنبوری درون‌رو وابسته بوده و برای تعیین آن‌ها از مدل‌های مالک [25] و گیبسون و تورناین [26] استفاده شده است κ_{13} و κ_{23} نیز ضرایب تصحیح برشی مربوط به تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی هستند

2-2-3- روابط تنش - کرنش هسته ارتوتروپیک

به‌طوری‌که κ_s بیانگر ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی است و مقدار آن برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته شده است. همچنین روابط تنش - کرنش هسته ارتوتروپیک عبارتند از [20]:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \{\sigma_{xx}^{(2)} \quad \sigma_{yy}^{(2)} \quad \sigma_{zz}^{(2)} \quad \tau_{xy}^{(2)}\}^T = \mathbf{Q}_\sigma^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (a-4)$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(2)} = \{\tau_{xz}^{(2)} \quad \tau_{yz}^{(2)}\}^T = \mathbf{Q}_\tau^{(2)} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \quad (b-4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \{\varepsilon_{xx}^{(2)} \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} \quad \gamma_{xy}^{(2)}\}^T \quad (c-4)$$

2-2-4- انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی

به‌طوری‌که تعاریف ماتریس‌های سفتی $\mathbf{Q}_\sigma^{(2)}$ و $\mathbf{Q}_\tau^{(2)}$ عبارتند از [20]:

$$\mathbf{Q}_\tau^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{55}^{(2)} & 0 \\ 0 & Q_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & G_{23}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (a-5)$$

$$\mathbf{Q}_\sigma^{(2)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} & Q_{13}^{(2)} & 0 \\ Q_{12}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & 0 \\ Q_{13}^{(2)} & Q_{23}^{(2)} & Q_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (b-5)$$

$$\Delta^{(2)} = 1 - \nu_{12}^{(2)} \nu_{21}^{(2)} - \nu_{23}^{(2)} \nu_{32}^{(2)} - \nu_{31}^{(2)} \nu_{13}^{(2)} - 2\nu_{12}^{(2)} \nu_{23}^{(2)} \nu_{31}^{(2)} \quad (6)$$

در این مدل‌ها، انرژی‌های کرنشی الاستیک و جنبشی ورق ساندویچی به‌ترتیب با استفاده از معادلات (7) و (8) محاسبه می‌شوند [20]:

$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_1}^{z_2} \sum_{i=1}^3 [\sigma_{xx}^{(i)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(i)} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^{(i)} \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(i)} \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(i)} \gamma_{yz}] dz_i dy dx \quad (7)$$

$$u(x, y, z, t) = g \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + f \left(z + \frac{h}{2} \right) \psi_x(x, y, t) \quad (a-1)$$

$$v(x, y, z, t) = g \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial y} + f \left(z + \frac{h}{2} \right) \psi_y(x, y, t) \quad (b-1)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (c-1)$$

$$\{g(z), f(z)\} = \left\{ -\frac{4}{3h^2} z^3, z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right\} \quad (d-1)$$

به‌طوری‌که در تماس و عدم تماس سیال، g به‌ترتیب برابر 1 و 0 می‌باشد.

در معادلات 1، w_0 جابجایی عرضی سطح میانی می‌باشد و ψ_x و ψ_y به‌ترتیب بیانگر دوران‌های ناشی از خمش سطح میانی حول محورهای x و y هستند. دقت نتایج و سرعت محاسباتی مدل‌های لایه‌ای به نوع تئوری‌های مورد استفاده برای لایه‌ها بستگی دارد.

2-2-2- روابط تنش و کرنش

2-2-2-1- مولفه‌های کرنش خطی

با فرض کوچک بودن تغییرشکل‌ها، مولفه‌های کرنش خطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [20]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = g \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \quad (a-2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = g \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + f \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \quad (b-2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2g \left(z + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + f \left(z + \frac{h}{2} \right) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (c-2)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(1 + g' \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + f' \left(z + \frac{h}{2} \right) \psi_x \quad (d-2)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left(1 + g' \left(z + \frac{h}{2} \right) \right) \frac{\partial w_0}{\partial y} + f' \left(z + \frac{h}{2} \right) \psi_y \quad (e-2)$$

2-2-2-2- روابط تنش - کرنش

ورق ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک یک ورق چند لایه ارتوتروپیک است که روابط تنش - کرنش آن به‌صورت زیر می‌باشد [16]:

$$Q_{11}^{(i)} = \frac{E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (a-3)$$

$$Q_{22}^{(i)} = \frac{E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (b-3)$$

$$Q_{12}^{(i)} = \frac{\nu_{21}^{(i)} E_{11}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} = \frac{\nu_{12}^{(i)} E_{22}^{(i)}}{1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}} \quad (c-3)$$

$$+ \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 \left[\frac{d}{l} + \sin \theta\right] \left[\frac{d}{l} + \sin \theta\right] \tan^2 \theta + \sin \theta \left] + \frac{2.4 + 1.5v_0}{\frac{d_b}{l_b}} \left(2 + \frac{d}{l} + \sin \theta\right) \right]$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \left[\frac{l_b}{l} \sin^2 \theta + \frac{d_b}{2l} + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t \sin^2 \theta (2 \sin \theta - 1)}{\cos \theta} \right] \quad (f-11)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\left(\frac{2t}{l}\right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \left[\frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t}{l} \cos \theta (2 \sin \theta - 1) \right] \quad (g-11)$$

$$v_{12}^{(2)} = \left(\frac{\sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\cos^2 \theta} \right) / \left((1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5v_0)) / (1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta)) \right) \quad (h-11)$$

$$v_{21}^{(2)} = \left[\cos^2 \theta / \sin \theta \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \right] \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (1.4 + 1.5v_0) \right] / \left((1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \cot^2 \theta)) \right) \quad (i-11)$$

$$l_b = l - \frac{t}{\cos \theta} \quad (j-11)$$

$$d_b = d - \frac{2t(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} \quad (k-11)$$

بر اساس مدل مالک و گیبسون، خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری تجاری را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود [25]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l \cos \theta (d_b + l \sin \theta)}{(l \cos \theta + t)(d + l \sin \theta)} \right] \quad (a-12)$$

$$E_{11}^{(2)} = \left[E_0 \left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) / \left[\cos^3 \theta \left(1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \tan^2 \theta + \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta)\right) \right] \right] \quad (b-12)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \left(\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \cos \theta \right) / \left(\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \cot^2 \theta) \right] \right) \quad (c-12)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (d-12)$$

اخیراً تورنابن و همکاران [26] مدل قبلی پیشنهادی توسط سوروهان و همکاران [27] را ارتقاء دادند. از آنجایی‌که در میان خواص الاستیک مؤثر، مدول برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی اثری قابل توجه می‌گذارد، تورنابن و همکاران [26]، رابطه‌ای برای محاسبه این مدول برشی عرضی پیشنهاد دادند و از

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \sum_{i=1}^3 \rho^{(i)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] dz_i dy dx \quad (8)$$

$$\{z_1^*, z_1^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2} \varrho + \frac{h_2}{2}; \frac{h}{2} (1 - \varrho) \right\} \quad (a-9)$$

$$\{z_2^*, z_2^{**}\} = \left\{ -\frac{h}{2} \varrho - \frac{h_2}{2}; -\frac{h}{2} \varrho + \frac{h_2}{2} \right\} \quad (b-9)$$

برای تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی ورق‌های لانه‌زنبوری، مدل‌سازی واقعی هسته دقیق‌ترین پاسخ‌ها را به‌دست می‌دهد، لیکن تعداد درجات آزادی کل و به تبع آن زمان محاسباتی را به مقدار قابل توجهی افزایش می‌دهد. بهترین روش برای ساده‌سازی تحلیل آن‌ها، همگن‌سازی رفتار هسته لانه‌زنبوری است به‌طوری‌که بتوان آن را بصورت یک لایه ارتوئوپیک معادل، تحلیل کرد. به‌منظور حصول پاسخ‌های نهایی قابل اعتماد، خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری باید تا حد امکان دقیق تعیین شوند. گیبسون و اشبی [6] با فرض غشائی بودن دیواره سلول، روابط پارامتری معادل هسته لانه‌زنبوری را ارائه دادند. روابط آن‌ها ساده بوده ولی دقت خوبی ندارند.

مالک و گیبسون [25] با در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع دیواره‌های افقی و مورب، مدل خود را ارائه دادند.

شکل 4 مشخصات هندسی سلول لانه‌زنبوری درون‌رو کلاسیک (ضخامت یکسان دیواره‌های افقی و مورب) را نشان می‌دهد که این مشخصه‌ها شامل زاویه سلول (θ)، طول دیواره‌های افقی (d) و مورب (l) و ضخامت آن‌ها (t) هستند. همچنین d_b و l_b به‌ترتیب طول قسمت‌های داخلی دیواره‌های افقی و مورب هستند که بر حسب پارامترهای سلول تعیین می‌شوند. با توجه به شکل اگر زاویه صفر باشد سلول مستطیلی بوده و اگر زاویه مثبت باشد سلول شش‌ضلعی می‌باشد. مطابق شکل، شرط لازم برای عدم تماس قسمت‌های داخلی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\sin(-\theta) < \frac{1}{2} \frac{d_b}{l_b} \quad (10)$$

بر اساس مدل مالک و گیبسون، خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود [25]:

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[1 - \frac{l_b (d_b + l_b \sin \theta)}{l (d + l \sin \theta)} \right] \quad (a-11)$$

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \left(\left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) / \left[\cos^3 \theta \left(1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta)\right) \right] \right) \quad (b-11)$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \left(\left(\frac{2t}{l_b}\right)^3 \cos \theta \right) / \left(\left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right) \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \cot^2 \theta) \right] \right) \quad (c-11)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{2t}{l_b}\right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{d_b}{l_b}\right)^2 \cos \theta G_{12}^*} \quad (d-11)$$

$$G_{12}^* = 1 + 2 \frac{d_b}{l_b} \quad (e-11)$$

$$G_{13L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(1 + \frac{d}{l} \right) \cos \theta} \quad (b-15)$$

$$G_{13U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin^2 \theta \right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (c-15)$$

سایر خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری تجاری به صورت زیر محاسبه می‌شوند [27,26]:

$$E_{11}^{(2)} = [E_0 \left(\frac{t}{l_b} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)] / [\cos^3 \theta (1 + \left(\frac{t}{l_b} \right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta))] \quad (a-16)$$

$$E_{22}^{(2)} = [E_0 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \cos \theta] / \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta (1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)) \right] \quad (b-16)$$

$$E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 1 \right)}{\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (c-16)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} / E_0 \quad (d-16)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(\frac{d}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{d}{4l} \right) \cos \theta} \quad (e-16)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \quad (f-16)$$

سیال داخل مخزن ایده‌آل در نظر گرفته شده است، یعنی سیال تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی است. بعلاوه نوسانات سیال کوچک، هارمونیک و خطی فرض شده‌اند. مطابق شرط پیوستگی تابع پتانسیل سرعت باید معادله لاپلاسرا ارضاء نماید [15]:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \quad (a-17)$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi_B + \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (b-17)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \varphi_B = 0, \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (c-17)$$

به‌طوری‌که φ_B و φ_S به‌ترتیب توابع پتانسیل سرعت موده‌های بالچینگ (حرکت سیال ناشی در اثر ارتعاش ورق) و اسلاشینگ (امواج سطح آزاد سیال در اثر گرانش) می‌باشند.

کف مخزن ($Y = 0$) و سه دیواره قائم $X = 0, a_1$ و $Z = c$ صلب و نفوذناپذیر هستند، بنابراین برای موده‌های بالچینگ و اسلاشینگ می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial X} \right|_{X=0, a_1} = 0 \quad (a-18)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (b-18)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \right|_{Z=c} = 0 \quad (c-18)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial X} \right|_{X=0, a_1} = 0 \quad (a-19)$$

طریق مقایسه با تحلیل المان محدود سه‌بعدی - دوبعدی نشان دادند که مدلشان نسبت به مدل‌های تئوری پیشین از دقت بالاتری برخوردار است. تورناین و همکاران [26] مدول برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ هسته لانه‌زنبوری کلاسیک را به صورت زیر محاسبه نمودند [26]:

$$G_{13}^{(2)} = G_{13L}^{(2)} + \frac{\frac{2}{5} \frac{h_2}{l}}{\frac{3}{4} \left(\frac{h_2}{l} \right)^2 + \frac{1}{4}} \left(G_{13U}^{(2)} - G_{13L}^{(2)} \right) \quad (a-13)$$

$$G_{13L}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(1 + 2 \frac{d}{l} \right) \cos \theta} \quad (b-13)$$

$$G_{13U}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2 \sin^2 \theta \right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (c-13)$$

سایر خواص مؤثر هسته لانه‌زنبوری کلاسیک به صورت زیر محاسبه می‌شوند [27-26]:

$$E_{11}^{(2)} = [E_0 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)] / [\cos^3 \theta [1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta)]] \quad (a-14)$$

$$E_{33}^{(2)} = E_0 \frac{\frac{t}{l} \left(\frac{d}{l} + 2 \right)}{2 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \cos \theta} \quad (c-14)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 E_{33}^{(2)} / E_0 \quad (d-14)$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{4 \left(\frac{t}{l} \right)^3 \left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right)}{\left(\frac{d}{l} \right)^2 \left(4 + \frac{d}{l} \right) \cos \theta} \quad (e-14)$$

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{t}{l} \cos \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \quad (f-14)$$

$$v_{12}^{(2)} = \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta (1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0)) \right] / [\cos^2 \theta [1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d}{l} \sec^2 \theta)]] \quad (g-14)$$

$$v_{21}^{(2)} = [\cos^2 \theta (1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (1.4 + 1.5\nu_0))] / \left[\left(\frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta (1 + \left(\frac{t}{l} \right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2 \theta)) \right] \quad (h-14)$$

$$v_{13}^{(2)} = v_0 \frac{E_{11}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}} \quad (i-14)$$

$$v_{23}^{(2)} = v_0 \frac{E_{22}^{(2)}}{E_{33}^{(2)}} \quad (k-14)$$

$$v_{31}^{(2)} = v_{32}^{(2)} = v_0 \quad (i-14)$$

تورناین و همکاران [26] مدول برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ هسته لانه‌زنبوری تجاری را به صورت زیر محاسبه نمودند [26]:

$$G_{13}^{(2)} = G_{13L}^{(2)} + \frac{\frac{2}{5} \frac{h_2}{l}}{\frac{3}{4} \left(\frac{h_2}{l} \right)^2 + \frac{1}{4}} \left(G_{13U}^{(2)} - G_{13L}^{(2)} \right) \quad (a-15)$$

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} = -\Pi_X^{B^2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \Pi_X^{B^2} \cdot \hat{X}_B(X) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} = -\Pi_Y^{B^2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \Pi_Y^{B^2} \cdot \hat{Y}_B(Y) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = \Pi_X^{B^2} + \Pi_Y^{B^2} \Rightarrow \quad (30)$$

$$\frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} - (\Pi_X^{B^2} + \Pi_Y^{B^2}) \hat{Z}_B(Z) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} = -\Pi_X^{S^2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \Pi_X^{S^2} \cdot \hat{X}_S(X) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} = \Pi_X^{S^2} + \Pi_Z^{S^2} \Rightarrow \quad (32)$$

$$\frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} - (\Pi_X^{S^2} + \Pi_Z^{S^2}) \hat{Y}_S(Y) = 0$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = -\Pi_Z^{S^2} \Rightarrow \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} + \Pi_Z^{S^2} \cdot \hat{Z}_S(Z) = 0 \quad (33)$$

با این فرض که Π_X^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (28) و (18) نتیجه می‌شود:

$$\hat{X}_B(X) = \cos\left(\frac{k_1 \pi}{a_1} X\right); (k_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (34)$$

همین‌طور با این فرض که Π_Y^B یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (29)، (18) و (22) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Y}_B(Y) = \cos\left(\frac{(2k_2 + 1)\pi}{2b_1} Y\right); (k_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (35)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (30) به‌همراه شرط مرزی (18) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Z}_B(Z) = \cosh(p_{k_1 k_2} Z) \quad (36-a)$$

$$- \tanh(p_{k_1 k_2} c) \sinh(p_{k_1 k_2} Z) \quad (36-b)$$

$$p_{k_1 k_2} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{(2k_2 + 1)}{2b_1}\right)^2}$$

با جای‌گذاری معادلات (34) تا (36) در معادله (23) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری‌های فوریه، φ_B به‌دست می‌آید:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \sum_{k_1=0}^{M_B} \sum_{k_2=0}^{N_B} \hat{T}_{B k_1 k_2}(t) \hat{X}_{B k_1}(X) \hat{Y}_{B k_2}(Y) \hat{Z}_{B k_1 k_2}(Z) \quad (37)$$

با جای‌گذاری معادله (37) در (20) ضرایب وابسته به زمان مود بالچینگ (یعنی $\hat{T}_{B k_1 k_2}(t)$) بر حسب توابعی از جابجایی عرضی ورق ساندویچی (یعنی w_0) به‌دست می‌آیند:

$$\hat{T}_{B k_1 k_2}(t) = \frac{2(2 - \delta_{0 k_1})}{-a_1 b_1 p_{k_1 k_2} \tanh(p_{k_1 k_2} c)} \quad (38)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (b-19)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \right|_{Z=c} = 0 \quad (c-19)$$

شرایط کوپلینگ دینامیکی در دیواره قائم $Z = 0$ (برای مدهای بالچینگ و اسلاشینگ) را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial t}; & X_0 \leq X \leq X_0 + a; \quad Y_0 \leq Y \leq b_1 \\ 0; & \text{در ناحیه دیواره صلب مرطوب} \end{cases} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_S}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0 \quad (21)$$

فشار نسبی در سطح آزاد سیال برابر صفر است، بنابراین برای مود بالچینگ می‌توان نوشت:

$$-\rho_F \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \right|_{Y=b_1} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial t} \right|_{Y=b_1} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{harmonic}} \varphi_B = 0 \quad \text{at } Y = b_1 \quad (22)$$

به‌طوری‌که ρ_F چگالی سیال است. برای حل دو معادله لاپلاس موجود در معادله (17) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. برای این منظور ابتدا توابع پتانسیل سرعت مدهای بالچینگ و اسلاشینگ به‌صورت زیر نوشته شده‌اند:

$$\varphi_B(X, Y, Z, t) = \hat{T}_B(t) \cdot \hat{X}_B(X) \cdot \hat{Y}_B(Y) \cdot \hat{Z}_B(Z) \quad (23)$$

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \hat{T}_S(t) \cdot \hat{X}_S(X) \cdot \hat{Y}_S(Y) \cdot \hat{Z}_S(Z) \quad (24)$$

به‌طوری‌که $\hat{T}_S(t)$ و $\hat{T}_B(t)$ به‌ترتیب ضرایب وابسته به زمان مدهای بالچینگ و اسلاشینگ هستند و می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \hat{T}_B(t) \\ \hat{T}_S(t) \end{cases} = -i\omega \begin{Bmatrix} T_B \\ T_S \end{Bmatrix} \exp(-i\omega t) \quad (25)$$

به‌طوری‌که ω بیانگر فرکانس طبیعی سیستم بر حسب رادیان بر ثانیه است. با جای‌گذاری معادلات (23) و (24) در معادله (17)، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{1}{\hat{X}_B(X)} \frac{d^2 \hat{X}_B}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_B(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_B}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_B(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_B}{dZ^2} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{1}{\hat{X}_S(X)} \frac{d^2 \hat{X}_S}{dX^2} + \frac{1}{\hat{Y}_S(Y)} \frac{d^2 \hat{Y}_S}{dY^2} + \frac{1}{\hat{Z}_S(Z)} \frac{d^2 \hat{Z}_S}{dZ^2} = 0 \quad (27)$$

از هر یک از معادلات فوق، سه معادله دیفرانسیل معمولی به‌صورت زیر قابل استخراج است:

همچنین $\Delta_{F,S}$ جابجایی سطح آزاد سیال است، به طوری که رابطه زیر برای آن برقرار می‌باشد:

$$\frac{\partial \Delta_{F,S}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} = \frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} \quad (45)$$

با توجه به معادلات (43) و (44) سه رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^2 \right] \right] = 0$$

$$at \quad Y = b_1 + \Delta_{F,S} \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^2 \right] \right] = -g$$

$$at \quad Y = b_1 + \Delta_{F,S} \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^2 \right] \right] = 0$$

$$at \quad Y = b_1 + \Delta_{F,S} \quad (48)$$

در معادله (47) پس از صرف نظر از ترم‌های غیرخطی و انجام عملیات انتگرال‌گیری نامعین، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} = -gY + cte = -g\Delta_{F,S} - gb_1 + cte \quad (49)$$

سمت چپ معادله فوق را می‌توان با اعمال بسط تیلور بازنویسی نمود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Y=b_1} + \Delta_{F,S} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{Y=b_1} + \dots$$

$$\approx \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Y=b_1} \quad (50)$$

با جای‌گذاری معادلات (50) در (49) و انجام مشتق‌گیری زمانی از طرفین معادله حاصله، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{Y=b_1} + g \frac{\partial \Delta_{F,S}}{\partial t} = 0 \quad (51)$$

با جای‌گذاری معادلات (22) و (45) در معادله فوق، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \Big|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} \right) = 0 \quad (a-52)$$

$$\Rightarrow \int_0^{a_1} \int_0^c \left[\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial t^2} \Big|_{Y=b_1} + g \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial Y} \Big|_{Y=b_1} \right) \right] \delta \varphi_S(X, b_1, Z, t) dZ dX = 0 \quad (b-52)$$

به طوری که δ عملگر تغییراتی است.

$$\int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{b_1} \frac{\partial w_0}{\partial t} \hat{X}_{Bk_1}(X) \hat{Y}_{Bk_2}(Y) dY dX$$

به طریق مشابه با این فرض که $\Pi_{\hat{X}}^2$ یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (25) و (22) نتیجه می‌شود:

$$\hat{X}_S(X) = \cos\left(\frac{k_1 \pi}{a_1} X\right); (k_1 = 0, 1, 2, \dots) \quad (39)$$

همین‌طور با این فرض که $\Pi_{\hat{Z}}^2$ یک عدد موهومی خالص است، از معادلات (33)، (19) و (21) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Z}_S(X) = \cos\left(\frac{k_2 \pi}{c} Z\right); (k_2 = 0, 1, 2, \dots) \quad (40)$$

سرانجام با حل معادله دیفرانسیل (48) به همراه شرط مرزی (19) نتیجه می‌شود:

$$\hat{Y}_S(Y) = \cosh(q_{k_1 k_2} Y) \quad (a-41)$$

$$q_{k_1 k_2} = \pi \sqrt{\left(\frac{k_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{c}\right)^2} \quad (b-41)$$

با جای‌گذاری معادلات (39) تا (41) در معادله (24) و اضافه نمودن ترم زمانی در قالب سری‌های فوریه، φ_S به دست می‌آید:

$$\varphi_S(X, Y, Z, t) = \sum_{M_S} \sum_{N_S} \sum_{k_1=0} \sum_{k_2=0} \dot{T}_{S k_1 k_2}(t) \hat{X}_{S k_1}(X) \hat{Y}_{S k_1 k_2}(Y) \hat{Z}_{S k_2}(Z) \quad (42)$$

3-2- معادله اسلاشینگ خطی در سطح آزاد سیال برای تئوری تک‌لایه معادل معادله ناویر - استوکس در سطح آزاد سیال ایده‌آل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{D(\vec{\nabla} \varphi)}{Dt} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} = \vec{g} \quad (a-43)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{D(\varphi, X)}{Dt} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} \\ \frac{D(\varphi, Y)}{Dt} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} \\ \frac{D(\varphi, Z)}{Dt} \Big|_{Y=b_1+\Delta_{F,S}} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b-43)$$

به طوری که g شتاب گرانشی است و $\frac{D}{Dt}$ نشان‌دهنده مشتق مادی به صورت زیر است:

$$\frac{D(?)}{Dt} = \frac{\partial(?)}{\partial t} + (\vec{\nabla} \varphi) \cdot (\vec{\nabla}(?)) \quad (44)$$

4-2- انرژی‌های جنبشی سیال برای تئوری تک‌لایه معادل

انرژی جنبشی که سیال به ورق وارد می‌کند، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T_F = \frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \int_0^c (\nabla \varphi) (\nabla \varphi) dZ dY dX \quad (53)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس، معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$T_F = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=0} dY dX \quad (a-54)$$

$$\Rightarrow T_F = T_{FB} + T_{FS} = -\frac{1}{2} \rho_F \int_{X_0}^{X_0+a} \int_{Y_0}^{Y_0+b} (\varphi_B |_{Z=0} + \varphi_S |_{Z=0}) \frac{\partial w_0}{\partial t} dY dX \quad (b-54)$$

به طوری که T_{FB} و T_{FS} به ترتیب انرژی‌های جنبشی موده‌های بال‌جینگ و اسلاشینگ سیال هستند.

2-5- استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی برای تئوری تک‌لایه معادل

به منظور استخراج معادلات حرکت و شرایط مرزی از اصل همیلتون استفاده شده است:

$$\int_0^t \delta (T_P - U_S + \varrho (T_{FB} + T_{FS})) dt = 0 \quad (55)$$

با جای‌گذاری معادلات (7)، (8) و (54) در معادله فوق، انجام عملیات انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب مولفه‌های جابجایی مجازی، معادلات دیفرانسیل زیر به دست می‌آیند:

$$\delta w_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{\partial^2 M_{xx}^{(i)}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{(i)}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yy}^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\partial T_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}^{(i)}}{\partial y} - I_0^{(i)} \ddot{w}_0 + I_1^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + I_3^{(i)} \left(\frac{\partial \ddot{\psi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\psi}_y}{\partial y} \right) + \varrho \rho_F (\phi_B(X, Y, 0, t) + \frac{1}{2} \phi_S(X, Y, 0, t)) \right] = 0 \quad (56)$$

$$\delta \psi_x \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial P_{xx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^{(i)}}{\partial y} - T_{xz}^{(i)} - I_2^{(i)} \ddot{\psi}_x - I_3^{(i)} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right] = 0 \quad (57)$$

$$\delta \psi_y \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial P_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^{(i)}}{\partial y} - T_{yz}^{(i)} - I_2^{(i)} \ddot{\psi}_y - I_3^{(i)} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right] = 0 \quad (58)$$

به طوری که در معادلات فوق، ممان‌های جرمی اینرسی و منته‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_0^{(i)}, I_1^{(i)}, I_2^{(i)}, I_3^{(i)}) = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \left(1, g^2(z + \frac{h}{2}), f^2(z + \frac{h}{2}), g(z + \frac{h}{2}) f(z + \frac{h}{2}) \rho^{(i)} dz_i \right) \quad (59)$$

$$(M_{xx}^{(i)}, M_{xy}^{(i)}, M_{yy}^{(i)}) = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\sigma_{xx}^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}) g(z + \varrho \frac{h}{2}) dz_i \quad (a-60)$$

$$(P_{xx}^{(i)}, P_{xy}^{(i)}, P_{yy}^{(i)}) = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\sigma_{xx}^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}) f(z + \varrho \frac{h}{2}) dz_i \quad (b-60)$$

$$(T_{xz}^{(i)}, T_{yz}^{(i)}) = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\tau_{xz}^{(i)}, \tau_{yz}^{(i)}) f'(z + \varrho \frac{h}{2}) dz_i \quad (c-60)$$

همچنین با استفاده از اصل همیلتون، شرایط مرزی ضروری (با جابجایی) و طبیعی (یا نیرو) در لبه‌های ورق ساندویچی به دست می‌آیند. در حالت تماس با سیال فرض شده است که هر چهار لبه دارای تکیه‌گاه ساده هستند (شرایط مرزی ناویر)، در حالی که در حالت عدم تماس سیال، لبه‌های $x = a$ و $x = 0$ دارای تکیه‌گاه ساده بوده و لبه‌های $y = b$ و $y = 0$ دارای ترکیب‌هایی دلخواه از شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد هستند (شرایط مرزی نوع لوی).

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $x = a$ و $x = 0$:

$$w_0 = 0 \quad (61)$$

$$\psi_y = 0 \quad (62)$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{xx}^{(i)} = 0 \quad (63)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{xx}^{(i)} = 0 \quad (64)$$

شرایط مرزی گیردار در لبه‌های $y = b$ و $y = 0$:

$$w_0 = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (66)$$

$$\psi_x = 0 \quad (67)$$

$$\psi_y = 0 \quad (68)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $y = b$ و $y = 0$:

$$w_0 = 0 \quad (69)$$

$$\psi_x = 0 \quad (70)$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{yy}^{(i)} = 0 \quad (71)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{yy}^{(i)} = 0 \quad (72)$$

شرایط مرزی آزاد در لبه‌های $y = b$ و $y = 0$:

$$L_{11} = \sum_{i=1}^3 \left[-A_1^{(i)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - C_1^{(i)} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2(B_1^{(i)} + 2D_1^{(i)}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (E_0^{(i)} + E_2^{(i)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (F_0^{(i)} + F_2^{(i)}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - I_0^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + I_1^{(i)} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right] \quad (82)$$

$$L_{12} = -L_{21} = \sum_{i=1}^3 \left[-A_0^{(i)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_0^{(i)} + 2D_0^{(i)}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (E_0^{(i)} + E_2^{(i)}) \frac{\partial}{\partial x} + I_3^{(i)} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \right] \quad (83)$$

$$L_{13} = L_{31} = \sum_{i=1}^3 \left[-C_0^{(i)} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - (B_0^{(i)} + 2D_0^{(i)}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (F_0^{(i)} + F_2^{(i)}) \frac{\partial}{\partial y} + I_3^{(i)} \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2} \right] \quad (84)$$

$$L_{22} = \sum_{i=1}^3 \left[A_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - E_1^{(i)} - I_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \quad (85)$$

$$L_{23} = \sum_{i=1}^3 (B_2^{(i)} + D_2^{(i)}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -L_{32} \quad (86)$$

$$L_{33} = \sum_{i=1}^3 \left[-D_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + F_1^{(i)} + I_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \quad (87)$$

6-2- محاسبه ضرایب تصحیح برشی

در این بخش به منظور اصلاح اثر پیوستگی تنش‌های برشی عرضی بین لایه‌ها از روش توسعه داده شده توسط هوان [28] استفاده شده است. در گام نخست با استفاده از روابط زیر انرژی‌های کرنشی برشی عرضی برای ورق ساندویچی محاسبه می‌شوند [28]:

$$U_{S13} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{55}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{xz}^2 dz_i dy dx \quad (88)$$

$$U_{S23} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 Q_{44}^{(i)} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \gamma_{yz}^2 dz_i dy dx \quad (89)$$

از طرفی مطابق معادلات الاستیسیته سه‌بعدی، تنش‌های برشی عرضی به صورت زیر می‌باشند [28]:

$$\hat{t}_{xz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\rho^{(i)} \ddot{u} - \sigma_{xx,x}^{(i)} - \tau_{xy,y}^{(i)}) dz_i + \hat{t}_{xz}^{(i-1)} \quad (90)$$

$$\hat{t}_{yz}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} (\rho^{(i)} \ddot{v} - \tau_{xy,x}^{(i)} - \sigma_{yy,y}^{(i)}) dz_i + \hat{t}_{yz}^{(i-1)} \quad (91)$$

به طوری که علامت () بیانگر مقادیر به دست آمده از معادلات الاستیسیته سه‌بعدی است.

با توجه به معادلات (90) و (91)، انرژی‌های کرنشی برشی عرضی به صورت زیر به دست می‌آیند [28]:

$$\sum_{i=1}^3 \left(2 \frac{\partial M_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{(i)}}{\partial y} - T_{yz}^{(i)} - I_1^{(i)} \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_3^{(i)} \ddot{\psi}_x \right) = 0 \quad (73)$$

$$\sum_{i=1}^3 M_{yy}^{(i)} = 0 \quad (74)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{xy}^{(i)} = 0 \quad (75)$$

$$\sum_{i=1}^3 P_{yy}^{(i)} = 0 \quad (76)$$

منتجه‌های تنش را می‌توان به صورت روابط زیر برحسب مولفه‌های جابجایی بیان نمود:

$$M_{xx}^{(i)} = A_1^{(i)} w_{0,xx} + B_1^{(i)} w_{0,yy} + A_0^{(i)} \psi_{x,x} + B_0^{(i)} \psi_{y,y} \quad (a-77)$$

$$M_{xy}^{(i)} = 2D_1^{(i)} w_{0,xy} + D_0^{(i)} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \quad (b-77)$$

$$M_{yy}^{(i)} = B_1^{(i)} w_{0,xx} + C_1^{(i)} w_{0,yy} + B_0^{(i)} \psi_{x,x} + C_0^{(i)} \psi_{y,y} \quad (c-77)$$

$$P_{xx}^{(i)} = A_0^{(i)} w_{0,xx} + B_0^{(i)} w_{0,yy} + A_2^{(i)} \psi_{x,x} + B_2^{(i)} \psi_{y,y} \quad (d-77)$$

$$P_{xy}^{(i)} = 2D_0^{(i)} w_{0,xy} + D_2^{(i)} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \quad (e-77)$$

$$P_{yy}^{(i)} = B_0^{(i)} w_{0,xx} + C_0^{(i)} w_{0,yy} + B_2^{(i)} \psi_{x,x} + C_2^{(i)} \psi_{y,y} \quad (f-77)$$

$$T_{xz}^{(i)} = (E_0^{(i)} + E_2^{(i)}) w_{0,x} + E_1^{(i)} \psi_x \quad (g-77)$$

$$T_{yz}^{(i)} = (F_0^{(i)} + F_2^{(i)}) w_{0,y} + F_1^{(i)} \psi_y \quad (h-77)$$

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ B_0 & B_1 & B_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 \\ D_0 & D_1 & D_2 \end{bmatrix}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}^{(i)} \left\{ g\left(z + \frac{h}{2}\right) f\left(z + \frac{h}{2}\right) \quad g^2\left(z + \frac{h}{2}\right) \quad f^2\left(z + \frac{h}{2}\right) \right\} dz_i \quad (a-78)$$

$$\begin{bmatrix} E_0 & E_1 & E_2 \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{bmatrix}^{(i)} = \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \begin{Bmatrix} Q_{55} \\ Q_{44} \end{Bmatrix}^{(i)} \left\{ f'\left(z + \frac{h}{2}\right) \quad f'^2\left(z + \frac{h}{2}\right) \quad g'\left(z + \frac{h}{2}\right) f'\left(z + \frac{h}{2}\right) \right\} dz_i \quad (b-78)$$

با جای‌گذاری معادله (77) در معادلات (56) تا (58)، معادلات حاکم برحسب مولفه‌های جابجایی به دست می‌آیند:

$$\delta w_0 \Rightarrow L_{11} w_0(x, y, t) + L_{12} \psi_x(x, y, t) + L_{13} \psi_y(x, y, t) = 0 \quad (79)$$

$$\delta \psi_x \Rightarrow L_{21} w_0(x, y, t) + L_{22} \psi_x(x, y, t) + L_{23} \psi_y(x, y, t) = 0 \quad (80)$$

$$\delta \psi_y \Rightarrow L_{31} w_0(x, y, t) + L_{32} \psi_x(x, y, t) + L_{33} \psi_y(x, y, t) = 0 \quad (81)$$

به طوری که

$$L_{11}^{(m)} = \xi_1^{(m)} \frac{d^4}{dy^4} + \xi_2^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_3^{(m)} = \sum_{i=1}^3 [-A_1^{(i)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - C_1^{(i)} \frac{d^4}{dy^4} + 2(B_1^{(i)} + 2D_1^{(i)}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2}{dy^2} - (E_0^{(i)} + E_2^{(i)}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + (F_0^{(i)} + F_2^{(i)}) \frac{d^2}{dy^2} + I_0^{(i)} \omega_m^2 + I_1^{(i)} \omega_m^2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \frac{d^2}{dy^2}] \quad (102)$$

$$L_{12}^{(m)} = L_{21}^{(m)} = \xi_4^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_5^{(m)} = \sum_{i=1}^3 [-A_0^{(i)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 + (B_0^{(i)} + 2D_0^{(i)}) \frac{m\pi}{a} \frac{d^2}{dy^2} - (E_0^{(i)} + E_2^{(i)}) \frac{m\pi}{a} + I_3^{(i)} \frac{m\pi}{a} \omega_m^2] \quad (103)$$

$$L_{13}^{(m)} = L_{31}^{(m)} = \xi_6^{(m)} \frac{d^3}{dy^3} + \xi_7^{(m)} \frac{d}{dy} = \sum_{i=1}^3 [-C_0^{(i)} \frac{d^3}{dy^3} + (B_0^{(i)} + 2D_0^{(i)}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d}{dy} + (F_0^{(i)} + F_2^{(i)}) \frac{d}{dy} - I_3^{(i)} \omega_m^2 \frac{d}{dy}] \quad (104)$$

$$L_{22}^{(m)} = \xi_8^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_9^{(m)} = \sum_{i=1}^3 [-A_2^{(i)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_2^{(i)} \frac{d^2}{dy^2} + I_2^{(i)} \omega_m^2 - E_1^{(i)}] \quad (105)$$

$$L_{23}^{(m)} = L_{32}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 [B_2^{(i)} + D_2^{(i)}] \frac{m\pi}{a} \frac{d}{dy} = \xi_{10}^{(m)} \frac{d}{dy} \quad (106)$$

$$L_{33}^{(m)} = \xi_{11}^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_{12}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 \left[D_2^{(i)} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - C_2^{(i)} \frac{d^2}{dy^2} - I_2^{(i)} \omega_m^2 + F_1^{(i)} \right] \quad (107)$$

پس از اعمال قانون کرامر بر روی معادلات (99) و (100) می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix} \psi_{xm}(y) = - \begin{vmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix} W_{0m}(y) \quad (108)$$

$$\begin{vmatrix} L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix} \psi_{ym}(y) = \begin{vmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{12}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{22}^{(m)} \end{vmatrix} W_{0m}(y) \quad (109)$$

پس از جای‌گذاری معادلات فوق در معادله (101) می‌توان نوشت:

$$(L_{31}^{(m)} + L_{32}^{(m)}) \frac{\begin{vmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix}} + L_{33}^{(m)} \frac{\begin{vmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{12}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{22}^{(m)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{vmatrix}} W_{0m}(y) = 0 \Rightarrow \quad (110)$$

$$\bar{U}_{S_{13}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{55}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{t}_{xz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (92)$$

$$\bar{U}_{S_{23}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{Q_{44}^{(i)}} \int_{z_i^*}^{z_i^{**}} \hat{t}_{yz}^{(i)2} dz_i dy dx \quad (93)$$

ضریب تصحیح برشی κ_{13} از طریق مقایسه معادلات (88) و (90) به‌دست می‌آید و ضریب تصحیح برشی κ_{23} نیز از طریق مقایسه معادلات (89) و (93) به‌دست می‌آید. به‌علت تأثیر قابل توجه این ضرایب بر روی فرکانس‌های طبیعی، مطابق معادلات زیر از یک فرآیند تکراری برای محاسبه آن‌ها استفاده شده است [22]:

$$\kappa_{13}^{k+1} = \frac{U_{S_{13}}^k}{\bar{U}_{S_{13}}^k} \quad (94)$$

$$\kappa_{23}^{k+1} = \frac{U_{S_{23}}^k}{\bar{U}_{S_{23}}^k} \quad (95)$$

به‌طوری‌که k شمارنده تکرار است. فرآیند فوق تا رسیدن به همگرایی مطلوب تکرار می‌شود. با جای‌گذاری معادلات فوق در معادله (13) و جای‌گذاری معادلات حاصله در اصل همیلتون، انرژی‌های کرنشی برشی عرضی سازگار با تئوری مرتبه سوم ردی جایگزین انرژی‌های کرنشی سازگار با معادلات الاستیسیته سه‌بعدی می‌شوند و در نتیجه نقیصه تئوری مرتبه سوم ردی برای ورق‌های ساندویچی از دیدگاه انرژی اصلاح می‌شود.

7-2- فرآیند حل معادلات حاکم برای تئوری تک‌لایه معادل، شرایط مرزی لوی و در حالت عدم تماس سیال

با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $x=0$ و $x=a$ ، مولفه‌های جابجایی را می‌توان به‌گونه‌ای ساده کرد که شرایط مرزی ضروری یعنی معادلات (61) و (62) را ارضاء نمایند.

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_{0m}(y) \sin(\mu_m x) \exp(-i\omega_m t) \quad (96)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{xm}(y) \cos(\mu_m x) \exp(-i\omega_m t) \quad (97)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{ym}(y) \sin(\mu_m x) \exp(-i\omega_m t) \quad (98)$$

با جای‌گذاری معادلات فوق در معادلات (79) تا (81) معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$L_{11}'^{(m)} W_{0m}(y) + L_{12}'^{(m)} \Psi_{xm}(y) + L_{13}'^{(m)} \Psi_{ym}(y) = 0 \quad (99)$$

$$L_{21}'^{(m)} W_{0m}(y) + L_{22}'^{(m)} \Psi_{xm}(y) + L_{23}'^{(m)} \Psi_{ym}(y) = 0 \quad (100)$$

$$L_{31}'^{(m)} W_{0m}(y) + L_{32}'^{(m)} \Psi_{xm}(y) + L_{33}'^{(m)} \Psi_{ym}(y) = 0 \quad (101)$$

به‌طوری‌که

$$K_2^{(m)} = \xi_2^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_3^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_9^{(m)} \xi_{11}^{(m)} 2\xi_5^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - \xi_9^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} - \xi_3^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} - \xi_{11}^{(m)} \xi_5^{(m)2} - 2\xi_4^{(m)} \xi_5^{(m)} \xi_{12}^{(m)} \xi_{11}^{(m)} \quad (d-114)$$

$$K_0^{(m)} = \xi_3^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} - \xi_{12}^{(m)} \xi_5^{(m)2} \quad (h-114)$$

و همچنین

$$\begin{Bmatrix} g_1^{(m)} \\ g_3^{(m)} \\ g_5^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_5^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - \xi_7^{(m)} \xi_9^{(m)} \\ \xi_4^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - \xi_6^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_7^{(m)} \xi_8^{(m)} \\ -\xi_6^{(m)} \xi_8^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (115)$$

پاسخ معادلات دیفرانسیل (11) تا (113) به صورت زیر تخمین زده می‌شوند:

$$W_{0m}(y) = \{c_1^{(m)} \dots c_8^{(m)}\} \begin{Bmatrix} \exp(\lambda_1^{(m)} y) \\ \vdots \\ \exp(\lambda_8^{(m)} y) \end{Bmatrix} \quad (116)$$

$$\psi_{x_m}(y) = \{\bar{c}_1^{(m)} \dots \bar{c}_8^{(m)}\} \begin{Bmatrix} \exp(\lambda_1^{(m)} y) \\ \vdots \\ \exp(\lambda_8^{(m)} y) \end{Bmatrix} \quad (117)$$

$$\psi_{y_m}(y) = \{\bar{\bar{c}}_1^{(m)} \dots \bar{\bar{c}}_8^{(m)}\} \begin{Bmatrix} \exp(\lambda_1^{(m)} y) \\ \vdots \\ \exp(\lambda_8^{(m)} y) \end{Bmatrix} \quad (118)$$

پس از جای‌گذاری معادلات فوق در معادلات (111) تا (113) معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\{\bar{\bar{c}}_1^{(m)} \dots \bar{\bar{c}}_8^{(m)}\} [G^{(m)}] = \{c_1^{(m)} \dots c_8^{(m)}\} [A^{(m)}] \quad (119)$$

$$\{\bar{c}_1^{(m)} \dots \bar{c}_8^{(m)}\} [\Lambda^{(m)}] [G^{(m)}] = \{c_1^{(m)} \dots c_8^{(m)}\} [B^{(m)}] \quad (120)$$

به طوری که ماتریس‌های $[G^{(m)}]$ ، $[A^{(m)}]$ و $[B^{(m)}]$ ماتریس‌های مربعی 8×8 هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[G^{(m)}] = g_5^{(m)} [\Lambda^{(m)}]^4 + g_3^{(m)} [\Lambda^{(m)}]^2 + g_1^{(m)} [I] \quad (121)$$

$$[A^{(m)}] = \left(\xi_4^{(m)} \xi_6^{(m)} - \xi_1^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) [\Lambda^{(m)}]^4 + \left(\xi_4^{(m)} \xi_7^{(m)} + \xi_5^{(m)} \xi_6^{(m)} - \xi_2^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) [\Lambda^{(m)}]^2 + \left(\xi_5^{(m)} \xi_7^{(m)} - \xi_3^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) [I] \quad (122)$$

$$[B^{(m)}] = \left(\xi_1^{(m)} \xi_8^{(m)} \right) [\Lambda^{(m)}]^6 + \left(\xi_1^{(m)} \xi_9^{(m)} + \xi_2^{(m)} \xi_8^{(m)} - \xi_4^{(m)2} \right) [\Lambda^{(m)}]^4 + \left(\xi_2^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_3^{(m)} \xi_8^{(m)} - 2\xi_4^{(m)} \xi_5^{(m)} \right) [\Lambda^{(m)}]^2 + \left(\xi_3^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_5^{(m)2} \right) [I] \quad (123)$$

به طوری که $[I]$ ماتریس همانی است. همچنین $[A^{(m)}]$ ماتریس قطری با عناصر روی قطر $\lambda_r^{(m)}$ ($r = 1, 2, \dots, 8$) است.

به منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی با شرایط مرزی نوع لوی، معادلات (113) تا (118) به صورت مجزا در هر یک از مجموعه معادلات

$$\begin{pmatrix} L_{31}^{(m)} & L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} & \\ L_{33}^{(m)} & L_{21}^{(m)} & L_{22}^{(m)} \end{pmatrix} - L_{32}^{(m)} \begin{pmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \end{pmatrix} W_{0m}(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} L_{11}^{(m)} & L_{12}^{(m)} & L_{13}^{(m)} \\ L_{21}^{(m)} & L_{22}^{(m)} & L_{23}^{(m)} \\ L_{31}^{(m)} & L_{32}^{(m)} & L_{33}^{(m)} \end{pmatrix} W_{0m}(y) = 0$$

معادلات (108) تا (110) را می‌توان به صورت معادلات دیفرانسیل زیر

بازنویسی نمود:

$$g_5^{(m)} \frac{d^5 \psi_{x_m}(y)}{dy^5} + g_3^{(m)} \frac{d^3 \psi_{x_m}(y)}{dy^3} + g_1^{(m)} \frac{d \psi_{x_m}(y)}{dy} = \left(\xi_4^{(m)} \xi_6^{(m)} - \xi_1^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) \frac{d^5 W_{0m}(y)}{dy^5} + \left(\xi_4^{(m)} \xi_7^{(m)} + \xi_5^{(m)} \xi_6^{(m)} - \xi_2^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) \frac{d^3 W_{0m}(y)}{dy^3} + \left(\xi_5^{(m)} \xi_7^{(m)} - \xi_3^{(m)} \xi_{10}^{(m)} \right) \frac{d W_{0m}(y)}{dy} \quad (111)$$

$$g_5^{(m)} \frac{d^5 \psi_{y_m}(y)}{dy^5} + g_3^{(m)} \frac{d^3 \psi_{y_m}(y)}{dy^3} + g_1^{(m)} \frac{d \psi_{y_m}(y)}{dy} = \left(\xi_1^{(m)} \xi_8^{(m)} \right) \frac{d^6 W_{0m}(y)}{dy^6} + \left(\xi_1^{(m)} \xi_9^{(m)} + \xi_2^{(m)} \xi_8^{(m)} - \xi_4^{(m)2} \right) \frac{d^4 W_{0m}(y)}{dy^4} + \left(\xi_2^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_3^{(m)} \xi_8^{(m)} - 2\xi_4^{(m)} \xi_5^{(m)} \right) \frac{d^2 W_{0m}(y)}{dy^2} + \left(\xi_3^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_5^{(m)2} \right) W_{0m}(y) \quad (112)$$

به طوری که

$$K_8^{(m)} \frac{d^8 W_{0m}(y)}{dy^8} + K_6^{(m)} \frac{d^6 W_{0m}(y)}{dy^6} + K_4^{(m)} \frac{d^4 W_{0m}(y)}{dy^4} + K_2^{(m)} \frac{d^2 W_{0m}(y)}{dy^2} + K_0^{(m)} W_{0m}(y) = 0 \quad (113)$$

$$K_8^{(m)} = \xi_1^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} - \xi_8^{(m)} \xi_6^{(m)2} \quad (a-114)$$

$$K_6^{(m)} = \xi_1^{(m)} \left(\xi_8^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_9^{(m)} \xi_{11}^{(m)} \right) + \xi_2^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} + 2\xi_4^{(m)} \xi_6^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - 2\xi_6^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_8^{(m)} - \xi_9^{(m)} \xi_6^{(m)2} - \xi_1^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} - \xi_{11}^{(m)} \xi_4^{(m)2} \quad (b-114)$$

$$K_4^{(m)} = \xi_1^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_2^{(m)} \left(\xi_8^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_9^{(m)} \xi_{11}^{(m)} \right) + \xi_3^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} + 2\xi_{10}^{(m)} \left(\xi_4^{(m)} \xi_7^{(m)} - \xi_5^{(m)} \xi_6^{(m)} \right) - \xi_8^{(m)} \xi_7^{(m)2} - 2\xi_6^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_9^{(m)} \quad (c-114)$$

جدول 1 همگرایی فرکانس‌های طبیعی (هرتز) برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک در تماس با سیال بر حسب M و N ($M_B = N_B = 10$)

مود (2 و 2)	مود (1 و 2)	مود (2 و 1)	مود (1 و 1)	$M = N$
2126.45703	1322.5616	1349.6818	610.4814	4
2126.45654	1322.561143	1349.6776	610.4802	5
2126.456508	1322.561104	1349.67736	610.48002	6
2126.4564819	1322.561099	1349.677309	610.47997	7
2126.4564811	1322.561079	1349.677265	610.47997	8

جدول 2 همگرایی فرکانس‌های طبیعی (هرتز) برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک در تماس با سیال بر حسب M_B و N_B ($M = N = 4$)

مود (2 و 2)	مود (1 و 2)	مود (2 و 1)	مود (1 و 1)	$M_B = N_B$
2139.1545	1330.5463	1354.1145	611.7894	6
2134.0951	1324.7662	1353.0529	611.2586	7
2130.7498	1324.5179	1351.1392	610.796	8
2127.3314	1322.8915	1350.1069	610.6548	9
2126.45703	1322.5616	1349.6818	610.4814	10

جدول 3 خواص هندسی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک

سلول لانه‌زنبوری درون‌رو				ورق ساندویچی		
t/l	d/l	l/a	θ (°)	h/a	b/a	a (m)
0.04	2	0.05	-30	0.1	1	0.5

جدول 4 مشخصات هندسی ناحیه سیال

نسبت ابعاد مخزن به طول ورق		موقعیت قرارگیری ورق در دیواره مخزن	
Y_0/b	X_0/a_1	c/a	a_1/a
0.5	0.25	0.3	2

2-3- همگرایی نتایج برای تئوری تک‌لایه معادل، شرایط مرزی لوی و در حالت عدم تماس سیال

در روش حل مورد استفاده برای شرایط مرزی لوی، معادله مشخصه فرکانسی با توجه به شرایط مرزی لبه‌های $y=0$ و $y=b$ استخراج می‌شود و فرکانس‌های طبیعی مودهای مختلف از طریق جستجوی ریشه‌های این معادله تعیین می‌شوند. پس همگرایی سری‌های فوریه در این مدل کاربرد ندارد.

3-3- صحت‌سنجی نتایج

3-3-1- صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ایزوتروپیک بدون سیال

در تئوری تک‌لایه معادل، با مساوی صفر قرار دادن h_2 ، ورق ساندویچی به یک ورق ایزوتروپیک تبدیل می‌شود پنچ فرکانس طبیعی یک ورق مربعی ایزوتروپیک با شرایط مرزی ناوبر، با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی (همراه با روش‌های حل گالریکین و نوع لوی) و تئوری مرتبه اول میندلین (همراه با

(65) تا (68)، (69) تا (72) و (73) تا (76) جای‌گذاری می‌شوند. پس از مرتب‌سازی یک دستگاه معادلات خطی با 8 معادله و 8 مجهول به‌فهم زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{k=1}^8 R_{jk}^{(m)} c_k^{(m)} = 0; (j = 1, 2, \dots, 8) \quad (124)$$

برای این‌که دستگاه معادلات فوق، دارای جواب غیربدهی باشد، لازم است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده شود.

$$\det \left(\left[R_{jk}^{(m)} \right] \right) = 0; (j, k = 1, 2, \dots, 8) \quad (125)$$

3- نتایج و بحث

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک با شرایط مرزی ناوبر در تماس با سیال تئوری‌های تک‌لایه معادل و شرایط مرزی لوی بدون سیال پرداخته شده است. در اکثر بخش‌ها به‌منظور حذف اثرات اندازه و جنس ماده اصلی، به‌جای فرکانس طبیعی، فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌صورت زیر محاسبه شده و مورد بررسی قرار گرفته است.

$$\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_0(1-\nu_0^2)}{E_0}} \quad (126)$$

قبل از استخراج نتایج حاصل از کدهای کامپیوتری نوشته شده در نرم افزار ممتیکا، همگرایی نتایج برحسب تعداد جملات استفاده شده در سری‌های مورد استفاده در روش گالریکین بررسی شده است.

3-1- همگرایی نتایج برای تئوری تک‌لایه معادل، شرط مرزی ناوبر و در حالت تماس با سیال

مطالعات همگرایی فرکانس‌های طبیعی یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگزیٹیک تجاری در تماس با سیال به‌منظور تعیین درجات آزادی لازم در سری‌های فوریه به‌کار رفته در روش گالریکین برای ورق ساندویچی (یعنی M و N در معادله (90) و مود بالچینگ سیال (یعنی M_B و N_B در معادله (41)) به‌ترتیب در جداول 1 و 2 نشان داده شده‌اند. برای آلومینیوم، چگالی، مدول الاستیسیته یانگ و نسبت پواسون به‌ترتیب برابر 2700 کیلوگرم بر متر مکعب، 69 گیگاپاسکال و 0.3 می‌باشند. نسبت ضخامت هسته به ورق برابر 0.8 می‌باشد. چگالی آب نیز برابر 1000 کیلوگرم بر متر مکعب است. سایر مشخصات هندسی ورق ساندویچی و مخزن مطابق جداول 3 و 4 می‌باشند.

مطابق نتایج موجود در جداول 1 و 2 تصمیم گرفته شده است که در روش گالریکین، مقادیر M و N در معادله (90) برابر 4 و مقادیر M_B و N_B در معادله (41) برابر 10 در نظر گرفته شوند. از دلایل اختلاف نتایج مودهای (1 و 2) و (2 و 1) در جداول فوق می‌توان به غیر ایزوتروپیک بودن ورق ساندویچی و همچنین متفاوت بودن اثر جرم افزوده سیال در جهت محورهای x و y اشاره نمود.

جدول 6 مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی ایزوتروپیک نوع لوی با نسبت ضخامت به طول 0.1

Table 6 Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Levy-type isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1

شرایط مرزی	روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم
SSSC	مود (1و1)	مود (1و2)	مود (2و1)	مود (2و2)	مود (3و3)	مود (2و3)
	روش 1	2.3124	47.066	52.998	74.046	86.190
	[28]	22.426	47.224	52.324	74.401	86.219
[29]	22.401	47.130	52.232	74.225	85.931	
SCSC	روش 1	26.466	49.014	58.899	78.68	86.849
	[28]	26.736	49.260	59.480	79.195	87.207
	[29]	26.7084	49.1756	59.4159	79.0783	86.9397
SFSS	روش 1	11.615	27.55	38.472	53.852	57.986
	[28]	11.38	21.91	38.361	53.852	55.762
	[29]	11.373	26.157	38.290	53.257	55.634
SF5F	روش 1	9.5189	16.562	36.348	36.477	43.414
	[28]	9.445	15.405	33.91	36.477	42.887
	[29]	9.441	15.391	33.91	36.348	42.800
SF5C	روش 1	12.58	31.975	38.837	56.53	65.02
	[28]	12.26	30.47	38.71	55.97	62.95
	[29]	12.25	30.43	38.64	55.85	62.84

که در جدول 6 روش 1، روش حاضر ردی می‌باشد.

جدول 7 فرکانس‌های طبیعی (هرتز) یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری مستطیلی با

شرایط مرزی ناویر

Table 7 Natural frequencies (Hz) of a rectangular honeycomb sandwich plate with Navier boundary conditions

روش	مود (1و1)	مود (2و1)	مود (1و2)	مود (3و1)	مود (2و2)	مود (2و3)
روش 1	23.464	45.39	71.718	80.818	93.061	128.45
روش 2	23.35	44.77	70.539	80.156	91.418	125.93
روش 3	23.46	45.44	71.717	80.817	91.06	125.45
روش 4	23.35	44.70	70.537	80.156	91.415	125.92
روش 5	23.35	44.77	70.35	80.15	91.41	125.9
روش 6	-	45	69	78	92	129
روش 7	23	45	71	80	91	126
[31]	23.29	44.47	71.15	78.78	91.75	125.1
[32]	23.41	44.46	71.5	79.26	91.92	125.94
روش 10	23.46	44.77	70.55	80.16	91.42	125
روش 11	23.26	44.61	70.77	79.97	91.78	126.5

که در جدول 7 روش 1، روش حل گالرکین - تئوری ردی و روش 2، روش حل گالرکین - تئوری بهبودیافته ردی و روش 3، روش حل نوع لوی - تئوری ردی و روش 4، روش حل نوع لوی - تئوری بهبودیافته ردی و روش 5، روش حل گالرکین و روش 6، روش تجربی از راوله و یونگ [30] و روش 7، روش تئوری از راوله و یونگ [30] و روش 10، روش تئوری تک‌لایه معادل از رانو و دسائی [33] و روش 11، روش تئوری لایه‌ای از رانو و دسائی [33] می‌باشد.

روش حل گالرکین) محاسبه شده‌اند و در جدول 5 با نتایج موجود در تحقیقات حسینی هاشمی و ارسنجان [28] و حسینی هاشمی و همکاران [29] مقایسه شده‌اند. ورق از جنس آلومینیوم با مدول یانگ 69 گیگاپاسکال، چگالی 2700 کیلوگرم بر متر مکعب و نسبت پواسون 0.3 می‌باشد. نتایج جدول 5 حاکی از دقت بالای هر سه مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق ایزوتروپیک با شرایط مرزی ناویر است.

جدول 5 مقایسه پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد یک ورق مربعی ایزوتروپیک نوع ناویر با نسبت ضخامت به طول 0.1

Table 5 Comparison of the first five dimensionless natural frequencies of a Navier-type isotropic square plate with a thickness-to-length ratio of 0.1

روش	مود(1و1)	مود(2و1)	مود(1و2)	مود(2و2)	مود(1و3)
روش 1	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.065
روش 2	19.0653	45.487	45.4892	69.8107	85.0846
[28]	19.084	45.5845	45.5845	70.0219	85.3654
[29]	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0846

روش 1، روش حاضر گلرکین و روش 2، روش حاضر ردی می‌باشد

پنج فرکانس طبیعی یک ورق مربعی ایزوتروپیک با شرایط مرزی لوی با استفاده از تئوری مرتبه سوم ردی محاسبه شده‌اند و در جدول 6 با نتایج موجود در تحقیقات سایر محققان مقایسه شده‌اند. مشخصات هندسی و مادی ورق، مطابق بخش قبل می‌باشند. نتایج جدول 6 حاکی از دقت مناسب و کارایی مدل تحلیلی استفاده شده در این تحقیق برای ورق ایزوتروپیک با شرایط مرزی لوی است.

3-3-2-صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری بدون سیال

صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری بدون سیال با نتایج موجود در تحقیقات سایر محققان: در این بخش، شش فرکانس طبیعی یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری با شرایط مرزی ناویر با استفاده از تئوری‌های ردی و بهبودیافته ردی (همراه با روش‌های حل گالرکین و نوع لوی) و تئوری لایه‌ای (همراه با روش حل گالرکین) محاسبه شده‌اند و در جدول 7 با نتایج موجود در تحقیقات راوله و یونگ [30]، ژو و لی [31]، یوان و دیو [32] و رانو و دسائی [33] مقایسه شده‌اند. طول، عرض، ضخامت کل و ضخامت هسته ورق ساندویچی به ترتیب برابر 1.8288 متر، 1.2192 متر، 7.1628 میلی‌متر، و 6.35 میلی‌متر هستند. همچنین مدول یانگ، نسبت پواسون و چگالی آلومینیوم به ترتیب برابر 68.948 گیگاپاسکال، 0.33 و 2768 کیلوگرم بر متر مکعب هستند. علاوه بر این هسته لانه‌زنبوری مدول‌های برشی عرضی $G_{23}^{(2)}$ و $G_{13}^{(2)}$ به ترتیب برابر 134.45 مگاپاسکال و 51.71 مگاپاسکال هستند و چگالی نیز برابر 121.83 کیلوگرم بر متر مکعب است. به منظور سازگاری با مطالعه تجربی راوله و یونگ [30] مولفه‌های سفتی درون‌صفحه‌ای هسته برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. نتایج جدول 7 حاکی از دقت مناسب تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری با شرایط مرزی ناویر است.

3-5- نتایج و بحث

3-5-1- بررسی اثر ابعاد مخزن بر روی فرکانس پایه مرطوب ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک نوع ناویر

شکل 6 نمودار فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را برحسب نسبت طول مخزن به ورق برای نسبت‌های مختلف عرض مخزن به طول ورق نشان می‌دهد. لازم بذکر است که X_0 برابر صفر در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش نسبت طول مخزن به طول ورق، فرکانس پایه را افزایش می‌دهد. علاوه بر این در یک نسبت طول مخزن به طول ورق مشخص، افزایش نسبت عرض مخزن به طول ورق، فرکانس پایه را تا رسیدن به یک مقدار مجانبی افزایش می‌دهد، زیرا با افزایش ظرفیت مخزن، سرعت سیال کاهش یافته که این امر سبب افزایش فرکانس طبیعی ورق ساندویچی می‌شود.

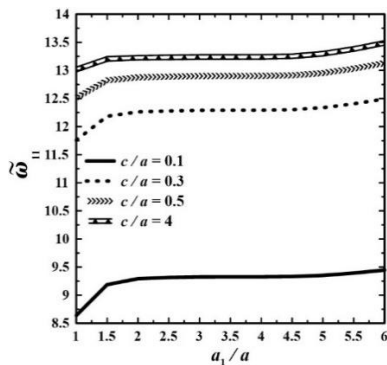


Fig. 6 Wet dimensionless fundamental frequency vs. tank-to-plate length ratio (a_1/a) for various ratios of tank width to the plate length (c/a).

شکل 6 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب برحسب نسبت طول مخزن به طول ورق برای نسبت‌های مختلف عرض مخزن به طول ورق

3-5-2- بررسی اثر موقعیت ورق در دیواره مخزن بر روی فرکانس پایه مرطوب ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک نوع ناویر

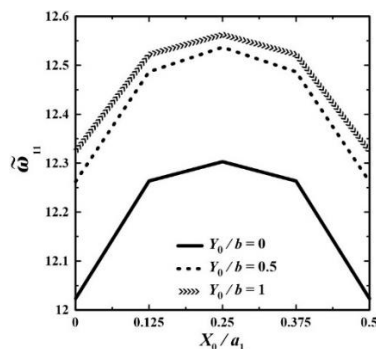


Fig. 7 Effects of horizontal (X_0/a_1) and vertical (Y_0/b) non-dimensional locations of the plate at the wall on the wet dimensionless fundamental frequency.

شکل 7 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب برحسب موقعیت افقی ورق در دیواره برای مقادیر مختلف موقعیت قائم ورق در دیواره مخزن

3-5-3- بررسی اثر زاویه سلول بر روی فرکانس پایه بی‌بعد ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری نوع ناویر در تماس با سیال

شکل 8 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را برحسب زاویه سلول لانه‌زنبوری به‌ازاء اندازه‌های سلول مختلف (l/a) نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با تغییر زاویه سلول از -60 تا +60 درجه، فرکانس پایه ابتدا

3-4- صحت‌سنجی فرکانس‌های طبیعی ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک

تجاری نوع ناویر در تماس با سیال با تحلیل المان محدود این بخش در نظر دارد که چارچوب ریاضیاتی برهم‌کنش ورق - سیال را برای یک ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری مرطوب با مقادیر مختلف ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق بررسی نماید. برای اطمینان از حذف خطاهای ناشی از روابط همگن‌سازی هسته‌های لانه‌زنبوری، فقط ورق‌های ساندویچی با هسته‌های معادل‌سازی شده توسط مدل تورنابن در انسیس مدل‌سازی و تحلیل شده‌اند. نسبت ضخامت هسته به ورق برابر 0.8 است و سایر خواص هندسی ورق و ناحیه سیال محدود می‌باشند. در محیط آنالیز مودال آکوستیکی در نرم افزار انسیس، ورق ساندویچی و ناحیه سیال محدود به‌ترتیب با استفاده از المان‌های سالیید 186 و فلوآید 220 مش‌بندی شده‌اند. المان فلوآید 220 یک المان آکوستیکی توپر سه‌بعدی شش وجهی و 20 گره‌ای است. ورق ساندویچی شامل 2704 المان سالیید 186 است و زمانی که ارتفاع بی‌بعد سیال از لبه پایینی ورق برابر 0.9 است، 14976 المان فلوآید 220 برای ناحیه سیال به‌کار رفته‌اند. شکل‌های 5(a) تا 5(b) چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده از روش حل گالرکین همراه با مدل همگن‌سازی تورنابن (همراه با تئوری‌های ردی و بهبود یافته ردی (مدل A-1) و تئوری لایه‌ای (مدل B)) را با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی مقایسه می‌کنند.

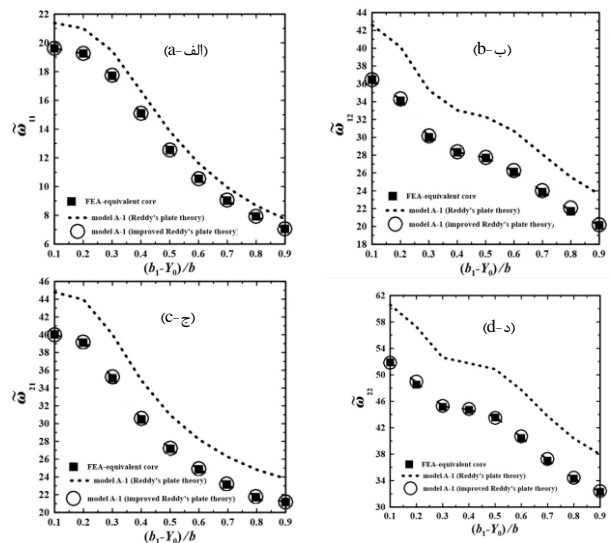


Fig. 5 Variations of the dimensionless natural frequency of the sandwich plate

شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مود ورق ساندویچی

از شکل‌های 5a تا 5d مشاهده می‌شود که: 1- چارچوب ریاضیاتی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال برای تئوری‌های بهبودیافته ردی و لایه‌ای از دقت بالایی برخوردار است. 2- با افزایش ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند، به‌طوری‌که مثلاً با اضافه شدن سیال تا ارتفاع نصف ورق (یعنی $(b_1 - Y_0)/b = 0.5$), می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس طبیعی پایه 36% کاهش می‌یابد. دلیل این امر، افزایش جرم افزوده سیال به ورق ساندویچی است.

ضریب تصحیح برشی K_{23} برای لانه‌زنبوری‌های تجاری و لانه‌زنبوری‌های کلاسیک تقریباً یکسان است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل مالک و گیسیون، سفتی برشی عرضی $G_{23}^{(2)}$ در لانه‌زنبوری‌های تجاری و کلاسیک تقریباً برابر است. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری در شکل 10 (c) نشان داده شده است. از مقایسه شکل 10 (c) با شکل 10 (a) مشاهده می‌شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{13} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل تورنابن نسبت به مدل مالک و گیسیون بیشتر است. تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق با در نظر گرفتن مدل تورنابن برای هسته لانه‌زنبوری در شکل 10 (b) نشان داده شده است. از مقایسه این شکل با شکل 10 (d) مشاهده می‌شود که درصد تغییرات ضریب تصحیح برشی K_{23} بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق، در مدل‌های تورنابن و مالک و گیسیون تقریباً برابر است.

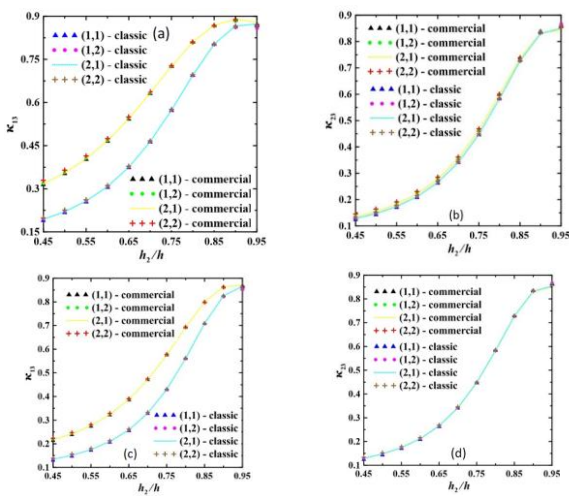


Fig. 10 Variations of the shear correction factor versus the ratio of core thickness to plate thickness.

شکل 10 تغییرات ضریب تصحیح برشی بر حسب نسبت ضخامت هسته به ورق

4- جمع بندی و نتیجه گیری

در این تحقیق، به بررسی مشخصه‌های ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگرتیک مستقر در دیواره یک مخزن سیال پرداخته شده است. ورق ساندویچی شامل دو رویه آلومینیومی و یک هسته لانه‌زنبوری آگرتیک از جنس آلومینیوم رویه‌ها است. برای همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، علاوه بر مدل مالک و گیسیون، از یکی از جدیدترین مدل‌ها (مدل تورنابن) نیز استفاده شده است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی سه نوع مدل تحلیلی پیشنهاد داده شده‌اند و مزایا و معایب آنها با هم مقایسه شده‌اند. از نوع مدل تحلیلی تک‌لایه معادل برای مدل‌سازی ورق ساندویچی دارای شرط مرزی ناویر و در تماس با سیال استفاده شده‌اند. سیال، ایده‌آل (تراکم‌ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی) در نظر گرفته شده است. روش‌های حل حاضر، روابط همگن‌سازی هسته لانه‌زنبوری، و چارچوب ریاضی برهم‌کنش ورق ساندویچی - سیال با استفاده از نتایج تحقیقات سایر محققان و نیز نتایج حاصل از تحلیل المان محدود سه‌بعدی صحت سنجی شده‌اند. سرانجام اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد مخزن به طول ورق، ارتفاع سیال از لبه پایین ورق، موقعیت ورق در دیواره مخزن و هندسه سلول لانه‌زنبوری بر روی فرکانس‌های طبیعی مرطوب مورد بررسی قرار گرفته‌اند

افزایش و سپس کاهش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که در یک زاویه سلول مشخص، افزایش l/a باعث افزایش فرکانس پایه می‌شود، به طوری که این اثر افزایشی، در سلول‌های لانه‌زنبوری درون‌رو مشهودتر است.

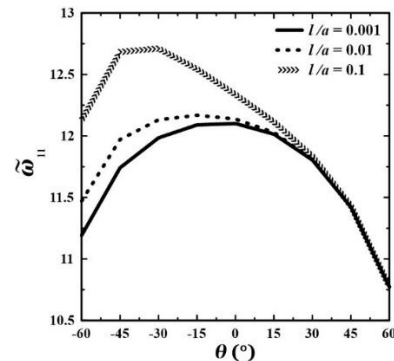


Fig. 8 Wet dimensionless fundamental frequency vs. cell angle (θ) for different cell sizes (l/a).

شکل 8 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب زاویه سلول برای نسبت‌های مختلف l/a

3-4-5- بررسی اثر نسبت ضخامت به طول جداره سلول بر روی فرکانس پایه بی‌بعد ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری نوع ناویر در تماس با سیال

شکل 9 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب را بر حسب نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول لانه‌زنبوری (t_l/l) به‌ازاء نسبت‌های مختلف ابعاد سلول (d/l) نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت جداره، فرکانس پایه افزایش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول جداره افقی به جداره مورب سلول (d/l) فرکانس کاهش می‌یابد.

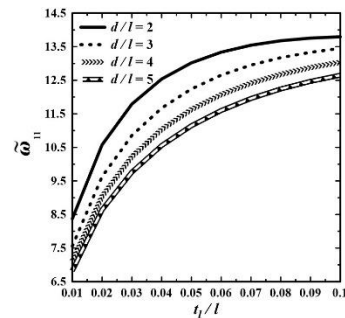


Fig. 9 Dimensionless changes of the wet fundamental frequency with respect to the cell angle for different ratios (l/a).

شکل 9 تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد مرطوب بر حسب زاویه سلول برای نسبت‌های مختلف l/a

3-6- بررسی اثر نسبت ضخامت هسته به ورق بر روی ضرایب تصحیح برشی در تئوری بهبود یافته ردی

که از شکل (a) 10:1- با نازک شدن رویه‌ها، ضریب تصحیح برشی افزایش می‌یابد، که این امر به معنای افزایش دقت تئوری ردی برای ورق‌های ساندویچی با رویه‌های نازک است. 2- ضریب تصحیح برشی K_{13} برای لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است. این امر به این دلیل است که بر اساس مدل مالک و گیسیون، سفتی برشی عرضی $G_{13}^{(2)}$ در لانه‌زنبوری‌های تجاری بیشتر از لانه‌زنبوری‌های کلاسیک است. 3- شماره مود اثر چندانی بر روی ضریب تصحیح برشی ندارد. از شکل 10 (b): که

(15) برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری، در حالت بدون سیال، اثر افزایش نسبت ضخامت به طول جداره مورب سلول، بر روی ورق‌های دارای شرایط مرزی مقیدتر مشهودتر است. به‌طوری‌که بیشترین و کمترین اثر آن به‌ترتیب مربوط به شرایط مرزی SCSC و SFSS می‌باشد.

5-مراجع

- [1] Torabi, K., Afshari, H. And Aboutalebi, F. H., "Vibration And Flutter Analyses Of Cantilever Trapezoidal Honeycomb Sandwich Plates," J. Sandw. Struct. & Mater., Vol. 21, No. 8, Pp. 2887–2920, 2019.
- [2] Bidgoli, E. M.R., Arefi, M., Mohammadimehr, M., "Free Vibration Analysis Of Honeycomb Doubly Curved Shell Integrated With CNT-Reinforced Piezoelectric Layers," Mech. Based Des. Struct. Mach., Pp. 1–32, 2020.
- [3] Nguyen, D. D., Pham, C. H., "Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Sandwich Composite Plates With Negative Poisson's Ratio In Auxetic Honeycombs," J. Sandw. Struct. & Mater., Vol. 20, No. 6, Pp. 692–717, 2018.
- [4] Cong, P. H., Quyet, P. K., Duc, N. D., "Effects Of Lattice Stiffeners And Blast Load On Nonlinear Dynamic Response And Vibration Of Auxetic Honeycomb Plates," Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci., P. 0954406221992797, 2021.
- [5] Li, Y., Yao, W., Zhang, Y., "Nonlinear Dynamic Characteristics Of Symmetric Rectangular Honeycomb Sandwich Thin Panel," J. Sandw. Struct. & Mater., Vol. 23, No. 7, Pp. 3390–3413, 2021.
- [6] Li, F., Yuan, W., Zhang, C., "Free Vibration And Sound Insulation Of Functionally Graded Honeycomb Sandwich Plates," J. Sandw. Struct. & Mater., Vol. 24, No. 1, Pp. 565–600, 2022.
- [7] Huang, N., "Influence Of Shear Correction Factors In The Higher Order Shear Deformation Laminated Shell Theory," Int. J. Solids Struct., Vol. 31, No. 9, Pp. 1263–1277, 1994.
- [8] Frostig, Y., Thomsen, O. T., "High-Order Free Vibration Of Sandwich Panels With A Flexible Core," Int. J. Solids Struct., Vol. 41, No. 5–6, Pp. 1697–1724, 2004.
- [9] Omiddezyani, S., Jafari, R. A., Talookolaei, M., Afrasiab, H., "The Size-Dependent Free Vibration Analysis Of A Rectangular Mindlin Microplate Coupled With Fluid," Ocean Eng., Vol. 163, Pp. 617–629, 2018.
- [10] Thinh, T. I., Tu, T. M., Vanlong, N., "Free Vibration Of A Horizontal Functionally Graded Rectangular Plate Submerged In Fluid Medium," Ocean Eng., Vol. 216, P. 107593, 2020.
- [11] Hashemi, S. H. H., Karimi, M., Taher, H. R. D., "Vibration Analysis Of Rectangular Mindlin Plates On Elastic Foundations And Vertically In Contact With Stationary Fluid By The Ritz Method," Ocean Eng., Vol. 37, No. 2–3, Pp. 174–185, 2010.
- [12] Khorshid, K., Farhadi, S., "Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid," Compos. Struct., Vol. 104, Pp. 176–186, 2013.
- [13] Khorshidi, K., Bakhsheshy, A., "Free Vibration Analysis Of A Functionally Graded Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid," Acta Mech., Vol. 226, No. 10, Pp. 3401–3423, 2015.
- [14] Khorshidi, K., Akbari, F., Ghadirian, H., "Experimental And Analytical Modal Studies Of Vibrating Rectangular Plates In Contact With A Bounded Fluid," Ocean Eng., Vol. 140, Pp. 146–154, 2017.
- [15] Khorshidi, K., Karimi, M., "Analytical Modeling For Vibrating Piezoelectric Nanoplates In Interaction With Inviscid Fluid Using Various Modified Plate Theories," Ocean Eng., Vol. 181, Pp. 267–280, 2019.
- [16] Karimi, M., Khorshidi, K., Dimitri, R., Tornabene, F., "Size-Dependent Hydroelastic Vibration Of FG Microplates Partially In Contact With A Fluid," Compos. Struct., Vol. 244, P. 112320, 2020.
- [17] Bakhsheshy, A., Mahbadi, H., "The Effect Of Fluid Surface Waves On Free Vibration Of Functionally Graded Microplates In

(1) در ورق‌های ساندویچی، تئوری مرتبه سوم ردی برای تنش برشی عرضی در راستای ضخامت یک توزیع پیوسته تکه‌ای را در نظر می‌گیرد، به‌همین دلیل این تئوری برای ورق‌های ساندویچی قادر به ارائه نتایج دقیق نیست. این نقیصه از طریق محاسبه ضرایب تصحیح برشی در تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی از دیدگاه انرژی اصلاح می‌شود.

(2) در تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی، با نازک شدن رویه‌ها ضرایب تصحیح برشی افزایش یافته و به مقدار 1 نزدیک می‌شوند، که این امر به معنای افزایش دقت تئوری مرتبه سوم ردی در ورق‌های ساندویچی با رویه‌های نازک است.

(3) درصد خطای تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی نسبت به تحلیل المان محدود کمتر از 3٪ است، در حالی که درصد خطای تئوری لایه‌ای نسبت به تحلیل المان محدود کمتر از 0.1٪ می‌باشد.

(4) تعداد درجات آزادی برای تئوری بهبودیافته ردی برابر $3 \times m \times n$ و برای تئوری لایه‌ای برابر $15 \times m \times n$ هستند.

(5) روش حل تحلیلی مورد استفاده در این تحقیق برای شرایط مرزی نوع لوی شامل جستجوی ریشه‌های معادله مشخصه فرکانسی با استفاده از روش‌های عددی مانند نیوتن - رافسون، سکانت و ... است که فرآیندی زمان‌بر است. از طرفی از آنجا که اساس این روش حل بر عملیات جبری روی اپراتورهای دیفرانسیلی استوار است، این روش در حالت برهم‌کنش ورق - سیال کاربرد ندارد.

(6) در ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری در تماس با سیال، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق از 0.01 تا 0.04 باعث افزایش چشم‌گیر فرکانس پایه می‌شود.

(7) برای ورق ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری، در حالت بدون سیال، فرکانس پایه در نسبت ضخامت هسته به ورق برابر 0.85 به ماکزیمم خود می‌رسد، در حالی که در حالت تماس با سیال، با افزایش این نسبت از 0.45 تا 0.95، فرکانس پایه کاهش می‌یابد.

(8) در ورق ساندویچی لانه‌زنبوری تجاری در تماس با سیال، وقتی که اندازه سلول خیلی کوچک است، فرکانس پایه به‌ازاء سلول‌های مستطیلی (یعنی زاویه سلول صفر درجه) بیشینه می‌باشد. با افزایش اندازه سلول، ماکزیمم فرکانس پایه به سمت سلول‌های درون‌رو (زوایای سلول منفی) میل می‌کند.

(9) در ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری تجاری در تماس با سیال، با افزایش اندازه سلول فرکانس پایه افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که افزایش فرکانس در سلول‌های درون‌رو مشهودتر است.

(10) در ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری تجاری در تماس با سیال، با افزایش نسبت ابعاد سلول از 1/5 تا 5 فرکانس پایه کاهش می‌یابد.

(11) در ورق‌های ساندویچی لانه‌زنبوری آگرتیک تجاری در تماس با سیال، با ضخیم شدن دیواره‌های سلول درون‌رو فرکانس پایه افزایش می‌یابد.

(12) با افزایش ارتفاع سیال از لبه پایینی ورق، فرکانس پایه به مقدار زیادی کاهش می‌یابد، به‌طوری‌که مثلاً با اضافه شدن سیال تا ارتفاع نصف ارتفاع ورق، فرکانس پایه 36٪ کاهش می‌یابد.

(13) با افزایش ظرفیت مخزن، فرکانس پایه به‌صورت مجانبی افزایش می‌یابد.

(14) وقتی‌که ورق ساندویچی در مرکز دیواره سلول قرار دارد، فرکانس پایه بیشینه است.

- Interaction With Bounded Fluid,” *Ocean Eng.*, Vol. 194, P. 106646, 2019.
- [18] Ramian, A., Jafari, Talookolaei, R. A., Valvo, P. S., Abedi, M., “Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Compressible Core In Contact With Fluid,” *Thin-Walled Struct.*, Vol. 157, P. 107088, 2020.
- [19] Ramian, A., Jafari, Talookolaei, R. A., Valvo, P. S., Abedi, M., “Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Sandwich Plate With Compressible Core Placed At The Bottom Of A Tank Filled With Fluid,” *In Structures*, Vol. 29, Pp. 1259–1273, 2021.
- [20] Khorshidi, K., Norowzian, H., “Stability Analysis Of A Sandwich Plate With An Auxetic Core Reinforced With Carbon Nanotubes Under Aeroelastic Forces,” *JSTC Journal*, Vol. 14, No. 4, Pp. 2597-2610, 2024.
- [21] Yolcu, D. A., Ozturk, B., Sari, G., Okutanbaba, B., “Free Vibration Response Of Sandwich Composites With Auxetic Chiral Core,” *European Journal Of Mechanics - A/Solids*, Vol. 113, Pp. Article ID: 105700, 2025
- [22] Khorshidi, K., Savvafi, S., Zobeid, Z., “Investigation Of Free Vibration In Fluid-Loaded Cylindrical Shells With A Three-Layer Sandwich Wall And An Auxetic Central Layer,” *Macs Journal*, Vol. 12, No. 24, Pp. 53-72, 2025
- [23] Fang, X., Shen, H., Wang, H., “Nonlinear Free Vibration Of Sandwich Beam With Data-Driven Inverse Designed Auxetic Core Based On Deep Learning,” *European Journal Of Mechanics - A/Solids*, Vol. 102, Article Id: 105276, 2025
- [24] Heidarisoureshjani, A., Kalantari, A., Hesari, E., Talebitooti, R., Talebitooti, M., “Cutout Effects On The Vibration Of Sandwich Auxetic Cylindrical Shells With An Experimental Validation,” *Journal Of Sound And Vibration*, Vol. 592, Article Id: 118624, 2024.
- [25] Malek, S., Gibson, L., “Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs,” *Mech. Mater.*, vol. 91, pp. 226–240, 2015.
- [26] Tornabene, F., Viscoti M., Dimitri ,R., Aiello, M. A., “Higher Order Formulations For Doubly-Curved Shell Structures With A Honeycomb Core,” *Thin-Walled Struct.*, Vol. 164, P. 107789, 2021.
- [27] Sorohan, S., Sandu , M., Constantinescu, D. M., Sandu, A. G., “On The Evaluation Of Mechanical Properties Of Honeycombs By Using Finite Element Analyses,” *INCAS Bull.*, Vol. 7, No. 3, P. 135, 2015.
- [28] Hashemi, S. H., Arsanjani, M., “Exact Characteristic Equations For Some Of Classical Boundary Conditions Of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates,” *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 42, No. 3–4, Pp. 819–853, 2005.
- [29] Hosseinihashemi, S., Fadaee, M., Taher, H. R. D., “Exact Solutions For Free Flexural Vibration Of Lévy-Type Rectangular Thick Plates Via Third-Order Shear Deformation Plate Theory,” *Appl. Math. Model.*, Vol. 35, No. 2, Pp. 708–727, 2011.
- [30] Raville, M. E., Ueng, C. E. S., “Determination Of Natural Frequencies Of Vibration Of A Sandwich Plate,” *Exp. Mech.*, Vol. 7, No. 11, Pp. 490–493, 1967
- [31] Zhou, H. B., Li, G. Y., “Free Vibration Analysis Of Sandwich Plates With Laminated Faces Using Spline Finite Point Method,” *Comput. & Struct.*, Vol. 59, No. 2, Pp. 257–263, 1996.
- [32] Yuan W. X., Dawe, D. J., “Free Vibration Of Sandwich Plates With Laminated Faces,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 54, No. 2, Pp. 195–217, 2002.
- [33] Rao, M. K., Desai, Y. M., “Analytical Solutions For Vibrations Of Laminated And Sandwich Plates Using Mixed Theory,” *Compos. Struct.*, Vol. 63, No. 3–4, Pp. 361–373, 2004.