



حل تحلیلی تنش‌ها در پوسته کروی مخزن چندلایه کامپوزیتی جدار نازک تحت فشار داخلی به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها

حسین فرج الهی¹، غلامحسین رحیمی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-111، rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

به دست آوردن مقادیر تنش‌ها در پوسته کروی یک مخزن چندلایه کامپوزیتی جدار نازک به روشی کاملاً تحلیلی و بدون نیاز به استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات، موضوعی است که تاکنون بررسی نشده است. در این مقاله با استفاده از حلی کاملاً تحلیلی به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها، مقادیر تنش‌ها در هر لایه از پوسته کروی مخزن چندلایه کامپوزیتی جدار نازک به دست آمده است. در این روش حل با استفاده از معادلات تعادل، قانون هوک، روابط کرنش - جابجایی و انحنا - جابجایی، معادلات حاکم بر پوسته دوران‌یافته عمومی کامپوزیتی استخراج گردیده و سپس معادلات حاکم بر پوسته کروی متقارن به دست آمده‌اند. در ادامه به کمک معادلات سازگاری جابجایی و چرخش، نیروها و تنش‌ها در تقاطع پوسته کروی و استوانه کامپوزیتی استخراج شده‌اند و پس از آن تنش‌های طولی و محیطی در پوسته کروی مخزن کامپوزیتی جدار نازک تحت فشار داخلی در هر لایه به دست آمده‌اند. در نهایت نتایج حل کاملاً تحلیلی بر مبنای تئوری کلاسیک پوسته‌ها با نتایج حل عددی اجزاء محدود مقایسه شده و نشان داده شده است مقادیر تنش حاصل از نتایج تحلیلی انطباق خوبی با نتایج حل عددی دارند و می‌توان با استفاده از نتایج این حل تحلیلی مخازن کامپوزیتی را به صورت بهینه طراحی نمود.

دریافت: 1402/08/07

پذیرش: 1402/10/02

کلیدواژگان

حل تحلیلی،

تئوری کلاسیک،

پوسته کروی،

مخزن کامپوزیتی چندلایه،

جدار نازک

Analytical solution for stresses in the spherical shell of a thin-wall composite multi-layer vessel under internal pressure by using the classical theory of shells

Hossein Farajollahi¹, Gholamhossein Rahimi^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

Keywords

Analytical Solution, Classic Theory, Spherical Shell, Multi-Layer Composite Vessel, Thin-Walled

Abstract

Obtaining stress values in spherical shell of a thin-walled composite multi-layer vessel in a completely analytical way and independent of numerical methods in solving the equations is a subject that has not been investigated so far. In this article, using a fully analytical solution based on classical shell theory, the stress values in each layer of the spherical shell are obtained. In this solution method, by using equilibrium equations, Hooke's law, strain-displacement and curvature-displacement relations, the governing equations of general composite shells of revolution are extracted and then the governing equations of a symmetric spherical shell are obtained. In the following, using displacement and rotation consistency equations, forces and stresses at the intersection of the spherical and cylindrical composite shell are calculated, and then the longitudinal and circumferential stresses due to internal pressure are extracted in each layer. Finally, the results are compared with the results of the finite element numerical solution and it is shown that the stress values obtained from the analytical results are in good agreement with the results of the numerical solution and it is possible to use the results of this analytical solution to make optimally designed composite vessels.

1- مقدمه

تحت فشار داخلی اشاره نمود. هر چند استفاده از این مواد در این صنایع به دلیل نسبت استحکام به وزن بالا در مقابل مواد فلزی، مزایای چشمگیری دارد و رو به رشد است اما در مقابل تحلیل سازه‌ای این مواد می‌تواند در مواردی نسبت به مواد فلزی پیچیده‌تر باشد. یکی از این پیچیدگی‌ها، تحلیل تنش در مخزن چندلایه‌ای است.

با پیشرفت فناوری در حوزه مواد کامپوزیتی و گسترش ابزارهای تحلیلی برای این مواد، به کارگیری آن‌ها در صنایع مختلف همچون خودروبی و هوافضا روز به روز در حال افزایش است. از مهم‌ترین کاربردهای کامپوزیت‌ها در صنایع خودروبی و هوافضا می‌توان به ساخت بدنه‌های کامپوزیتی چندلایه جدار نازک

Please cite this article using:

Farajollahi, H., Rahimi, G., "Analytical solution for stresses in the spherical shell of a thin-wall composite multi-layer vessel under internal pressure by using the classical theory of shells," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 10, No. 3, pp. 2297-2311, 2024. <https://doi.org/10.22068/JSTC.2023.2013986.1863>

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

مرجع [18]، به بررسی رفتار سازه‌ای با استفاده از تئوری خمشی برای پوسته کامپوزیتی اورتوتروپیک با هدف کمینه نمودن ناپیوستگی تنش پرداخت. محدودیت این بررسی فرض اورتوتروپیک بودن و نیاز به حل عددی روابط نهایی بود. رحیمی در مرجع [19]، رفتار مخزن کامپوزیتی با آستری فلزی را بررسی نمود. وی تنها در بخش آستری که فلزی بود بر اساس تئوری خمشی روابط تحلیلی را ارائه نمود. پادووک در مرجع [20]، به تحلیل تنش عدسی‌های کروی و ژئودزیک مخزن کامپوزیتی با استفاده از تئوری غشایی و بهره‌گیری از تئوری کلاسیک در هر لایه و بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی تنش پرداخت. ردی در مرجع [21]، به منظور استخراج تحلیلی تنش‌ها با استفاده از تئوری خمشی برای یک پوسته با دو شعاع انحنای و بهره‌گیری از تئوری برشی مرتبه اول توانست در حالت خاص لایه‌چینی اورتوتروپ و ویژه و شرط مرزی خاص روابط تحلیلی را ارائه نماید. از محدودیت‌های این بررسی وجود جواب تحلیلی در لایه‌چینی و شرط مرزی خاص بود (طراحی مخزن کامپوزیتی به‌گونه‌ای است که نمی‌توان از لایه‌چینی اورتوتروپ ویژه استفاده نمود). همچنین در این مرجع اشاره‌ای به استخراج ناپیوستگی تنش‌ها در تقاطع دو پوسته نشده است. آندر در مرجع [22]، با استفاده از حل تحلیلی الاستیسیته دوبعدی بر مبنای تئوری لکسیستیکی و در اثر بارگذاری فشار داخلی، با اعمال شرایط تنش صفحه‌ای و تابع تنش چندجمله‌ای، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی چندلایه به دست آورد. راموس در مرجع [23] و تاکایانگی در مرجع [24]، با استفاده از حل تحلیلی و تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و با استفاده از توابع تنش، مقادیر تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی چندلایه به دست آوردند. ویگنولی در مرجع [25]، با استفاده از روش چند مقیاسی تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی تحت فشار داخلی به دست آورد. وی با استفاده از روابط خواص الیاف و رزین خواص معادل هر لایه را به دست آورد و سپس با استفاده از حل الاستیسیته سه‌بعدی و تئوری لکسیستیکی و به کارگیری توابع تنش، قانون هوک و روابط کرنش - جابجایی، تنش‌ها را برای زوایای متفاوت لایه‌چینی و کسرهای حجمی متفاوت الیاف استخراج نمود. محدودیت روش نویسندگان مراجع [22]، [23]، [24] و [25] در نظر گرفتن اثر عدسی با نیروی معادل و استخراج تنش‌ها تنها در پوسته استوانه‌ای بود و نتوانستند تنش‌ها در عدسی و همچنین تنش‌های تقاطع دو پوسته را به دست آورند. از آن‌جا که هندسه عدسی مخزن کامپوزیتی کروی است در ادامه مرور تاریخچه، به معرفی برخی از این تحقیقات نیز پرداخته خواهد شد. سایاد در مرجع [26]، با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا تنش‌ها در پوسته کروی را استخراج نمود. وی در این مقاله از توابع تنش برشی چندجمله‌ای مختلفی استفاده نمود و توانست توزیع تنش‌های برشی عرضی در راستای ضخامت را با استفاده از روش ناور به دست آورد. محدودیت روش وی ارائه جواب تحلیلی فقط در حالت شرط مرزی ساده بود. قانسان در مرجع [27]، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و بالاتر و با استفاده از روش اصل انرژی پتانسیل کمینه، تنش‌ها را برای شرایط مرزی مختلف در پوسته کروی به دست آورد. محدودیت روش وی حل نیمه‌تحلیلی و تخمین جابجایی‌ها با استفاده از سری‌های فوریه بود. سالواتور در مرجع [28] و الاوندی در مرجع [29]، با استفاده از حل الاستیسیته سه‌بعدی و با به کارگیری روش ناور معادلات تعادل را در پوسته با دو شعاع انحنای و با شرط مرزی ساده حل نمودند و تنش‌ها را به صورت تحلیلی به دست آوردند. محدودیت روش آن‌ها استخراج تنش‌ها تنها در حالت شرط تکیه‌گاهی ساده بود. جین در مرجع [30]، با استفاده از حل الاستیسیته سه‌بعدی و با استفاده از روش ریلی ریتز، معادلات را برای شرایط مرزی مختلف در پوسته کروی حل نمود. محدودیت روش وی استفاده از روش حل عددی برای استخراج جواب‌ها بود.

پیشینه پژوهش برای به دست آوردن تنش‌ها در مخازن فلزی و کامپوزیتی جدار نازک تحت فشار داخلی را می‌توان به سه دسته کلی، تحلیلی، عددی و تجربی دسته‌بندی نمود. از میان این سه دسته به حل تحلیلی پرداخته می‌شود و به دلیل صحت‌گذاری بار و روش عددی، مراجعی که حل عددی را انجام داده‌اند نیز به صورت اجمالی بررسی می‌شوند. بتی در مرجع [1]، با استفاده از حل عددی و مدل دوبعدی، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی به دست آورد. کرونه در مرجع [2]، با استفاده از حل عددی و انتخاب مدل سه‌بعدی تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی استخراج نمود. ماتالونی در مرجع [3]، با استفاده از حل عددی و بهره‌گیری از مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی به دست آورد. ارتوران در مرجع [4]، با استفاده از مقایسه نتایج حل عددی با استفاده از مدل دوبعدی با نتایج آزمون، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی استخراج نمود. بتن در مرجع [5]، با استفاده از مقایسه نتایج حل عددی مدل سه‌بعدی و آزمون، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی به دست آورد. حیدری رازانی در مرجع [6]، به تشریح نحوه مدل‌سازی مخزن کامپوزیتی با استفاده از حل اجزاء محدود پرداخت. صفراآبادی در مراجع [7] و [8]، نحوه مدل‌سازی مخزن کامپوزیتی با استفاده از حل اجزاء محدود را بررسی نمود و زوایای بهینه پیچش را مورد بررسی قرار داد. آکار در مرجع [9] و کومار در مرجع [10] با استفاده از آزمون، تنش‌ها را در مخزن کامپوزیتی استخراج نمودند. در مراجع [10-1]، اشاره‌ای به استخراج تنش‌ها با استفاده از حل تحلیلی نشده است. هاوگتون در مرجع [11]، روابط تحلیلی برای به دست آوردن ناپیوستگی تنش در مخزن فلزی تحت فشار داخلی در تقاطع استوانه با عدسی کروی را ارائه نمود. سپس با استفاده از روابط تحلیلی توزیع تنش در عدسی کروی و استوانه را به دست آورد. راوو در مرجع [12]، از روش تحلیلی با استفاده از تئوری کلاسیک برای به دست آوردن تنش‌ها در هر لایه از مخزن کامپوزیتی فشار داخلی استفاده نمود. موستهک در مرجع [13]، از روش تحلیلی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول برای به دست آوردن تنش‌ها در هر لایه از مخزن کامپوزیتی تحت فشار داخلی استفاده نمود. محدودیت روش نگارندگان مراجع [12] و [13] استفاده از بار معادل به جای در نظر گرفتن اثر عدسی‌ها بود و توزیع تنش‌ها را فقط در بخش استوانه‌ای به دست آورد. مدهوی در مرجع [14]، از روش تحلیلی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و سوم برای به دست آوردن تنش‌ها در هر لایه از مخزن کامپوزیتی تحت فشار داخلی استفاده نمود. محدودیت روش وی استفاده از بار معادل به جای استخراج نیروها در تقاطع دو پوسته و در نظر گرفتن مخروط ناقص به جای عدسی کروی و استخراج تنش‌ها در بخش استوانه‌ای و عدسی معادل بود. اکولد در مرجع [15]، جابجایی‌ها و تنش‌ها در مخزن کامپوزیتی اورتوتروپیک تحت فشار داخلی با عدسی کروی را به دست آورد. کومار در مرجع [16]، جابجایی‌ها و تنش‌ها در مخزن کامپوزیتی اورتوتروپیک تحت فشار داخلی با عدسی‌های تخت، بیضوی و مخروطی را به دست آورد. از محدودیت‌های مراجع [15] و [16]، استفاده از پوسته استوانه‌ای به جای پوسته کروی در محاسبه نیروهای تقاطع دو پوسته، استفاده از فرض اورتوتروپیک و استفاده از خواص معادل برای کل لایه‌ها و محاسبه جابجایی‌ها و تنش‌ها، فقط در بخش استوانه‌ای اشاره نمود و در این تحقیقات اشاره‌ای به روابط در بخش عدسی‌ها نشده است. والری در مرجع [17]، با استفاده از روش خمشی و به کارگیری تئوری برشی، روابط تحلیلی را برای پوسته کامپوزیتی برای هر لایه به دست آورد. محدودیت این روابط تعداد بالای معادلات و مرتبه بالای معادلات بود که خود مانع از حل تحلیلی روابط بود و نیاز به حل عددی معادلات داشت. همچنین وی در این مرجع اشاره‌ای به روش به دست آوردن ناپیوستگی‌های تنش‌ها در تقاطع دو پوسته عدسی و استوانه و همچنین استخراج تنش‌ها در عدسی نداشت. لائو در

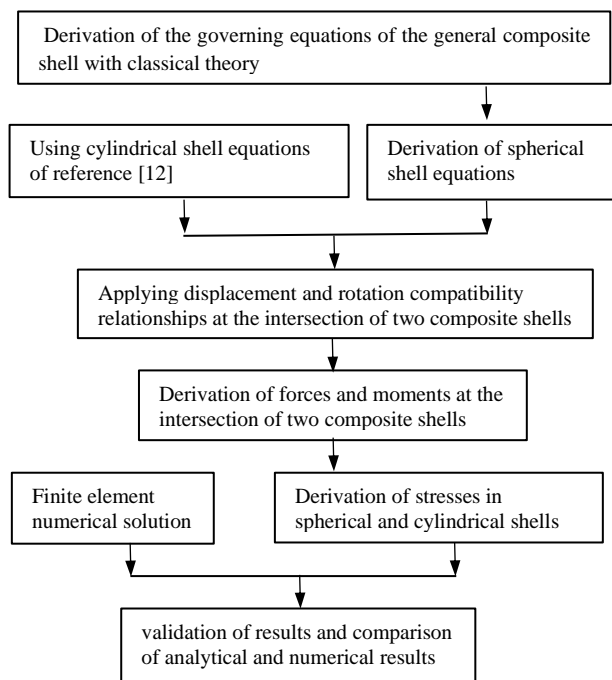


Fig. 2 Algorithm for extracting stresses in each layer of cylindrical and spherical shells using analytical solution

شکل 2 الگوریتم استخراج تنش‌ها در هر لایه و در پوسته‌های استوانه‌ای و کروی با استفاده از حل تحلیلی

3- استخراج معادلات حاکم بر پوسته دوران‌یافته عمومی کامپوزیتی با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها

در این بخش معادلات حاکم بر پوسته دوران‌یافته عمومی کامپوزیتی با استفاده از تئوری کلاسیک به دست می‌آیند بدین منظور ابتدا از روابط تعادل، روابط کرنش-جابجایی و انحنا-جابجایی و قانون هوک اشاره شده در مرجع [31] استفاده می‌شود. روابط تعادل برای پوسته دوران‌یافته حول محور در حالت بارگذاری متقارن محوری در رابطه (a-1) تا (c-1) آورده شده است [31].

$$\frac{d}{d\phi}(N_{\phi}r_0) - N_{\theta}r_1 \cos\phi - r_0 Q_{\phi} = 0 \quad (a-1)$$

$$N_{\phi}r_0 + N_{\theta}r_1 \sin\phi + \frac{d}{d\phi}(r_0 Q_{\phi}) = 0 \quad (b-1)$$

$$\frac{d}{d\phi}(M_{\phi}r_0) - M_{\theta}r_1 \cos\phi - Q_{\phi}r_0 r_1 = 0 \quad (c-1)$$

در دسته روابط 1، θ راستای محیطی، ϕ راستای نصف‌النهاری، N_{θ} و N_{ϕ} به ترتیب منته‌های نیرو و گشتاور محیطی، N_{ϕ} و M_{ϕ} منته‌های نیرو و گشتاور نصف‌النهاری، Q_{ϕ} منته نیروی برشی نصف‌النهاری، r_1 شعاع انحنا و r_0 شعاع پوسته در راستای محیطی هستند. معادله (a-1) را می‌توان با معادله (2) جانشانی نمود [31].

$$N_{\phi} = -Q_{\phi} \cot\phi \quad (2)$$

روابط کرنش-جابجایی و انحنا-جابجایی مطابق با رابطه (a-3) تا (g-3) بیان شده است [31].

در هیچ‌کدام از مراجع، تنش‌ها در پوسته کروی مخزن چندلایه کامپوزیتی جدار نازک به روش کاملاً تحلیلی به دست نیامده است. در مقاله حاضر با استفاده از حل کاملاً تحلیلی (بدون نیاز به استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات) و به کمک تئوری کلاسیک پوسته‌ها، تنش‌ها در پوسته کروی مخزن چندلایه کامپوزیتی جدار نازک تحت فشار داخلی به دست آمده است. سپس نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با حل عددی اجزاء محدود صحنه سنجی شده‌اند و نشان داده شد انطباق خوبی بین نتایج وجود دارد.

2- معرفی مسئله و الگوریتم حل

مخزن کامپوزیتی چندلایه جدار نازک، تحت فشار داخلی با لایه‌چینی متقارن $(\pm\phi)_s$ شامل دو پوسته استوانه‌ای و کروی است که در شکل 1 نشان داده شده است.

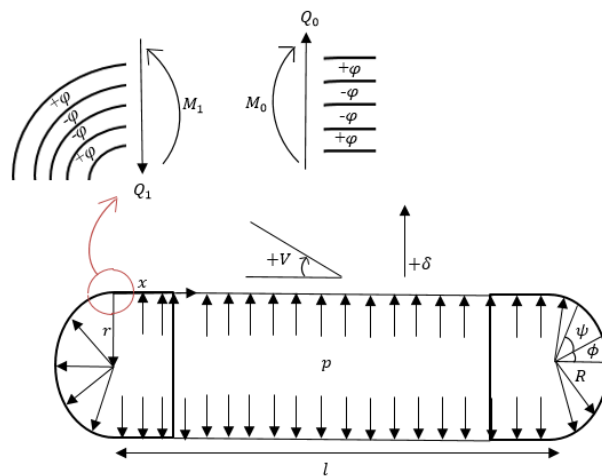


Fig. 1 Schematic of thin wall composite vessel with symmetrical layering under internal pressure

شکل 1 شماتیک مخزن جدار نازک کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن تحت فشار داخلی

l طول بخش استوانه‌ای، R شعاع مخزن، p فشار داخلی، ω جابجایی در راستای عمود بر پوسته، V چرخش، Q_0 نیروی برشی در تقاطع دو پوسته در لبه استوانه‌ای، M_0 گشتاور خمشی در تقاطع دو پوسته در لبه استوانه‌ای، Q_1 نیروی برشی در تقاطع دو پوسته در لبه عدسی کروی، M_1 گشتاور خمشی در تقاطع دو پوسته در لبه عدسی کروی، ϕ راستای نصف‌النهاری، ψ زاویه نسبت به ϕ زاویه لایه‌چینی و x و r دستگاه مختصات هستند. جهت مثبت جابجایی رو به بیرون و همچنین جهت مثبت چرخش برای استوانه و عدسی، ساعت‌گرد است. با توجه به متقارن بودن لایه‌چینی $(\pm\phi)_s$ در مخزن کامپوزیتی نسبت به سطح میانی و همچنین بارگذاری متقارن، پوسته متقارن محوری در نظر گرفته شده است.

همان‌گونه که اشاره شد در این مقاله معادلات حاکم بر پوسته کامپوزیتی کروی به روش تحلیلی و با استفاده از تئوری کلاسیک استخراج می‌گردد و در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی نیز از معادلات مرجع [15] استفاده می‌شود. انتخاب تئوری کلاسیک در روش حل تحلیلی به دلیل جدار نازک بودن مخزن کامپوزیتی و کوچک بودن تنش‌های عرضی و امکان صرف‌نظر از این تنش‌های عرضی است. تنش‌ها در پوسته کروی مخزن کامپوزیتی با استفاده از حل تحلیلی و به کارگیری تئوری کلاسیک مطابق با الگوریتم شکل 2 به دست می‌آیند.

$$V_b = \frac{1}{r_1}(v_b + \frac{d\omega_b}{d\phi}) \quad (a-6)$$

$$Y_b = Q_{\phi b} r_2 \quad (b-6)$$

روابط V_b چرخش مماس بر نصف‌النهار ناشی از خمش است. با جایگذاری روابط (a-5) تا (d-5) و (a-6) و (b-6) در رابطه (c-1) و پس از ساده‌سازی، اولین معادله حاکم بر پوسته دوران‌یافته کامپوزیتی متقارن محوری مطابق با رابطه (7) به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 V_b}{d\phi^2} + \frac{1}{r_1} \left(\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cot\phi \right) \frac{dV_b}{d\phi} \\ & + \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{D_{11}} \left(\frac{dD_{11}}{d\phi} \right) \frac{dV_b}{d\phi} - \frac{1}{r_1} \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} - \frac{1}{D_{11}} \cot\phi \right) \frac{dD_{12}}{d\phi} \\ & + \frac{D_{22} r_1}{D_{11} r_2} \cot^2\phi V_b = - \frac{Y_b}{D_{11}} \end{aligned} \quad (7)$$

با استفاده از روابط (a-6) و (b-6)، رابطه (2) با رابطه (8) جانشانی می‌شود.

$$N_{\phi b} = -Q_{\phi b} \cot\phi = -\frac{1}{r_2} Y_b \cot\phi \quad (8)$$

با جانشانی رابطه (8) و رابطه (g-3) در رابطه (b-1)، رابطه (9) به دست خواهد آمد.

$$N_{\theta b} = -\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} (r_2 Q_{\phi b}) = -\frac{1}{r_1} \frac{dY_b}{d\phi} \quad (9)$$

با استفاده از روابط (a-5) و (b-5) و روابط (8) و (9)، دومین معادله حاکم بر پوسته دوران‌یافته کامپوزیتی مطابق با رابطه (10) به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} (A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}) V_b &= \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 Y_b}{d\phi^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dY_b}{d\phi} \left(\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cot\phi \right) \\ &+ \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \right) \\ &- \frac{Y_b}{r_1} \left(\frac{r_1 A_{22}}{r_2 A_{11}} \cot^2\phi - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) \\ &+ \cot\phi \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \times \\ &\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{A_{11} (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

به منظور ساده‌سازی، ضخامت لایه‌ها و زاویه لایه‌چینی ثابت در نظر گرفته می‌شود فلذا تابعیت صلبیت‌های کششی و خمشی نسبت به ϕ از بین می‌رود و معادلات (7) و (10) به معادلات (a-11) و (b-11) تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 V_b}{d\phi^2} + \frac{1}{r_1} \left(\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cot\phi \right) \frac{dV_b}{d\phi} \\ & - \frac{1}{r_1} \left(\frac{D_{12}}{D_{11}} + \frac{D_{22} r_1}{D_{11} r_2} \cot^2\phi \right) V_b = - \frac{Y_b}{D_{11}} \end{aligned} \quad (a-11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 Y_b}{d\phi^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dY_b}{d\phi} \left(\frac{d}{d\phi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cot\phi \right) - \\ & \frac{Y_b}{r_1} \left(\frac{r_1 A_{22}}{r_2 A_{11}} \cot^2\phi - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) = \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) V_b \end{aligned} \quad (b-11)$$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\phi} - \omega \right) \quad (a-3)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r_2} (v \cot\phi - \omega) \quad (b-3)$$

$$\gamma_{\phi\theta} = 0 \quad (c-3)$$

$$\chi_{\phi} = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\phi} \right) \quad (d-3)$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{r_2} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\phi} \right) \cot\phi \quad (e-3)$$

$$\chi_{\phi\theta} = 0 \quad (f-3)$$

$$r_{\theta} = r_2 \sin\phi \quad (g-3)$$

ω جابجایی در راستای عمود بر پوسته، v جابجایی در راستای نصف‌النهار، ε_{ϕ} کرنش نصف‌النهاری، ε_{θ} کرنش محیطی، $\gamma_{\phi\theta}$ کرنش برشی، χ_{ϕ} انحنا نصف‌النهاری، χ_{θ} انحنا محیطی و r_2 شعاع انحنا هستند. همچنین جابجایی محیطی به دلیل تقارن صفر است. مطابق با قانون هوک و با توجه به $[B_{ij}] = 0$ و روابط (c-3) و (f-3)، متجه‌ها طبق روابط (a-4) تا (d-4) به دست خواهند آمد [32].

$$N_{\phi} = A_{11} \varepsilon_{\phi} + A_{12} \varepsilon_{\theta} \quad (a-4)$$

$$N_{\theta} = A_{12} \varepsilon_{\phi} + A_{22} \varepsilon_{\theta} \quad (b-4)$$

$$M_{\phi} = D_{11} \chi_{\phi} + D_{12} \chi_{\theta} \quad (c-4)$$

$$M_{\theta} = D_{12} \chi_{\phi} + D_{22} \chi_{\theta} \quad (d-4)$$

$[A_{ij}]$: کوپلینگ کشش، $[B_{ij}]$: کوپلینگ کشش، خمش و $[D_{ij}]$: کوپلینگ خمش هستند [32].

در ادامه معادلات حاکم بر پوسته دوران‌یافته کامپوزیتی متقارن محوری استخراج می‌گردد. با جایگذاری روابط (a-3) تا (g-3) در روابط (a-4) تا (d-4) متجه‌ها بر حسب جابجایی مطابق با روابط (a-5) تا (d-5) به دست خواهند آمد.

$$N_{\phi b} = \frac{A_{11}}{r_1} \left(\frac{dv_b}{d\phi} - \omega_b \right) + \frac{A_{12}}{r_2} (v_b \cot\phi - \omega_b) \quad (a-5)$$

$$N_{\theta b} = \frac{A_{12}}{r_1} \left(\frac{dv_b}{d\phi} - \omega_b \right) + \frac{A_{22}}{r_2} (v_b \cot\phi - \omega_b) \quad (b-5)$$

$$\begin{aligned} M_{\phi b} &= \frac{D_{11}}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v_b}{r_1} + \frac{d\omega_b}{r_1 d\phi} \right) + \frac{D_{12}}{r_2} \left(\frac{v_b}{r_1} \right. \\ & \left. + \frac{d\omega_b}{r_1 d\phi} \right) \cot\phi \end{aligned} \quad (c-5)$$

$$\begin{aligned} M_{\theta b} &= \frac{D_{12}}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{v_b}{r_1} + \frac{d\omega_b}{r_1 d\phi} \right) + \frac{D_{22}}{r_2} \left(\frac{v_b}{r_1} \right. \\ & \left. + \frac{d\omega_b}{r_1 d\phi} \right) \cot\phi \end{aligned} \quad (d-5)$$

اضافه نمودن اندیس b به معادلات جهت معرفی بخش خمشی روابط است. به منظور ساده‌سازی، از تغییر متغیرهای (a-6) و (b-6) معرفی می‌شوند.

V_{bsQ} چرخش ناشی از بار برشی خالص و ω_{bsQ} جابجایی عمود بر پوسته ناشی از بار برشی خالص است. با جایگذاری ثوابت C_Q و γ_Q به دست آمده از رابطه (a-21) و (b-22) در روابط (e-16) تا (h-16)، نیروی برشی و منته‌های نیرو و گشتاور در عدسی کروی و در بارگذاری نیروی برشی خالص به دست خواهند آمد. جواب نهایی جابجایی، چرخش، نیروی برشی و منته‌های نیرو و گشتاور حاصل برهم نهش حالت‌های اعمال گشتاور خالص و نیروی برشی خالص است. جابجایی غشایی شعاعی ناشی از فشار داخلی برای کره در تقاطع عدسی و استوانه ($\psi = 0$) با استفاده از رابطه (c-16) مطابق با رابطه (23) به دست خواهد آمد.

$$\omega_{ms} = R \sin \phi \varepsilon_{\theta ms} = \frac{R \sin \alpha \left(N_{\theta ms} - \left(\frac{A_{12} N_{\phi ms}}{A_{11}} \right) \right)}{A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11})} = \frac{p R^2 \sin \alpha}{2(A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))} \left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) \quad (23)$$

ω_{ms} جابجایی غشایی عمود بر پوسته، $\varepsilon_{\theta ms}$ کرنش غشایی در راستای محیطی، $N_{\theta ms}$ منته نیروی غشایی در راستای محیطی و $N_{\phi ms}$ منته نیروی غشایی در راستای نصف‌النهاری در عدسی کروی ناشی از فشار داخلی هستند.

2-3- استفاده از معادلات حاکم بر استوانه کامپوزیتی متقارن محوری [15]
در این بخش از معادلات حاکم در پوسته استوانه کامپوزیتی متقارن محوری استفاده می‌شود. این معادلات در روابط (a-24) تا (f-24) ارائه شده‌اند [15].

$$\omega_{bc} = \frac{-e^{-\beta x}}{2\beta^3 D_{11}} (\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x) \quad (a-24)$$

$$V_{bc} = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D_{11}} (2\beta M_0 \cos \beta x + Q_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)) \quad (b-24)$$

$$N_{\theta bc} = \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \frac{e^{-\beta x}}{2R\beta^3 D_{11}} (\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x) \quad (c-24)$$

$$M_{x bc} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta} (\beta M_0 (\sin \beta x + \cos \beta x) + Q_0 \sin \beta x) \quad (d-24)$$

$$M_{\theta bc} = \frac{D_{12} e^{-\beta x}}{D_{11} \beta} (\beta M_0 (\sin \beta x + \cos \beta x) + Q_0 \sin \beta x) \quad (e-24)$$

$$Q_{x bc} = e^{-\beta x} (Q_0 (\cos \beta x - \sin \beta x) - 2\beta M_0 \sin \beta x) \quad (f-24)$$

$$\omega_{mc} = \frac{p R^2}{2(A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))} \left(2 - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) \quad (g-24)$$

ω_{bc} جابجایی در راستای عمود بر پوسته ناشی از بار خمشی، V_{bc} چرخش نصف‌النهاری ناشی از بارهای خمشی، $N_{\theta bc}$ منته نیروی محیطی، $M_{x bc}$ منته گشتاور طولی، $M_{\theta bc}$ منته گشتاور محیطی ناشی از بار خمشی، $Q_{x bc}$ منته نیروی برشی طولی ناشی از بارهای خمشی، ω_{mc} جابجایی در راستای عمود بر پوسته در اثر فشار داخلی، Q_0 و M_0 منته‌های نیروی برشی و گشتاور خمشی در تقاطع دو پوسته هستند.

$M_{\phi bsm}$ منته گشتاور نصف‌النهاری در اثر بار خمشی گشتاور و $N_{\phi bsm}$ منته نیروی نصف‌النهاری در اثر بار خمشی گشتاور هستند. با استفاده از روابط (a-17) و (b-17)، ثوابت C_M و γ_M مطابق با روابط (a-18) و (b-18)، به دست خواهند آمد.

$$\gamma_M = 0 \quad (a-18)$$

$$C_M = \frac{R M_1 (A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))}{2 D_{11} \lambda^3} \quad (b-18)$$

برای حالت اعمال گشتاور خالص و با استفاده از روابط (c-16)، (d-16)، (a-18) و (b-18)، در $\psi = 0$ و $\phi = \alpha$ ، چرخش و جابجایی عمود بر پوسته مطابق با روابط (a-19) و (b-19) به دست خواهند آمد.

$$V_{bsM} = \frac{R M_1}{D_{11} \lambda} \quad (a-19)$$

$$\omega_{bsM} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2 D_{11} \lambda^2} M_1 \quad (b-19)$$

V_{bsM} چرخش ناشی از بار خمشی خالص و ω_{bsM} جابجایی عمود بر پوسته ناشی از بار خمشی خالص است. با جایگذاری ثوابت C_M و γ_M به دست آمده از روابط (a-18) و (b-18) در روابط (e-16) تا (h-16)، نیروی برشی و منته‌های نیرو و گشتاور در عدسی کروی و در بارگذاری گشتاور خالص به دست خواهند آمد. برای حالت اعمال نیروی برشی خالص، ثوابت به صورت C_Q و γ_Q تعریف و از روابط (a-20) و (b-20) به دست خواهند آمد.

$$(M_{\phi bsQ})_{\phi=\alpha, \psi=0} = \frac{4 D_{11} \lambda^3 C_Q \sin(\gamma_Q + \pi/4)}{\sqrt{2} R (A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))} = 0 \quad (a-20)$$

$$(N_{\phi bsQ})_{\phi=\alpha, \psi=0} = -\cot \alpha C_Q \sin \gamma_Q = -Q_1 \cos \alpha \quad (b-20)$$

$M_{\phi bsQ}$ منته گشتاور نصف‌النهاری در اثر بار برشی و $N_{\phi bsQ}$ منته نیروی نصف‌النهاری در اثر بار برشی هستند. با استفاده از روابط (a-20) و همچنین (b-20)، ثوابت C_Q و γ_Q مطابق با روابط (a-21) و (b-21) به دست خواهند آمد.

$$\gamma_Q = \frac{-\pi}{4} \quad (a-21)$$

$$C_Q = \frac{-2 Q_1 \sin \alpha}{\sqrt{2}} \quad (b-21)$$

برای بررسی حالت اعمال نیروی برشی خالص و همچنین با استفاده از روابط (c-16)، (d-16)، (a-21) و (b-21) در $\psi = 0$ و $\phi = \alpha$ ، چرخش و جابجایی عمود بر پوسته مطابق با روابط (a-22) و (b-22) به دست خواهند آمد.

$$V_{bsQ} = \frac{2 Q_1}{(A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))} \lambda^2 \sin \alpha \quad (a-22)$$

$$\omega_{bsQ} = \frac{-2 R \sin^2 \alpha}{(A_{22} - (A_{12}^2 / A_{11}))} \lambda Q_1 \quad (b-22)$$

$$\frac{D_{12} e^{-\beta x}}{D_{11} \beta} \frac{-pR^2 \sin \beta x}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11})}$$

$$N_{\theta tc} = N_{\theta bc} + N_{\theta mc} = \left(\left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) \frac{e^{-\beta x}}{2R\beta^3 D_{11}} \times \frac{-pR^2 \cos \beta x}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11})} \right) + pR \quad (d-28)$$

$$N_{x tc} = N_{x bc} + N_{x mc} = \frac{pR}{2} \quad (e-28)$$

$$M_{x \theta tc} = N_{x \theta tc} = 0 \quad (f-28)$$

ω_{tc} جابجایی کل عمود بر پوسته، $M_{x tc}$ منته گشتاور کل در راستای طولی، $M_{x mc}$ منته گشتاور طولی ناشی از بار غشایی، $M_{\theta tc}$ منته گشتاور کل در راستای محیطی، $M_{\theta mc}$ منته گشتاور محیطی ناشی از بار غشایی، $N_{\theta tc}$ منته نیروی کل در راستای محیطی، $N_{x tc}$ منته نیروی کل در راستای طولی، $N_{x mc}$ منته نیروی غشایی در راستای طولی، $M_{x \theta tc}$ و $N_{x \theta tc}$ منته‌های گشتاور و نیروی برشی کل هستند. ماتریس‌های انحنا و کرنش سطح میانی در استوانه کامپوزیتی با فرض تقارن محوری با استفاده از روابط (b-28) تا (f-28) و روابط (a-29) و (b-29) به دست خواهند آمد [32].

$$\begin{bmatrix} N_{x tc} \\ N_{\theta tc} \\ N_{x \theta tc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{16} \\ A_{12} A_{22} A_{26} \\ A_{16} A_{26} A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xc} \\ \dot{\epsilon}_{\theta c} \\ 2\dot{\epsilon}_{x\theta c} \end{bmatrix} \quad (a-29)$$

$$\begin{bmatrix} M_{x tc} \\ M_{\theta tc} \\ M_{x \theta tc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} D_{12} D_{16} \\ D_{12} D_{22} D_{26} \\ D_{16} D_{26} D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{k}_{xc} \\ \dot{k}_{\theta c} \\ \dot{k}_{x\theta c} \end{bmatrix} \quad (b-29)$$

$[k]_c$ و $[\dot{\epsilon}]_c$ ماتریس‌های انحنا و کرنش سطح میانی در پوسته استوانه‌ای هستند. تنش‌های صفحه‌ای استوانه در راستاهای طولی و محیطی برای لایه k ام مطابق با رابطه (30) به دست می‌آیند [32].

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xc} \\ \sigma_{\theta c} \\ \tau_{x\theta c} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xc} \\ \dot{\epsilon}_{\theta c} \\ 2\dot{\epsilon}_{x\theta c} \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} \dot{k}_{xc} \\ \dot{k}_{\theta c} \\ \dot{k}_{x\theta c} \end{bmatrix} \right\} \quad (30)$$

Z فاصله از سطح میانی و $[\bar{Q}_{ij}]_k$ ماتریس سفتی می‌باشد.

6-3- تنش‌های طولی و محیطی در هر لایه از عدسی کروی

جابجایی و منته‌های نیرویی و گشتاور در عدسی کروی کامپوزیتی در $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و همچنین با استفاده از روابط (e-16) تا (h-16)، (a-18)، (b-18)، (b-19)، (a-21)، (b-21)، (b-22)، (c-23)، (a-27) و (b-27) از روابط (a-31) تا (f-31) استخراج می‌شوند.

$$\omega_{ts} = \omega_{ms} + \omega_{bs} = \omega_{ms} + \omega_{bsQ} + \omega_{bsM} = \omega_{ms} + \omega_{bsQ} = \frac{pR^2}{2(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) - \frac{\lambda e^{-\lambda \psi} 2pR^3 \sin(\pi/2 - \psi)}{(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) \sin(\lambda \psi - \pi/2)} \times \frac{1}{(4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11}))} \quad (a-31)$$

3-3- اعمال روابط سازگاری جابجایی و چرخش در تقاطع دو پوسته [31]

با توجه به شکل 1 و با استفاده از اصل تعادل، نیروها و گشتاورها مطابق با روابط (a-25) و (b-25) در تقاطع به دست خواهند آمد.

$$\sum M = 0 \longrightarrow M_0 = M_1 \quad (a-25)$$

$$\sum Q = 0 \longrightarrow Q_0 = Q_1 \quad (b-25)$$

برای به دست آوردن نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی در تقاطع دو پوسته از روابط سازگاری جابجایی و چرخش باید استفاده نمود. این روابط در محل تقاطع عدسی کروی و استوانه مطابق با روابط (a-26) و (b-26) است [31].

$$\omega_{ms} + \omega_{bsQ} + \omega_{bsM} = \omega_{mc} + \omega_{bc} \quad (a-26)$$

$$V_{ms} + V_{bsQ} + V_{bsM} = V_{mc} + V_{bc} \quad (b-26)$$

V_{ms} چرخش ناشی از بار غشایی در پوسته کروی و V_{mc} چرخش ناشی از بار غشایی در پوسته استوانه‌ای است.

4-3- استخراج نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی در تقاطع دو پوسته

در مرور منابع بخش 1 بیان شد که نیروهای به دست آمده در تقاطع دو پوسته با فرض جایگزینی پوسته عدسی با پوسته استوانه‌ای به دست آمده‌اند. اما در این بخش نیروی برشی و گشتاور خمشی بدون این ساده‌سازی و در تقاطع دو پوسته کروی و استوانه‌ای به دست خواهند آمد. در ادامه این بخش با جایگذاری روابط (a-19)، (b-19)، (a-22)، (b-22)، (c-23)، (a-24)، (b-24) و (g-24) در روابط (a-26) و (b-26) در $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $x = 0$ و همچنین با استفاده از روابط (a-26) و (b-26)، نیروی برشی و گشتاور خمشی در تقاطع دو پوسته از روابط (a-27) و (b-27) به دست خواهند آمد.

$$Q_1 = \frac{-pR^2}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11})} \quad (a-27)$$

$$M_1 = 0 \quad (b-27)$$

5-3- تنش‌های طولی و محیطی در هر لایه از استوانه

جابجایی و منته‌های نیرو و گشتاور کل در استوانه کامپوزیتی که حاصل جمع مؤلفه‌های غشایی و خمشی است در زاویه $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و با استفاده از روابط (a-24)، (c-24)، (d-24)، (e-24)، (g-24)، (a-25)، (b-25)، (a-27) و (b-27) مطابق روابط (a-28) تا (f-28) استخراج می‌شوند.

$$\omega_{tc} = \omega_{mc} + \omega_{bc} = \frac{pR^2}{2(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \left(2 - \frac{A_{12}}{A_{11}} \right) + \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D_{11}} \frac{pR^2 \cos \beta x}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11})} \quad (a-28)$$

$$M_{x tc} = M_{x mc} + M_{x bc} = M_{x bc} = D_{11} \frac{d^2 \omega_{bc}}{dx^2} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta} \frac{-pR^2 \sin \beta x}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11})) (1/\beta^3 D_{11})} \quad (b-28)$$

$$M_{\theta tc} = M_{\theta mc} + M_{\theta bc} = M_{\theta bc} = D_{12} \frac{d^2 \omega_{tc}}{dx^2} \quad (c-28)$$

در بخش 3 با نتایج حل عددی در بخش 4 مقایسه گردیده است. در ادامه حل عددی بیان می‌گردد.

4- حل عددی

حل عددی با استفاده از روش اجزاء محدود و بهره‌گیری از نرم‌افزار انسیس انجام شده است. در ادامه مراحل این حل عددی شرح داده خواهد شد.

4-1- خواص مکانیکی

کامپوزیت استفاده شده کربن/اپوکسی است و خواص تک لایه آن در جدول 1 آورده شده است.

جدول 1 خواص مکانیکی تک لایه کامپوزیتی کربن / اپوکسی

Table. 1 Mechanical properties of carbon/epoxy composite layer [33]

مقدار	واحد	خواص مکانیکی
10 , 130	$E_{22}, E_{11}(GPa)$	مدول کششی
4.5	$G_{12}(GPa)$	مدول برشی
0.28	ν_{12}	نسبت پواسون

4-2- مشخصات هندسی مخزن و بارگذاری

مشخصات هندسی مخزن و بار اعمالی در جدول 2 آورده شده است.

جدول 2 مشخصات هندسی و بارگذاری اعمالی به مخزن کامپوزیتی

Table. 2 Geometric specifications and loading applied to composite vessel

مقدار	واحد	مشخصات هندسی و بارگذاری مخزن
0.6	$l(m)$	طول پوسته استوانه
0.25	$R(m)$	شعاع مخزن
40	$p(MPa)$	فشار مخزن
0.27	$t(mm)$	ضخامت تک لایه

4-3- تعداد و زوایای لایه‌چینی

در این مقاله سه نوع لایه‌چینی $(\pm 15)_s$ ، $(\pm 30)_s$ و $(\pm 55)_s$ بررسی شده است. در هر کدام از این لایه‌چینی‌ها از 4 لایه به صورت متقارن نسبت به سطح میانی استفاده شده است. چینش لایه‌ها و زوایای لایه‌چینی $(\pm 15)_s$ در شکل 3 نشان داده شده است.

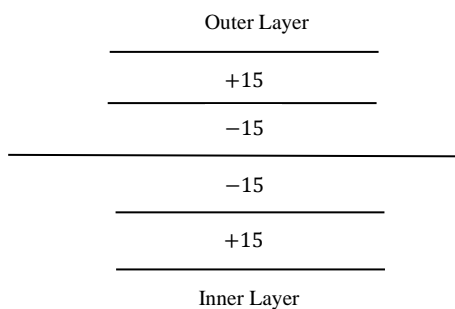


Fig. 3 Layering arrangement and angles $(\pm 15)_s$

شکل 3 چینش و زوایای لایه‌چینی $(\pm 15)_s$

در مدل‌سازی، لایه‌ها به هم چسبیده‌اند و روی هم سر نمی‌خورند.

$$M_{\phi tbs} = M_{\phi bsM} + M_{\phi bsQ} = M_{\phi bsQ} = \frac{4pRD_{11}\lambda^3 e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi}{(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \times \frac{1}{(4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))(\frac{1}{\beta^3 D_{11}}))} \quad (b-31)$$

$$M_{\theta tbs} = M_{\theta bsM} + M_{\theta bsQ} = M_{\theta bsQ} = \frac{4pRD_{12}\lambda^3 e^{-\lambda\psi} \sin \lambda\psi}{(A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))} \times \frac{1}{(4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))(\frac{1}{\beta^3 D_{11}}))} \quad (c-31)$$

$$N_{\theta ts} = N_{\theta bs} + N_{\theta ms} = N_{\theta bsQ} + N_{\theta bsM} + N_{\theta ms} = N_{\theta bsQ} + N_{\theta ms} = \frac{-2p\lambda R^2 e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi - \pi/2)}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))(\frac{1}{\beta^3 D_{11}})} + \frac{pR}{2} \quad (d-31)$$

$$N_{\phi ts} = N_{\phi bs} + N_{\phi ms} = N_{\phi bsQ} + N_{\phi bsM} + N_{\phi ms} = N_{\phi bsQ} + N_{\phi ms} = \frac{-\sqrt{2} \cot(\pi/2 - \psi) p R^2 e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi - \pi/4)}{4R\lambda + (A_{22} - (A_{12}^2/A_{11}))(\frac{1}{\beta^3 D_{11}})} + \frac{pR}{2} \quad (e-31)$$

$$M_{\phi \theta ts} = N_{\phi \theta ts} = 0 \quad (f-31)$$

ω_{ts} جابجایی کل عمود بر پوسته، $M_{\phi tbs}$ منته گشتاور کل در راستای نصف‌النهاری، $M_{\theta tbs}$ منته گشتاور کل در راستای محیطی، $M_{\phi bsM}$ منته گشتاور محیطی در اثر بار خمشی گشتاور، $M_{\theta bsQ}$ منته گشتاور محیطی در اثر بار برشی، $N_{\theta ts}$ منته نیروی کل در راستای محیطی، $N_{\theta bsM}$ منته نیروی محیطی در اثر بار خمشی گشتاور، $N_{\theta bsQ}$ منته نیروی محیطی در اثر بار برشی، $N_{\phi tc}$ منته نیروی کل در راستای نصف‌النهاری، $M_{\phi \theta tc}$ و $N_{\phi \theta tc}$ منته‌های گشتاور و نیروی برشی کل هستند. ماتریس‌های انحنا و کرنش سطح میانی در عدسی کروی با فرض تقارن محوری با استفاده از روابط (b-31) تا (f-31) و همچنین (a-32) و (b-32) به دست خواهند آمد [32].

$$\begin{bmatrix} N_{\phi ts} \\ N_{\theta ts} \\ N_{\phi \theta ts} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\phi s} \\ \epsilon_{\theta s} \\ 2\epsilon_{\phi \theta s} \end{bmatrix} \quad (a-32)$$

$$\begin{bmatrix} M_{\phi ts} \\ M_{\theta ts} \\ M_{\phi \theta ts} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{\phi s} \\ \kappa_{\theta s} \\ \kappa_{\phi \theta s} \end{bmatrix} \quad (b-32)$$

$[\epsilon]_s$ و $[\kappa]_s$ ماتریس‌های انحنا و کرنش سطح میانی در پوسته کروی هستند. تنش‌های صفحه‌ای عدسی کروی در راستاهای نصف‌النهاری و محیطی برای لایه k ام مطابق با رابطه (33) به دست می‌آیند [32].

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\phi s} \\ \sigma_{\theta s} \\ \tau_{\phi \theta s} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_{\phi s} \\ \epsilon_{\theta s} \\ 2\epsilon_{\phi \theta s} \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} \kappa_{\phi s} \\ \kappa_{\theta s} \\ \kappa_{\phi \theta s} \end{bmatrix} \right\} \quad (33)$$

در این مقاله به دلیل مقادیر بالاتر و اهمیت بیشتر تنش‌های نرمال درون صفحه نسبت به تنش برشی درون صفحه، فقط تنش‌های نرمال به دست آمده‌اند. روابط تحلیلی بیان شده در قالب کد متلب نوشته شد و نتایج حاصل از کد متلب

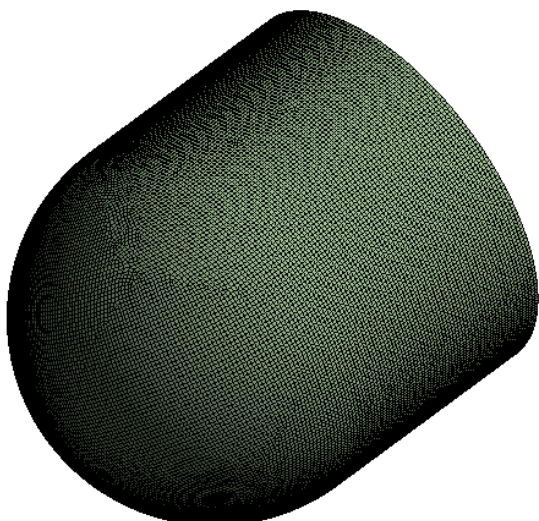


Fig. 5 Sector meshing using shell element

شکل 5 شبکه‌بندی با استفاده از المان پوسته

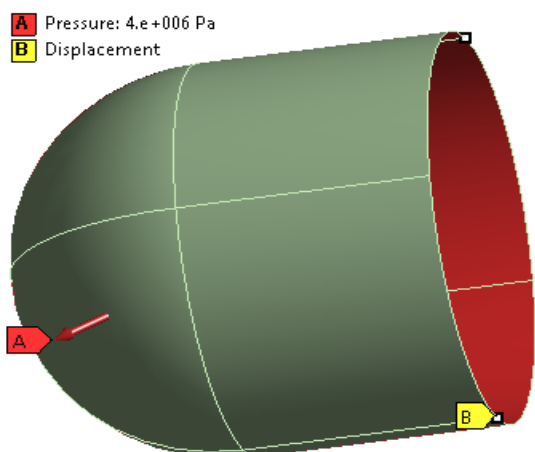


Fig. 6 Boundary conditions and internal pressure loading

شکل 6 شرایط مرزی و بارگذاری فشار داخلی

7-4- همگرایی شبکه

به منظور اطمینان از نتایج حل عددی حساسیت نتایج به تعداد شبکه بررسی شده است. این همگرایی شبکه برای بیشینه تنش طولی روی پوسته استوانه‌ای در سطح پائینی لایه +15 درجه داخلی در شکل 7 آورده شده است.

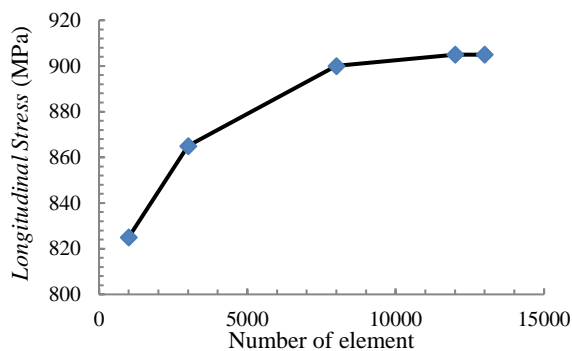


Fig. 7 Convergence of the finite element result of the maximum longitudinal stress on the cylindrical shell

شکل 7 همگرایی نتایج اجزاء محدود بیشینه تنش طولی روی پوسته استوانه‌ای در سطح پائینی لایه +15 داخلی

4-4- مدل‌سازی

با توجه به متقارن بودن هندسه، خواص مواد، بارگذاری و لایه‌چینی متقارن نسبت به راستای طولی، نصف مخزن در راستای طولی مدل شده است. مسیری که نتایج حل عددی از آن استخراج شده‌اند از نقطه 1 که مبدأ مختصات روی آن واقع شده است به نقطه 2 که مرکز کره روی آن واقع شده است امتداد دارد این مسیر در پوسته استوانه‌ای در راستای طولی و در پوسته کروی در راستای نصف‌النهاری است. مدل و مسیر معرفی شده در شکل 4 نشان داده شده است.

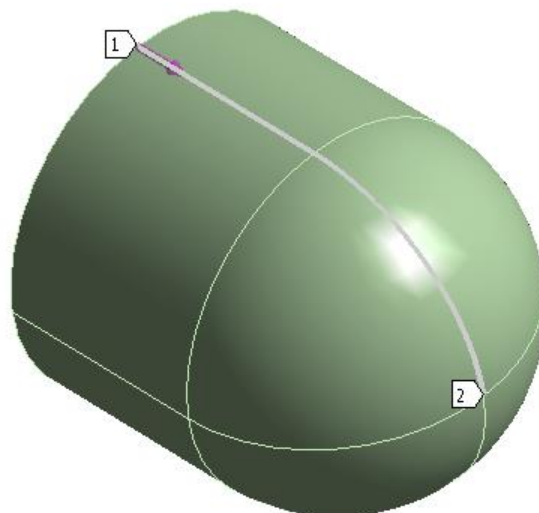


Fig. 4 The chosen path of presenting analytical and numerical results

شکل 4 مسیر انتخابی ارائه نتایج تحلیلی و عددی

همان‌گونه که در شکل 4 مشخص است مخزن دارای سوراخ به منظور اتصال فلنج نیست. در مخازن گاز یک طرف مخزن تحت فشار بسته است و در طرف دیگر که مخصوص تزریق گاز است از بوشی استفاده می‌شود که گشودگی این بوش نسبت به قطر مخزن مقدار کوچکی است و در این مقاله به دلیل کوچک بودن قطر بوش، فرضی ساده‌سازی انجام شده و از آن صرف‌نظر شده است. با صرف‌نظر از این سوراخ در شکل 4 و در نقطه شماره 2 پیچش به صورت قطبی است. همچنین روی پوسته استوانه‌ای و عدسی کروی از پیچش ژئودزیک استفاده شده است در این نوع پیچش، الیاف در کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه پیچیده می‌شوند و سرخوردگی وجود ندارد. در پیچش ژئودزیک تغییرات کرنش در راستای الیاف وجود ندارد و در نتیجه تنش در راستای الیاف ثابت باقی می‌ماند. هندسه عدسی، تغییر زاویه الیاف و توزیع ضخامت در بخش استوانه و عدسی با استفاده از روابط مرجع [17] به دست آمده و روابط حاصله کدنویسی شده و با استفاده از نرم‌افزار طراحی مخزن کامپوزیتی ProWind، مدل اجزاء محدود به عنوان ورودی به محیط ACP(pre) انسیس وارد می‌شود.

5-4- شبکه‌بندی

المان استفاده شده در حل عددی مخزن جدار نازک کامپوزیتی، shell 181 است این المان دارای 4 گره و هر گره دارای 6 درجه آزادی است. شبکه‌بندی با استفاده از المان پوسته در شکل 5 نشان داده شده است.

6-4- شرایط مرزی و اعمال بارگذاری

شرایط مرزی در راستای طولی از نوع متقارن است در این شرط مرزی جابجایی‌های عمود بر صفحه، صفر در نظر گرفته شده است. بار اعمال شده نیز به صورت فشار داخلی است. نحوه اعمال شرایط مرزی و بارگذاری فشار داخلی در شکل 6 نشان داده شده است.

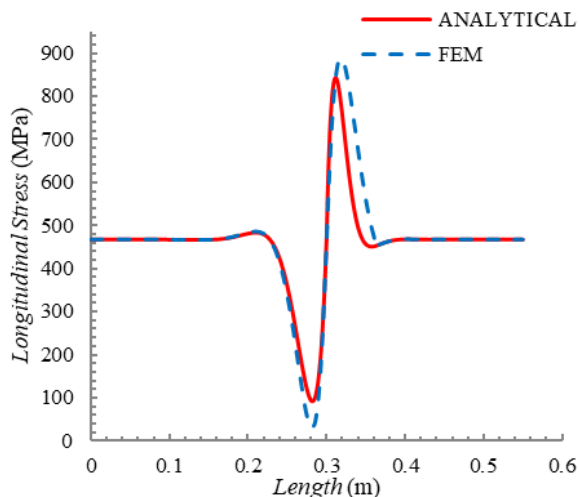


Fig. 10 Longitudinal stress on the upper surface +15 outside

شکل 10 تنش طولی در سطح بالایی +15 بیرونی

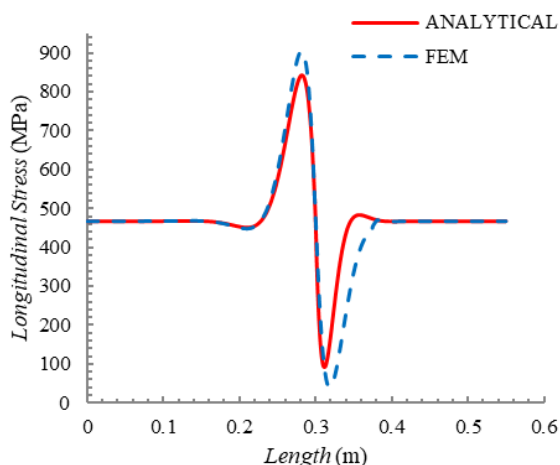


Fig. 11 Longitudinal stress at the lower surface +15 internal

شکل 11 تنش طولی در سطح پایینی +15 داخلی

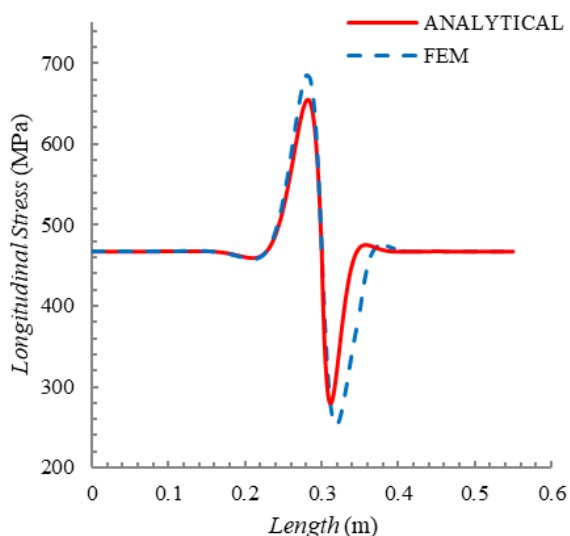


Fig. 12 Longitudinal stress on the upper surface +15 internal

شکل 12 تنش طولی در سطح بالایی +15 داخلی

8-4- نتایج
حل عددی برای لایه‌چینی‌های $S_{15}(\pm 15)$ ، $S_{30}(\pm 30)$ و $S_{55}(\pm 55)$ انجام شده است و نتایج تنش‌های طولی و محیطی در لایه‌های مختلف به دست آمده است. در این بخش به عنوان نمونه نتایج تحلیل تنش محیطی در سطح بالایی لایه +15 بیرونی در شکل 8 نشان داده شده است.

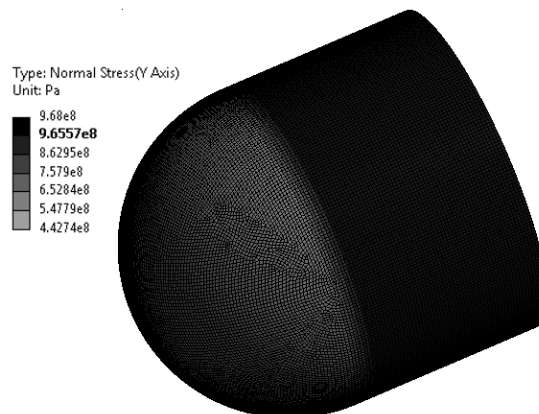


Fig. 8 Circumferential stress distribution on the upper surface of the outer +15 layer

شکل 8 توزیع تنش محیطی در سطح بالایی لایه +15 بیرونی

در ادامه نتایج حل تحلیلی با استفاده از کد متلب و حل عددی با استفاده از نرم‌افزار انسیس با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

5- تحلیل نتایج

در این بخش به منظور صحت سنجی نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، نتایج حل تحلیلی نوشته شده در قالب کد متلب با نتایج به دست آمده از حل عددی به دست آمده از نرم‌افزار اجزاء محدود انسیس برای لایه‌چینی‌های $S_{15}(\pm 15)$ ، $S_{30}(\pm 30)$ و $S_{55}(\pm 55)$ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج شامل تنش‌های طولی و محیطی در راستای مسیر نشان داده شده در شکل 4 هستند.

1-5- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی در لایه‌چینی متقارن $S_{15}(\pm 15)$

در این قسمت تنش‌های طولی و محیطی برای لایه‌چینی متقارن $S_{15}(\pm 15)$ درجه به دست آمده از حل‌های تحلیلی و عددی در شکل‌های 9 تا 15، با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

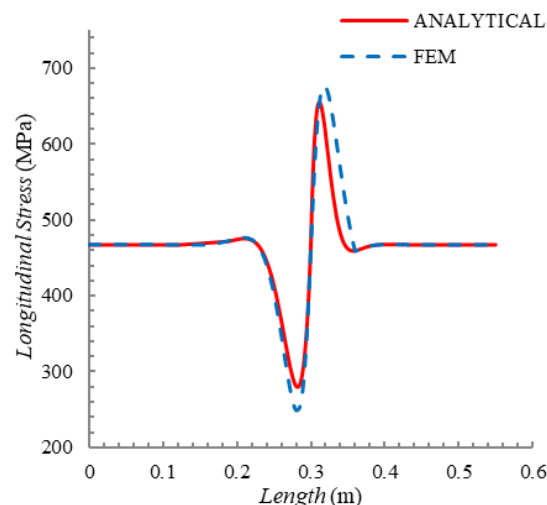


Fig. 9 Longitudinal stress at the lower surface +15 outside

شکل 9 تنش طولی در سطح پایینی +15 بیرونی

همان‌طور که در شکل‌های 9 تا 14 قابل مشاهده است در ناحیه اتصال پوسته کروی و پوسته استوانه‌ای علاوه بر تنش‌های غشایی، به دلیل ناهمگونی هندسی تنش‌های خمشی نیز وجود دارند. وجود این تنش‌ها موجب افزایش تنش‌های محیطی و طولی در موقعیت اتصال می‌شوند. مقادیر تنش‌های طولی دور از موقعیت اتصال دو پوسته حالت غشایی دارند و این مقادیر تنش در پوسته‌های استوانه‌ای و کروی با یکدیگر برابر هستند و این به دلیل عدم تابعیت تنش‌های غشایی نسبت به فاصله از سطح میانی است. همچنین مقادیر تنش‌های محیطی دور از موقعیت اتصال دو پوسته نیز حالت غشایی دارند و این مقادیر تنش در پوسته استوانه‌ای 2 برابر تنش غشایی محیطی در پوسته کروی است و این با تئوری پوسته‌های جدار نازک تحت فشار مطابقت دارد. همان‌طور که در شکل 15 مشخص است مقادیر تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پایینی +15 درجه داخلی و سطح بالایی +15 درجه بیرونی از نظر علامت، قرینه یکدیگر هستند و این به دلیل متقارن بودن این لایه‌ها نسبت به سطح میانی است. نسبت تنش‌ها در بیشینه مقدار به تنش غشایی به عنوان ضریب تمرکز تنش معرفی می‌شود. این ضریب در لایه‌هایی که دارای زاویه متفاوت لایه‌چینی یا فواصل مختلف از سطح میانی هستند، مقادیر متفاوتی را به خود تخصیص می‌دهد. ضریب تمرکز تنش‌های طولی و محیطی در دورترین لایه‌ها که بیشترین مقادیر را به خود تخصیص می‌دهند برای لایه‌چینی $(\pm 15)_s$ در حل‌های تحلیلی و عددی و همچنین موقعیت وقوع تنش‌های بیشینه در جدول 3 ارائه شده است.

جدول 3 تنش‌های طولی و محیطی بیشینه در لایه‌چینی $(\pm 15)_s$

Table 3 Maximum longitudinal and circumferential stresses in layering $(\pm 15)_s$

فاصله طولی از موقعیت اتصال (mm)	موقعیت	نوع تنش	ضریب تمرکز تنش	
			تحلیلی	عددی
18	کره	طولی	+15 بیرونی	1.8
			+15 داخلی	1.9
20	استوانه	محیطی	+15 بیرونی	1.01
			+15 داخلی	1.03
45	استوانه	محیطی	+15 داخلی	1.01

همان‌گونه که از جدول 3 مشخص است ضریب تمرکز تنش در تنش طولی و در حل تحلیلی 1.8 است و این بدان معناست که در صورت استفاده تنها از تئوری غشایی و بدون در نظر گرفتن اثرات خمشی، در طراحی مخزن نتایج 80% خطا دارند و این نشان از اهمیت بالای استفاده از تئوری خمشی است. یکسان بودن ضریب تمرکز تنش در لایه‌های +15 بیرونی و +15 داخلی، به دلیل یکسان بودن فاصله از سطح میانی و یکسان بودن زوایا است. مقادیر بیشینه تنش طولی در لایه داخلی در پوسته استوانه‌ای و در لایه بیرونی در پوسته کروی اتفاق خواهد افتاد و این نشان از ضرورت به دست آوردن تنش‌ها در پوسته کروی است. فاصله طولی از موقعیت اتصال پوسته‌های کروی و استوانه‌ای در حل‌های تحلیلی و عددی نیز تطابق خوبی با یکدیگر دارند. با توجه به نتایج جدول 3 مشخص است تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 5% است. این درصد اختلاف به دلیل صرف نظر کردن از Q_ϕ و نسبت $\frac{dQ_\phi}{d\phi}$ به $\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}$ است.

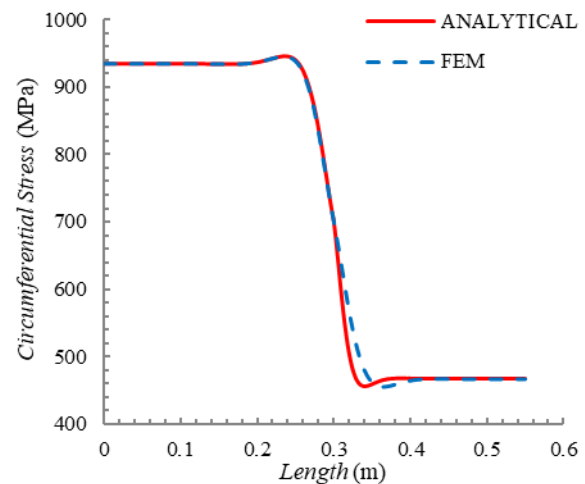


Fig. 13 Circumferential stress at the upper level +15 outside

شکل 13 تنش محیطی در سطح بالایی +15 بیرونی

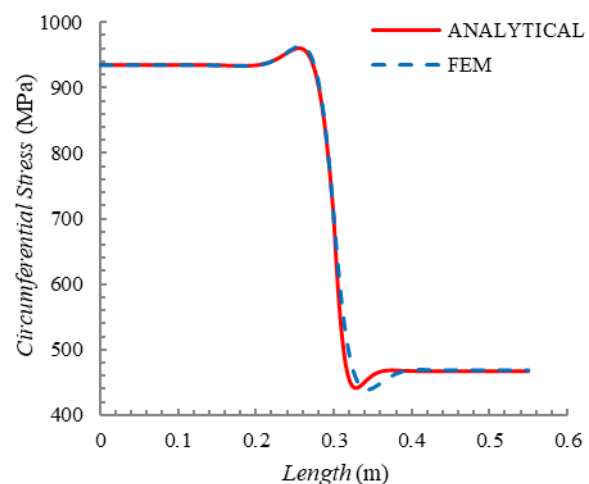


Fig. 14 Circumferential stress at the lower surface +15 internal

شکل 14 تنش محیطی در سطح پایینی +15 داخلی

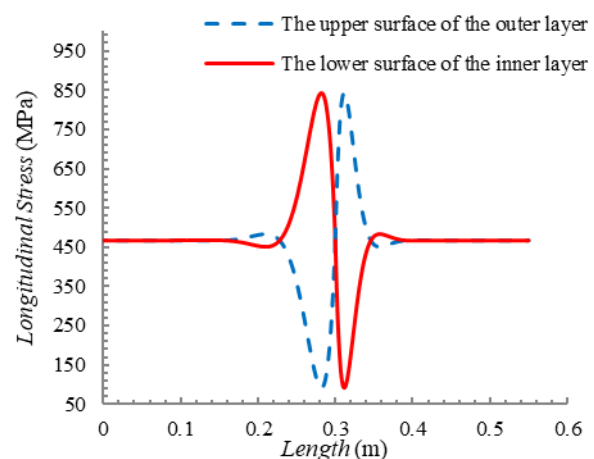


Fig. 15 Comparison of the longitudinal stresses obtained from the analytical solution on the inner +15 lower surface and the outer +15 upper surface

شکل 15 مقایسه تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پایینی +15 داخلی و سطح بالایی +15 بیرونی

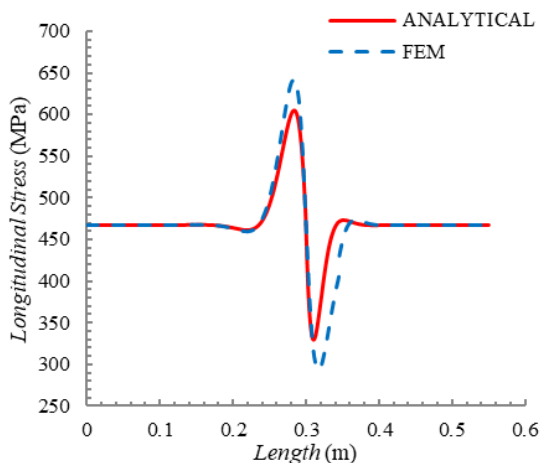


Fig. 19 Longitudinal stress on the upper surface +30 internal

شکل 19 تنش طولی در سطح بالایی +30 داخلی

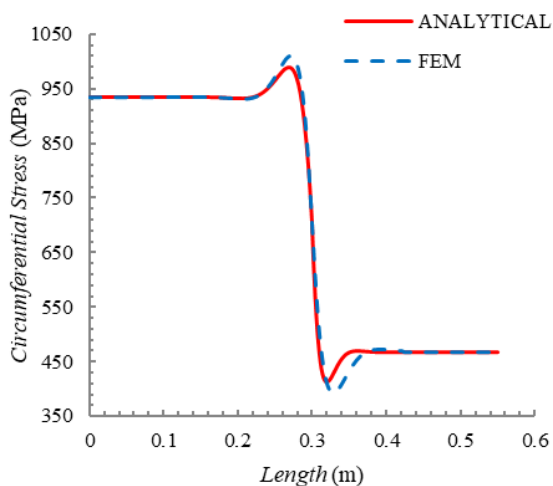


Fig. 20 Circumferential stress at the lower surface +30 internal

شکل 20 تنش محیطی در سطح پائینی +30 داخلی

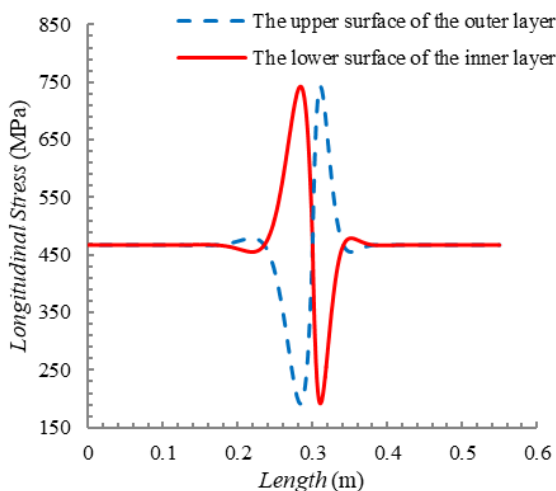


Fig. 21 Comparison of the longitudinal stresses obtained from the analytical solution on the inner +30 lower surface and the outer +30 upper surface

شکل 21 مقایسه تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پائینی داخلی و سطح بالایی +30 بیرونی

2-5- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی در لایه چینی متقارن (± 30)

در این بخش تنش‌های طولی و محیطی برای لایه چینی متقارن (± 30) درجه به دست آمده از حل‌های تحلیلی و عددی در شکل‌های 16 تا 21، با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

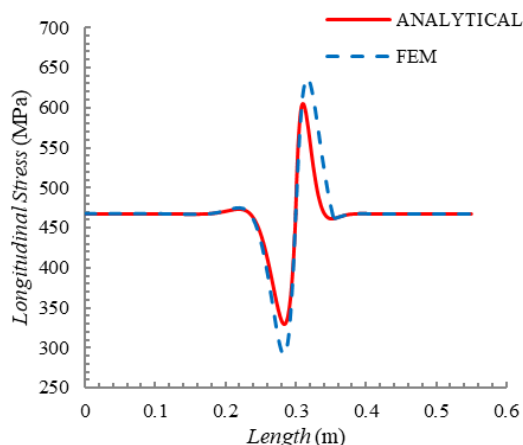


Fig. 16 Longitudinal stress at the lower surface +30 outside

شکل 16 تنش طولی در سطح پائینی +30 بیرونی

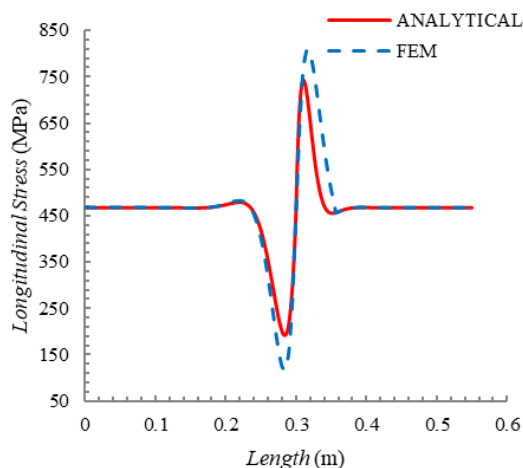


Fig. 17 Longitudinal stress on the upper surface +30 outside

شکل 17 تنش طولی در سطح بالایی +30 بیرونی

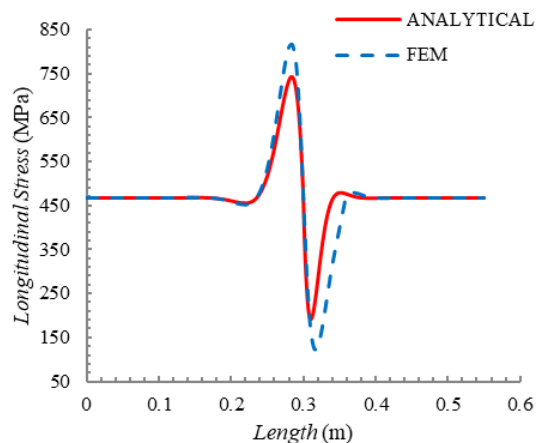


Fig. 18 Longitudinal stress at the lower surface +30 internal

شکل 18 تنش طولی در سطح پائینی +30 داخلی

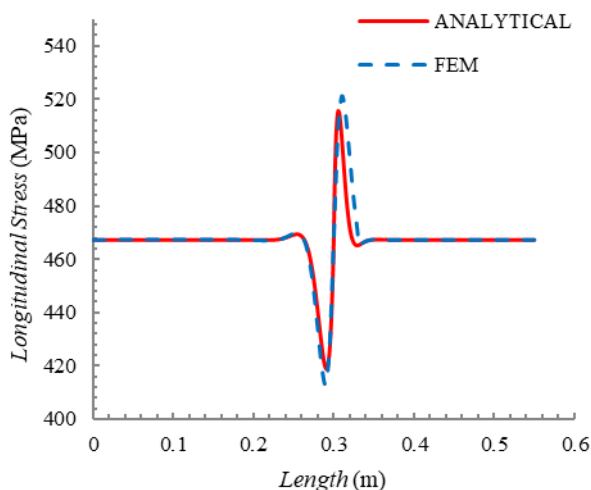


Fig. 22 Longitudinal stress at the lower surface +55 outside

شکل 22 تنش طولی در سطح پائینی +55 بیرونی

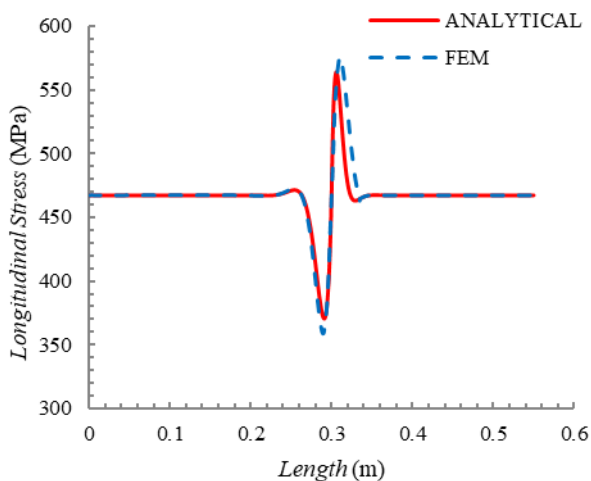


Fig. 23 Longitudinal stress on the upper surface +55 outside

شکل 23 تنش طولی در سطح بالایی +55 بیرونی

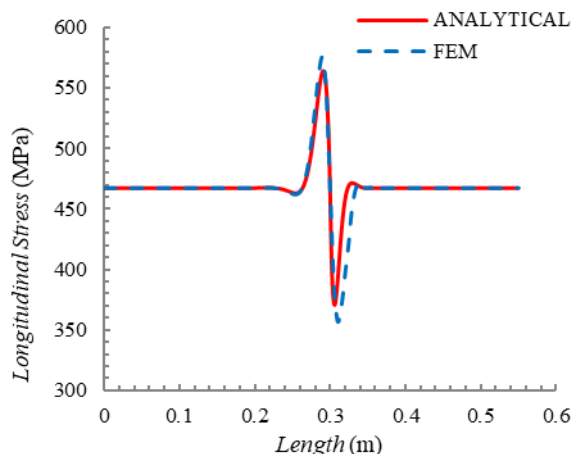


Fig. 24 Longitudinal stress at the lower surface +55 internal

شکل 24 تنش طولی در سطح پائینی +55 داخلی

همان‌گونه که از شکل‌های 16 تا 20 قابل مشاهده است برابر بودن تنش‌های غشایی طولی در استوانه و پوسته کروی با یکدیگر و 2 برابر بودن تنش‌های غشایی محیطی در استوانه نسبت به پوسته کروی، در لایه چینی_s (± 30) نیز وجود دارد. همچنین در این زاویه لایه چینی نیز به دلیل ناهمگونی هندسی در ناحیه اتصال عدسی کروی و پوسته استوانه‌ای علاوه بر تنش‌های غشایی، تنش‌های خمشی نیز قابل رؤیت است. همان‌طور که در شکل 21 مشخص است مقادیر تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پایینی +30 درجه داخلی و سطح بالایی +30 درجه بیرونی از نظر علامت، قرینه یکدیگر هستند. ضریب تمرکز تنش‌های طولی و محیطی در دورترین لایه‌ها که بیشترین مقادیر را به خود تخصیص می‌دهند برای لایه چینی_s (± 30) در حل‌های تحلیلی و عددی و همچنین موقعیت وقوع تنش‌های بیشینه در جدول 4 ارائه شده است.

جدول 4 تنش‌های طولی و محیطی بیشینه در لایه چینی_s (± 30)

Table. 4 Maximum longitudinal and circumferential stresses in layering (± 30)_s

فاصله طولی از موقعیت اتصال (mm)	موقعیت	نوع لایه	ضریب تمرکز تنش		نوع تنش
			عددی	تحلیلی	
15	11	کره بیرونی +30	1.75	1.58	طولی
16	17	استوانه داخلی +30	1.75	1.58	
65	65	استوانه بیرونی +30	1.08	1.01	محیطی
30	30	استوانه داخلی +30	1.08	1.01	

همان‌گونه که از جدول 4 مشخص است ضریب تمرکز تنش در تنش طولی و در حل تحلیلی 1.58 است و این نشان از خطای 58% در استفاده تنها از تئوری غشایی و بدون در نظر گرفتن اثرات خمشی است. ضریب تمرکز تنش در تنش‌های طولی نسبت به محیطی 57% بیشتر است. مقادیر بیشینه تنش طولی در لایه داخلی در پوسته استوانه‌ای و در لایه بیرونی در بخش کروی اتفاق خواهد افتاد و این نشان از ضرورت به دست آوردن تنش‌ها در پوسته کروی است. همچنین مقادیر بیشینه تنش محیطی در لایه‌های داخلی و بیرونی در بخش استوانه‌ای اتفاق خواهد افتاد. فاصله طولی از موقعیت اتصال پوسته‌های کروی و استوانه‌ای در حل‌های تحلیلی و عددی نیز تطابق خوبی با یکدیگر دارند. با توجه به نتایج جدول 4 مشخص است تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 10% است. این درصد اختلاف به دلیل صرف نظر کردن از Q_ϕ و $\frac{dQ_\phi}{d\phi}$ نسبت به $\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}$ است.

3-5- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی در لایه چینی متقارن_s (± 55)

در این بخش تنش‌های طولی و محیطی برای لایه چینی متقارن_s (± 55) درجه به دست آمده از حل‌های تحلیلی و عددی در شکل‌های 22 تا 27، با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

همان‌گونه که از شکل‌های 21 تا 26 قابل مشاهده است برابر بودن تنش‌های غشایی طولی در استوانه و پوسته کروی با یکدیگر و 2 برابر بودن تنش‌های غشایی محیطی در استوانه نسبت به پوسته کروی، در لایه‌چینی_s (+55) نیز وجود دارد. همچنین در این زاویه لایه‌چینی نیز به دلیل ناهمگونی هندسی در ناحیه اتصال عدسی کروی و پوسته استوانه‌ای علاوه بر تنش‌های غشایی، تنش‌های خمشی نیز قابل رؤیت است. همان‌طور که در شکل 27 مشخص است مقادیر تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پایینی +55 درجه داخلی و سطح بالایی +55 درجه بیرونی از نظر علامت، قرینه یکدیگر هستند. ضریب تمرکز تنش‌های طولی و محیطی در دورترین لایه‌ها که بیشترین مقادیر را به خود تخصیص می‌دهند برای لایه‌چینی_s (+55) در حل‌های تحلیلی و عددی و همچنین موقعیت وقوع تنش‌های بیشینه در جدول 5 ارائه شده است.

جدول 5 تنش‌های طولی و محیطی بیشینه در لایه‌چینی_s (+55)

Table. 5 Maximum longitudinal and circumferential stresses in layering (+55)_s

فاصله طولی از موقعیت اتصال (mm)	موقعیت	نوع لایه	ضریب تمرکز تنش		نوع تنش
			عددی	تحلیلی	
9	کره	+55 بیرونی	1.23	1.21	طولی
10	استوانه	+55 داخلی	1.23	1.21	
20	استوانه	+55 بیرونی	1.09	1.06	محیطی
16	استوانه	+55 داخلی	1.09	1.06	

همان‌گونه که از جدول 5 مشخص است ضریب تمرکز تنش در تنش طولی و در حل تحلیلی 1.21 است و این نشان از خطای 21% در استفاده تنها از تئوری غشایی و بدون در نظر گرفتن اثرات خمشی است. ضریب تمرکز تنش در تنش‌های طولی نسبت به محیطی 15% بیشتر است. مقادیر بیشینه تنش طولی در لایه داخلی در پوسته استوانه‌ای و در لایه بیرونی در بخش کروی اتفاق خواهد افتاد و این نشان از ضرورت به دست آوردن تنش‌ها در پوسته کروی است. همچنین مقادیر بیشینه تنش محیطی در لایه‌های داخلی و بیرونی در بخش استوانه‌ای اتفاق خواهد افتاد. فاصله طولی از موقعیت اتصال پوسته‌های کروی و استوانه‌ای در حل‌های تحلیلی و عددی نیز تطابق خوبی با یکدیگر دارند. با توجه به نتایج جدول 5 مشخص است تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 3% است. این درصد اختلاف به دلیل صرف نظر کردن از Q_ϕ و نسبت $\frac{dQ_\phi}{d\phi}$ به $\frac{d^2Q_\phi}{d\phi^2}$ است.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل تحلیلی به منظور به دست آوردن تنش‌های طولی و محیطی در پوسته کروی پوسته جدار نازک کامپوزیتی متقارن محوری با لایه‌چینی‌های متقارن_s (+15)،_s (+30) و_s (+55) تحت فشار داخلی و با در نظر گرفتن ناپویستگی‌های تنش در موقعیت اتصال عدسی کروی و پوسته استوانه‌ای ارائه شده است. در این حل تحلیلی با استفاده از روابط تعادل، کرنش-جابجایی، انحنای-جابجایی و قانون هوک، معادلات حاکم بر پوسته‌های کروی استخراج

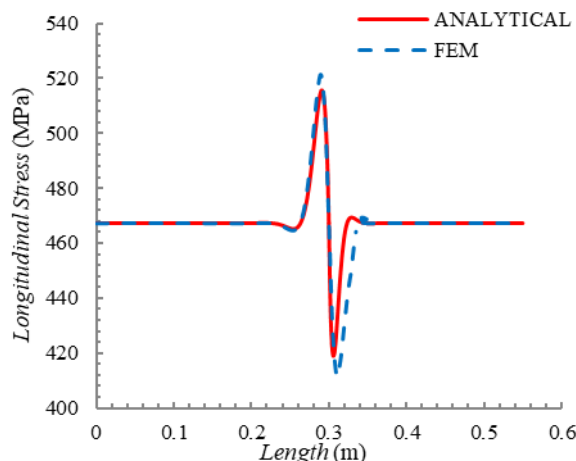


Fig. 25 Longitudinal stress on the upper surface +55 internal

شکل 25 تنش طولی در سطح بالایی +55 داخلی

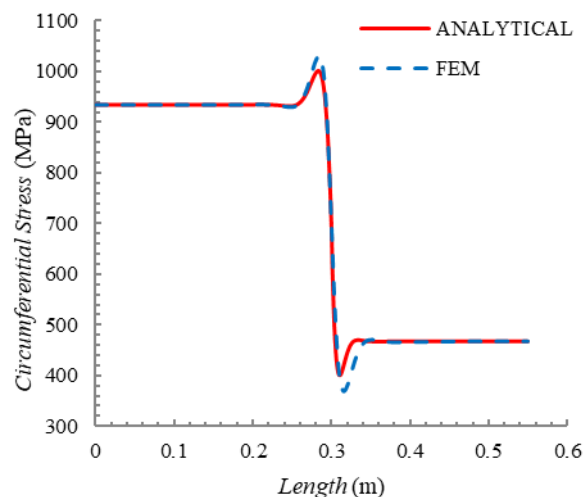


Fig. 26 Circumferential stress at the lower surface +55 internal

شکل 26 تنش محیطی در سطح پایینی +55 داخلی

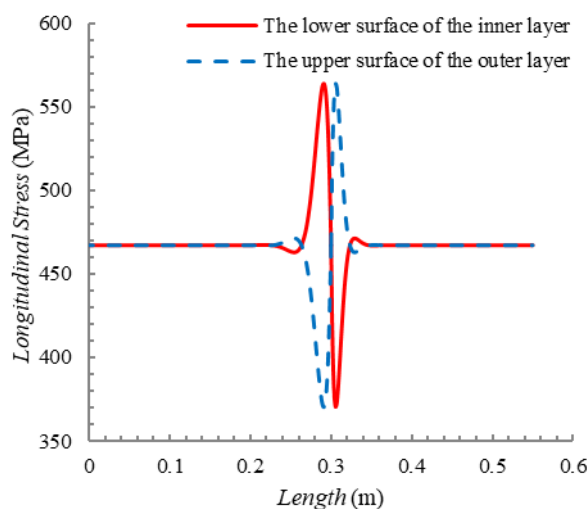


Fig. 27 Comparison of the longitudinal stresses obtained from the analytical solution on the inner +55 lower surface and the outer +55 upper surface

شکل 27 مقایسه تنش‌های طولی به دست آمده از حل تحلیلی در سطح پایینی +55 داخلی و سطح بالایی +55 بیرونی

- [9] Acar, B., "Design and validation of a filament wound composite rocket motor case," Pressure Vessels Conference, 2018.
- [10] Kumar, J., "Design and experimental validation of composite pressure vessel," Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 7, No. 4, pp. 15-19, 2018.
- [11] Houghton, D., "Discontinuity effects at the junction of a pressurized cylinder and end bulkhead," Instant Mach Engineering, Vol. 175, No. 26, 1961.
- [12] Rao, K., "Design and analysis of filament wound composite pressure vessel with Integrated-end domes," Defense Science Journal, Vol. 59, No. 1, pp. 73-81, 2009.
- [13] Musthak, M., "Prediction of structural behavior of FRP pressure vessel by using shear deformation theories," Fifth International Conference of Materials Processing and Characterization, Vol. 4, pp. 872-882, 2017.
- [14] Madhavi, M., "Study of Inter-Laminar behavior of geodesic wound composite pressure vessel by higher order shear deformation theories and finite element analysis," International Journal of Composite Materials, Vol.9, No.3, pp.60-68, 2019.
- [15] Eckold, G., "Design and manufacture of composite structures," pp. 130-139, 1994.
- [16] Kumar, J., "Discontinuity stress in orthotropic pressure vessels," Journal of Pressure Vessel and Piping, Vol. 72, pp. 63-72, 1997.
- [17] Valery, V., "Composite pressure vessels Analysis design and Manufacturing," pp. 204-222, 1993.
- [18] Love, A., "Structural analysis of orthotropic shells," AIAA Journal, 1963.
- [19] Rahimi, G., "Experimental and numerical solution of composite Pressure vessel with metal liner," In Persian, 11th National on Construction and production Engineering, 2000.
- [20] Padovec, Z., "The analytical and numerical stress analysis of various domes for composite pressure vessels," Applied and Computational Mechanics, Vol. 16, No. 1, pp. 151-166, 2022.
- [21] Reddy, J., "Exact solutions of moderately laminated Shells. Journal of Engineering Mechanics," pp. 794-799, 1984.
- [22] Onder, A., "Burst failure load of composite pressure vessels," Composite Structures, Vol. 89, pp. 159-166, 2009.
- [23] Ramos, I., "Analytical and numerical studies of a thick anisotropic multi-layered fiber reinforced composite pressure vessel," ASME Journal of Pressure Vessel Technology, 2018.
- [24] Takayangi, H., "Analysis of multi layered filament wound composite pipe under internal pressure," Composite Structures, Vol.53, pp. 483-491, 2001.
- [25] Vignolia, V., "Multiscale Failure Analysis of Cylindrical Composite Pressure Vessel," Journal of Solids and Structures, Vol. 15, No. 11, 2018.
- [26] Sayya, A., "Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory," Composite structures, Vol. 219, pp. 129-146, 2019.
- [27] Ganesan, N., "Interlaminar Stress In Spherical Shells," Computer and Structures, Vol. 65, No. 4, pp. 575-583, 1997.
- [28] Salvatore, B., "A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures," Composite Structures, 2017.
- [29] Alavandi, B., "Three dimensional elasticity solution for static response of orthotropic doubly curved shallow shells on rectangular platform," Composite Structures, Vol. 24, pp. 67-77, 1993.
- [30] Jin, G., "Three-dimensional vibration analysis of laminated functionally graded spherical shells with general boundary conditions," Composite Structures, Vol. 116, pp. 571-588, 2014.
- [31] Timoshenko, S., "Theory of plates and shells," Mc Graw-Hill, Second Edition, 1960.
- [32] Reddy, J., "Mechanics of laminated composite plates and shells," CRC, Second Edition, 2003.
- [33] Xu, p., "Finite element analysis of burst pressure of composite hydrogen storage vessels," Material and Design, pp. 2295-2299, 2009.
- گردید سپس با استفاده از معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای مرجع [12] و به کارگیری روابط سازگاری جابجایی و چرخش، نیروها و گشتاورها در تقاطع دو پوسته به دست آورده شدند و در نهایت نیز تنش‌ها در پوسته استوانه‌ای و پوسته کروی و در هر لایه محاسبه شدند. این روابط به همراه الگوریتمی مناسب در کد متلب به کار گرفته شد. سپس نتایج حل تحلیلی با نتایج به دست آمده از حل عددی اجزاء محدود صحنه سنجی شد. نتایج به دست آمده از این صحنه سنجی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.
- تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در لایه‌چینی $S_{(15\pm)}$ در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 5% است.
 - تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در لایه‌چینی $S_{(30\pm)}$ در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 10% است.
 - تطابق خوبی بین نتایج حل تحلیلی و عددی در لایه‌چینی $S_{(55\pm)}$ در تنش‌های محیطی و طولی وجود دارد و در موقعیت اتصال، اختلاف نتایج نزدیک به 3% است.
 - با استفاده از حل تحلیلی ارائه شده می‌توان تنش‌های طولی و محیطی را در هر لایه دلخواه از مخزن چندلایه کامپوزیتی به دست آورد.
 - حل تحلیلی ارائه شده با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌ها کاملاً تحلیلی است و نیازی به استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات ندارد.
 - با توجه به وقوع تنش طولی بیشینه در لایه بیرونی از پوسته کروی، استخراج نتایج تنش در پوسته کروی ضروری است.
 - نیروها در تقاطع دو پوسته با معادل‌سازی عدسی کروی با پوسته استوانه‌ای به دست نیامده‌اند بلکه از خود پوسته کروی به عنوان پوسته عدسی در استخراج بارها در موقعیت تقاطع استفاده شده است.
 - با استفاده از این حل تحلیلی می‌توان مخازن کامپوزیتی را به صورت بهینه طراحی نمود.

7- مراجع

- [1] Betti, F., "Design and development of Vega solid rocket motor composite case," Joint Propulsion Conference, 2007.
- [2] Couroneau, N., "Predicting the mechanical behavior of large composite rocket motor cases," High Performance Structures, Vol.85, 2006.
- [3] Mataloni, A., "Z40 solid rocket motor design status of motor case Structure," Materials & Environmental Testing, 2000.
- [4] Erturan, Y., "Development of a structural design methodology for filament winding composite rocket motor case," Journal of Pressure Vessel and Piping, 2019.
- [5] Betten, J., "Finite element analysis of composite pressure vessels," International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, 2003.
- [6] Jebeli, M., Heidari-Rarani, M., "Development of Abaqus WCM plugin for progressive failure analysis of type IV composite pressure vessels based on Puck failure criterion," Engineering Failure Analysis, Vol. 131, 2022.
- [7] Mirmohammad, SH., Safarabadi, M., Karimpour, M., Aliha, MRM., Berto, F., "Study of composite fiber reinforcement of cracked thin-walled pressure vessels utilizing multi-scaling technique based on extended finite element method," Strength of Materials, Vol. 50, pp. 925-936, 2019.
- [8] Shahryarifard, M., Golzar, M., Safarabadi, M., "Novel Parameters in Load Capacity and Failure of Coaxial Steel Tubes Jointed by Wrapped GFRP Sleeve," International Journal of Adhesion and Adhesives, 2017.