



## تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مستطیلی

رضا آذرآفا<sup>1\*</sup>، شاهین اصلانزاده قلی‌بیگللو<sup>2</sup>، علی داور<sup>1</sup>

1- دانشیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

2- دانشجو، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-6835، azarmut@mut.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله:

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی مستطیلی به روش تحلیلی بررسی شده است. معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با استفاده از روش نیوتن استخراج شده‌اند. شرایط مرزی پوسته دو سر ساده در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های جابه‌جایی با توجه به شرایط مرزی به صورت بسط سری فوریه دوگانه نوشته شده‌اند. روابط کرنش-جابجایی و انحنا-جابجایی بر اساس نظریه تقریب لاو در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی گشودگی توسط تابع توزیع (هویساید) بر معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی، معادلات حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند. برای صحت‌گذاری، نتایج پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با نرم‌افزار المان محدود آباکوس و مقالات پیشین در این زمینه مقایسه شده‌اند که مطابقت خوبی بین آن‌ها وجود دارد. در نهایت اثر پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مانند طول، شعاع، ضخامت و لایه‌چینی پوسته استوانه‌ای و همچنین ابعاد، جهت و محل گشودگی بر فرکانس طبیعی سازه بررسی شد که نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ابعاد گشودگی میزان کاهش فرکانس طبیعی سازه، افزایش می‌یابد.

دریافت: 1402/02/30

پذیرش: 1402/05/09

### کلیدواژگان

پوسته استوانه‌ای

ارتعاشات آزاد

پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی

تابع هویساید

## Analysis of free vibration of laminated composite cylindrical shells with rectangular cutout

Reza Azarafza<sup>1\*</sup>, Shahin Aslanzadeh Gholibeiglo<sup>1</sup>, Ali Davar<sup>1</sup>

1- Faculty of Materials & Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B. 19395-6835, Tehran, Iran, azarmut@mut.ac.ir

### Keywords

Cylindrical shell  
Free vibrations  
Cutout in the wall of cylindrical shells  
Heaviside function

### Abstract

In this paper, the free vibrations of multi-layered composite cylindrical shells with rectangular cutout are analyzed analytically. Cylindrical shell equilibrium equations are derived based on classical shell theory (CST) and using Newton's method. Boundary conditions of the two-headed shell are considered simply supported. According to the boundary conditions, the displacement components are written as double Fourier series expansions. Relationships of the strain-displacement and curvature displacement are considered based on Love's approximation theory. Modeling of the cutout by distribution function (Heaviside) is considered based on the equilibrium equations of the composite cylindrical shell. In order to obtain the natural frequency of the rectangular cutout composite cylindrical shell, the equations of motion have been solved using the Galerkin method. For validation, firstly, the results of the composite cylindrical shell have been compared with the Abaqus finite element software and the Previous literature in this field, that there is a good match between them. Finally, the effect of the geometrical parameters of the composite cylindrical shell with cutout, such as the length, radius, thickness and layering of the cylindrical shell, as well as the dimensions, direction and location of the cutout, on the natural frequency of the structure was investigated, that the results show that with increasing The dimensions of the cutout increase the reduction of the natural frequency of the structure.

### 1- مقدمه

مشکلات اساسی در طراحی این سازه‌های کامپوزیتی، نیاز به ایجاد گشودگی-های متعدد با اندازه‌ها و اشکال مختلف در دیواره، به‌عنوان درجه دسترسی به داخل سازه می‌باشد. این گشودگی‌ها در پوسته‌های استوانه‌ای تأثیر مستقیم بر مقاومت کماتشی دارد و باعث تغییر ویژگی‌های ارتعاشی پوسته استوانه‌ای

امروزه پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی، به دلیل خصوصیات فیزیکی و مکانیکی مناسب در صنایع مختلفی مانند اتومبیل‌سازی، دریایی، مخازن نگهداری، خطوط لوله و خصوصاً هوافضا بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Azarafza, R., Aslanzadeh GoliBeiglo, S., Davar, A., "Analysis of free vibration of laminated composite cylindrical shells with rectangular cutout," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 10, No. 2, pp. 2196-2209, 2023.

https://doi.org/10.22068 /JSTC.2023.2002545.1837

و همکاران [14]، تحلیل دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت ضربه مایل سرعت پایین توسط یک ضربه‌زننده کروی مطالعه نمودند. چاودوری و همکاران [15]، به تحلیل ارتعاشات پوسته هابپر کامپوزیت چندلایه تقویت‌شده همراه گشودگی، با استفاده از روش المان محدود پرداخته‌اند. یوان و همکاران [16]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای FGM دارای بریدگی را با استفاده از اصل همیلتون مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. آذرافزا و همکاران [17]، ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی کامپوزیت چندلایه همراه با جرم متصله را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش، برای اولین بار اثر جرم متصله با استفاده از عملگر دیفرانسیل مخروطی و تابع هویساید بر معادلات تعادل در نظر گرفته شده است و تأثیر آن بر ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی بررسی شده است. طالع‌زاده [18]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی کامل و دارای گشودگی مستطیلی بر پایه تئوری برشی مرتبه اول بررسی نموده است. در این پژوهش، معادلات حاکم به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در راستای طولی و محیطی گسسته شده است. انصاریان و همکاران [19]، به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با مایع داخلی و با شرایط مرزی دو سر ساده به روش تحلیلی پرداخته‌اند. طالع‌زاده و رحیمی [20]، به بررسی کمانش محوری یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با و بدون گشودگی مستطیلی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته‌اند. خلیلی و همکاران [21]، به بررسی تجربی و عددی کمانش نیم استوانه مشبک کامپوزیتی پرداخته‌اند. خلیلی و همکاران [22]، به بررسی تجربی و عددی نیم استوانه مشبک کامپوزیتی تقویت‌شده با الگوی مثلثی تحت بارگذاری ضربه سرعت بالا پرداخته‌اند. فریدون و همکاران [23]، به بررسی رفتار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای فولادی نازک با گشودگی بیضوی تحت بارهای مایل به دو روش تجربی و شبیه‌سازی با نرم-افزار المان محدود پرداخته‌اند. پور و همکاران [24]، یک روش نیمه‌تحلیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای چندلایه همراه با گشودگی را توسعه دادند. در این پژوهش از ضرایب لاگرانژ در معادلات جابه‌جایی برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است.

نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که تاکنون مدل‌سازی گشودگی مستطیلی در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی توسط تابع هویساید انجام نشده است. در تحقیق حاضر ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با شرایط مرزی دو سر ساده به روش تحلیلی بررسی شده است. معادلات حرکت بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با استفاده از روش نیوتن استخراج شده‌اند. مؤلفه‌های جابه‌جایی با توجه به شرایط مرزی به صورت بسط سری فوریه دوگانه نوشته شده‌اند. روابط کرنش-جابجایی و انحنا-جابجایی بر اساس نظریه تقریب لائو در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی گشودگی توسط تابع توزیع (هویساید) بر معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در نظر گرفته شده است که نسبت به روش‌های دیگر ایجاد گشودگی به مراتب ساده‌تر می‌باشد. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی، معادلات حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند. در نهایت اثر پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مانند طول، شعاع، ضخامت و لایه‌چینی پوسته استوانه‌ای و همچنین ابعاد، جهت و محل گشودگی بر فرکانس طبیعی سازه بررسی شده است.

## 2- معادلات حاکم

### 2-1- معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

شکل 1 یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای همراه با مختصات مرجع (جهت‌های مثبت قراردادی) نشان داده شده است که در آن شعاع پوسته استوانه‌ای دایره-

کامپوزیت مانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن می‌شود [1]. بنابراین تأثیرات ناشی از ایجاد گشودگی بر روی سازه‌های کامپوزیتی باید به خوبی شناخته شود و ملاحظات مناسبی نیز در حین فرآیند طراحی این‌گونه سازه‌ها مورد توجه قرار گیرد. تحقیقات زیادی در زمینه بررسی استاتیکی و دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی، با در نظر گرفتن اثر گشودگی، انجام شده است. لی و همکاران [2] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدور را با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی نمودند. آن‌ها با ایجاد یک روش مدون، موفق به استخراج عبارات صریح برای ماتریس‌های جرم و سفتی شده‌اند تا یک تحلیل آسان بر اساس تئوری‌های پوسته و شرایط مرزی متفاوت داشته باشند. قربانی و همکاران [3]، ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای را بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و نظریه گرادبان کرنش غیرمحلی بررسی کردند. در پژوهش آن‌ها معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته گسسته شده است. تاکاباتاکا [4]، تحلیل استاتیکی ورق‌های ایزوتروپیک دارای گشودگی را بررسی نموده است. در این پژوهش موقعیت گشودگی توسط تابع توزیع پله مدل‌سازی شده است. همچنین معادله خیز با استفاده از روش بسته گالرکین حل شده است. تحقیقات او نشان می‌دهد که دقت مدل‌سازی با تابع پله در برابر مدل‌سازی با تئوری ورق معادل بیشتر است. ازهری و همکاران [5]، به تحلیل کمانش صفحات پله‌دار و مشبک پرداخته‌اند. آن‌ها مدل‌سازی را بر پایه تعریف زیرناحیه‌های با ضخامت مختلف توسط توابع میان‌یاب انجام داده‌اند (به عبارت دیگر آن‌ها حفره را یک ناحیه با ضخامت صفر در نظر گرفته‌اند). لی و همکاران [6]، خیز ساندویچ پانل‌های مشبک کامپوزیتی تحت شرایط مرزی ساده و بارگذاری فشاری یکنواخت را مطالعه نمودند. آن‌ها برای ورق تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های متعامد، به مدل‌سازی مواد توسط تابع هویساید بر اساس دو ناحیه مجزا با عنوان سلول و تقویت‌کننده پرداخته‌اند. ژانگ و همکاران [7]، یک مدل المان محدود شامل المان‌های مثلثی پوسته‌ای برای پوسته‌ها و ورق-های مشبک متعامد کامپوزیتی ارائه کرده‌اند. آن‌ها سفتی سازه را با استفاده از انرژی کرنشی و اعمال قیود سازگاری بین پوسته و ریب به دست آورده‌اند. ویلسون و راجاسکاران [8]، پایداری الاستیک ورق‌های با تقویت‌کننده پله تحت بار محوری توسط تئوری کلاسیک ورق را بررسی نمودند. آن‌ها تقویت-کننده پله را توسط توابع چندضابطه‌ای توزیع ضخامت مدل‌سازی کرده‌اند که موجب تعریف محلی ضخامت در سازه شده است. هانگ و همکاران [9]، یک مدل المان محدود برای تحلیل کمانش صفحات مشبک کامپوزیتی با چیدمان ریب موازی و عمود بر پوسته ارائه کرده‌اند. امیدواران [10]، یک روش تحلیلی بسته برای ارتعاشات آزاد ورق‌های مشبک ارائه داده است. در پژوهش آن‌ها توسط سری فوریه، توزیع گشودگی در سفتی سازه تعریف شده است و پس از حل معادله ارتعاش آزاد، فرکانس طبیعی ورق مشبک ایزوتروپیک در قالب یک فرمول ارائه شده است. کالیتا و هالدار [11]، ارتعاشات آزاد ورق‌های ایزوتروپیک دارای تک گشودگی مرکزی را با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی، مورد مطالعه قرار داده‌اند. سلیمانیان و همکاران [12]، ارتعاشات آزاد صفحات پلیمری تقویت‌شده با الیاف شیشه دارای گشودگی مرکزی با شرایط مرزی آزاد را به وسیله روش‌های تحلیلی، تجربی و عددی بررسی کرده‌اند. در این مقاله، گشودگی مستطیلی با ضرب توابع توزیع به صورت ریاضی در ماتریس سفتی صفحه مدل‌سازی شده است. لی و چنگ [13]، یک مدل تحلیلی تعمیم‌یافته برای تحلیل رفتار سازه‌های کامپوزیتی چندلایه (معمولی و ساندویچی) ارائه کرد. این مدل بر اساس تئوری کلاسیک صفحه و با در نظر گرفتن سلول به عنوان یک ناحیه از سازه توسعه داده شده است و در آن ناپویستگی فیزیکی بین ریب و سلول توسط یک تابع توزیع سفتی در نظر گرفته شده است. آذرافزا

در روابط فوق عبارات  $q_x$ ،  $q_\varphi$  و  $q_z$  به ترتیب تحریک‌های خارجی وارد به سیستم در راستای محوری، محیطی و شعاعی هستند که مقادیر آن‌ها برای تحلیل ارتعاشات آزاد برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $I_0$  ممان اینرسی بوده و با رابطه (3) تعریف شده است [14,17]:

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k dz \quad (3)$$

که در این رابطه اندیس  $k$  شماره لایه می‌باشد.

## 2-2- روابط کرنش-جابجایی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

روابط کرنش-جابجایی بر اساس نظریه کلاسیک پوسته‌های نازک لاو برای هر نقطه دلخواه یک پوسته استوانه‌ای به صورت روابط (4) بیان می‌شوند [14]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^0 \quad (a-4)$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + zk_\varphi^0 \quad (b-4)$$

$$\gamma_{x\varphi} = \gamma_{x\varphi}^0 + 2zk_{x\varphi}^0 \quad (c-4)$$

که  $\varepsilon_x^0$ ،  $\varepsilon_\varphi^0$  و  $\gamma_{x\varphi}^0$  بیانگر کرنش‌های نرمال و برشی سطح میانی و  $k_x^0$ ،  $k_\varphi^0$  و  $k_{x\varphi}^0$  انحناهای سطح میانی می‌باشند. این مقادیر برحسب مؤلفه‌های جابجایی پوسته ( $w$  و  $v$ ،  $u$ ) عبارت‌اند از [14]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\varphi^0 \\ \gamma_{x\varphi}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (a-5)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^0 \\ k_\varphi^0 \\ k_{x\varphi}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (b-5)$$

## 2-3- روابط تنش-کرنش برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

در شکل 3، ساختار لایه‌های یک المان از پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با ضخامت  $h$  و دارای لایه نشان داده شده است [14].

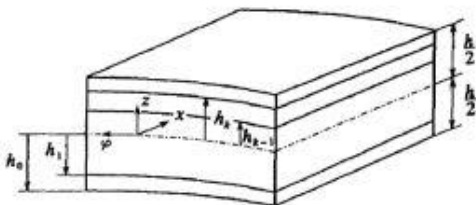


Fig. 3 Structure of layers of one element of laminated composite cylindrical shell [24]

شکل 3 ساختار لایه‌های یک المان از پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه [24]

روابط تنش-کرنش متناظر با لایه  $k$  ام بر اساس قانون عمومی هوک به صورت رابطه (6) نوشته شده‌اند:

ای، ضخامت، طول، زاویه نسبت به محور عمودی و محور طولی به ترتیب با نمادهای  $R$ ،  $h$ ،  $L$ ،  $\varphi$  و  $x$  نشان داده شده‌اند. سطح میانی پوسته به عنوان سطح مرجع در نظر گرفته شده است و دستگاه مختصات  $x$ ،  $\varphi$  و  $z$  روی آن قرار داده شده است. در این شکل جابه‌جایی در جهت‌های محوری  $x$ ، محیطی  $\varphi$  و شعاعی  $z$  نیز به ترتیب با نمادهای  $u$ ،  $v$  و  $w$  نشان داده شده است که  $z$  فاصله سطح میانی پوسته تا نقطه دلخواه روی پوسته است. در شکل 2، یک المان از پوسته نشان داده شده است. بر اساس تئوری کلاسیک پوسته معادلات تعادل صورت زیر می‌باشند [14].

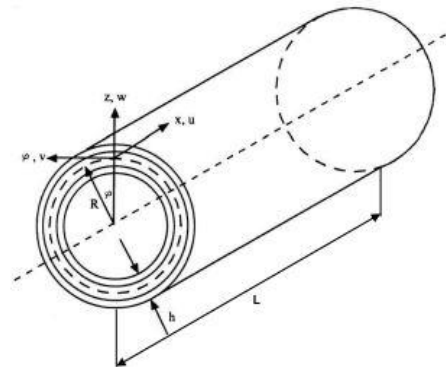


Fig. 1 Cylindrical shell and reference coordinates

شکل 1 پوسته استوانه‌ای و مختصات مرجع

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R p_x = 0 \quad (a-1)$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + R p_\varphi = 0 \quad (b-1)$$

$$R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi + R p_z = 0 \quad (c-1)$$

که در این روابط،  $p_x$ ،  $p_\varphi$  و  $p_z$  مجموع نیروهای اینرسی و تحریک خارجی متغیر با زمان به ترتیب در راستای محوری، محیطی و شعاعی هستند و مقادیر آن‌ها عبارت‌اند از [14]:

$$p_x = -I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x \quad (a-2)$$

$$p_\varphi = -I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_\varphi \quad (b-2)$$

$$p_z = -I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z \quad (c-2)$$

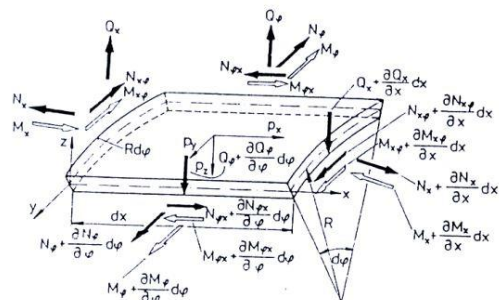


Fig. 2 An element of the shell with applied forces and moments.

شکل 2 یک المان از پوسته با نیروها و گشتاورهای اعمال شده

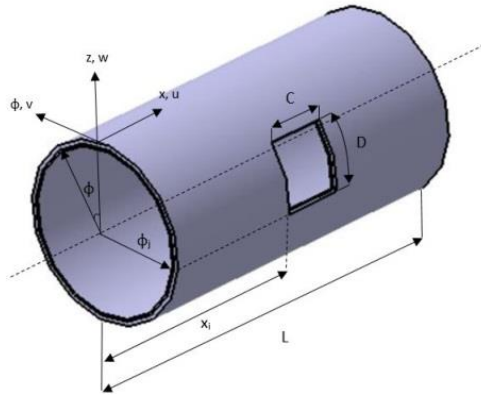


Fig. 4 laminated composite cylindrical shell with rectangular cutout along with coordinate system.

شکل 4 پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی مستطیلی همراه با دستگاه مختصات.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x\varphi} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{13}^k \\ \bar{Q}_{21}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{23}^k \\ \bar{Q}_{31}^k & \bar{Q}_{32}^k & \bar{Q}_{33}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x\varphi} \end{Bmatrix}_k \quad (6)$$

که ثوابت  $\bar{Q}_{ij}^k$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ضرایب سفتی الاستیک کاهش‌یافته تبدیل‌یافته لایه  $k$  ام هستند [14]. منتجه‌های نیرو و ممان برای پوسته‌های نازک چندلایه، با انتگرال‌گیری از تنش‌ها بر روی سطح مقطع، از یک لایه به لایه دیگر، به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\varphi \\ N_{x\varphi} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x\varphi} \end{bmatrix} dz, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_\varphi \\ M_{x\varphi} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x\varphi} \end{bmatrix} z dz \quad (7)$$

با انجام انتگرال‌گیری ماتریسی در معادله (7)، منتجه‌های نیرو و ممان برحسب تغییرات انحنا و کرنش‌های سطح میانی بیان شده‌اند [14, 17]:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\varphi \\ N_{x\varphi} \\ M_x \\ M_\varphi \\ M_{x\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]_{3 \times 3} & [B]_{3 \times 3} \\ [B]_{3 \times 3} & [D]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\varphi^0 \\ \gamma_{x\varphi}^0 \\ k_x^0 \\ k_\varphi^0 \\ k_{x\varphi}^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که  $N_x$ ,  $N_\varphi$  و  $N_{x\varphi}$  معرف نیروهای نرمال و برشی و  $M_x$  و  $M_\varphi$  و  $M_{x\varphi}$  بیانگر ممان‌های خمشی و پیچشی است.  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب سفتی محوری، سفتی کوپل و سفتی خمشی می‌باشند و مطابق رابطه (9) تعریف شده‌اند [14, 17]:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^k (1, z, z^2) dz \quad (9)$$

#### 4-2- مدل‌سازی ریاضی پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی

برای ایجاد بریدگی در پوسته استوانه‌ای، ابتدا توابع توزیع  $HD(x)$  و  $HD(\varphi)$  در بازه [6, 17]:

$$(0, 0, 0) < (x, \varphi, z) < (L, 2\pi, h) \quad (10)$$

به صورت روابط (11) تعریف می‌شوند.  $HD(x)$  و  $HD(\varphi)$  توابعی هستند که به وسیله ایجاد تقسیمات مشخص در راستای محور  $x$  و  $\varphi$ ، یک الگوی متعامد را می‌سازند [6, 17].

$$HD(x) = \text{Heaviside}(x - X_1) - \text{Heaviside}(x - X_1 - C) \quad (a-11)$$

$$HD(\varphi) = \text{Heaviside}(\varphi - \phi_1) - \text{Heaviside}(\varphi - \phi_1 - D) \quad (b-11)$$

در شکل 4، یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی مستطیلی همراه با دستگاه مختصات آورده شده است.

با توجه به مطالب ارائه شده، برای مدل‌سازی پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی، تابع توزیع  $(HD^*)$  به صورت رابطه (12) بیان می‌شود [6, 17].

$$HD^* = (1 - HD) \quad (12)$$

در رابطه فوق، تابع توزیع  $(HD)$  به صورت رابطه (13) تعریف شده است [6, 17].

$$HD = HD(x)HD(\varphi) \quad (13)$$

تأثیر تابع توزیع  $(HD)$  در رابطه (13) بر بازه انتگرالی یک تابع به صورت رابطه (14) می‌باشد [6, 17].

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} HD * f(x, \varphi) dx d\varphi \\ = \int_{x_i}^{x_i+C} \int_{\phi_j}^{\phi_j+D} f(x, \varphi) dx d\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

#### 5-2- معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی

با توجه به مطالب ارائه شده، معادلات حرکت برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به صورت روابط (15) اصلاح می‌گردد:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R p_x \\ - HD \left( R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + R p_x \right) = 0 \end{aligned} \quad (a-15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + R p_y \\ - HD \left( \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + R p_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (b-15)$$

$$\begin{aligned} R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi + R p_z \\ - HD \left( R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi + R p_z \right) = 0 \end{aligned} \quad (c-15)$$

به صورت تابع نمایی یعنی  $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$  در نظر گرفته شده که در آن  $\omega_{mn}$  فرکانس طبیعی پوسته است. با استفاده از روابط مربوط به مؤلفه‌های تغییر مکان (19) و جایگزینی آن‌ها در معادلات تعادل (15)، یک دستگاه سه معادله‌ای به دست آمده‌اند. به منظور حل این دستگاه معادلات، از روش گالرکین مطابق روابط زیر استفاده شده است [14,17]:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (L'_{11}u + L'_{12}v + L'_{13}w + p'_x)\phi_u dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (L'_{21}u + L'_{22}v + L'_{23}w + p'_y)\phi_v dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (L'_{31}u + L'_{32}v + L'_{33}w + p'_z)\phi_w dx d\varphi = 0 \quad (20)$$

پس از ساده‌سازی دستگاه معادلات رابطه (20)، یک معادله مقدار ویژه جبری به صورت عبارت (21) به دست می‌آید [14,17]:

$$[[K']_{mn} - \omega_{mn}^2[M']_{mn}]\{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (21)$$

که در آن  $\{\Delta\}_{mn}$  بردار ضرایب ثابت شکل مود،  $[M']_{mn}$  ماتریس جرم و  $[K']_{mn}$  ماتریس سفتی می‌باشند و عبارت‌اند از:

$$\{\Delta\}_{mn} = \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$[M']_{mn} = \begin{bmatrix} M'_{11} & 0 & 0 \\ & M'_{22} & 0 \\ sym. & & M'_{33} \end{bmatrix}_{mn} \quad (23)$$

$$[K']_{mn} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} \\ K'_{21} & K'_{22} & K'_{23} \\ K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix}_{mn} \quad (24)$$

ضرایب  $A_{mn}$ ،  $B_{mn}$  و  $C_{mn}$  در رابطه (22) همان ثوابت شکل مود در روابط (19) هستند. درایه‌های ماتریس  $[K']_{mn}$  و  $[M']_{mn}$  در رابطه (23) و (24)، در پیوست ب و ج آورده شده‌اند.

با قرار دادن دترمینان ضرایب دستگاه معادلات (21) مساوی صفر (حل یک مسأله مقدار ویژه)، معادله فرکانسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی به شکل زیر حاصل شده است [14,17]:

$$\det([K']_{mn} - \omega_{mn}^2[M']_{mn}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1\omega_{mn}^6 + \beta_2\omega_{mn}^4 + \beta_3\omega_{mn}^2 + \beta_4 = 0 \quad (25)$$

با حل معادله (25) فرکانس‌های طبیعی پوسته بر حسب رادبان بر ثانیه به دست آمده و با قرار دادن این فرکانس‌ها در معادله (21)، ضرایب ثابت شکل مودهای ارتعاشی به دست آمده‌اند. همانطور که در معادله (25) مشخص است، معادله فرکانسی پوسته از مرتبه 6 بوده و دارای شش ریشه است که سه ریشه مثبت و سه ریشه منفی دارد. سه ریشه مثبت این معادلات به عنوان جواب قابل قبول هستند. این سه ریشه از کوچک به بزرگ، فرکانس متناظر با مودهای ارتعاشات خمشی، پیچشی و طولی هستند.

در عبارات فوق، جملاتی که به صورت پررنگ مشخص شده‌اند، به دلیل وجود گشودگی در یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه ایجاد شده‌اند.

## 2-6- استخراج عملگرهای دیفرانسیلی

به منظور حل معادلات تعادل، ابتدا باید از روابط کرنش-جابجایی، یعنی روابط (4)، مقادیر کرنش را در رابطه منته‌های تنش، یعنی رابطه (6)، جایگذاری کرد. سپس روابط حاصل را در معادلات (15) که معادلات حرکت پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی هستند، قرار داد. پس از جداسازی مشتقات مربوط به هر یک از مؤلفه‌های جابه‌جایی و مرتب‌سازی، معادلات تعادل به فرم نهایی به صورت رابطه (16) حاصل شده‌اند:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} - HD * \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Rp_x \\ -Rp_\theta \\ -Rp_z \end{Bmatrix} - HD * \begin{Bmatrix} -Rp_x \\ -Rp_\theta \\ -Rp_z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

با توجه به رابطه فوق می‌توان معادلات تعادل پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی را به صورت رابطه (17) بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{22} & L'_{23} \\ L'_{31} & L'_{32} & L'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p'_x \\ -p'_y \\ -p'_z \end{Bmatrix} \quad (17)$$

درایه‌های  $L'_{ij}$  عملگرهای دیفرانسیلی هستند که مقادیر آن‌ها در پیوست الف آورده شده‌اند.

## 3- شرایط مرزی

در این تحقیق، شرایط مرزی به صورت ساده در نظر گرفته شده است. برای شرایط مرزی ساده در لبه‌های پوسته استوانه‌ای داریم [14,17]:

$$N_x = M_x = v = w = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (18)$$

به منظور ارضای شرایط مرزی مورد نظر، میدان جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای به صورت بسط سری فوریه دوگانه در نظر گرفته شده‌اند [14,17]:

$$u = A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta T_{mn}(t) \quad (a-19)$$

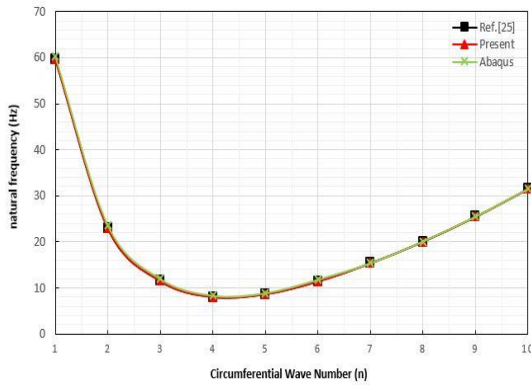
$$v = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n\theta T_{mn}(t) \quad (b-19)$$

$$w = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta T_{mn}(t) \quad (c-19)$$

که ضرایب  $A_{mn}$ ،  $B_{mn}$  و  $C_{mn}$  ثوابت شکل مود هستند.  $m$  تعداد نیم-موج‌های طولی،  $n$  تعداد موج‌های محیطی و  $T_{mn}(t)$  بخش زمانی تغییر مکان‌ها می‌باشد.

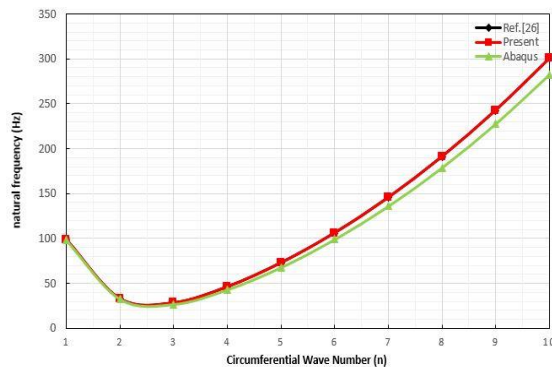
## 4- تحلیل ارتعاشات آزاد

در تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی مستطیلی، تحریک‌های خارجی در معادلات تعادلی (15) برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. هم‌چنین در روابط (19)، برای تحلیل ارتعاشات آزاد تابع زمانی



**Fig. 5** Comparison of natural frequencies of laminated composite cylindrical shell,  $m = 1$ , geometry No. 1, material properties No. M1, [90/0/90].

شکل 5 مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه،  $m = 1$ ، مشخصات هندسی شماره 1، خواص مواد شماره M1، [90/0/90].



**Fig. 6** Comparison of natural frequencies of laminated composite cylindrical shell,  $m=1$ , geometry No. 2, material properties No. M2, [45/-45/45/-45].

شکل 6 مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه،  $m = 1$ ، مشخصات هندسی شماره 2، خواص مواد شماره M2، [45/-45/45/-45].

### 5-2- بررسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با گشودگی

در جدول 3 نیز نتایج ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی توسط روش تحلیلی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس مورد بررسی قرار گرفته است همانطوری که مشاهده می‌شود نتایج پژوهش حاضر از تطابق خوبی برخوردار می‌باشند.

همانطور که در جدول 3 مشاهده می‌شود، درصد تفاوت فرکانس، بین روش تحلیل حاضر با جواب حاصل از آباکوس، با افزایش ابعاد بریدگی و مقادیر پایین عدد موج محیطی، به خصوص  $m < 4$ ، افزایش می‌یابد. علت اصلی این تفاوت‌ها، عدم اعمال تابع هویساید، در تابع شکل ارضاء کننده شرایط مرزی یا همان شکل مود است. درست است که لبه‌های داخلی بریدگی، دارای شرایط مرزی آزاد هستند، لیکن با استفاده از تابع هویساید، این لبه‌ها نمی‌توانند به صورت شرط مرزی آزاد، در نظر گرفته شوند. استفاده از تابع هویساید سبب می‌شود که جرم و سفتی موضعی، در بخش بریده شده از پوسته، به درستی نادیده گرفته شوند، طوری که دقت قابل قبول، برای فرکانس طبیعی حاصل شود. لیکن تابع شکل مود، به خصوص در مواردی که درصد تفاوت نتایج در جدول 3 افزایش می‌یابد، انطباق کمتری با شکل مود متناظر در نرم‌افزار آباکوس دارد.

### 5- صحنه‌گذاری نتایج

برای بررسی درستی نتایج حاصل از این پژوهش، صحت‌سنجی نتایج به دو صورت انجام شده است. ابتدا نتایج مطالعه حاضر برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی سالم، یعنی در حالت بدون گشودگی، با تکیه‌گاه دو سر ساده با نتایج پژوهش‌های قبلی و نرم‌افزار المان محدود (آباکوس) مورد بررسی قرار گرفته‌اند که نتایج مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. سپس نتایج روش تحلیلی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی با نتایج نرم‌افزار آباکوس بررسی شد که آن‌ها نیز مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. المان استفاده شده برای مش‌بندی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی در روش المان محدود (شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس) از نوع S4R (چهاروجهی) می‌باشد. همچنین اندازه المان برابر با 0.05 متر در نظر گرفته شده است و تعداد مش مورد نیاز برای رسیدن به همگرایی بین 14000 الی 16000 می‌باشد که در اینجا 15000 مش در نظر گرفته شده است.

جنس و هندسه پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مورد بررسی در این مقاله به ترتیب در جداول 1 و 2 آورده شده‌اند. (همه لایه‌ها هم‌جنس و با ضخامت یکسان در نظر گرفته شده‌اند).

جدول 1 جنس پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی [18]

**Table 1** Material of composite cylindrical shell [18]

شماره ماده	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\rho$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )
M1	19	7.6	4.1	4.1	4	0.26	1643
M2	172.36	6.89	3.44	3.44	1.37	0.25	1603.3
M3	181	10.3	7.17	7.17	7	0.28	1600
M4	38.6	8.27	4.14	4.14	4	0.23	1800
M5	204	18.5	5.59	5.59	5	0.26	2000
M6	200	200	76.92	76.92	76	0.3	7800
M7	70	70	28	28	26	0.25	2600

در جدول 1 جنس مواد استفاده شده عبارت‌اند از: M1: شیشه/اپوکسی، M2: کربن/اپوکسی، M3: کربن/اپوکسی، M4: شیشه/اپوکسی، M5: بورون/اپوکسی، M6: فولاد، M7: آلومینیوم

جدول 2 مشخصات هندسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

**Table 2** geometry of composite cylindrical shell

شماره	L (m)	R (m)	h (m)
1	6	1	0.002
2	4	0.5	0.003
3	6	1	0.008

### 5-1- بررسی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بدون گشودگی

برای صحت‌سنجی، نتایج ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی بدون گشودگی با نتایج عددی (شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس) و نتایج تحلیلی مرجع [25] در شکل 5 و با نتایج عددی (شبیه‌سازی با نرم‌افزار آباکوس) و تحلیلی مرجع [26] در شکل 6 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از روش جدید از تطابق خوبی نسبت به نتایج مراجع برخوردار هستند.

جدول 3 مقایسه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه دارای گشودگی، مشخصات هندسی شماره (3)، خواص مواد شماره  $M3$ ،  $[90/0]_{2s}$ .

**Table 3** Comparison of natural frequencies of laminated composite cylindrical shell with cutout, geometry No. (3), material properties No.  $M3$ ,  $[90/0]_{2s}$ .

C/R	n	2	3	4	5	6	7	8	9
0.2	Abaqus	54.9	38.0	48.6	73.9	107.5	148.1	195.3	249.2
	Present	53.6	37.3	48.1	73.1	105.9	145.3	190.9	242.7
	Error%	2.4	1.6	0.9	1.2	1.5	1.9	2.2	2.6
0.4	Abaqus	54.2	37.4	48.4	73.4	106.4	146.9	191.9	248.6
	Present	49.6	35.9	47.6	72.6	105.5	145.0	190.8	242.7
	Error%	8.5	3.9	1.7	1.2	0.9	1.3	0.6	2.4
0.6	Abaqus	53.0	36.2	48.0	72.9	106.0	146.2	186.9	248.1
	Present	44.8	34.1	46.5	72.3	105.7	145.2	190.4	241.9
	Error%	15.4	6.0	3.0	0.9	0.3	0.7	-1.9	2.5
0.8	Abaqus	51.6	34.3	47.1	70.7	106.0	149.4	183.8	248.0
	Present	40.1	31.3	46.1	72.5	105.0	144.0	190.1	242.0
	Error%	22.3	8.8	2.2	-2.6	1.0	3.6	-3.4	2.4
1	Abaqus	49.9	31.5	45.8	68.7	106.1	150.6	196.2	251.0
	Present	33.7	28.2	45.8	70.8	104.0	144.5	188.8	239.8
	Error%	32.5	10.6	0.0	-3.1	2.0	4.1	3.7	4.5

(38.11%) تأثیر بر میزان کاهش فرکانس پایه را داشته‌اند. این موضوع بیانگر آن است که ماتریس سفتی ماده  $M4$  در برابر افزایش ابعاد گشودگی، عملکرد بهتری دارد. در ادامه با توجه به خواص دینامیکی مواد در جدول 1 مانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ... می‌توان مشاهده کرد که مواد کامپوزیت نسبت به مواد فلزی از نتایج مطلوب‌تر برخوردار می‌باشند.

جدول 4 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر خواص ماده.

**Table 4** Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout for changing the material properties.

C/R	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
M1	0.043	0.041	0.038	0.034	0.029	0.026
M2	0.102	0.099	0.094	0.087	0.080	0.055
M3	0.092	0.089	0.084	0.078	0.070	0.055
M4	0.054	0.052	0.048	0.044	0.039	0.033
M5	0.071	0.069	0.066	0.061	0.055	0.040
M6	0.033	0.031	0.029	0.025	0.022	0.019
M7	0.033	0.031	0.029	0.025	0.021	0.018

#### 6-1-2- اثر نوع لایه چینی

در جدول 5، برای سه نوع لایه چینی متفاوت همراه با تعداد لایه‌های یکسان و ضخامت ثابت، تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی بررسی شده است.

با توجه به جدول 5، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت C/R فرکانس‌های پایه بی‌بعد کاهش می‌یابند و درصد این تغییرات برای لایه چینی  $[0/90]_{2s}$  نسبت به سایر لایه‌چینی‌ها کمتر است. این موضوع بیانگر آن است که سفتی سازه در این لایه‌چینی در برابر افزایش ابعاد گشودگی مقاوم‌تر است. همچنین

#### 6- نتایج مطالعه پارامتری و بحث

پس از اعتبار سنجی روش حاضر و اطمینان از صحت آن، به منظور بررسی رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مستطیلی، به بررسی اثر برخی از پارامترهای هندسی مانند طول، شعاع، ضخامت و لایه‌چینی پوسته استوانه‌ای و همچنین ابعاد، جهت و محل گشودگی، بر فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه پرداخته شده است. پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد به صورت رابطه  $\Omega = \omega R \sqrt{\rho/E_{22}}$  [27,28] تعریف شده است.

#### 6-1- پارامترهای هندسی پوسته استوانه‌ای

در این بخش اثر خواص مواد، نوع لایه‌چینی، تعداد لایه‌ها و پارامترهای هندسی مهم پوسته یعنی  $h/R$ ،  $L/R$  بررسی شده است. پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه مورد بررسی، دارای گشودگی مستطیلی، (با طول و عرض برابر بریدگی  $C = D$ ) با تکیه‌گاه ساده برای هندسه شماره 3 و ماده  $M3$  و لایه-چینی  $[90/0]_{2s}$  مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

#### 6-1-1- اثر خواص مواد

یکی از عوامل مؤثر بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، خواص مواد در هر لایه می‌باشد. در جدول 4، برای مواد مختلف (جدول 1)، مقادیر فرکانس‌های پایه بی‌بعد آورده شده است. مشاهده می‌شود که مواد  $M2$ ،  $M6$  و  $M7$ ، به ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس پایه بی‌بعد می‌باشند. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی، مقادیر فرکانس پایه کاهش می‌یابد که با توجه به خاصیت تابع توزیع که در معادلات برای اعمال گشودگی استفاده شده است، قابل پیش‌بینی می‌باشد. در حل معادلات حاکم به همراه گشودگی، تابع هویساید بر بازه‌های انتگرالی تأثیر می‌گذارد. این انتگرال‌ها در راستای طولی و محیطی بیانگر ابعاد کلی سازه و گشودگی هستند. در ادامه می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ابعاد گشودگی در مواد  $M2$  و  $M4$ ، به ترتیب بیشترین (46.15%) و کمترین

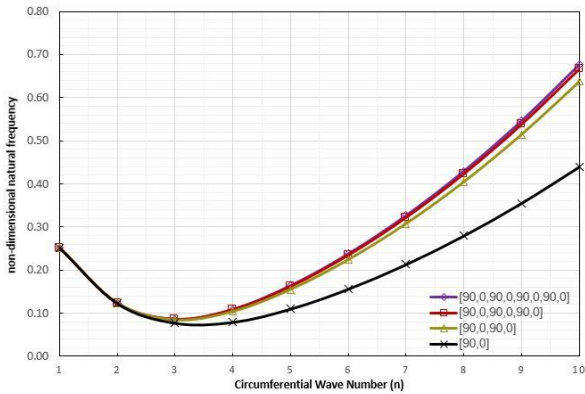


Fig. 8 Comparison of the non-dimensional natural frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout for changing the number of layers,  $C/R = 0.4$ ,  $m = 1$ .

شکل 8 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر تعداد لایه‌ها،  $C/R = 0.4$ ،  $m = 1$ .

#### 4-1-6- نسبت طول به شعاع

در شکل 9 اثر نسبت طول به شعاع بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی همراه با تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت نشان داده شده است.

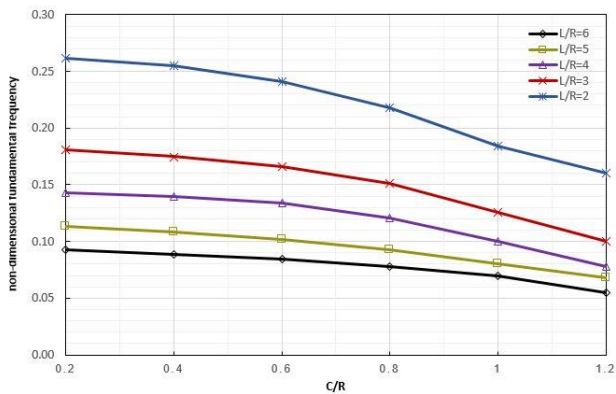


Fig. 9 Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout according to the ratio of length to radius.

شکل 9 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای نسبت طول به شعاع.

با توجه به شکل 9، اثر افزایش طول (نسبت طول به شعاع) بر کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، کمتر می‌شود. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی اثر افزایش طول بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، کمتر می‌گردد.

در شکل 10، اثر افزایش نسبت طول به شعاع بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی بر حسب نیم موج محیطی بررسی گردیده است.

با توجه به شکل 10، در موج‌های محیطی پایین‌تر از  $n = 8$ ، با افزایش طول (نسبت طول به شعاع) فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد که با توجه به این موضوع که پارامتر طول اغلب مواقع در مخرج عبارات‌های معادلات تعادلی قرار می‌گرفت، قابل پیش‌بینی است. ولی برای موج محیطی بالاتر از  $n = 8$ ، می‌توان از اثر نسبت طول به شعاع صرف‌نظر کرد. علاوه بر این، با افزایش طول پوسته استوانه‌ای فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج‌های محیطی پایین‌تر اتفاق می‌افتد.

مشاهده می‌شود که پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌چینی  $[90/0]_{2S}$  نسبت به سایر لایه‌چینی‌ها، در همه نسبت‌های  $C/R$ ، فرکانس پایه بی‌بعد بالاتری دارد که می‌توان نتیجه گرفت، سفتی سازه در این لایه‌چینی نسبت به سایر حالات عملکرد بهتری دارد.

جدول 5 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر لایه‌چینی.

Table 5 Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout for different layers.

C/R	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
$[90/0]_{2S}$	0.087	0.083	0.079	0.072	0.063	0.055
$[90/0]_{2S}$	0.092	0.089	0.084	0.078	0.070	0.055
$[0/90/0/90/0/90/0/90]$	0.089	0.085	0.081	0.074	0.065	0.054

#### 6-1-3- اثر تعداد لایه‌ها

در شکل 7 اثر افزایش تعداد لایه‌ها بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با ضخامت ثابت بر حسب نسبت  $C/R$  نشان داده شده است.

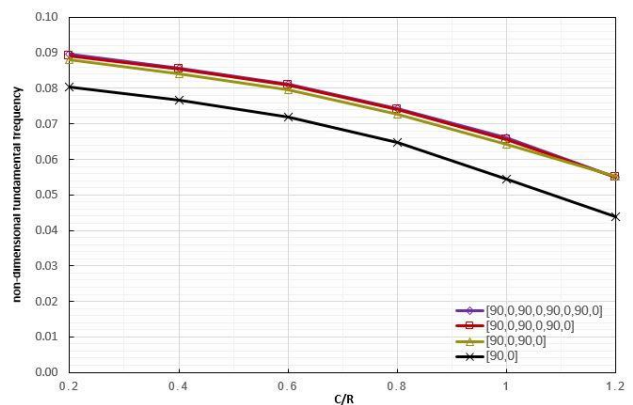


Fig. 7 Comparing the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout for changing the number of layers.

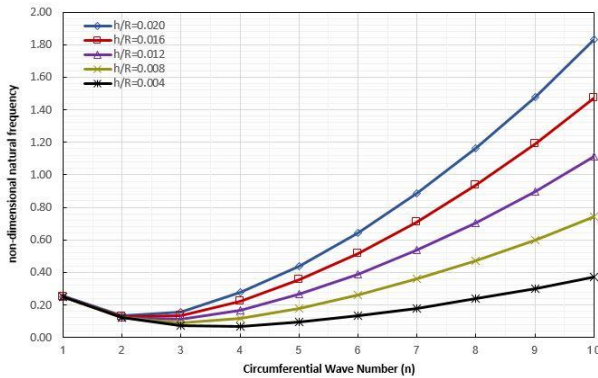
شکل 7 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر تعداد لایه‌ها.

همانطوری که مشاهده می‌شود فرکانس پایه بی‌بعد برای کامپوزیت دولایه کمتر از کامپوزیت با تعداد 4 لایه و بیشتر می‌باشد. با افزایش تعداد لایه‌ها برای بیشتر از 4 لایه، میزان افزایش فرکانس پایه بی‌بعد کمتر می‌گردد. این موضوع بیانگر آن است که سفتی سازه با افزایش تعداد لایه‌ها عملکرد بهتری دارد. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی، افزایش تعداد لایه‌ها (بیشتر از 4 لایه) بر فرکانس پایه بی‌بعد سازه بی‌تأثیر است. در شکل 8 اثر افزایش تعداد لایه‌ها با ضخامت ثابت بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی بر حسب نیم موج محیطی، بررسی گردیده است.

تأثیر این پارامتر تا موج محیطی 2 بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد کم بوده و بعد از آن تأثیر افزایش تعداد لایه‌ها بر سفتی سازه بیشتر شده است، به همین دلیل در موج‌های محیطی بالاتر از  $n = 2$ ، با افزایش تعداد لایه‌ها فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز بیشتر می‌شود. علاوه بر این، با توجه به شکل می‌توان دریافت که فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج محیطی  $n = 3$  اتفاق می‌افتد.



نیست. همچنین در موج‌های محیطی بالاتر از  $n = 2$ ، با افزایش ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) میزان افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز بیشتر می‌شود. علاوه بر این، با افزایش ضخامت پوسته استوانه‌ای فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج‌های محیطی پایین‌تر اتفاق می‌افتد.



**Fig. 12** Comparison of the non-dimensional natural frequencies of laminated composite cylindrical shell with cutout for thickness change,  $C/R = 0.4$ ,  $m = 1$ .

شکل 12 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر ضخامت،  $m = 1$ ،  $C/R = 0.4$ .

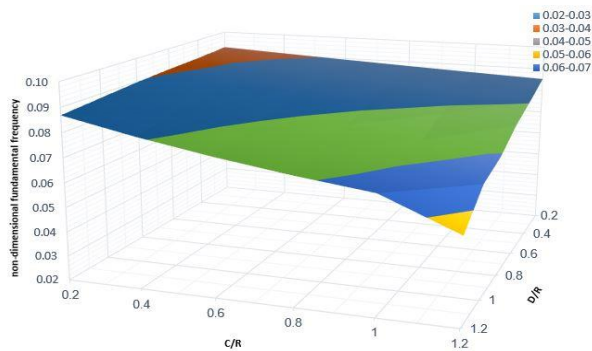
#### 2-6- پارامترهای هندسی گشودگی

مهم‌ترین پارامترهای مربوط به گشودگی که نقش تعیین‌کننده در تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیت دارای گشودگی دارند و در تحقیقات گذشته مورد توجه قرار گرفته‌اند، ابعاد، جهت و محل گشودگی می‌باشند. در ادامه اثر هر یک از این پارامترها بر فرکانس پایه بی‌بعد بررسی شده است. در این بخش، بررسی‌های صورت گرفته برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیت دارای مشخصات هندسی شماره 3 و ماده  $M3$  و لایه‌چینی  $[90/0]_2s$  است.

#### 1-2-6 ابعاد و جهت گشودگی

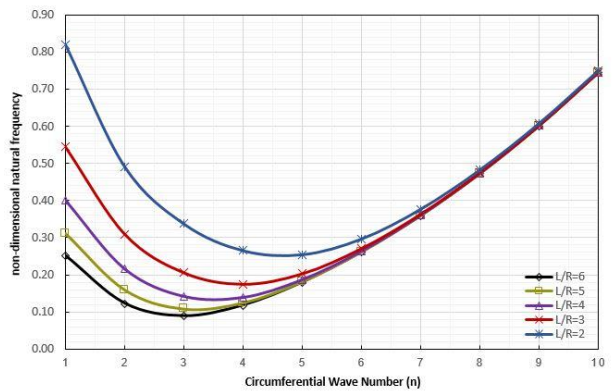
در شکل 13، اثر جهت گشودگی بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت نشان داده شده است.

با توجه به شکل 13، مشاهده می‌شود که تأثیر افزایش ابعاد گشودگی در راستای طولی نسبت به راستای محیطی بیشتر است.



**Fig. 13** Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with cutout for increasing the dimensions of the cutout in the longitudinal and circumferential directions.

شکل 13 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای افزایش ابعاد گشودگی در راستای طولی و محیطی.

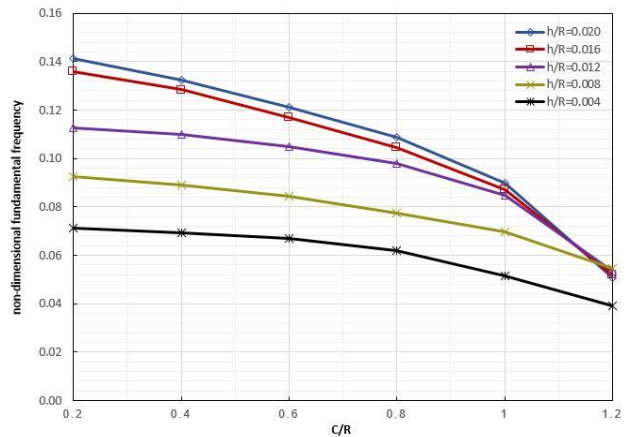


**Fig. 10** Comparison of the non-dimensional natural frequencies of laminated composite cylindrical shell with cutout according to length to radius ratio,  $C/R = 0.4$ ,  $m = 1$ .

شکل 10 مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای نسبت طول به شعاع،  $m = 1$ ،  $C/R = 0.4$ .

#### 5-1-6 نسبت ضخامت به شعاع

در شکل 11، اثر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی همراه با تعداد لایه‌های یکسان بررسی گردیده است.



**Fig. 11** Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of laminated composite cylindrical shell with cutout for thickness change.

شکل 11 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی به ازای تغییر ضخامت.

با توجه به شکل 11 مشاهده می‌شود که اثر افزایش ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) در مقادیر بیشتر از 0.016 بر افزایش فرکانس پایه بی‌بعد، کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی اثر افزایش نسبت ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، مقدار بیشتری است.

در شکل 12، اثر افزایش نسبت ضخامت به شعاع بر روی فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی نشان داده شده است.

تأثیر این پارامتر تا موج محیطی 2 بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد کم بوده و بعد از آن تأثیر افزایش ضخامت بر سفتی سازه بیشتر شده است، در نتیجه باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده است. در حقیقت با افزایش پنج برابری نسبت ضخامت به شعاع، هر کدام از ماتریس‌های  $[A]$ ،  $[B]$  و  $[D]$  به ترتیب 5، 25 و 125 برابر گردیده که با توجه به رابطه 9 نتیجه دور از انتظاری

## 2-2-6- محل قرارگیری گشودگی

در شکل 14، اثر محل قرارگیری گشودگی بر فرکانس پایه بی‌بعد پوسته استوانه-ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با تکیه‌گاه ساده و تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت نشان داده شده است.

با توجه به شکل 14 برای گشودگی با اندازه ثابت، جابجایی محل گشودگی در راستای طولی به سمت مرکز پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده باعث کاهش فرکانس پایه بی‌بعد می‌شود. همچنین میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد با جابجایی محل گشودگی به سمت مرکز سازه با افزایش ابعاد گشودگی، افزایش می‌یابد.

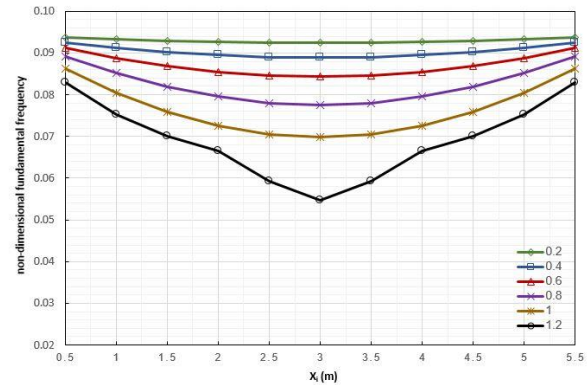


Fig. 14 Comparison of the non-dimensional fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with a cutout with a simple support for changing the location of the cutout for its different dimensions ( $C/R$ ).

شکل 14 مقایسه فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با تکیه‌گاه ساده به ازای تغییر محل قرارگیری گشودگی برای ابعاد متفاوت آن ( $C/R$ ).

## 7- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای بریدگی به روش تحلیلی پرداخته شده است. معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری کلاسیک پوسته و با استفاده از روش نیوتن استخراج شده‌اند. شرایط مرزی پوسته دو سر ساده در نظر گرفته شده است. مؤلفه‌های جابه‌جایی با توجه به شرایط مرزی به صورت بسط سری فوریه دوگانه نوشته شده‌اند. روابط کرنش-جابجایی و انحنا-جابجایی بر اساس نظریه تقریب لاو در نظر گرفته شده است. مدل‌سازی گشودگی توسط تابع توزیع (هویساید) بر معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی، معادلات حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده‌اند. برای صحت‌گذاری، ابتدا نتایج پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با نرم‌افزار المان محدود آباکوس و مقالات پیشین در این زمینه مقایسه شده‌اند و سپس نتایج پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی با نتایج نرم‌افزار آباکوس بررسی شده است که مطابقت خوبی بین آن‌ها وجود دارد. در پژوهش حاضر اثر پارامترهای مختلفی بر ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی مورد بررسی قرار گرفته است که مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای خروجی پژوهش حاضر عبارت‌اند از:

- بررسی نتایج حاصل از تغییر خواص مواد بر فرکانس پایه بی‌بعد بر روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای بریدگی به همراه تعداد لایه-های یکسان و ضخامت ثابت نشان می‌دهد که با توجه به آن، مواد  $M2$

$M6$  و  $M7$ ، به ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس پایه بی‌بعد می‌باشند، همچنین با افزایش ابعاد گشودگی ( $C = D$ )، مقادیر فرکانس پایه بی‌بعد کاهش می‌یابد. با افزایش ابعاد گشودگی در مواد  $M2$  و  $M4$ ، به ترتیب بیشترین (46.15%) و کمترین (38.11%) تأثیر بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد اتفاق می‌افتد. این موضوع بیانگر آن است که ماتریس سفتی ماده  $M4$  در برابر افزایش ابعاد از عملکرد بهتری برخوردار است. در ادامه با توجه به خواص دینامیکی مواد در جدول 1 مانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ... می‌توان مشاهده کرد که مواد کامپوزیت نسبت به مواد فلزی از نتایج مطلوب‌تر برخوردار می‌باشند

- بررسی نتایج حاصل برای چهار نوع لایه‌چینی متفاوت همراه با تعداد لایه-های یکسان و ضخامت ثابت، تأثیر زاویه الیاف بر فرکانس‌های پایه بی‌بعد سازه نشان می‌دهد که در پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی لایه‌چینی  $[90/0]_{2s}$  نسبت به سایر عملکرد بهتری (سفتی سازه بیشتر) دارد. همچنین در لایه‌چینی  $[0/90]_{2s}$  کمترین (37.31%) تأثیر بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد در برابر افزایش ابعاد گشودگی اتفاق می‌افتد.

- بررسی نتایج حاصل از افزایش تعداد لایه‌ها بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با ضخامت ثابت بر حسب نسبت  $\frac{C}{R}$  نشان می‌دهد که فرکانس پایه بی‌بعد برای کامپوزیت دولایه کمتر از کامپوزیت با تعداد 4 لایه و بیشتر می‌باشد. با افزایش تعداد لایه‌ها برای بیشتر از 4 لایه، میزان افزایش فرکانس پایه بی‌بعد کمتر می‌گردد. این موضوع بیانگر آن است که سفتی سازه با افزایش تعداد لایه‌ها عملکرد بهتری دارد. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی، افزایش تعداد لایه‌ها (بیشتر از 4 لایه) بر فرکانس پایه بی‌بعد سازه بی‌تأثیر است. تأثیر این پارامتر تا موج محیطی 2 بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد کم بوده و بعد از آن تأثیر افزایش تعداد لایه‌ها بر سفتی سازه بیشتر شده است، به همین دلیل در موج‌های محیطی بالاتر از  $n = 2$ ، با افزایش تعداد لایه‌ها فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز بیشتر می‌شود. علاوه بر این، با توجه به شکل می‌توان دریافت که فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج محیطی  $n = 3$  اتفاق می‌افتد.

- بررسی نتایج حاصل از تغییر نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی همراه با تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت نشان می‌دهد که اثر افزایش طول (نسبت طول به شعاع) بر کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، کمتر می‌شود. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی اثر افزایش طول بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، کمتر می‌گردد. همچنین در موج‌های محیطی پایین‌تر از  $n = 8$ ، با افزایش طول (نسبت طول به شعاع) فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد که با توجه به این موضوع که پارامتر طول اغلب مواقع در مخرج عبارتهای معادلات تعادلی قرار می‌گرفت، قابل پیش‌بینی است، ولی برای موج محیطی بالاتر از  $n = 8$ ، می‌توان از اثر نسبت طول به شعاع صرف‌نظر کرد. علاوه بر این، با افزایش طول پوسته استوانه‌ای فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج‌های محیطی پایین‌تر اتفاق می‌افتد.

- بررسی نتایج حاصل از تغییر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی همراه با تعداد لایه‌های یکسان نشان می‌دهد که اثر افزایش ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) در مقادیر بیشتر از 0.016 بر افزایش فرکانس پایه بی-

انحنای سطح میانی در جهت‌های محوری و محیطی	$\begin{cases} k_x^\circ \\ k_\phi^\circ \end{cases}$
پیش‌سطح میانی	$k_{x\phi}^\circ$
ماتریس تبدیل	$T$
ماتریس سفتی تبدیل یافته کاهش یافته نظیر لایه k ام	$\bar{Q}_{ij}^k$
ماتریس سفتی کاهش یافته نظیر لایه k ام	$Q_{ij}^k$
مدول الاستیک در جهت‌های اصلی تک لایه کامپوزیت	$\begin{cases} E_{11} \\ E_{22} \end{cases}$
اپراتور دیفرانسیلی (پوسته استوانه‌ای سالم)	$L_{ij}$
اپراتور دیفرانسیلی (پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی)	$L'_{ij}$
تعداد نیم موج‌های طولی	$m$
تعداد موج‌های محیطی	$n$
زمان	$t$
ثابت شکل مود پوسته در جهت محوری (پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی)	$\bar{A}_{mn}$
ثابت شکل مود پوسته در جهت محیطی (پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی)	$\bar{B}_{mn}$
ثابت شکل مود پوسته در جهت شعاعی (پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی)	$\bar{C}_{mn}$
توابع زمانی در مختصات تعمیم یافته	$T_{mn}(t)$
جرم واحد سطح پوسته	$I_1$
ماتریس سفتی پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی	$[K']_{mn}$
ماتریس جرم پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی	$[M']_{mn}$

علائم یونانی

مؤلفه مکانی در جهت محیطی	$\varphi$
موقعیت گشودگی در جهت محیطی	$\varphi_j$
زاویه الیاف نسبت به محور استوانه	$\theta$
چگالی هر لایه	$\rho^k$
بردار تنش	$\sigma$
بردار کرنش	$\varepsilon$
مؤلفه‌های تنش محوری، محیطی و برشی	$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{x\varphi} \end{cases}$
مؤلفه‌های کرنش محوری، محیطی و برشی	$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x\varphi} \end{cases}$
مؤلفه‌های کرنش محوری، محیطی و برشی سطح میانی	$\begin{cases} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_\varphi^\circ \\ \gamma_{x\varphi}^\circ \end{cases}$
ضرایب پواسون	$\begin{cases} \nu_{12} \\ \nu_{21} \end{cases}$
ریشه معادلات غیرخطی	$\lambda$
توابع مثلثاتی در جهت محوری	$\eta_i(x)$
توابع مثلثاتی در جهت محیطی	$\varphi_i(\varphi)$
بردار ضرایب ثابت شکل مود (پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی)	$\Delta_{mn}$
فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی	$\omega_{mn}$

زیر نویس‌ها

متغیر طولی	$i$
متغیر محیطی	$j$

بعد، کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش ابعاد گشودگی اثر افزایش نسبت ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی بر میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد، مقدار بیشتری است. همچنین تأثیر این پارامتر تا موج محیطی 2 بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد کم بوده و بعد از آن تأثیر افزایش ضخامت بر سفتی سازه بیشتر شده است، در نتیجه باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد شده است. همچنین در موج‌های محیطی بالاتر از  $n = 2$ ، با افزایش ضخامت (نسبت ضخامت به شعاع) میزان افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز بیشتر می‌شود. علاوه بر این، با افزایش ضخامت پوسته استوانه‌ای فرکانس پایه بی‌بعد سازه در موج‌های محیطی پایین‌تر اتفاق می‌افتد.

- بررسی نتایج حاصل از تغییر جهت گشودگی بر فرکانس‌های پایه پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت نشان می‌دهد که تأثیر افزایش ابعاد گشودگی در راستای طولی نسبت به راستای محیطی بر فرکانس پایه، بیشتر است.
- بررسی نتایج حاصل از تغییر محل قرارگیری گشودگی بر فرکانس‌های پایه بی‌بعد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه دارای گشودگی با تکیه‌گاه ساده و تعداد لایه‌های برابر و ضخامت ثابت برای گشودگی با اندازه ثابت نشان می‌دهد که جابجایی محل گشودگی در راستای طولی به سمت مرکز پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با تکیه‌گاه ساده باعث کاهش فرکانس پایه بی‌بعد می‌شود. همچنین میزان کاهش فرکانس پایه بی‌بعد با جابجایی محل گشودگی به سمت مرکز با افزایش ابعاد گشودگی، افزایش می‌یابد

8- فهرست علائم

$L$	طول پوسته استوانه‌ای
$R$	شعاع پوسته استوانه‌ای
$h$	ضخامت پوسته استوانه‌ای
$C$	طول گشودگی پوسته استوانه‌ای
$D$	کمان گشودگی پوسته استوانه‌ای
$x$	مؤلفه مکانی در جهت طولی
$z$	مؤلفه مکانی در جهت شعاعی
$\begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}$	مؤلفه جابجایی در جهت‌های محوری، محیطی و برشی
$\begin{cases} P_x \\ P_y \\ P_z \end{cases}$	نیرو وارد بر المان پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی
$\begin{cases} q_x \\ q_\theta \\ q_z \end{cases}$	نیروی تحریک خارجی در جهت‌های محوری، محیطی و شعاعی
$\begin{cases} N_x \\ N_\varphi \\ N_{x\varphi} \end{cases}$	مؤلفه‌های نیرو در جهت‌های محوری، محیطی و برشی
$\begin{cases} M_x \\ M_\varphi \\ M_{x\varphi} \end{cases}$	مؤلفه‌های گشتاور در جهت‌های محوری، محیطی و برشی
$\begin{cases} Q_x \\ Q_\varphi \end{cases}$	مؤلفه نیرو برشی در جهت‌های محوری و محیطی
$HD^*$	تابع توزیع (هویساید)
$HD$	تابع توزیع (هویساید)
$\begin{cases} HD(x) \\ HD(\varphi) \end{cases}$	تابع توزیع در جهت‌های محوری و محیطی
$x_i$	موقعیت بریدگی در جهت طولی

## 9- پیوست‌ها

پیوست الف

$$L'_{32} = \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) v_{,\phi} + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right) v_{,x} + \left( \frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi\phi} + \left( B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) v_{,xxx} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) v_{,\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right) v_{,x} + \left( \frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi\phi} + \left( B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) v_{,xxx} \right]$$

$$L'_{33} = \left[ \left( -\frac{A_{22}}{R^2} \right) w + D_{11} w_{,xxx} + \left( \frac{2D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( -\frac{B_{26}}{R^2} \right) w_{,x\phi} + \frac{3D_{16}}{R} w_{,xxx\phi} + \frac{3D_{26}}{R^3} w_{,x\phi\phi\phi} \right. \\ \left. + \frac{D_{22}}{R^4} w_{,\phi\phi\phi\phi} \right] \\ - HD \left[ \left( -\frac{A_{22}}{R^2} \right) w + D_{11} w_{,xxx} \right. \\ \left. + \left( \frac{2D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi\phi} + \left( -\frac{B_{26}}{R^2} \right) w_{,x\phi} \right. \\ \left. + \frac{3D_{16}}{R} w_{,xxx\phi} + \frac{3D_{26}}{R^3} w_{,x\phi\phi\phi} + \frac{D_{22}}{R^4} w_{,\phi\phi\phi\phi} \right]$$

پیوست ب

$$K'_{11} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left[ A_{11} u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{R} u_{,x\phi} + \frac{A_{66}}{R^2} u_{,\phi\phi} \right] \right. \\ \left. - HD \left[ A_{11} u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{R} u_{,x\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{66}}{R^2} u_{,\phi\phi} \right] \right] \phi_u dx d\phi dz$$

$$K'_{12} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right) v_{,xx} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right) v_{,\phi\phi} \right] \right. \\ \left. - HD \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{16} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{B_{16}}{R} \right) v_{,xx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right) v_{,\phi\phi} \right] \right] \phi_u dx d\phi dz$$

$$K'_{13} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left[ -\frac{A_{12}}{R} w_{,x} - \frac{A_{26}}{R^2} w_{,\phi} + B_{11} w_{,xxx} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) w_{,x\phi\phi} + \frac{2B_{16}}{R} w_{,xx\phi} + \frac{B_{26}}{R^3} w_{,\phi\phi\phi} \right] \right. \\ \left. - HD \left[ -\frac{A_{12}}{R} w_{,x} - \frac{A_{26}}{R^2} w_{,\phi} + B_{11} w_{,xxx} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) w_{,x\phi\phi} + \frac{2B_{16}}{R} w_{,xx\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B_{26}}{R^3} w_{,\phi\phi\phi} \right] \right] \phi_u dx d\phi dz$$

$$K'_{21} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} - \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{A_{26}}{R^2} - \frac{B_{26}}{R^3} \right) u_{,\phi\phi} + \left( A_{16} - \frac{B_{16}}{R} \right) u_{,xx} \right] \right. \\ \left. - HD \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} - \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{A_{26}}{R^2} - \frac{B_{26}}{R^3} \right) u_{,\phi\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( A_{16} - \frac{B_{16}}{R} \right) u_{,xx} \right] \right] \phi_v dx d\phi dz$$

$$L'_{11} = \left[ A_{11} u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{R} u_{,x\phi} + \frac{A_{66}}{R^2} u_{,\phi\phi} \right] \\ - HD \left[ A_{11} u_{,xx} + \frac{2A_{16}}{R} u_{,x\phi} + \frac{A_{66}}{R^2} u_{,\phi\phi} \right]$$

$$L'_{12} = \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right) v_{,xx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B_{26}}{R^3} \right) v_{,\phi\phi} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{16} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B_{16}}{R} \right) v_{,xx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right) v_{,\phi\phi} \right]$$

$$L'_{13} = \left[ -\frac{A_{12}}{R} w_{,x} - \frac{A_{26}}{R^2} w_{,\phi} + B_{11} w_{,xxx} + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) w_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \frac{2B_{16}}{R} w_{,xx\phi} + \frac{B_{26}}{R^3} w_{,\phi\phi\phi} \right] \\ - HD \left[ -\frac{A_{12}}{R} w_{,x} - \frac{A_{26}}{R^2} w_{,\phi} + B_{11} w_{,xxx} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) w_{,x\phi\phi} + \frac{2B_{16}}{R} w_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \frac{B_{26}}{R^3} w_{,\phi\phi\phi} \right]$$

$$L'_{21} = \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} - \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} - \frac{B_{26}}{R^3} \right) u_{,\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( A_{16} - \frac{B_{16}}{R} \right) u_{,xx} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{A_{12} + A_{66}}{R} - \frac{B_{12} + B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{A_{26}}{R^2} - \frac{B_{26}}{R^3} \right) u_{,\phi\phi} + \left( A_{16} - \frac{B_{16}}{R} \right) u_{,xx} \right]$$

$$L'_{22} = \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi} + \left( \frac{2A_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{66} - \frac{D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{2A_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi} + \left( A_{66} - \frac{D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx} \right]$$

$$L'_{23} = \left[ \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{A_{22}}{R^2} \right) w_{,\phi} + \left( \frac{B_{26}}{R^2} - \frac{A_{26}}{R} \right) w_{,x} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} - \frac{D_{12} + D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) w_{,\phi\phi\phi} + \left( \frac{2B_{26}}{R^2} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) w_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( B_{16} - \frac{D_{16}}{R} \right) w_{,xxx} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{A_{22}}{R^2} \right) w_{,\phi} + \left( \frac{B_{26}}{R^2} - \frac{A_{26}}{R} \right) w_{,x} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} - \frac{D_{12} + D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) w_{,\phi\phi\phi} + \left( \frac{2B_{26}}{R^2} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) w_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \left( B_{16} - \frac{D_{16}}{R} \right) w_{,xxx} \right]$$

$$L'_{13} = \left[ \left( \frac{A_{12}}{R} \right) u_{,x} + B_{11} u_{,xxx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} \right) u_{,\phi} + \frac{3B_{16}}{R} u_{,xx\phi} \right. \\ \left. + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi\phi} + \frac{B_{26}}{R^3} u_{,\phi\phi\phi} \right] \\ - HD \left[ \left( \frac{A_{12}}{R} \right) u_{,x} + B_{11} u_{,xxx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} \right) u_{,\phi} \right. \\ \left. + \frac{3B_{16}}{R} u_{,xx\phi} + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi\phi} \right. \\ \left. + \frac{B_{26}}{R^3} u_{,\phi\phi\phi} \right]$$

پیوست ج

$$\begin{aligned}
 M'_{11} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\rho_k - HD * \rho_k] \Phi_u dx d\varphi dz \\
 M'_{12} &= 0 \\
 M'_{13} &= 0 \\
 M'_{21} &= 0 \\
 M'_{22} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\rho_k - HD * \rho_k] \Phi_v dx d\varphi dz \\
 M'_{23} &= 0 \\
 M'_{31} &= 0 \\
 M'_{32} &= 0 \\
 M'_{33} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\rho_k - HD * \rho_k] \Phi_w dx d\varphi dz
 \end{aligned}$$

## 10- مراجع

- [1] Shahani, A. and Kiarasi, F., "Numerical and Experimental Investigation on Post-Buckling Behavior of Stiffened Cylindrical Shells with Cutout subject to Uniform Axial Compression", Journal of Applied and Computational Mechanics, pp. 1-20, 2020.
- [2] Lee, H. and Kwak, M. K., "Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories", J. Sound Vib., Vol. 353, pp. 344-377, 2015.
- [3] Ghorbani, K., Mohammadi, K., Rajabpour, A. and Ghadiri, M., "Surface and size-dependent effects on the free vibration analysis of cylindrical shell based on Gurtin-Murdoch and nonlocal strain gradient theories", J. Phys. Chem. Solids., Vol. 129, pp. 140-150, 2019.
- [4] Takabatake, H., "Static analyses of elastic plates with voids", Int. J. Solids. Struct., Vol. 28, pp. 179-196, 1991.
- [5] Azhari, M., Shahidi, A. R. and Saadatpour, M. M., "Local and post local buckling of stepped and perforated thin plates", Appl. Math. Modelling., Vol. 29, pp. 633-652, 2005.
- [6] Li, G. and Cheng, J., "A Generalized Analytical Modeling of Grid Stiffened Composite Structures", Compos. Struct., Vol. 94, pp. 1117-1127, 2007.
- [7] Zhang, Z., Chen, H. and Ye, L., "A stiffened plate element model for advanced grid stiffened composite plates/shells", J. Compos. Mater., Vol. 45, 2011.
- [8] Wilson, A. J. and Rajasekaran, S., "Elastic stability of all edges simply supported, stepped and stiffened rectangular plate under Biaxial loading", Appl. Math. Modelling., Vol. 38, pp. 479-495, 2014.
- [9] Huang, L., Sheikh, A. H., Ng, C. T. and Griffith, M. C., "An efficient finite element model for buckling analysis of grid stiffened laminated composite plates", Compos. Struct., Vol. 122, pp. 41-50, 2015.
- [10] Omidvaran, C., "Free vibration of grid-stiffened plates", J. Sound. Vib., Vol. 19, pp. 463-472, 1971.
- [11] Kalita, K. and Haldar, S., "Free vibration analysis of rectangular plates with Central cutout", Cogent. Eng., 2016.
- [12] Soleimani, S., Davar, A., Azarafa, R., Jam, J. E. and Zamani, M. R., "Theoretical, numerical, and experimental analyses of free vibrations of glass fiber reinforced polymer plates with central cutouts and free boundaries", Mechanics of Advanced Composite Structures., Vol. 5, pp. 67-74, 2018.
- [13] Li, G. and Cheng, J., "A Generalized Analytical Modeling of Grid Stiffened Composite Structures", Journal of Composite Materials., Vol. 41, 2007.
- [14] Azarafa, R., Golkar, A. H. and Davar, A., "Analytical investigation of Low-Velocity Oblique Impact on Composite Cylindrical Shells", Journal of Science and Technology of Composites., Vol. 3, pp. 1106-1119, 2020.
- [15] Chaudhuri, P. B., Mitra, A. and Sahoo, S., "Free vibration analysis of antisymmetric angle ply laminated composite stiffened hyper

$$\begin{aligned}
 K'_{22} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi} + \left( \frac{2A_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi} + (A_{66} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx} \Big] \\
 &\quad - HD \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{2A_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi} + (A_{66} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx} \Big] \Phi_v dx d\varphi dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'_{23} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{A_{22}}{R^2} \right) w_{,\phi} + \left( \frac{B_{26}}{R^2} - \frac{A_{26}}{R} \right) w_{,x} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} - \frac{D_{12} + D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) w_{,\phi\phi\phi} + \left( \frac{2B_{26}}{R^2} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) w_{,x\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_{16} - \frac{D_{16}}{R} \right) w_{,xxx} \right] \\
 &\quad - HD \left[ \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{A_{22}}{R^2} \right) w_{,\phi} + \left( \frac{B_{26}}{R^2} - \frac{A_{26}}{R} \right) w_{,x} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{12} + B_{66}}{R} - \frac{D_{12} + D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} - \frac{D_{22}}{R^4} \right) w_{,\phi\phi\phi} + \left( \frac{2B_{26}}{R^2} - \frac{2D_{26}}{R^3} \right) w_{,x\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( B_{16} - \frac{D_{16}}{R} \right) w_{,xxx} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'_{31} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \frac{A_{12}}{R} \right) u_{,x} + B_{11} u_{,xxx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} \right) u_{,\phi} + \frac{3B_{16}}{R} u_{,xx\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi\phi} + \frac{B_{26}}{R^3} u_{,\phi\phi\phi} \right] \\
 &\quad - HD \left[ \left( \frac{A_{12}}{R} \right) u_{,x} + B_{11} u_{,xxx} + \left( \frac{A_{26}}{R^2} \right) u_{,\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3B_{16}}{R} u_{,xx\phi} + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) u_{,x\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_{26}}{R^3} u_{,\phi\phi\phi} \right] \Phi_w dx d\varphi dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'_{32} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) v_{,\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right) v_{,x} + \left( \frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi\phi} + \left( B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) v_{,xxx} \right] \\
 &\quad - HD \left[ \left( \frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) v_{,\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) v_{,xx\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right) v_{,x} + \left( \frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) v_{,x\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) v_{,\phi\phi\phi} + \left( B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) v_{,xxx} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K'_{33} &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \left( -\frac{A_{22}}{R^2} \right) w + D_{11} w_{,xxxx} + \left( \frac{2D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \left( -\frac{B_{26}}{R^2} \right) w_{,x\phi} + \frac{3D_{16}}{R} w_{,xxx\phi} + \frac{3D_{26}}{R^3} w_{,x\phi\phi\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D_{22}}{R^4} w_{,\phi\phi\phi\phi} \right] \\
 &\quad - HD \left[ \left( -\frac{A_{22}}{R^2} \right) w + D_{11} w_{,xxxx} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{2D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) w_{,xx\phi\phi} + \left( -\frac{B_{26}}{R^2} \right) w_{,x\phi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3D_{16}}{R} w_{,xxx\phi} + \frac{3D_{26}}{R^3} w_{,x\phi\phi\phi} + \frac{D_{22}}{R^4} w_{,\phi\phi\phi\phi} \right]
 \end{aligned}$$

- shell with cut out”, in *Materials Today: Proceedings.*, Vol. 5, pp. 5563–5572, 2018.
- [16] Zhi-yuan, C. and Hua-ning, W., “Free vibration of FGM cylindrical shells with holes under various boundary conditions”, *J. Sound Vib.*, Vol. 306, pp. 227–237, 2007.
- [17] Azarafza, R., Davar, A. and Baghani, H., “Investigation of Free Vibration of Laminated Composite Conical Shell with Local Attached Mass”, *Mechanics of Advanced Composite Structures.*, Vol. 9, pp. 173-184, 2022.
- [18] Talezadehlari, A., “Free vibration analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method”, In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 7, No. 3, pp. 1120-1132, 2020.
- [19] Y. Ansaryan, Y. Jafari, A. A., “Investigation of Free and Forced Vibration of a Composite Circular Cylindrical Shell with Internal Fluid”, In Persian, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 2, pp. 93-109, 2017.
- [20] Talezadehlari, A. and Rahimi, G. H., “Buckling Analysis of Perforated Composite Cylindrical Shell Using Generalized Differential Quadrature Method (Gdqm)”, In Persian, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 385-396, 2018.
- [21] Khalili, S.M.R. Sedigh, Y. and Hossein Ahari, S.M. M. M., “Experimental and numerical study of the buckling of semi-cylindrical composite lattice”, In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 3, No. 3, pp. 269-276, 2016.
- [22] Khalili, S. M. R. Ahari, S. M. M. M. Sedigh, Y., “Experimental and numerical investigation on semi-cylindrical compositelatticereinforced with triangular cellssubjected to high velocity impact”, In Persian, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 05, No. 02, pp. 208-217, 2018
- [23] Fereidoon, A., Kolasangiani, K. et al., “Study on buckling of steel cylindrical shells with an elliptical cutout under combined loading”, *JCARME.*, Vol. 3, pp. 13-25, 2013.
- [24] Poore, A. L., Barut, A. and Madenci, E., “Free vibration of laminated cylindrical shells with a circular cutout”, *J. Sound Vib.*, Vol. 312, pp. 55–73, 2008.
- [25] Khalili, S. M. R., Azarafza, R. and Davar, A., “Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load”, *Compos. Struct.*, vol. 89, pp. 275–284, 2009.
- [26] Azarafza, R., Khalili, S. M. R., Jafari, A. A. and Davar, A., “Analysis and optimization of laminated composite circular cylindrical shell subjected to compressive axial and transverse transient dynamic loads”, *Thin-Walled Struct.*, vol. 47, pp. 970–983, 2009.
- [27] Tong, B., Li, Y., Zhu, X. and Zhang, Y., “Three-dimensional vibration analysis of arbitrary angle-ply laminated cylindrical shells using differential quadrature method”, *Applied Acoustics.*, vol. 146, pp. 390–397, 2019.
- [28] Ghasemi, A. R. and Mohandes, M., “Comparison between the frequencies of FML and composite cylindrical shells using beam modal function model”, *JCAMECH.*, vol. 50, pp. 239-245, 2019.