



پیش‌بینی رشد آسیب در کامپوزیت‌های لایه‌ای متعامد تحت بارگذاری کششی تک‌محوره

بیژن محمدی^{1*}، آرزو فلاح²، ایمان بیات³

1- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

2- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

3- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* ایران، تهران، صندوق پستی: 19689-36916، bijan_mohammadi@iust.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

دریافت: 1401/04/27

پذیرش: 1401/07/30

کلیدواژگان:

ترک ماتریسی، جدایش بین‌لایه‌ای، کامپوزیت‌های لایه‌ای متعامد، سلول واحد، روش حساب تغییرات

در این پژوهش، به مطالعه وضعیت آسیب چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد تحت بارگذاری استاتیکی تک‌محوره کششی پرداخته شده است. آسیب ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک‌های ماتریسی دو نوع از متداول‌ترین انواع آسیب در چندلایه‌های کامپوزیتی می‌باشد. با استفاده از رویکرد میکرومکانیکی و بر پایه روش حساب تغییرات هشین، به تحلیل میدان تنش و افت خواص مکانیکی با دو الگوی محتمل متقارن و پادمقارن پرداخته می‌شود. در راستای بهبود نتایج حاصل از روش حساب تغییرات روش تقسیم لایه‌ها استفاده می‌شود. با استفاده از شیوه حساب تغییرات توسعه داده شده، نتایج افت خواص مکانیکی به دو شیوه همگن‌سازی نوبتی لایه‌های 90 درجه ترک خورده و روش مدل‌سازی هم‌زمان لایه‌های 90 درجه ترک خورده، مقایسه شده است. سپس از معیار نرخ رهاسازی انرژی جهت پیش‌بینی شروع و رشد ترک‌های ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای القایی، و همچنین وضعیت اشباع ترک‌های ماتریسی استفاده شده است. با مقایسه نتایج تحلیلی و نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود مشاهده شد استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها تأثیر بسزایی در افزایش دقت نتایج دارد.

Prediction of damage propagation in cross-ply laminated composites subjected to uniaxial tensile loading

Bijan Mohammadi^{1*}, Arezoo Fallah¹, Iman Bayat²

1- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* P.O.B. 19689-36916, Iran, Tehran, bijan_mohammadi@iust.ac.ir

Keywords

Matrix Cracking, Induced Delamination, Cross-ply Laminated Composites, Unit Cell, Variational Approach

Abstract

The damage state of cross-ply composite laminates subjected to uniaxial tensile loading was examined in this study. Matrix cracking and induced delamination have been considered as the most common modes of damage in composite laminates. Using a micromechanical approach and based on Hashin variational principles, analysis of the stress field and reduced mechanical properties of a material with two symmetric and antisymmetric patterns have been examined. In order to improve the results obtained from the variational approach, the ply-refinement technique is used. Using the variational approach developed, the results of reduced mechanical properties have been compared to two methods: the homogenization method of 90° layers cracked and the simultaneous analysis method of 90° layers cracked. After, it has been used from an energy-based criterion to predict the initiation and propagation of Matrix cracking and induced delamination and also the saturation state of Matrix cracking. By comparing the analytical results and the numerical results obtained from the finite element software, it was observed that using the ply-refinement technique has a great impact on the increase in the accuracy of the results.

1- مقدمه

در طراحی کامپوزیت‌ها می‌باشد. از مکانیزم‌های آسیبی که در چندلایه‌های کامپوزیتی ممکن است شکل بگیرد، می‌توان به از بین رفتن اتصال الیاف و ماتریس، ترک ماتریسی، تورق یا جدایش بین‌لایه‌ای، پیچ‌خوردگی الیاف، کشیدگی الیاف، کمانش و شکست الیاف دسته‌بندی اشاره نمود. به طور کلی آسیب‌هایی که در یک چندلایه ممکن است شکل بگیرند به دو دسته آسیب‌های درون‌لایه‌ای و آسیب‌های بیرون‌لایه‌ای تقسیم می‌شوند. آسیب‌های درون‌لایه‌ای انواع گوناگونی دارند که می‌توان به کشیدگی الیاف، شکست الیاف و ترک

امروزه کاربرد مواد کامپوزیتی بسیار گسترده شده است و در صنایع مختلف می‌توان حضور آن‌ها را مشاهده نمود. مهم‌ترین مزیت کامپوزیت‌های لایه‌ای نسبت سفتی به وزن و مقاومت به وزن قابل توجه در مقایسه با فلزات می‌باشد. این نوع سازه‌ها کاربردهای متنوعی در صنایع هوایی، حمل‌ونقل، سازه‌های عمرانی و دریایی که در آن‌ها کاهش وزن بسیار مهم است، دارند [1, 2]. شناخت دقیق رفتار کامپوزیت‌ها در آسیب‌ها و انواع بارگذاری‌ها یک اصل مهم

کننده دو لایه و جدا شدن دو لایه به هم چسبیده تعریف می‌شود و در نتیجه انتقال تنش از لایه‌ای به لایه دیگر در ناحیه جدا شده امکان پذیر نمی‌باشد. در صورت ادامه روند جدایی لایه‌ای، بلافاصله سفتی کاهش یافته و منجر به شکست نهایی چندلایه می‌شود [12]. مشاهده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهند که جدایی‌های بین‌لایه‌ای ناشی از ترک‌های ماتریسی تنها پس از شکل‌گیری چندین ترک ماتریسی در چندلایه رخ می‌دهند [13]. شکل 2 شماتیکی از این نوع ترک خوردگی را نشان می‌دهد.

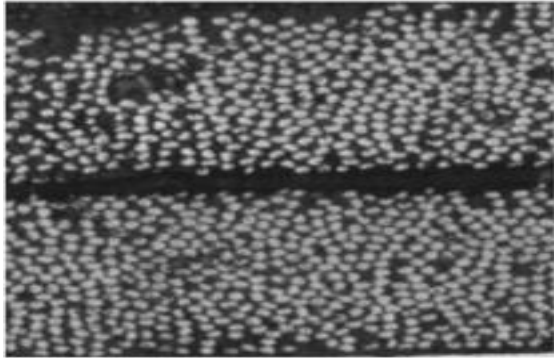


Fig. 2 Induced delamination mechanism in laminated composites [11]
شکل 2 مکانیزم جدایی بین‌لایه‌ای القایی در چندلایه‌های کامپوزیتی [11]

2- مروری بر روش‌های مختلف آسیب

مهم‌ترین موضوع در بررسی و تحلیل مکانیزم‌های آسیب در کامپوزیت‌ها، انتخاب مقیاسی است که چندلایه کامپوزیتی در آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مقیاس‌های مهمی که در آن به بررسی روش‌های مختلف جهت بررسی افت خواص مکانیکی پرداخته می‌شود، به شرح زیر است:

1-2- ماکرومکانیک

در حوزه مواد کامپوزیتی، در دیدگاه ماکرومکانیک کامپوزیت لایه‌ای به صورت یک ماده ارتوتروپیک² با خواص معادل در نظر گرفته می‌شود. در دیدگاه ماکرومکانیک شروع آسیب بر اساس تئوری‌های نظیر معیار شکست تنش ماکزیمم، معیار کرنش ماکزیمم، معیار سای-هیل³، معیار چانگ-چانگ⁴ و مواردی از این دست بررسی می‌گردد. این تئوری‌ها تنها شکست کلی چندلایه را پیش‌بینی می‌کنند. برای مدل‌سازی رشد آسیب پیشرونده مناسب نیستند. به طور کلی ذکر این نکته حائز اهمیت است که جزئیات میکرو ترک‌ها در این دیدگاه مدل نمی‌شود و عموماً اثرات کلی افت سفتی در اثر حضور ترک‌ها و شرایط شروع ترک خوردگی را بررسی می‌کنند. استفاده از این روش در مدل‌سازی‌های پیچیده تحت بارگذاری‌های متفاوت راحت است [14].

2-2- مزومکانیک

تئوری آسیب که در این مقیاس توسعه داده شده است برای اولین بار توسط لادوز⁵ در سال 1983 به کمک تئوری مکانیک آسیب پیوسته ارائه شده است. در دیدگاه مزومکانیک می‌توان آسیب درون یک لایه و همچنین ماکروترک‌هایی که بین لایه‌ها اتفاق می‌افتد را مدل کرد. این نوع مدل‌ها قابلیت بکارگیری برای ساختارهای پیچیده را دارند. مقیاس مزو، مقیاس بین تحلیل میکرومکانیک و تحلیل ماکرومکانیک می‌باشد. مکانیزم‌های آسیب سطح میکرو در مدل‌های مقیاس مزو شناسایی نمی‌شوند و تکامل آسیب بر اساس مشاهدات تجربی لایه آسیب‌دیده می‌باشد [14].

ماتریسی اشاره کرد. مهم‌ترین آسیب بیرون‌لایه‌ای نیز جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک‌های ماتریسی می‌باشد [3-5]. مشاهدات تجربی بیانگر این واقعیت است که مرحله و زمان شروع هر مود آسیب تحت تأثیر پارامترهای مختلفی از جمله ضخامت لایه‌ها، ساختار الیاف و ماتریس، هندسه چندلایه و نوع بارگذاری است. از میان انواع مکانیزم‌های آسیب مرسوم و پراهمیت، ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از آن می‌باشند که باعث افت خواص مکانیکی سازه، تحریک دیگر مودهای آسیب و تسلیم نهایی می‌گردند [6]. به همین دلیل تحقیقات بسیاری در زمینه این دو فرایند آسیب در کامپوزیت‌های لایه‌ای صورت گرفته است. یکی از دقیق‌ترین روش‌های تحلیلی ارائه شده جهت پیش‌بینی وضعیت آسیب، روش حساب تغییرات¹ می‌باشد. که در آن میدان تنش محاسبه شده و میزان افت سفتی در قالب روابط تحلیلی ارائه می‌گردد [7].

در مقیاس مزو، ترک ماتریسی اولین مود خرابی است که در کامپوزیت‌ها رخ می‌دهد [8]. مشاهدات بسیاری مبنی بر این واقعیت است که شروع آسیب در کامپوزیت‌های لایه‌ای به دلیل رشد ترک‌های ریز در لایه‌های 90 درجه رخ می‌دهند و سپس در عرض صفحه گسترده می‌شوند، افزایش بارگذاری موجب پیشروی ترک در لایه‌های مجاور می‌شود [9]. ترک‌های ماتریسی که به آن ترک‌های عرضی نیز گفته می‌شود نوعی آسیب درون‌لایه‌ای است که در راستای ضخامت و موازی الیاف در ماتریس رشد می‌کند. تحقیقات بسیار زیادی بر روی تحلیل مکانیزم آسیب ترک ماتریسی انجام شده که طیف وسیعی از آسیب‌ها در لایه‌چینی‌های متعامد تحت اعمال بارگذاری‌های کششی، خستگی و یا حرارتی به وجود می‌آیند. همچنین عامل اصلی در رفتار غیرخطی کامپوزیت‌های لایه‌ای می‌باشند. معیار اندازه‌گیری این نوع از آسیب‌ها، چگالی ترک در لایه‌های چندلایه بوده و افزایش آن منجر به تغییرات قابل توجهی در خواص مکانیکی کامپوزیت‌های لایه‌ای از قبیل مدول الاستیک در جهت بارگذاری، نسبت پواسون و مواردی از این دست می‌گردد [10]. شکل 1 شماتیکی از این نوع ترک خوردگی را نشان می‌دهد:

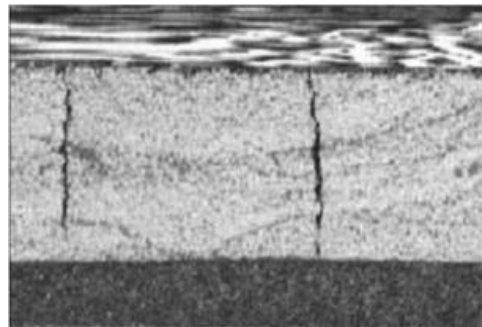


Fig. 1 Matrix cracking mechanism in laminated composites [11]

شکل 1 مکانیزم ترک خوردگی ماتریسی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد [11]

نوع دیگری از آسیب‌های رایج در کامپوزیت‌ها، جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک‌های ماتریسی است که بین لایه‌ها با جهت الیاف متفاوت مشاهده می‌شود. ترک‌های ماتریسی ایجاد شده در لایه‌ها به دلیل وجود تمرکز تنش در نوک ترک‌ها باعث تحریک و جدایی لایه‌ها می‌شود. در این لایه‌چینی‌ها اولین مود آسیب، ترک ماتریسی در لایه 90 درجه است. پس از رشد تدریجی این ترک‌ها عمود بر راستای اعمال بار، ترک‌های بین‌لایه‌ای در طرفین ترک‌های ماتریسی ایجاد و رشد می‌کنند. جدایی بین‌لایه‌ای به صورت از بین رفتن اثر ماده متصل

⁴ Chang-Chang

⁵ Ladeveze

¹ Variational approach analysis

² Orthotropic

³ Tsai-Hill

3-2- میکرومکانیک

دیدگاه میکرومکانیک، تحلیل آسیب را در مقیاس سلول واحد مورد بررسی قرار می‌دهد. سلول واحد نماینده‌ای از حجم ماده است که می‌توان مشخصات مکانیکی آن را به کل ماده تعمیم داد. در چندلایه‌های کامپوزیتی حاوی ترک ماتریسی بر اساس یک قانون از پیش تعیین شده فرض بر این است که ترک‌های ماتریسی در فواصل یکسان از یکدیگر ایجاد می‌شوند [15]. به تبع آن می‌توان میان دو ترک ماتریسی مجاور، یک سلول واحد استخراج کرد و خواص مکانیکی یک چندلایه کامپوزیتی را معادل با خواص مکانیکی سلول واحد دانست. روش‌های میکرومکانیکی متنوعی بر اساس سلول واحد جهت استخراج میدان تنش در چندلایه کامپوزیتی حاوی آسیب توسعه داده شده است که در ادامه به پرکاربردترین روش‌ها پرداخته شده است.

یکی از قدیمی‌ترین و متداول‌ترین مدل‌ها در تحلیل میکرومکانیکی آسیب در بررسی ترک‌های ماتریسی، روش تأخیر برش می‌باشد. مفهوم تأخیر برش برای اولین بار توسط کاکس¹ [16] برای بیان انتقال تنش در کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف کوتاه ارائه شده است. مدل‌های توسعه‌یافته روش تأخیر برش فرض می‌کنند تنش برشی در جهت طولی و عرضی ثابت در نظر گرفته شده و در نتیجه امکان محاسبه تنش‌های نرمال در جهت ضخامت وجود ندارد. فرض ثابت بودن تنش‌ها در جهت‌های داخل صفحه‌ای منجر به صفر شدن تنش نرمال در جهت ضخامت چندلایه می‌شود. صفر شدن تنش‌های نرمال در جهت ضخامت به این علت است که این مدل قابلیت ایجاد تمایز بین چندلایه‌های [0/90] و [90/0] با چگالی ترک ماتریسی یکسان در لایه‌های 90 درجه را ندارد. علاوه بر بررسی ترک‌های ماتریسی، مطالعات بسیار اندکی بر روی جدایی بین‌لایه‌های ناشی از ترک‌های ماتریسی با استفاده از روش تأخیر برش صورت گرفته است [17]. تالرجا² بر این باور است که مدل‌های تأخیر برش پیچیده‌تر، اثری در افزایش دقت روش تأخیر برش ندارند و تنها پارامترهای آن را افزایش داده و از سهولت در بکارگیری این روش می‌کاهد [18].

مک‌کارتنی³ مدل انتقال تنش خود را با توسعه مدل تأخیر برش و کاستن از محدودیت‌های آن، ارائه داد. مک‌کارتنی یک میدان تنش قابل قبول⁴ بر مبنای کرنش صفحه‌ای عمومی ارائه داد که تمامی معادلات تعادل و شرایط مرزی را برخلاف روش‌های تأخیر برش به طور دقیق ارضا می‌کند [19]. مدل انتقال تنش مک‌کارتنی به گفته بسیاری از محققین از جمله نایرن [20] یکی از قدیمی‌ترین و کارآمدترین مدل‌های تأخیر برش به شمار می‌آید که قابلیت محاسبه افت خواص مکانیکی را در لایه‌چینی‌های با الگوی متقارن و پاد متقارن داراست. با این وجود، پیچیدگی‌های پیاده‌سازی و ارضای معادلات سازگاری و شرایط مرزی به صورت میانگین، از ضعف‌های این روش محسوب می‌شود.

هشین⁵ برای اولین بار روش‌های محاسبه میدان تنش و افت سفتی در چندلایه‌های کامپوزیتی را ارائه داده است [7]. این روش اصولاً بر مبنای مینیمم کردن انرژی مکمل بنا شده است. این روش بر مبنای میدان تنش یا میدان جابه‌جایی می‌باشد. در روش حساب تغییرات بر پایه میدان جابه‌جایی تغییر شکل سلول واحد به صورت توابع شکل⁶ به گونه‌ای فرض می‌شود که شرایط مرزی جابه‌جایی را در همه نقاط ارضا نماید. پس ضرایب مجهول در این توابع با استفاده از روش مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل کل محاسبه می‌شوند و لذا در این روش یک حد بالایی برای افت سفتی چندلایه‌های کامپوزیتی ترک‌خورده استخراج می‌شود [17].

در روش حساب تغییرات بر پایه میدان تنش، ابتدا یک میدان تنش قابل قبول ارائه می‌شود که تمامی معادلات تعادل و شرایط مرزی را ارضا می‌کند و با استفاده از مینیمم‌کردن انرژی مکمل و تبدیل آن به معادله اویلر-لاگرانژ توابع مجهول موجود در میدان تنش محاسبه می‌شوند. ضرایب مجهول ناشی از حل معادله اویلر-لاگرانژ نیز با استفاده از شرایط مرزی ذاتی و طبیعی معین می‌شوند. در این روش یک حد پایین برای افت سفتی چندلایه حاوی ترک ماتریسی محاسبه می‌شود. از آنجا که در روش حساب تغییرات بر پایه میدان تنش کلیه معادلات تعادل و شرایط مرزی به صورت دقیق ارضا می‌شوند، می‌توان این مدل را دقیق‌ترین روش موجود برای تعیین میدان تنش و افت خواص مکانیکی در چندلایه حاوی آسیب دانست. از روش حساب تغییرات در بررسی جدایی بین‌لایه‌های ناشی از ترک‌های ماتریسی نیز مطالعات بسیاری صورت گرفته است.

نایرن⁷ و هو⁸ [21] جدایی بین‌لایه‌های ایجاد شده در نوک ترک‌های ماتریسی در چندلایه‌های متعامد با استفاده از روش حساب تغییرات تحلیل کردند. نتایج به دست آمده را با نرخ رهاسازی انرژی ناشی از رشد ترک ماتریسی مقایسه نمودند و نشان دادند در رقابت مکانیزم‌های آسیب، ابتدا ترک‌های ماتریسی غالب هستند. اما با رشد ترک‌های ماتریسی، نرخ رهاسازی انرژی ناشی از جدایی بین‌لایه‌های بیشتر می‌شود و بدین ترتیب رشد ترک‌های ماتریسی متوقف می‌شود و جدایی بین‌لایه‌های به عنوان مکانیزم غالب شروع به رشد می‌کند. حاجی‌کاظمی و صدر [22] با استفاده از شیوه وینوگرادوف موفق به محاسبه میدان تنش و افت سفتی در چندلایه‌های متعامد با لایه‌چینی دلخواه به شرط وقوع ترک ماتریسی در یکی از لایه‌ها شدند. اخیراً محمدی و پاکدل [23] مدل توسعه‌یافته‌تری را بر اساس حساب تغییرات پیشنهاد داده است که می‌توان میدان تنش سلول واحد حاوی انواع الگوهای محتمل توزیع ترک‌های ماتریسی را استخراج کرد و همچنین به بررسی افت خواص مکانیکی در چندلایه‌هایی که آسیب در بیش از یک لایه دارد نیز پرداخته است.

در این مقاله، به مطالعه وضعیت آسیب چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد تحت بارگذاری استاتیکی تک‌محوره کششی پرداخته خواهد شد. با استفاده از رویکرد میکرومکانیکی و بر پایه روش حساب تغییرات [23]، به تحلیل میدان تنش و افت خواص مکانیکی با دو الگوی محتمل متقارن و پادمتقارن پرداخته می‌شود. با استفاده از شیوه حساب تغییرات توسعه داده شده، نتایج افت خواص مکانیکی به دو شیوه همگن‌سازی نوبتی لایه‌های 90 درجه ترک خورده و روش مدل‌سازی هم‌زمان لایه‌های 90 درجه ترک خورده، مورد محاسبه قرار می‌گیرد. از معیار نرخ رهاسازی انرژی جهت پیش‌بینی شروع و رشد ترک‌های ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌های القایی، و همچنین وضعیت اشباع ترک‌های ماتریسی استفاده خواهد شد. همچنین در راستای بهبود نتایج حاصل از روش حساب تغییرات روش تقسیم لایه‌ها استفاده می‌شود.

3-3- معادلات حاکم بر مسئله

برای بررسی محاسبه میدان تنش و افت خواص مکانیکی در چندلایه‌های کامپوزیتی روش‌های مختلفی ارائه شده است. هشین برای اولین بار به کمک روش حساب تغییرات این روش را معرفی کرد که بعدها محققین بسیاری به آن پرداختند. اخیراً محمدی و پاکدل [23] توانستند مدل توسعه‌یافته‌تری را پیشنهاد دهند که به وسیله آن می‌توان افت خواص مکانیکی را در چندلایه‌هایی که آسیب در بیش از یک لایه قرار دارد و اثر متقابل آن‌ها بر یکدیگر بررسی

⁵ Hashin⁶ Shape function⁷ Nairn⁸ Hu¹ Cox² Talreja³ McCartney⁴ Admissible stress

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(i)}(x, z) &= \varphi_i'(x)z + f_i(x) \\ \sigma_{zz}^{(i)}(x, z) &= -\left[\frac{1}{2}\varphi_i''(x)z^2 + f_i'(x)z + g_i(x)\right] \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه (3)، $f_i(x)$ و $g_i(x)$ توابعی نامعلوم از متغیر x هستند. با استفاده از معادلات پیوستگی تنش بین لایه‌ها و تقارن نسبت به صفحه میانی و شرایط مرزی محاسبه خواهند شد. علاوه بر شرایط مرزی خارجی باید بارهای خارجی اعمالی به چندلایه با تنش‌های داخلی در تعادل باشند. با فرض اینکه فرایند ترک خوردن در شرایط بار- ثابت رخ دهد، بار پیش و پس از وقوع آسیب برابر خواهد بود. تعادل بارهای وارده با تنش‌ها برای چندلایه فاقد آسیب:

$$N_{xx} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{xx} dz = \sum_{i=1}^{4N} \sigma_{xx}^{0(i)} t^{(i)} \quad (4)$$

برای چندلایه حاوی آسیب رابطه تعادل با نیروهای خارجی:

$$N_{xx} = \int_{-h}^h \tilde{\sigma}_{xx} dz = \sum_{i=1}^{4N} (\sigma_{xx}^{0(i)} - \varphi_i(x)) t^{(i)} \quad (5)$$

با مقایسه روابط (4) و (5) رابطه (6) استخراج می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{4N} \varphi_i(x) t^{(i)} = 0 \quad (6)$$

به منظور یافتن میدان تنش قابل قبول $\varphi_i(x)$ از اصل مینیمم انرژی مکمل می‌توان آن را استخراج کرد. انرژی مکمل سلول واحد کامپوزیت لایه‌ای حاوی آسیب طبق رابطه (7) قابل تعریف است.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_c &= \frac{1}{2} \int_V \tilde{\sigma} S \tilde{\sigma} dV = U_c^0 + U_c' \\ U_c^0 &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^0 S \sigma^0 dV \\ U_c' &= \frac{1}{2} \int_V \sigma S \sigma dV \end{aligned} \quad (7)$$

که در روابط بالا S ماتریس نرمی محلی، V حجم سلول واحد چندلایه کامپوزیتی، σ^0 میدان تنش در چندلایه کامپوزیتی ترک نخورده و σ میدان تنش اغتشاشی می‌باشد. انرژی مکمل در حالت فاقد آسیب در محاسبات وارد نمی‌شود، زیرا انرژی مکمل پیش از وقوع ترک مستقل از تنش‌های اغتشاشی و در نتیجه مستقل از تابع نامعلوم φ_i است. بنابراین برای استخراج تابع نامعلوم φ_i ، کفایت تنها انرژی مکمل ناشی از تنش اغتشاشی در سلول واحدی به طول $2a$ که توسط دو ترک مجاور محصور شده است، مینیمم شود. برای سلول واحد مورد نظر انرژی مکمل ناشی از تنش اغتشاشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_c' = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left\{ \sum_{i=1}^{4N} \int_{V_i} W^i dz \right\} dx \quad (8)$$

که در رابطه بالا، $W^{(i)}$ چگالی انرژی تنش اغتشاشی لایه نام است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

نمود. جهت محاسبه میدان تنش می‌بایست سلول واحدی استخراج شود. کامپوزیت لایه‌ای را می‌توان مجموعه‌ای از سلول‌های واحد که توسط دو ترک ماتریسی احاطه شده‌اند، در نظر گرفت. با توجه به فرض توزیع یکنواخت ترک‌ها در لایه‌های 90 درجه، فاصله هر دو ترک مجاور $2a$ در نظر گرفته می‌شود و می‌توان میدان تنش حاصل از سلول واحد را به کل چندلایه کامپوزیتی تعمیم داد. زاویه قرارگیری الیاف به صورت متعامد است و تقارن نسبت به صفحه میانی وجود دارد. چندلایه در محور مختصاتی که ترک‌ها در لایه‌های 90 درجه قرار دارند، تحت بارگذاری تک‌محوره کششی داخل صفحه N_{xx} که به صورت یکنواخت وارد شده، قرار گرفته است. به همین ترتیب ترتیب الگوی توزیع ترک در سلول واحد را می‌توان در دو حالت متقارن و پاد متقارن در نظر گرفت.

در شیوه حساب تغییرات با استفاده از روش هشین، میدان تنش موجود در لایه‌ها برای کامپوزیت لایه‌ای حاوی آسیب از جمع تنش‌ها در حالت فاقد آسیب و ناشی از وجود آسیب ایجاد شده است. میدان تنش به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود.

$$\tilde{\sigma}_{mn}^{(i)} = \sigma_{mn}^{0(i)} + \sigma_{mn}^{(i)} \quad (1)$$

ترم $\sigma_{mn}^{0(i)}$ در معادله (1) تنش کامپوزیت لایه‌ای فاقد آسیب است که با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات لایه‌ای¹ قابل محاسبه است. ترم $\sigma_{mn}^{(i)}$ بیانگر تنش اغتشاشی در لایه نام می‌باشد که بر خلاف تنش‌های فاقد آسیب می‌تواند تابعی از مکان باشد. جهت پیدا کردن میدان تنش اغتشاشی باید فرضیات زیر اعمال شوند:

- صفر بودن تنش‌ها در سطوح خارجی کامپوزیت‌های لایه‌ای
- صفر بودن تنش‌ها در سطوح ترک‌ها
- پیوستگی تنش‌ها در محل اتصال لایه‌ها

ذکر این نکته حائز اهمیت است که فرض می‌شود تنش‌های اغتشاشی داخل صفحه هر لایه، تنها در جهت x تغییر می‌کند و تنش‌های اغتشاشی در جهت ضخامت در هر لایه ثابت است. میدان تنش مستقل از راستای محور عرضی (محور y) است زیرا ترک در سیستم مختصات در راستای y گسترده شده‌اند و همچنین از اثر لبه‌ها نیز صرف‌نظر شده است. فرض ثابت بودن ضخامت لایه، نتایج را دچار مشکل می‌کند زیرا در راستای ضخامت با تغییرات تنش‌های داخلی و تمرکز تنش در رئوس ترک‌ها مواجه می‌شویم و این فرض شبیه‌سازی تمرکز تنش را غیرممکن می‌کند. از این رو از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها² استفاده می‌کنیم. در این روش یک لایه را به چندین لایه با خواص مشابه با لایه اولیه تقسیم نموده و بنابراین تغییرات تنش در راستای ضخامت برای هر لایه به سادگی قابل مدل‌سازی است. لازم به ذکر است تنش‌های داخل صفحه در هر زیرلایه مجاور می‌توانند متفاوت باشند.

تنش اغتشاشی داخل صفحه در هر لایه به صورت رابطه (2) بیان می‌شود.

$$\sigma_{xx}^{(i)} = -\varphi_i(x) \quad (2)$$

در این رابطه $\varphi_i(x)$ تابعی نامعلوم از x است. با این وجود ترم‌های دیگر تانسور تنش می‌توانند تابعیتی از هر دو مختصات x و z را داشته باشند. با استفاده از تابع تنش اغتشاشی داخل صفحه می‌توان توابع تنش اغتشاشی خارج صفحه را از معادلات تعادل به صورت رابطه (3) استخراج کرد.

³ Load control

¹ Classical laminated plate theory (CLPT)

² Ply refinement

محور z ، شرایط $\tilde{\sigma}_{xz}|_{x=x_0} = -\tilde{\sigma}_{xz}|_{x=-x_0}$ در سرتاسر سلول واحد برقرار است [21].

تقارن انتقالی: به دلیل اینکه سلول واحد، نماینده چندلایه کامپوزیتی در طول است و میدان تنش آن به کل کامپوزیت قابل تعمیم است، به همین خاطر پیوستگی تنش‌های $\tilde{\sigma}_{xx}$ و $\tilde{\sigma}_{zz}$ در طرفین سلول واحد در $x = \pm a$ باید برقرار باشد. با استفاده از دیاگرام آزاد ارائه‌شده در شکل 3 که مربوط به یک سلول واحد که وجه سمت راست سلول واحد اول در $x = a$ در واقع وجه سمت چپ سلول واحد دوم در $x = -a$ است. با توجه به اینکه تمامی سلول‌های واحد از نظر هندسی، بارگذاری و میدان تنش به‌طور کامل یکسان هستند، بنابراین میدان تنش بر روی سطح $x = -a$ در سلول واحد دوم عیناً مشابه میدان تنش بر روی سطح $x = a$ در سلول واحد اول است. به این ترتیب پیوستگی تنش‌ها بر روی فصل مشترک دو سلول واحد مجاور در $x = \pm a$ اقتضا می‌کند که تنش‌های $\tilde{\sigma}_{xz}$ و $\tilde{\sigma}_{xx}$ بر روی این دو سطح برابر باشد، به طوری که $\tilde{\sigma}_{xz}|_{x=a} = \tilde{\sigma}_{xz}|_{x=-a}$ که در آن $n = x, z$.

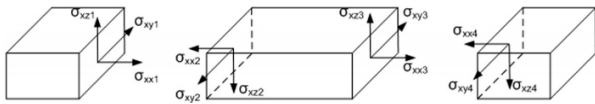


Fig. 3 Axial stress, in-plane shear stress, and transverse shear stress at the boundary of an un-cracked lamina [22]

شکل 3 ارتباط تنش‌های محوری، برشی عرضی و برشی داخل صفحه در سلول‌های شاخص کنار هم در یک لایه‌ی ترک نخورده [22]

علاوه بر شرایط مرزی ذکرشده، شرایط مرزی طبیعی نیز از طریق اعمال شرایط مرزی ذاتی در معادلات شرایط مرزی که از ساده‌سازی انتگرال رابطه (13) به دست می‌آید، محاسبه می‌شود. در نهایت از طریق حل دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ با استفاده از شرایط مرزی ذاتی و طبیعی، تابع ناشناخته φ_i و در نتیجه میدان تنش سلول واحد استخراج می‌شود.

اصل مینیمم انرژی مکمل یادآور این است که انرژی مکمل حقیقی سلول واحد U_c همواره کمتر از انرژی مکملی است که با استفاده از یک میدان تنش قابل قبول \tilde{U}_c محاسبه می‌شود. بنابراین اصل مینیمم انرژی مکمل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma} S^0 \bar{\sigma} \cdot V = U_c \leq \tilde{U}_c = \frac{1}{2} \bar{\sigma} S^0 \bar{\sigma} \cdot V + U_c' \quad (13)$$

که در رابطه بالا S^* ماتریس نرمی مؤثر^۲ برای یک چندلایه حاوی آسیب، S^0 ماتریس نرمی مؤثر برای چندلایه فاقد آسیب، V حجم چندلایه، $\bar{\sigma}$ تنش متوسط معادل بارهای وارده می‌باشند. طرف چپ عبارت بالا بیانگر انرژی مکمل واقعی^۳ و طرف راست آن بیانگر انرژی مکملی است که توسط یک میدان تنش قابل قبول محاسبه شده است و مؤلفه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{N_{xx}}{2h} \quad (14)$$

انرژی مکمل ناشی از تنش اغتشاشی U_c' با استفاده از میدان تنش اغتشاشی استخراج شده قابل محاسبه است. ماتریس نرمی مؤثر چندلایه کامپوزیتی حاوی ترک به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$W^{(i)} = \{\sigma^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma^{(i)}\} \\ \{\sigma^{(i)}\}^T = \{\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}, \sigma_{xz}^{(i)}\} \quad (9)$$

همچنین $[S^{(i)}]$ ماتریس نرمی لایه نام در محور مختصاتی است که ترک‌ها در راستای محور y گسترده شده‌اند. به منظور محاسبه $[S^{(i)}]$ ، کافی است تا ماتریس نرمی محلی لایه نام بر اساس زاویه قرارگیری الیاف آن (به عنوان مثال 90 درجه برای لایه‌های ترک‌خورده) نسبت به محور مختصات دوران داده شود. با توجه به اینکه میدان تنش اغتشاشی خود تابعی است از تابع نامعلوم φ_i با قرار دادن تنش اغتشاشی هر زیرلایه در رابطه (8)، و انتگرال‌گیری در راستای z انرژی مکمل به صورت یک تابعی از تابع ناشناخته φ_i و مشتقات آن نسبت به x به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$U_c' = \frac{1}{2} \int_{-a}^a F(\varphi_i'', \varphi_i', \varphi_i) \cdot dx, \quad i = 1, \dots, 4N \quad (10)$$

که در آن F تابعی اسکالر از تابع نامعلوم φ_i است. مینیمم کردن انرژی مکمل و استخراج تابع ناشناخته میدان تنش، از طریق اعمال اپراتور حساب تغییرات^۱ به تابع رابطه (10) و برابر قرار دادن با صفر $(\delta U_c' = 0)$ به شکل زیر صورت می‌گیرد:

$$\int_{-a}^a \delta F(\varphi_i'', \varphi_i', \varphi_i) \cdot dx = 0, \quad i = 1, \dots, 4N \quad (11)$$

بر اساس اصول روش حساب تغییرات، رابطه (11) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\int_{-a}^a \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_i''} (\delta \varphi_i'') + \frac{\partial F}{\partial \varphi_i'} (\delta \varphi_i') + \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} (\delta \varphi_i) \right) \cdot dx = 0, \\ i = 1, \dots, 4N \quad (12)$$

معادله حساب تغییرات رابطه (12) با انتگرال‌گیری زنجیره‌ای به یک دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ با استفاده از مجموعه شرایط مرزی موردنیاز قابل ساده‌سازی است که در ادامه به مطالعه هر یک از موارد ترک ماتریسی میانی، متقارن و پادمقارن بیرونی پرداخته خواهد شد. برای حل دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ و استخراج تابع ناشناخته، به شرایط مرزی ذاتی و طبیعی نیاز است. مجموع شرایط مرزی ذاتی موردنیاز برای حل دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

- سطوح آزاد: تنش‌ها بر روی سطوح آزاد صفر در نظر گرفته می‌شوند و همچنین بر روی سطوح ترک نیز تنش‌ها صفر فرض می‌شوند. به همین خاطر، تنش‌های $\tilde{\sigma}_{xx}$ و $\tilde{\sigma}_{xz}$ بر روی سطوح ترک‌های ماتریسی برابر صفر هستند.
- پیوستگی تنش‌ها در محل اتصال لایه‌ها: شرط پیوستگی تنش‌ها در راستای محور x اقتضا می‌کند تا تنش‌های $\tilde{\sigma}_{xx}$ و $\tilde{\sigma}_{xz}$ در سلول واحد در راستای محور x (به جز روی سطوح ترک‌ها) در مرز دو زیر لایه مجاور برابر در نظر گرفته شود.
- تقارن چرخشی: سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی آسیب، دارای تقارن چرخشی حول محور z است. تقارن چرخشی یعنی هندسه و بارگذاری سلول واحد با چرخش 180 درجه حول محور z بر روی خود منطبق می‌شود. در واقع با توجه به تقارن چرخشی سلول واحد حول

¹ Variational operator

² Effective compliance matrix

³ True complementary energy

شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها در راستای محور z با در نظر گرفتن جدایی بین‌لایه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

- صفر بودن تنش‌ها در سطوح خارجی چندلایه کامپوزیتی

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_c}^{(2N)} = \sigma_{xz_d}^{(2N)} = 0 \\ \sigma_{zz_c}^{(2N)} = \sigma_{zz_d}^{(2N)} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

- پیوستگی تنش‌ها در محل اتصال لایه‌ها

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_c}^{(i)} = \sigma_{xz_c}^{(i+1)}, \quad \sigma_{xz_d}^{(i)} = \sigma_{xz_d}^{(i+1)} \\ \sigma_{zz_c}^{(i)} = \sigma_{zz_c}^{(i+1)}, \quad \sigma_{zz_d}^{(i)} = \sigma_{zz_d}^{(i+1)} \end{aligned} \quad (19)$$

- صفر بودن تنش‌ها در سطح جدایی بین‌لایه‌ای

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_d}^{(N)} = \sigma_{xz_d}^{(N+1)} = 0 \\ \sigma_{zz_d}^{(N)} = \sigma_{zz_d}^{(N+1)} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

- تقارن کامپوزیت لایه‌ای نسبت به صفحه میانی

$$\sigma_{xz_c}^{(1)} = \sigma_{xz_d}^{(1)} = 0 \quad (21)$$

با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی و شرط معادلات حاصل از تعادل تنش‌های داخلی با نیروهای اعمالی خارجی، میدان تنش قابل قبول برای ناحیه فاقد جدایی بین‌لایه‌ای استخراج می‌شود.

همان‌طور که پیش از این بیان شد تابع نامعلوم φ_i از طریق مینیمم سازی انرژی مکمل به دست می‌آید. به علت تقارن سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین‌لایه‌ای نسبت به صفحه xy ، می‌توان انرژی مکمل نیمه بالایی سلول واحد را مینیمم کرد. همچنین تقارن سلول واحد نسبت به صفحه yz نیز منجر به انرژی مکمل یکسان در هر دو ناحیه حاوی جدایی بین‌لایه‌ای در رابطه (8) و اعمال تقارن‌های ذکر شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} U_c' = \int_{d-a}^{a-d} \left\{ \sum_{i=1}^{2N} \int_{Z_{i-1}}^{Z_i} \{\sigma_c^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma_c^{(i)}\} dz \right\} dx \\ + 2 \int_{a-d}^a \left\{ \sum_{i=1}^{2N} \int_{Z_{i-1}}^{Z_i} \{\sigma_d^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma_d^{(i)}\} dz \right\} dx \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \{\sigma_c^{(i)}\}^T = \{\sigma_{xx_c}^{(i)}, \sigma_{zz_c}^{(i)}, \sigma_{xz_c}^{(i)}\} \\ \{\sigma_d^{(i)}\}^T = \{\sigma_{xx_d}^{(i)}, \sigma_{zz_d}^{(i)}, \sigma_{xz_d}^{(i)}\} \end{aligned} \quad (23)$$

با در نظر گرفتن میدان تنش نواحی فاقد و حاوی جدایی بین‌لایه‌ای در رابطه (23) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} U_c' = \int_{d-a}^{a-d} F_c(x, \{\varphi_c''\}, \{\varphi_c'\}, \{\varphi_c\}) dx \\ + 2 \int_{a-d}^a F_d(x, \{\varphi_d''\}, \{\varphi_d'\}, \{\varphi_d\}) dx \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \{\varphi_c\}^T = \{\varphi_{1c}, \varphi_{2c}, \dots, \varphi_{2N-1c}\} \\ \{\varphi_d\}^T = \{\varphi_{2d}, \varphi_{3d}, \dots, \varphi_{2N-2d}\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$S_{11}^* \leq S_{11}^0 + \frac{1}{V} (U_c') \quad (15)$$

نهایتاً ثابت مهندسی یک چندلایه حاوی آسیب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E_x = \frac{1}{S_{11}^*} \quad (16)$$

که در عبارت بالا E_x مدول سفتی محوری می‌باشد. در ادامه به ارائه روند استخراج میدان تنش و سفتی باقیمانده برای چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی متقارن و پادمقارن پرداخته شده است.

• ترک ماتریسی میانی و جدایی بین‌لایه‌ای

در این بخش سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی میانی تحت بارگذاری تک‌محوره کششی یکنواخت داخل صفحه‌ای می‌باشد، که لایه‌های 90 درجه دچار ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از آن شده‌اند و دارای تقارن هندسی و بارگذاری نسبت به صفحه xy می‌باشد. می‌توان میدان تنش سلول واحد را تنها در نیمه ($z \geq 0$) در نظر گرفت و به تمام حجم سلول واحد تعمیم داد. معادله حاصل از تعادل تنش داخلی با نیروی اعمالی خارجی رابطه (6) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sum_{i=1}^{2N} \varphi_i(x) t^{(i)} = 0 \quad (17)$$

جهت یافتن میدان تنش قابل قبول همان‌طور که قبلاً بیان شد، توابع نامعلوم f و g از طریق اعمال شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌های خارج صفحه در راستای ضخامت محاسبه می‌شوند. باید به این نکته توجه کرد که شرایط پیوستگی تنش‌ها در فصل مشترک زیرلایه‌ها در ناحیه حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ($|x| > a-d$) با دیگر قسمت‌های سلول واحد متفاوت است. بنابراین، شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها در دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای متفاوت خواهد بود. به همین علت سلول واحد، مطابق شکل 4 به دو ناحیه حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ($|x| > a-d$) و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای ($|x| < a-d$) تقسیم می‌شود. لذا مؤلفه‌های میدان تنش برای دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای به ترتیب با اندیس‌های d و c از یکدیگر متمایز می‌شوند.

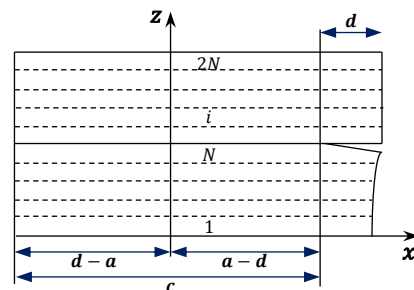


Fig. 4 Unit cell of laminate containing mid matrix crack with induced delamination

شکل 4 سلول واحد حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی میانی

تقارن چرخشی

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=d-a} &= \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=d-a} = \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}(d-a) &= \varphi_{i_c}(a-d), \\ \delta\varphi_{i_c}(d-a) &= \delta\varphi_{i_c}(a-d), \quad i = 1 \dots 2N-1 \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=d-a} &= -\tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=d-a} = -\sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}'(d-a) &= -\varphi_{i_c}'(a-d), \\ \delta\varphi_{i_c}'(d-a) &= -\delta\varphi_{i_c}'(a-d), \quad i = 1 \dots 2N-1 \quad (32) \\ \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} &= -\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=-a}, \quad i = N+1 \dots 2N-2 \quad (33) \end{aligned}$$

تقارن انتقالی

$$\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=-a}, \quad i = N+1 \dots 2N-2 \quad (34)$$

شرایط مرزی طبیعی از جایگذاری شرایط مرزی ذاتی در رابطه (29) به دست می‌آیند. در شرایط مرزی طبیعی باید توجه کرد که توابع نامعلوم φ_{i_c} و φ_{i_d} در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای در $x = a-d$ وابسته به یکدیگر هستند. با در اختیار داشتن کلیه شرایط مرزی و حل معادلات اویلر-لاگرانژ، توابع نامعلوم φ_{i_c} و φ_{i_d} در پی آن میدان تنش اغتشاشی به دست می‌آید.

ترک ماتریسی پادمتقارن بیرونی و جدایی بین‌لایه‌ای

همان‌طور که قبلاً جهت یافتن میدان تنش قابل قبول ذکر شد، توابع نامعلوم f و g از طریق اعمال شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌های خارج صفحه در راستای ضخامت محاسبه می‌شوند. باید به این نکته توجه کرد که شرایط پیوستگی تنش‌ها در فصل مشترک زیرلایه‌ها در ناحیه حاوی جدایی بین‌لایه‌ای با دیگر قسمت‌های سلول واحد متفاوت است. بنابراین، شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها برای دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای متفاوت خواهد بود. به همین علت سلول واحد، مطابق شکل 5 به دو ناحیه حاوی جدایی بین‌لایه‌ای در $(d < |x| < a-d)$ و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای در $(a-d < |x| < d)$ تقسیم می‌شود. لذا مؤلفه‌های میدان تنش برای دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای به ترتیب با اندیس‌های d و c از یکدیگر متمایز می‌شوند.

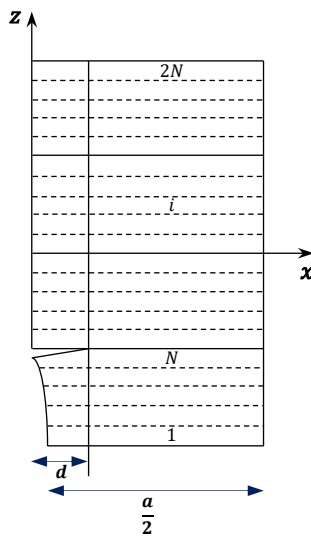


Fig. 5 Unit cell of staggered outer-ply cracked laminate with induced delamination

شکل 5 سلول واحد حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی پادمتقارن بیرونی

جهت مینیمم‌سازی انرژی مکمل اغتشاشی، می‌توان از اعمال اپراتور حساب تغییرات استفاده کرد و رابطه (24) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U'_c &= \int_{d-a}^{a-d} \delta F_c \cdot dx + 2 \int_{a-d}^a \delta F_d \cdot dx = 0 \\ &\int_{d-a}^{a-d} \sum_{i=1}^{2N-1} \left[\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} (\delta \varphi_{i_c}) + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}'} (\delta \varphi_{i_c}') + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}''} (\delta \varphi_{i_c}'') \right] \cdot dx \\ &+ 2 \int_{a-d}^a \left\{ \sum_{i=2}^{2N-2} \left[\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} (\delta \varphi_{i_d}) + \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}'} (\delta \varphi_{i_d}') + \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}''} (\delta \varphi_{i_d}'') \right] \right\} \cdot dx \\ &= 0 \quad (26) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن انتگرال‌گیری زنجیره‌ای و با توجه به اینکه توابع نامعلوم φ_{i_c} و φ_{i_d} جز در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای در $x = a$ از یکدیگر مستقل هستند، معادلات اویلر-لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}''} \right) = 0, \quad i = 2 \dots 2N-2 \quad (27)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}''} \right) = 0, \quad i = 1 \dots 2N-1 \quad (28)$$

به همراه شرایط مرزی

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N-1} \left[\left\{ \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}'} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_c}) \right]_{x=d-a}^{x=a-d} \\ + \sum_{i=1}^{2N-1} \left[\left\{ \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}'} \right\} (\delta \varphi_{i_c}') \right]_{x=d-a}^{x=a-d} \\ + \sum_{i=2}^{2N-2} \left[\left\{ \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}'} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_d}) \right]_{x=a-d}^{x=a} \\ + \sum_{i=2}^{2N-1} \left[\left\{ \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}'} \right\} (\delta \varphi_{i_d}') \right]_{x=a-d}^{x=a} = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

برای حل معادلات دیفرانسیل و استخراج تمامی توابع نامعلوم به شرایط مرزی طبیعی یا ذاتی نیاز است.

مجموع شرایط مرزی ذاتی برای یک سلول واحد حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی میانی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

سطوح آزاد ترک

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a} = -\sigma_{xx}^{0(i)} \\ \Rightarrow \varphi_{i_d}(a) &= \sigma_{xx}^{0(i)}, \quad \delta\varphi_{i_d}(a) = 0, \quad i = 2 \dots N \\ \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = 0 \\ \Rightarrow \varphi_{i_d}'(a) &= 0, \quad \delta\varphi_{i_d}'(a) = 0, \quad i = 2 \dots N \quad (30) \end{aligned}$$

پیوستگی تنش‌ها

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} &= \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}(a-d) &= \varphi_{i_d}(a-d), \\ \delta\varphi_{i_c}(a-d) &= \delta\varphi_{i_d}(a-d), \quad i = N+1 \dots 2N-1 \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} &= \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}'(a-d) &= \varphi_{i_d}'(a-d), \\ \delta\varphi_{i_c}'(a-d) &= \delta\varphi_{i_d}'(a-d), \quad i = N+1 \dots 2N-1 \quad (31) \end{aligned}$$

$$U'_c = 2 \int_d^a \left\{ \sum_{i=1}^{4N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \{\sigma_c^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma_c^{(i)}\} dz \right\} dx + 2 \int_0^d \left\{ \sum_{i=1}^{4N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \{\sigma_d^{(i)}\}^T [S^{(i)}] \{\sigma_d^{(i)}\} dz \right\} dx \quad (38)$$

که در آن

$$\{\sigma_c^{(i)}\}^T = \{\sigma_{xx_c}^{(i)}, \sigma_{zz_c}^{(i)}, \sigma_{xz_c}^{(i)}\} \quad (39)$$

$$\{\sigma_d^{(i)}\}^T = \{\sigma_{xx_d}^{(i)}, \sigma_{zz_d}^{(i)}, \sigma_{xz_d}^{(i)}\}$$

با در نظر گرفتن میدان تنش نواحی فاقد و حاوی جدایی بین‌لایه‌ای در رابطه (38) می‌توان نوشت:

$$U'_c = 2 \int_d^a F_c(x, \{\varphi_c'\}, \{\varphi_c''\}, \{\varphi_c\}) dx + 2 \int_0^d F_d(x, \{\varphi_d'\}, \{\varphi_d''\}, \{\varphi_d\}) dx \quad (40)$$

$$\{\varphi_c\}^T = \{\varphi_{2c}, \varphi_{3c}, \dots, \varphi_{4N-1c}\} \quad (41)$$

$$\{\varphi_d\}^T = \{\varphi_{3d}, \varphi_{4d}, \dots, \varphi_{4N-2d}\}$$

جهت مینیمم سازی انرژی مکمل اغتشاشی، می‌توان از اعمال حساب تغییرات استفاده کرد و رابطه (40) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\delta U'_c = 2 \int_d^a \delta F_c dx + 2 \int_0^d \delta F_d dx = 0$$

$$2 \int_d^a \left\{ \sum_{i=2}^{4N-1} \left[\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} (\delta \varphi_{i_c}) + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} (\delta \varphi'_{i_c}) + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_c}} (\delta \varphi''_{i_c}) \right] \right\} dx + 2 \int_0^d \left\{ \sum_{i=3}^{4N-2} \left[\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} (\delta \varphi_{i_d}) + \frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} (\delta \varphi'_{i_d}) + \frac{\partial F_d}{\partial \varphi''_{i_d}} (\delta \varphi''_{i_d}) \right] \right\} dx = 0 \quad (42)$$

با در نظر گرفتن انتگرال گیری زنجیره‌ای، و با توجه به این که توابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} جز در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای در $x = a$ از یکدیگر مستقل هستند، معادلات اولر لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi''_{i_d}} \right) = 0, \quad i = 3 \dots 4N - 2 \quad (43)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_c}} \right) = 0, \quad i = 2 \dots 4N - 1 \quad (44)$$

به همراه شرایط مرزی

$$\sum_{i=2}^{4N-1} \left[\left\{ \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_c}) \right]_{x=d}^{x=\frac{a}{2}} + \sum_{i=2}^{4N-1} \left[\left\{ \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_c}} \right) \right\} (\delta \varphi'_{i_c}) \right]_{x=d}^{x=\frac{a}{2}} + \sum_{i=3}^{4N-2} \left[\left\{ \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_d}) \right]_{x=0}^{x=d} + \sum_{i=3}^{4N-2} \left[\left\{ \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi''_{i_d}} \right) \right\} (\delta \varphi'_{i_d}) \right]_{x=0}^{x=d} = 0 \quad (45)$$

شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها در راستای محور z با در نظر گرفتن جدایی بین‌لایه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

- صفر بودن تنش‌ها در سطوح خارجی چندلایه کامپوزیتی

$$\sigma_{xz_c}^{(1)} = \sigma_{xz_d}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xz_c}^{(4N)} = \sigma_{xz_d}^{(4N)} = 0$$

$$\sigma_{zz_c}^{(1)} = \sigma_{zz_d}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz_c}^{(4N)} = \sigma_{zz_d}^{(4N)} = 0 \quad (35)$$

- پیوستگی تنش‌ها در محل اتصال لایه‌ها

$$\sigma_{xz_c}^{(i)} = \sigma_{xz_c}^{(i+1)}, \quad \sigma_{xz_d}^{(i)} = \sigma_{xz_d}^{(i+1)}$$

$$\sigma_{zz_c}^{(i)} = \sigma_{zz_c}^{(i+1)}, \quad \sigma_{zz_d}^{(i)} = \sigma_{zz_d}^{(i+1)} \quad (36)$$

- صفر بودن تنش‌ها در سطح جدایی بین‌لایه‌ای

$$\sigma_{xz_d}^{(N)} = \sigma_{xz_d}^{(N+1)} = 0$$

$$\sigma_{zz_d}^{(N)} = \sigma_{zz_d}^{(N+1)} = 0 \quad (37)$$

با اعمال این شرایط و شرط معادلات حاصل از تعادل تنش‌های داخلی با نیروهای اعمالی خارجی، میدان تنش قابل قبول برای ناحیه فاقد جدایی بین‌لایه‌ای استخراج می‌شود.

همان‌طور که پیش‌ازاین ذکر شد، تابع نامعلوم φ_i از طریق مینیمم‌سازی انرژی مکمل سلول واحد به دست می‌آید. با توجه به تقارن چرخشی سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی زیگزاگی بیرونی حول محور z ، انرژی مکمل هر دو نیمه چپ و راست سلول واحد برابر بوده و کفایت تنها انرژی مکمل یک نیمه سلول واحد ($x > 0$) مینیمم شود. ناحیه $0 < x < a$ از سلول واحد مطابق آنچه در شکل 6 نشان داده شده است دارای تقارن انعکاس نقطه‌ای حول نقطه R است.

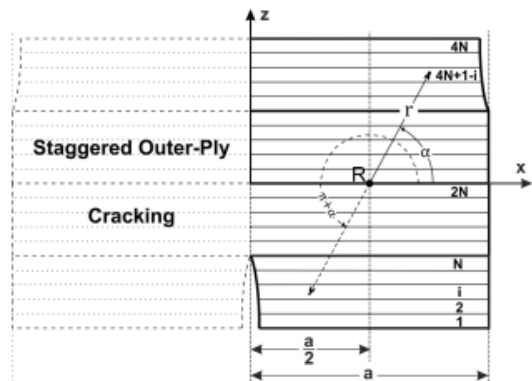


Fig. 6 Point reflection symmetry of the unit cell of staggered outer-ply cracked laminate [23]

شکل 6 تقارن انعکاس نقطه‌ای حول نقطه R در سلول واحد کامپوزیت حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی پادمتقارن بیرونی [23]

به دلیل اینکه مینیمم‌سازی انرژی مکمل در ناحیه $0 < x < a$ دارای پیچیدگی‌های محاسباتی زیادی است، می‌توان از تقارن انعکاس نقطه‌ای استفاده کرد و تنها انرژی مکمل ناحیه $0 < x < a/2$ را محاسبه و در نهایت مینیمم‌سازی کرد. در نتیجه با در نظر گرفتن تقارن چرخشی حول محور z و همچنین تقارن انعکاس نقطه‌ای نسبت به نقطه R می‌توان انرژی مکمل سلول واحد رابطه (8) کامپوزیت حاوی جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی زیگزاگی بیرونی به صورت زیر بازنویسی نمود:

معادله حاصل از تعادل تنش‌های داخلی با نیروهای اعمالی خارجی رابطه (6) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{i=1}^{2N} \varphi_i(x) t^{(i)} = 0 \quad (50)$$

جهت یافتن میدان تنش قابل قبول همان‌طور که قبلاً بیان شد، توابع نامعلوم f, g از طریق اعمال شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌های خارج صفحه در راستای ضخامت محاسبه می‌شوند. باید به این نکته توجه کرد که شرایط پیوستگی تنش‌ها در فصل مشترک زیرلایه‌ها در ناحیه حاوی جدایی بین لایه‌ای با دیگر قسمت‌های سلول واحد متفاوت است. بنابراین، شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها برای دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین لایه‌ای متفاوت خواهد بود. به همین علت سلول واحد مطابق شکل 7، به دو ناحیه حاوی جدایی بین لایه‌ای در $(d < |x| < a-d)$ و فاقد جدایی بین لایه‌ای در $(a-d < |x| < d)$ تقسیم می‌شود. لذا مؤلفه‌های میدان تنش برای دو ناحیه حاوی و فاقد جدایی بین لایه‌ای به ترتیب با اندیس‌های d و c از یکدیگر متمایز می‌شوند.

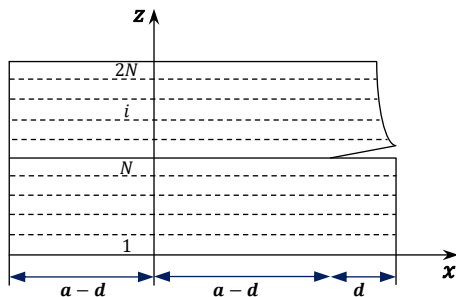


Fig. 7 Unit cell of symmetric outer-ply cracked laminate with induced delamination

شکل 7 سلول واحد حاوی جدایی بین لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی متقارن بیرونی

شرایط مرزی و پیوستگی تنش‌ها در راستای محور z با در نظر گرفتن جدایی بین لایه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

- صفر بودن تنش‌ها در سطوح خارجی چندلایه کامپوزیتی

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_c}^{(2N)} &= \sigma_{xz_d}^{(2N)} = 0 \\ \sigma_{zz_c}^{(2N)} &= \sigma_{zz_d}^{(2N)} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

- پیوستگی تنش‌ها در محل اتصال لایه‌ها

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_c}^{(i)} &= \sigma_{xz_c}^{(i+1)} \quad \& \quad \sigma_{xz_d}^{(i)} = \sigma_{xz_d}^{(i+1)} \\ \sigma_{zz_c}^{(i)} &= \sigma_{zz_c}^{(i+1)} \quad \& \quad \sigma_{zz_d}^{(i)} = \sigma_{zz_d}^{(i+1)} \end{aligned} \quad (52)$$

- صفر بودن تنش‌ها در سطح جدایی بین لایه‌ای

$$\begin{aligned} \sigma_{xz_d}^{(N)} &= \sigma_{xz_d}^{(N+1)} = 0 \\ \sigma_{zz_d}^{(N)} &= \sigma_{zz_d}^{(N+1)} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

- تقارن کامپوزیت لایه‌ای نسبت به صفحه میانی

$$\sigma_{xz_c}^{(1)} = \sigma_{xz_d}^{(1)} = 0 \quad (54)$$

برای حل معادلات دیفرانسیل و استخراج تمامی توابع نامعلوم به شرایط مرزی طبیعی یا ذاتی نیاز است.

مجموع شرایط مرزی ذاتی برای یک سلول واحد حاوی جدایی بین لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی زیگزاگی بیرونی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

- سطوح آزاد ترک

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=0} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=0} = -\sigma_{xx}^{0(i)} \\ \Rightarrow \varphi_{i_d}^{(i)}(0) &= \sigma_{xx}^{0(i)}, \quad \delta\varphi_{i_d}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 3 \dots N \\ \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=0} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=0} = 0 \\ \Rightarrow \varphi'_{i_d}{}^{(i)}(0) &= 0, \quad \delta\varphi'_{i_d}{}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 3 \dots N \end{aligned} \quad (46)$$

- پیوستگی تنش‌ها

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} &\Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}^{(i)}(a-d) &= \varphi_{i_d}^{(i)}(a-d), \\ \delta\varphi_{i_c}^{(i)}(a-d) &= \delta\varphi_{i_d}^{(i)}(a-d), \quad i = 2 \dots 4N-1 \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} &\Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi'_{i_c}{}^{(i)}(a-d) &= \varphi'_{i_d}{}^{(i)}(a-d), \\ \delta\varphi'_{i_c}{}^{(i)}(a-d) &= \delta\varphi'_{i_d}{}^{(i)}(a-d), \quad i = 2 \dots 4N-1 \end{aligned} \quad (47)$$

- تقارن چرخشی

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=0} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=0} = 0 \Rightarrow \varphi'_{i_d}{}^{(i)}(0) = 0 \\ \Rightarrow \delta\varphi'_{i_d}{}^{(i)}(0) &= 0, \quad i = N+1 \dots 4N-2 \end{aligned} \quad (48)$$

- تقارن انعکاس نقطه‌ای

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a/2} = \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(4N+1-i)}|_{x=a/2} \\ \Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a/2} = \sigma_{xx_c}^{(4N+1-i)}|_{x=a/2} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}^{(i)}(a/2) = \varphi_{4N+1-i_c}^{(i)}(a/2), \\ \delta\varphi_{i_c}^{(i)}(a/2) = \delta\varphi_{4N+1-i_c}^{(i)}(a/2), \quad i = 2 \dots 2N \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=a/2, Z=z} = \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(4N+1-i)}|_{x=a/2, Z=z} \\ \Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=a/2, Z=z} = \sigma_{xz_c}^{(4N+1-i)}|_{x=a/2, Z=z} \\ \Rightarrow \varphi'_{i_c}{}^{(i)}(a/2) = -\varphi'_{4N+1-i_c}{}^{(i)}(a/2), \\ \delta\varphi'_{i_c}{}^{(i)}(a/2) = -\delta\varphi'_{4N+1-i_c}{}^{(i)}(a/2), \quad i = 2 \dots 2N \end{aligned} \quad (49)$$

شرایط مرزی طبیعی از جای‌گذاری شرایط مرزی ذاتی در رابطه (45) به دست می‌آیند. در شرایط مرزی طبیعی باید به این نکته توجه کرد که توابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین لایه‌ای در $x = d$ وابسته به یکدیگر هستند. با در اختیار داشتن کلیه شرایط مرزی و حل معادلات اویلر-لاگرانژ، کلیه توابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} و در پی آن میدان تنش اغشاشی به دست می‌آید.

- ترک ماتریسی متقارن بیرونی و جدایی بین لایه‌ای

سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی متقارن بیرونی تحت بارگذاری تک‌محوره کششی یکنواخت داخل صفحه‌ای می‌باشد، که لایه‌های 90 درجه دچار ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین لایه‌ای ناشی از آن شده‌اند. به دلیل وجود تقارن نسبت به صفحه xy ، می‌توان میدان تنش سلول واحد را تنها در نیمه $(z \geq 0)$ در نظر گرفت و آن را به تمام حجم سلول واحد تعمیم داد.

$$\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi''_{i_d}} \right) = 0, \quad i = 2 \dots 2N - 2 \quad (60)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_c}} \right) = 0, \quad i = 2 \dots 2N \quad (61)$$

به همراه شرایط مرزی

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{2N} \left[\left\{ \frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_c}) \right]_{x=d-a}^{x=a-d} \\ + \sum_{i=2}^{2N} \left[\left\{ \left(\frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} \right) \right\} (\delta \varphi'_{i_c}) \right]_{x=d-a}^{x=a-d} \\ + \sum_{i=2}^{2N-2} \left[\left\{ \frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} \right) \right\} (\delta \varphi_{i_d}) \right]_{x=a-d}^{x=a} \\ + \sum_{i=2}^{2N-2} \left[\left\{ \left(\frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} \right) \right\} (\delta \varphi'_{i_d}) \right]_{x=a-d}^{x=a} = 0 \quad (62) \end{aligned}$$

برای حل معادلات دیفرانسیل و استخراج تمامی توابع نامعلوم به شرایط مرزی طبیعی یا ذاتی نیاز است.

مجموع شرایط مرزی ذاتی برای یک سلول واحد حاوی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی متقارن بیرونی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

- سطوح آزاد ترک

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=a} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=a} = -\sigma_{xx}^{0(i)} \\ \Rightarrow \varphi_{i_d}(a) = \sigma_{xx}^{0(i)}, \quad \delta \varphi_{i_d}(a) = 0, \\ i = N + 1 \dots 2N - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = 0 \Rightarrow \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = 0 \\ \Rightarrow \varphi'_{i_d}(a) = 0, \quad \delta \varphi'_{i_d}(a) = 0, \quad i = N + 1 \dots 2N - 2 \quad (63) \end{aligned}$$

- پیوستگی تنش‌ها

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}(a-d) = \varphi_{i_d}(a-d), \\ \delta \varphi_{i_c}(a-d) = \delta \varphi_{i_d}(a-d), \quad i = 2 \dots 2N \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} \Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=a-d} = \sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=a-d} \\ \Rightarrow \varphi'_{i_c}(a-d) = \varphi'_{i_d}(a-d), \\ \delta \varphi'_{i_c}(a-d) = \delta \varphi'_{i_d}(a-d), \quad i = 2 \dots 2N \quad (64) \end{aligned}$$

- تقارن چرخشی

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx_c}^{(i)}|_{x=d-a} = \tilde{\sigma}_{xx_d}^{(i)}|_{x=d-a} \Rightarrow \sigma_{xx_c}^{(i)}|_{x=d-a} = \sigma_{xx_d}^{(i)}|_{x=d-a} \\ \Rightarrow \varphi_{i_c}(d-a) = \varphi_{i_d}(d-a), \\ \delta \varphi_{i_c}(d-a) = \delta \varphi_{i_d}(d-a), \quad i = 2 \dots 2N \\ \tilde{\sigma}_{xz_c}^{(i)}|_{x=d-a} = -\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=d-a} \Rightarrow \sigma_{xz_c}^{(i)}|_{x=d-a} = -\sigma_{xz_d}^{(i)}|_{x=d-a} \\ \Rightarrow \varphi'_{i_c}(d-a) = -\varphi'_{i_d}(d-a), \\ \delta \varphi'_{i_c}(d-a) = -\delta \varphi'_{i_d}(d-a), \quad i = 2 \dots 2N \quad (65) \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = -\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=-a}, \quad i = 2 \dots N \quad (66)$$

- تقارن انتقالی

$$\tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=a} = \tilde{\sigma}_{xz_d}^{(i)}|_{x=-a}, \quad i = 2 \dots N \quad (67)$$

با اعمال شرایط مرزی و پیوستگی و شرط معادلات حاصل از تعادل تنش‌های داخلی با نیروهای اعمالی خارجی، میدان تنش قابل قبول برای ناحیه فاقد جدایی بین لایه‌ای استخراج می‌شود.

تابع نامعلوم φ_i همان‌طور که ذکر شد از طریق مینیمم سازی انرژی مکمل به دست می‌آید. به علت تقارن سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی میانی نسبت به صفحه xy می‌توان انرژی مکمل نیمه بالایی سلول واحد را مینیمم کرد. همچنین تقارن سلول واحد نسبت به صفحه yz ، نیز منجر به انرژی مکمل یکسان در هر دو ناحیه حاوی جدایی بین لایه‌ای در $x < d-a$ و $x > a-d$ می‌شود. در نتیجه انرژی مکمل سلول واحد بر اساس رابطه (8) و اعمال تقارن‌های ذکر شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} U'_c = \int_{d-a}^{a-d} \left\{ \sum_{i=1}^{2N} \int_{Z_{i-1}}^{Z_i} \{ \sigma_c^{(i)} \}^T [S^{(i)}] \{ \sigma_c^{(i)} \} . dz \right\} . dx \\ + 2 \int_{a-d}^a \left\{ \sum_{i=1}^{2N} \int_{Z_{i-1}}^{Z_i} \{ \sigma_d^{(i)} \}^T [S^{(i)}] \{ \sigma_d^{(i)} \} . dz \right\} . dx \quad (55) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \{ \sigma_c^{(i)} \}^T &= \{ \sigma_{xx_c}^{(i)}, \sigma_{zz_c}^{(i)}, \sigma_{xz_c}^{(i)} \} \\ \{ \sigma_d^{(i)} \}^T &= \{ \sigma_{xx_d}^{(i)}, \sigma_{zz_d}^{(i)}, \sigma_{xz_d}^{(i)} \} \quad (56) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن میدان تنش نواحی فاقد و حاوی جدایی بین لایه‌ای در رابطه (55) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} U'_c = \int_{d-a}^{a-d} F_c(x, \{ \varphi_c \}, \{ \varphi_c \}, \{ \varphi_c \}) . dx \\ + 2 \int_{a-d}^a F_d(x, \{ \varphi_d \}, \{ \varphi_d \}, \{ \varphi_d \}) . dx \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \varphi_c \}^T &= \{ \varphi_{2_c}, \varphi_{3_c}, \dots, \varphi_{2N_c} \} \\ \{ \varphi_d \}^T &= \{ \varphi_{2_d}, \varphi_{3_d}, \dots, \varphi_{2N-2_d} \} \quad (58) \end{aligned}$$

جهت مینیمم‌سازی انرژی مکمل اغتشاشی، می‌توان از اعمال اپراتور حساب تغییرات استفاده کرد و رابطه (57) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U'_c = \int_{d-a}^{a-d} \delta F_c . dx + 2 \int_{a-d}^a \delta F_d . dx = 0 \\ \int_{d-a}^{a-d} \sum_{i=2}^{2N} \left[\frac{\partial F_c}{\partial \varphi_{i_c}} (\delta \varphi_{i_c}) + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi'_{i_c}} (\delta \varphi'_{i_c}) + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_c}} (\delta \varphi''_{i_c}) \right] . dx \\ + 2 \int_{a-d}^a \left\{ \sum_{i=2}^{2N-2} \left[\frac{\partial F_d}{\partial \varphi_{i_d}} (\delta \varphi_{i_d}) + \frac{\partial F_d}{\partial \varphi'_{i_d}} (\delta \varphi'_{i_d}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial F_c}{\partial \varphi''_{i_d}} (\delta \varphi''_{i_d}) \right] \right\} . dx = 0 \quad (59) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن انتگرال‌گیری زنجیره‌ای، و با توجه به اینکه تابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} جز در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین لایه‌ای در $x = a$ از یکدیگر مستقل هستند، معادلات اولر-لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود:

شکست محدود بیان می‌کند زمانی شکست اتفاق می‌افتد که میزان نرخ انرژی آزاد شده از مقدار بحرانی بیشتر باشد.

1-2-3- شروع ترک ماتریسی

رابطه (70) بیانگر بقای انرژی کل، حین فرایند ترمودینامیکی است.

$$\frac{\Delta W}{\Delta A} - \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\Delta K}{\Delta A} - \frac{\Delta q}{\Delta A} + \gamma \quad (70)$$

سمت چپ معادله بیانگر مجموع انرژی‌های مورد نیاز برای سطح واحد ترک است که تحت عنوان نرخ رهاسازی انرژی G بیان می‌شود. سمت راست معادله، مجموع انرژی‌هایی است که در طول فرایند ایجاد ترک به شکل‌های مختلف رهاسازی می‌شود. مجموع این انرژی‌ها تحت عنوان نرخ بحرانی رهاسازی انرژی G_c شناخته می‌شود. محاسبه نرخ رهاسازی انرژی در فرایندهای غیر تدریجی نظیر شروع و رشد ترک‌های ماتریسی، متأثر از شرایط بارگذاری حین فرایند شکل‌گیری آسیب است. ایجاد سطوح ترک ممکن است در شرایط بار-ثابت و جابه‌جایی-ثابت صورت گیرد. شکل 8 شرایط بارگذاری را نشان می‌دهد.

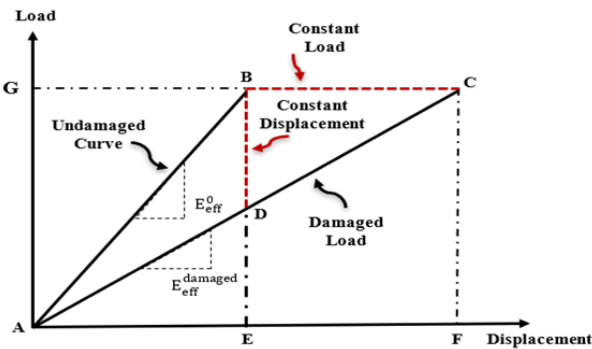


Fig. 8 Load-displacement curve

شکل 8 نمودار نیرو-جابه‌جایی

خواص مکانیکی باقیمانده کامپوزیت حاوی آسیب همانند ($E_{eff}^{damaged}$) مستقل از شرایط بارگذاری بوده و تنها تابعی از وضعیت (نوع، چگالی و توزیع) آسیب است. به همین دلیل کامپوزیت آسیب‌دیده، فارغ از نوع بار-ثابت یا جابه‌جایی-ثابت بودن فرایند، دارای خواص مکانیکی یکسان خواهد بود. در صورتی که فرایند ایجاد آسیب در شرایط جابه‌جایی ثابت انجام شود، کار نیروهای خارجی ΔW برابر صفر خواهد بود و نرخ رهاسازی انرژی، تنها تغییرات انرژی کرنشی کامپوزیت، قبل و بعد از بروز آسیب را شامل می‌شود.

1-2-2-3- رشد ترک ماتریسی

اگر کامپوزیت لایه‌ای را تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای قرار دهیم، افزایش بار ممکن است منجر به ایجاد سطوح جدیدی از آسیب در چندلایه شود. محاسبه نرخ رهاسازی انرژی حین فرایند رشد ترک‌های ماتریسی نیازمند شناخت وضعیت آسیب در دو حالت قبل و بعد از ایجاد سطح آسیب جدید است. چندلایه کامپوزیتی حاوی ترک‌های ماتریسی میانی با چگالی ترک $\rho = 1/2a$ ، میدان تنش حاصل از تحلیل میکرومکانیکی سلول واحدی را نشان می‌دهد، که بیشینه تنش محوری σ_{xx} در لایه میانی در وسط سلول واحد در $x = 0$ واقع می‌شود. به همین دلیل پیش‌بینی می‌شود در صورتی که بیشینه ترک محوری به حد مشخصی برسد ترک جدید در وسط سلول واحد ایجاد شود و چگالی ترک ماتریسی دو برابر گردد.

شرایط مرزی طبیعی از جایگذاری شرایط مرزی ذاتی در رابطه (62) به دست می‌آیند. در شرایط مرزی طبیعی باید توجه کرد که توابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} در مرز نواحی حاوی و فاقد جدایی بین‌لایه‌ای در $x = a - d$ وابسته به یکدیگر هستند. با در اختیار داشتن کلیه شرایط مرزی و حل معادلات اویلر-لاگرانژ، توابع نامعلوم φ_{i_d} و φ_{i_c} در پی آن میدان تنش اغتشاشی به دست می‌آید.

روابطی که پیش از این ارائه گردید، برای محاسبه میدان تنش در سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی ترک ماتریسی متقارن بیرونی بدون جدایی بین‌لایه‌ای نیز کاربرد دارد. در این حالت طول جدایی بین‌لایه‌ای ($d = 0$) در نظر گرفته می‌شود و تمامی سلول واحد تنها یک ناحیه فاقد جدایی بین‌لایه‌ای را شامل می‌شود. تنها تنش‌های اغتشاشی و توابع نامعلوم مربوط به ناحیه فاقد جدایی بین‌لایه‌ای (با اندیس c) باقی می‌مانند.

1-3- هموزن‌سازی لایه ترک‌خورده جهت مدل‌سازی ترک‌ها در بیش از یک جهت

در بخش قبل مشخص شد که می‌توان ماتریس سفتی یک کامپوزیت لایه‌ای متقارن متعامد حاوی ترک‌های ماتریسی را به دست آورد. در این بخش قرار است که ماتریس سفتی لایه ترک‌خورده، در حالتی که فقط در یک لایه ترک وجود داشته باشد به دست آید. هدف این بخش آن است که با استفاده از روش هموزن‌سازی بتوان ترک در دو لایه را بررسی و آن را با نتایج به‌دست‌آمده برای حالت‌های ترک‌خوردگی متقارن و پادمقارن مقایسه کرد تا دقت روش هموزن‌سازی مورد ارزیابی قرار گیرد. منظور از هموزن‌سازی در این بخش این است که ضرایب ماتریس سفتی لایه ترک‌خورده به نحوی تغییر داده شود که ماتریس سفتی کل چندلایه از ترکیب لایه‌های سالم بدون ترک و ماتریس ترک‌خورده جدید به دست بیاید، به گونه‌ای که فرض شود یک لایه جدید با مشخصات تغییر یافته در چندلایه جایگزین شده است. برای به دست آوردن ماتریس سفتی لایه ترک‌خورده در کامپوزیت لایه‌ای هموزن شده، رابطه ماتریس سفتی داخل صفحه کل چندلایه به دست آمده از تحلیل بخش‌های گذشته با ماتریس‌های سفتی هر لایه، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[A_c] = 2 \sum_{i=1}^N t_i [\bar{Q}_i] \quad (68)$$

در رابطه بالا N بیانگر نصف تعداد لایه‌ها، t_i ضخامت لایه i ام، $[\bar{Q}_i]$ بیانگر ماتریس سفتی لایه i ام در محورهای مختصات اصلی است. از آنجا که برای اعمال روش هموزن‌سازی بایستی فرض شود فقط در یک لایه ترک وجود دارد، شماره این لایه k فرض می‌شود. در این صورت ماتریس سفتی این لایه از طریق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[\bar{Q}_k] = \frac{1}{t_k} \left(\frac{1}{t_k} - 2 \sum_{i=1, i \neq k}^N t_i [\bar{Q}_i] \right) \quad (69)$$

در این صورت برای تحلیل‌های ترک‌خوردگی در دیگر لایه‌ها کافی است مشخصات لایه ترک‌خورده قدیمی را از رابطه بالا جایگزین و روند نوشتن معادلات و به دست آوردن میدان تنش را برای حالت جدید ترک تکرار کرد.

2-3- نرخ رهایی انرژی کرنشی

یکی از معیارهای اصلی در طراحی چندلایه‌های کامپوزیتی، مطالعه و بررسی پیش‌بینی شروع و رشد ترک‌خوردگی است. معیار مبتنی بر روش مکانیک

ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از آن و در ادامه به تحلیل دو مود آسیب بر مبنای انرژی و رقابت میان این دو مود آسیب پرداخته شده است.

جدول 1 خواص مکانیکی تک‌لایه کامپوزیتی

Table 1 Mechanical properties of single layer composite

مواد	ضخامت (mm)	E_A (MPa)	E_T (MPa)	G_A (MPa)	G_T (MPa)	ν_A	ν_T
شیشه-اپوکسی	0.203	41700	13000	3400	4580	0.3	0.42
کربن-اپوکسی	0.3	90000	6700	3500	2500	0.3	0.5
فایبریت ^۲	0.14	128000	7200	4000	2400	0.3	0.5
کربن هرکولس ^۳	0.154	130000	9700	5000	3600	0.3	0.5

1-4-1 اعتبارسنجی نتایج مدل‌سازی حاضر

1-1-1-1 مقایسه نتایج روش حاضر با مدل تغییرات هشین

در این بخش نتایج میدان تنش حاصل از روند تحلیلی حاضر با نتایج حاصل از روش حساب تغییرات هشین برای چندلایه کامپوزیتی متعامد از جنس شیشه-اپوکسی اعتبارسنجی شده است. برای این لایه‌چینی به دلیل وجود تقارن و همچنین عدم استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها ($n = 1$)، فقط دو تابع نامعلوم داریم که یکی از این توابع نامعلوم از دیگری به دست می‌آید، لذا نیازی به شرایط مرزی طبیعی برای یافتن ثوابت نیست و شرایط مرزی برای حل کافی می‌باشد. میدان تنش چندلایه کامپوزیتی $[0/90]_s$ در شرایطی که دو ترک مجاور در فاصله ($2a = 4 \times 0.203$) تحت بارگذاری محوری قرار دارد، برای مدل حاضر و مدل هشین در شکل‌های 10 تا 12 رسم شده است. شایان ذکر است که ترم‌های تنش نسبت به تنش محوری لایه 90 درجه که در چندلایه‌های کامپوزیتی سالم (بدون ترک) که تحت همین بارگذاری قرار دارد، بی‌بعد شده‌اند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بین نمودارهای حاصل از این دو مدل انطباق بسیار مناسبی وجود دارد و این بیان‌کننده این است که مدل هشین، حالت ساده شده مدل حاضر است و به عبارتی می‌توان گفت مدل هشین فقط یک حالت خاص از مدل حاضر می‌باشد.

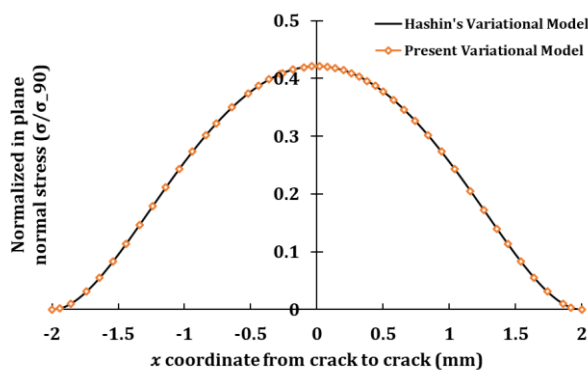


Fig. 10 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under axial stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$)

شکل 10 تنش محوری σ_{xx} بین دو ترک در فاصله ($2a = 4 \times 0.203$) در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی

3-2-3- اشباع ترک ماتریسی و شروع جدایی بین‌لایه‌ای

نرخ رهاسازی انرژی برای پیش‌بینی نوع آسیب غالب در چندلایه کامپوزیتی باشد. بر اساس معیار رشد آسیب هرگاه نرخ رهاسازی انرژی حین فرایند رشد آسیب با نرخ بحرانی رهاسازی انرژی برابر شود، آسیب رشد خواهد نمود. هرگاه نرخ رهاسازی انرژی حاصل از ایجاد جدایی بین‌لایه‌ای بیش از نرخ رهاسازی ترک‌های ماتریسی باشد، رشد ترک‌های ماتریسی متوقف می‌شود و جدایی بین‌لایه‌ای از رؤس ترک‌های ماتریسی آغاز می‌گردد.

نمودار نرخ رهاسازی انرژی برای رشد ترک‌های ماتریسی و شروع جدایی بین‌لایه‌ای در چگالی ترک‌های مختلف در شکل 9 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در بسیاری از لایه‌چینی‌ها، ترک ماتریسی در چگالی کم، مود آسیب غالب در چندلایه کامپوزیتی است. افزایش بارگذاری، منجر به رشد ترک‌های ماتریسی و افزایش چگالی ترک ماتریسی می‌شود و به تدریج از نرخ رهاسازی انرژی رشد ترک می‌کاهد و بر نرخ رهاسازی انرژی ناشی از شروع جدایی بین‌لایه‌ای می‌افزاید. در یک چگالی ترک ماتریسی خاص، که بسته به نوع لایه‌چینی یا مشخصات مواد ممکن است متفاوت باشد، نرخ رهاسازی شروع جدایی بین‌لایه‌ای از نرخ رهاسازی رشد ترک ماتریسی فراتر می‌رود. این نقطه به‌عنوان چگالی اشباع ترک‌های ماتریسی و نقطه شروع جدایی بین‌لایه‌ای شناخته می‌شود.

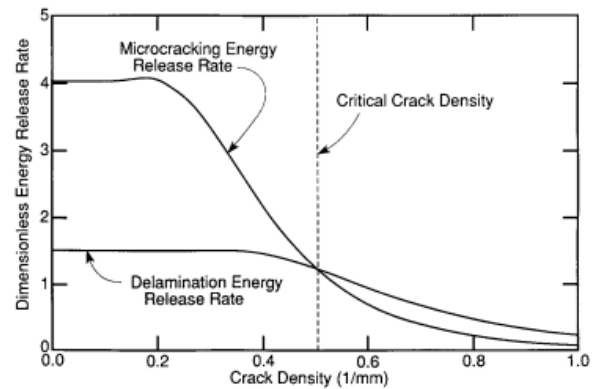


Fig. 9 The energy release rate of matrix crack growth and initiation of delamination [21]

شکل 9 نرخ رهاسازی انرژی رشد ترک ماتریسی و شروع جدایی بین‌لایه‌ای [21]

بنابراین ذکر این نکته حائز اهمیت است آنچه تحت عنوان چگالی ترک ماتریسی اشباع با استفاده از این روش محاسبه می‌شود، مستقل از نوع بارگذاری بوده و تنها تابعی از هندسه لایه‌چینی و مشخصات مکانیکی مواد اولیه خواهد بود. به همین دلیل نقطه شروع جدایی بین‌لایه‌ای و توقف رشد ترک‌های ماتریسی تحت عنوان وضعیت آسیب ویژه^۱ (CDS) شناخته می‌شود. کفایت در هر چگالی ترک ماتریسی، نرخ رهاسازی انرژی رشد ترک ماتریسی و نرخ رهاسازی شروع جدایی بین‌لایه‌ای استخراج شود.

4- نتایج و بحث

چندلایه کامپوزیتی مورد بررسی در این پژوهش به صورت متعامد 0 و 90 درجه است. چندلایه کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی تک‌محوره به میزان 100 MPa قرار گرفته است. خواص استفاده شده در جدول 1 آمده است. در ابتدا به آنالیز میدان تنش چندلایه، سپس به بررسی افت سفتی ناشی از ترک

³ Hercules 3501-6/AS4

¹ Characteristic damage state (CDS)

² Fiberite 934/T300

تنش‌های غلطی به دست می‌آید. این امر اهمیت بسزای روش تقسیم‌بندی لایه‌ها را نشان می‌دهد.

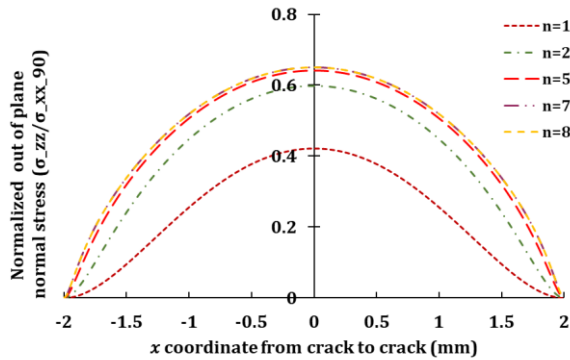


Fig. 13 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under axial stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$) considering the ply-refinement technique

شکل 13 تنش محوری σ_{xx} بین دو ترک در فاصله $(2a = 4 \times 0.203)$ در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

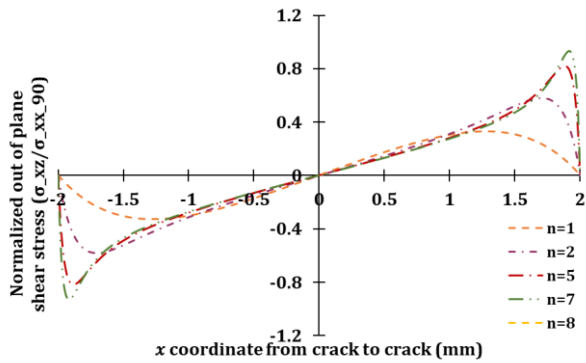


Fig. 14 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under shear stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$) considering the ply-refinement technique

شکل 14 تنش برشی σ_{xz} بین دو ترک در فاصله $(2a = 4 \times 0.203)$ در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

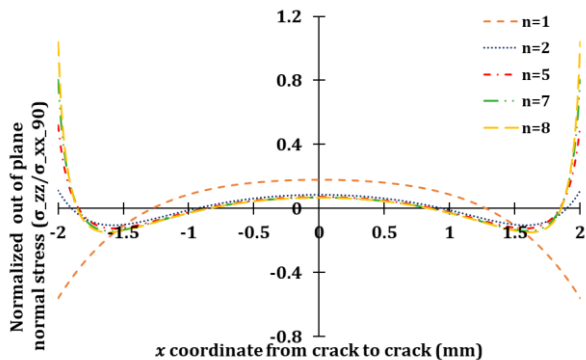


Fig. 15 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under transverse stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$) considering the ply-refinement technique

شکل 15 تنش عرضی σ_{zz} بین دو ترک در فاصله $(2a = 4 \times 0.203)$ در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

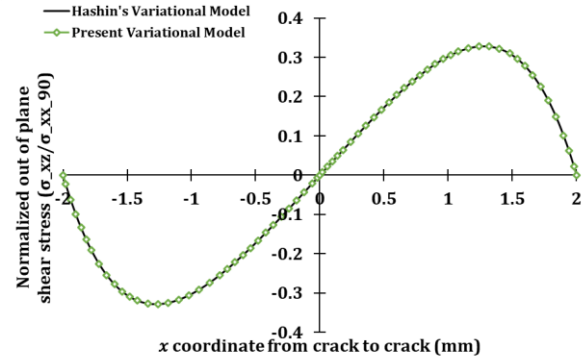


Fig. 11 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under shear stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$)

شکل 11 تنش برشی σ_{xz} بین دو ترک در فاصله $(2a = 4 \times 0.203)$ در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی

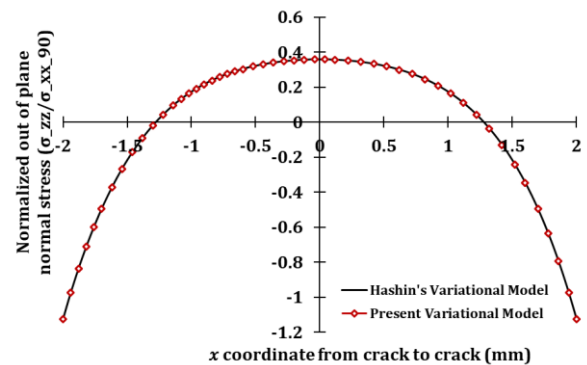


Fig. 12 $[0/90]_s$ glass-epoxy laminate under transverse stress: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 4 \times 0.203$)

شکل 12 تنش عرضی σ_{zz} بین دو ترک در فاصله $(2a = 4 \times 0.203)$ در لایه‌چینی $[0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی

2-1-4- بررسی همگرایی میدان تنش با استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها
فرض اساسی در این بخش استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها می‌باشد. در این روش می‌توان هر لایه را به چند زیرلایه با خواص یکسان تقسیم کرده که در مجموع ضخامت همه زیرلایه‌ها برابر لایه اولیه می‌باشند و برای هر زیرلایه توابع اغتشاشی متفاوتی در نظر گرفته می‌شود. با تعریف توابع اغتشاشی برای هر زیرلایه می‌توان تغییرات ترم‌های تنش را در راستای ضخامت مدل‌سازی کرد. میدان تنش چندلایه کامپوزیتی $[0/90]_s$ مدل هشین که در غیاب روش تقسیم‌بندی لایه‌ها در بخش قبل به دست آمد با نتایج روش تقسیم‌بندی لایه‌ها بررسی و مقایسه می‌گردد. در روش تقسیم‌بندی لایه‌ها، برای یافتن ثوابت در توابع اغتشاشی، به دلیل اینکه شرایط مرزی برای تعیین ثوابت کافی نیست، از شرایط مرزی طبیعی نیز استفاده می‌شود.

همانطور که در نمودار شکل‌های 13 تا 15 ملاحظه می‌شود، تأثیر روش تقسیم‌بندی لایه‌ها بسیار بالاست و با تقسیم هر لایه به زیرلایه‌های بیشتر، افزایش در دقت نتایج حل بیشتر می‌شود که این موضوع در نمودار تنش عرضی هم مشهود است؛ زیرا نتایج تحلیلی حاصل از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها نتیجه متناقضی نسبت به حالتی که از این روش استفاده نشده است، نشان می‌دهد که بیانگر این است که در بعضی مواقع در صورت عدم استفاده از این روش جهت

مقایسه میدان تنش محوری داخل صفحه σ_{xx} در لایه 90 درجه بیرونی از لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با فرم ترک‌خوردگی پادمتقارن بین نتایج مدل حاضر با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی در شکل 19 نشان داده شده است. این شکل نیز نشان می‌دهد نتایج مدل‌سازی حاضر تطابق خوبی با نتایج عددی دارد و زمانی که مقدار تقسیم‌بندی لایه‌ها افزایش یابد این نتایج بیشتر به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

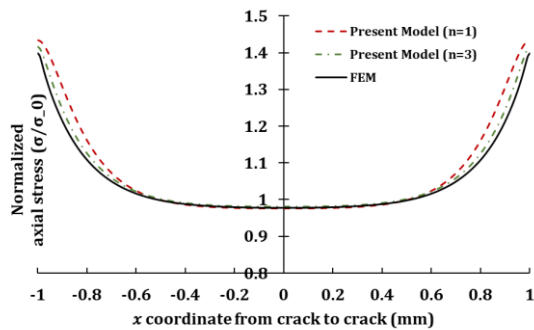


Fig. 17 $[0/90/0/90]_s$ glass-epoxy laminate under σ_{xx} axial stress in outer-ply 0: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 2$) considering FEM and the ply-refinement technique
شکل 17 تنش محوری σ_{xx} در لایه 0 درجه بیرونی در فاصله ($2a = 2$) در لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

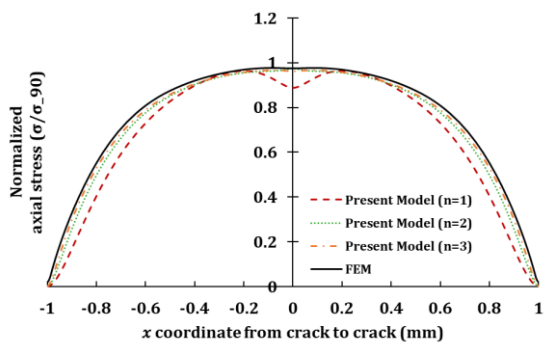


Fig. 18 $[0/90/0/90]_s$ glass-epoxy laminate under σ_{xx} axial stress in inner-ply 90: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 2$) considering FEM and the ply-refinement technique
شکل 18 تنش محوری σ_{xx} در لایه 90 درجه درونی در فاصله ($2a = 2$) در لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

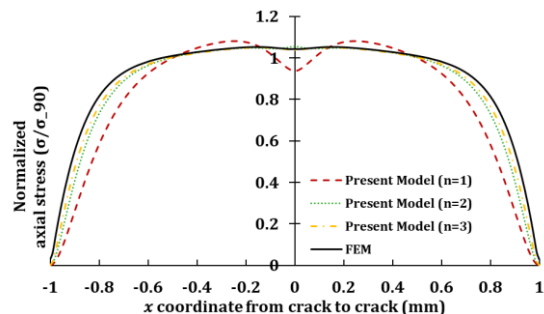


Fig. 19 $[0/90/0/90]_s$ glass-epoxy laminate under σ_{xx} axial stress in outer-ply 90: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 2$) considering FEM and the ply-refinement technique
شکل 19 تنش محوری σ_{xx} در لایه 90 درجه بیرونی در فاصله ($2a = 2$) در لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

2-4- مقایسه میدان تنش حاصل از فرمولاسیون حاضر در کامپوزیت‌های لایه‌ای متعامد متقارن ترک خورده با نتایج حل عددی

با توجه به اینکه روش تغییرات حاضر تمامی معادلات تعادل، شرایط مرزی و پیوستگی و همچنین اصل مینیمم انرژی را ارضا می‌کند، نتایج به دست آمده از آن با نتایج المان محدود قابل مقایسه است. اگر در تحلیل روش تغییرات از روش اصلاح لایه‌ها استفاده شود این نتایج بیشتر به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در بخش‌های زیر میدان تنش حاصل از مدل حاضر برای لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ در لایه‌های مختلف با دو مقدار $n = 1$ و $n = 3$ در الگوهای متقارن و پادمتقارن ترک‌خوردگی و همین‌طور هنگامی فقط در یکی از لایه‌های 90 درجه ترک‌خورده باشد، با نتایج حاصل از مدل‌سازی FEM مقایسه شده است.

1-2-4- مقایسه میدان تنش برای لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با الگوی ترک‌خوردگی متقارن

مقایسه میدان تنش محوری داخل صفحه σ_{xx} در لایه 90 درجه بیرونی از لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با فرم ترک‌خوردگی متقارن بین نتایج مدل حاضر با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی در شکل 16 نشان داده شده است. در این شکل مشخص است که با افزایش مقدار تقسیم‌بندی لایه‌ها نتایج تحلیل به نتایج عددی همگرا می‌شود.

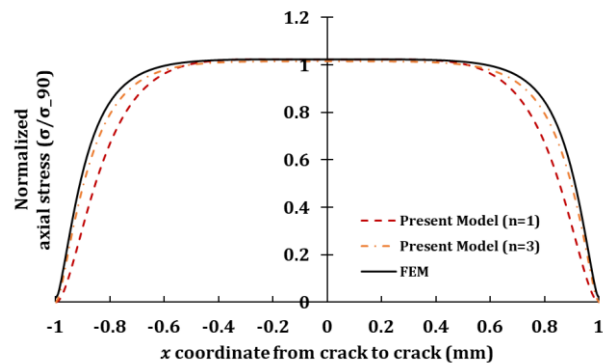


Fig. 16 $[0/90/0/90]_s$ glass-epoxy laminate under σ_{xx} axial stress in outer-ply 90: distribution of stresses between two cracks with crack spacing ($2a = 2$) considering FEM and the ply-refinement technique
شکل 16 تنش محوری σ_{xx} در لایه 90 درجه بیرونی در فاصله ($2a = 2$) در لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

همین‌طور مقایسه نتایج میدان تنش محوری داخل صفحه σ_{xx} حاصل از مدل تغییرات و مدل‌سازی عددی در لایه صفر درجه درونی از لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با فرم ترک‌خوردگی متقارن در شکل 17 نشان داده شده است. این نمودار نیز نشان می‌دهد نتایج مدل‌سازی حاضر تطابق خوبی با نتایج عددی دارد و زمانی که مقدار تقسیم‌بندی لایه‌ها افزایش یابد این نتایج بیشتر به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

2-2-4- مقایسه میدان تنش برای لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با الگوی ترک‌خوردگی پادمتقارن

مقایسه میدان تنش محوری داخل صفحه σ_{xx} در لایه 90 درجه درونی از لایه‌چینی $[0/90/0/90]_s$ با فرم ترک‌خوردگی پادمتقارن بین نتایج مدل حاضر با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی در شکل 18 نشان داده شده است. در این شکل مشخص است که با افزایش مقدار تقسیم‌بندی لایه‌ها نتایج تحلیل به نتایج عددی همگرا می‌شود.

3-4- بررسی افت سفتی

1-3-4- بررسی همگرایی مدل حاضر با استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

برای بررسی افت سفتی چندلایه‌های کامپوزیتی ناشی از ترک ماتریسی از فرمولاسیون روش حساب تغییرات استفاده می‌شود. نتایج محاسبات با نتایج حاصل از اجزا محدود مقایسه می‌گردد. همچنین از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها جهت بهبود نتایج حل استفاده می‌شود.

شکل 20 نشان‌دهنده مقایسه میان نتایج حل تحلیلی و اجزا محدود در بارگذاری تک‌محوره کششی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد شیشه-اپوکسی با لایه‌چینی $[0/90_3]_s$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، پیش‌بینی تحلیلی با روش حساب تغییرات هنگامی که از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها استفاده شده است نتایج بهتری در مقایسه با تحلیل اجزا محدود می‌دهد. شکل 21 نشان‌دهنده مقایسه میان نتایج تحلیلی با در نظر گرفتن روش تقسیم‌بندی لایه‌ها و نتایج حاصل از تحلیل اجزا محدود می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، پیش‌بینی تحلیلی با روش حساب تغییرات هنگامی که از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها استفاده شده حد پایین خواص مکانیکی کمتری را نشان می‌دهد و این بیان‌کننده این است که از همگرایی حل می‌توان اطمینان حاصل نمود. شایان ذکر است که با افزایش تعداد زیرلایه‌ها، میزان افت سفتی کمتر کاهش می‌یابد. این موضوع بیانگر این است که با افزایش زیرلایه‌ها مقدار افت سفتی به یک مقدار ثابتی همگرا می‌شود.

دیگر لایه‌چینی‌ها بیشتر است و علت این است که با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه چندلایه کامپوزیتی، ضخامت ترک‌های ماتریسی ایجاد شده افزایش یافته و افت سفتی بیشتری را تجربه می‌کند.

شکل 23 نشان‌دهنده مقایسه میان نتایج حل تحلیلی و اجزا محدود در بارگذاری تک‌محوره کششی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد شیشه-اپوکسی با لایه‌چینی $[90_2/0]_s$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، پیش‌بینی تحلیلی با روش حساب تغییرات هنگامی که از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها استفاده شده است نتایج بهتری در مقایسه با تحلیل اجزا محدود می‌دهد.

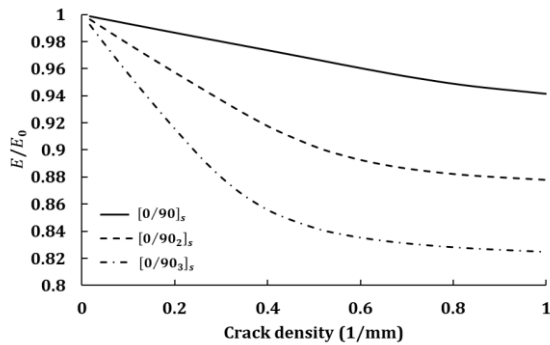


Fig. 22 Effect of the number of 90° plies on stiffness reduction versus crack density for carbon-epoxy

شکل 22 نمایش تأثیر تعداد لایه‌های 90 درجه بر افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در لایه‌چینی از جنس کربن-اپوکسی

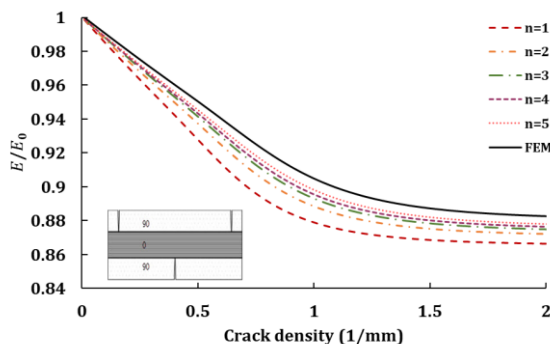


Fig. 23 Axial stiffness reduction versus crack density for Hercules $[90_2/0]_s$ laminate considering FEM and the ply-refinement technique

شکل 23 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[90_2/0]_s$ از جنس کربن-هرکولس با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

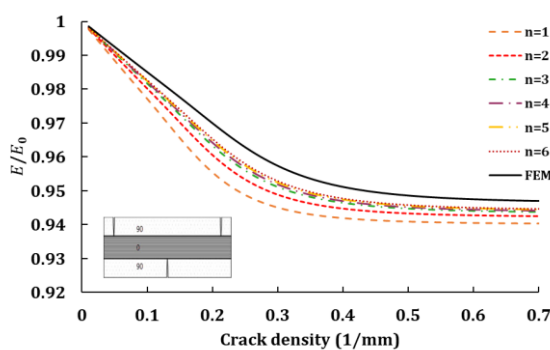


Fig. 24 Axial stiffness reduction versus crack density for carbon/epoxy $[90_2/0_2]_s$ laminate with considering FEM and ply-refinement technique

شکل 24 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[90_2/0_2]_s$ از جنس کربن-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

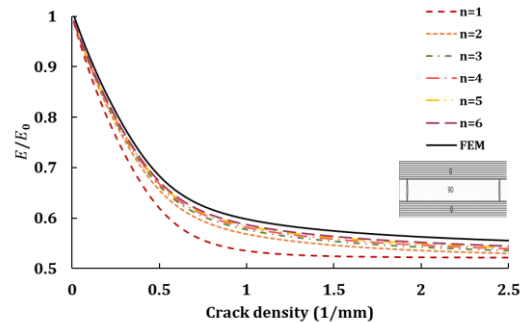


Fig. 20 Axial stiffness reduction versus crack density for glass-epoxy $[0/90_3]_s$ laminate considering FEM and the ply-refinement technique

شکل 20 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[0/90_3]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

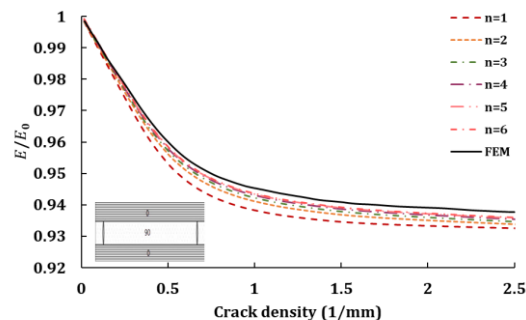


Fig. 21 Axial stiffness reduction versus crack density for Hercules $[0/90_2]_s$ laminate considering FEM and the ply-refinement technique

شکل 21 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[0/90_2]_s$ از جنس کربن-هرکولس با در نظر گرفتن نتایج حاصل از FEM و روش تقسیم‌بندی لایه‌ها

شکل 22 نشان‌دهنده کاهش افت سفتی محوری در لایه‌چینی $[0/90_m]_s$ از جنس کربن-اپوکسی به ازای $m = 1, 2, 3$ است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود میزان کاهش افت سفتی در لایه‌چینی $[0/90_3]_s$ از

دست آمده با استفاده از روش هموزن‌سازی نسبت تحلیل هم‌زمان ترک‌ها با الگوی متقارن کاهش یافته، این مسئله از قبل قابل پیش‌بینی بود زیرا لایه‌های ترک‌خورده نزدیک به هم، اثرات متقابل ترک‌ها را افزایش می‌دهد.

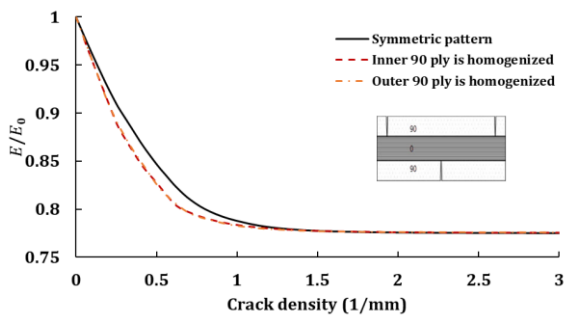


Fig. 26 Axial stiffness reduction versus crack density for glass/epoxy $[90_2/0_4/90_2]_s$ laminate considering the homogenization method and the simultaneous analysis method

شکل 26 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[90_2/0_4/90_2]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن روش هموزن‌سازی و تحلیل هم‌زمان ترک‌ها

4-4- بررسی الگوی توزیع ترک ماتریسی

الگوی توزیع ترک ماتریسی از طریق نرخ رهاسازی انرژی برای شروع ترک ماتریسی صورت می‌گیرد. با وجود اینکه چگالی ترک در هر مرحله نسبت به مرحله قبلی به‌اندازه یک ترک ماتریسی افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش چگالی ترک در هر مرحله میزان آزاد شدن انرژی آن مرحله نسبت به مرحله قبل کمتر است. این روال تا جایی ادامه پیدا می‌کند که دیگر با افزایش چگالی ترک انرژی آزاد نمی‌شود به عبارتی چگالی ترک اشباع شده است.

شکل 27 نشان‌دهنده تغییرات نرخ رهایی انرژی بر حسب چگالی ترک ماتریسی چندلایه‌های $[0/90_n]_s$ می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه و ثابت ماندن لایه‌های صفر درجه نرخ رهایی انرژی بیشتری داشته و به عبارتی می‌توان گفت شیب آن بیشتر بوده و زودتر به صفر نزدیک می‌شود.

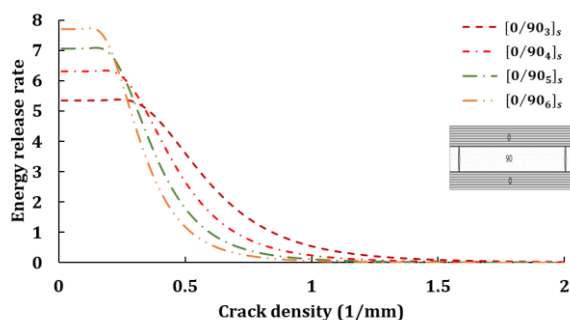


Fig. 27 Energy release rate due to matrix cracking versus crack density for Fibrite in different layups with symmetric cracked pattern

شکل 27 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های متفاوت با الگوی ترک متقارن از جنس فایبریت

شکل 28 نمایش چگونگی افزایش چگالی ترک ماتریسی به‌اندازه یک ترک ماتریسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه و ثابت ماندن لایه‌های صفر درجه میزان نرخ رهایی انرژی افزایش یافته است. این روال تا جایی ادامه پیدا می‌کند که ترک اشباع می‌شود و به عبارتی با افزایش چگالی ترک، نرخ رهایی انرژی آزاد نمی‌شود.

در شکل 24 می‌توان مشاهده نمود که نتایج همگرا شده با استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها همخوانی قابل قبولی با نتایج حاصل از اجزا محدود دارد. لازم است به این نکته اشاره کرد که نتایج حاصل از تحلیل میکرومکانیکی آسیب بر اساس روش حساب تغییرات در سرعت همگرایی $n = 3$ نتایج خوبی را نشان می‌دهد.

2-3-4- مقایسه افت سفتی حاصل از روش هموزن‌سازی با افت سفتی حاصل از تحلیل هم‌زمان ترک‌ها

حال به بررسی روش هموزن‌سازی در کامپوزیت‌های لایه‌ای که دو لایه 90 درجه دارند و تحت بارگذاری تک‌محوره قرار دارند، پرداخته می‌شود. مراحل کار بدین صورت است که در حالت اول فرض می‌شود لایه 90 درجه درونی‌تر با یک چگالی ترک مشخص دچار خرابی شده و لایه دیگر سالم ترک‌خورده است، در این حالت افت خواص کامپوزیت لایه‌ای محاسبه می‌شود و سپس این افت خواص به دست آمده برای کل کامپوزیت لایه‌ای ناشی از افت خواص ناشی از لایه ترک‌خورده فرض می‌شود. پس از آن لایه را با لایه سالمی که دچار افت خواص شده جایگزین می‌کنیم و سپس لایه 90 درجه بیرونی‌تر با همان چگالی ترک فرض شده در مرحله قبل، در نظر گرفته می‌شود و نتایج افت سفتی پس از این مرحله به‌عنوان نتایج نهایی افت سفتی کامپوزیت لایه‌ای محسوب می‌شود. در حالت دوم ابتدا لایه 90 درجه بیرونی‌تر به‌عنوان لایه ترک‌خورده اول در نظر گرفته می‌شود و سپس همین مراحل تکرار می‌شود. نتایج حاصل از این دو روش با یکدیگر و نسبت به حالتی که ترک‌خوردگی در هر دو لایه بصورت هم‌زمان و با الگوی ترک‌خوردگی متقارن تحلیل شده است، مقایسه خواهد شد.

نتایج مربوط به افت سفتی محوری در لایه‌چینی $[90_2/0/90_2]_s$ به دست آمده از روش هموزن‌سازی در شکل 25 نشان داده شده است. در این شکل این نتایج با نتایج حاصل از تحلیل هم‌زمان ترک‌ها در حالتی که الگوی ترک‌خوردگی متقارن است، مقایسه شده است.

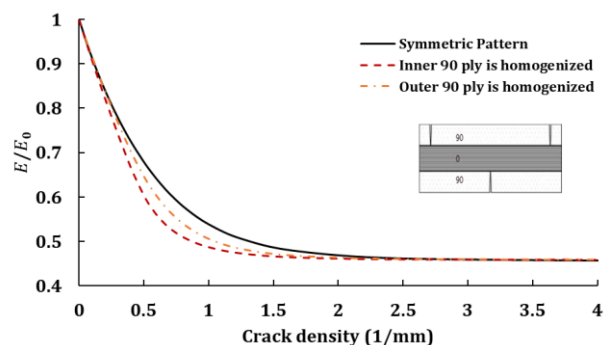


Fig. 25 Axial stiffness reduction versus crack density for glass-epoxy $[90_2/0/90_2]_s$ laminate considering the homogenization method and the simultaneous analysis method

شکل 25 افت سفتی محوری بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی $[90_2/0/90_2]_s$ از جنس شیشه-اپوکسی با در نظر گرفتن روش هموزن‌سازی و تحلیل هم‌زمان ترک‌ها

نتایج مربوط به افت سفتی محوری در لایه‌چینی $[90_2/0_4/90_2]_s$ به دست آمده از روش هموزن‌سازی در شکل 26 نشان داده شده است. در این شکل این نتایج با نتایج حاصل از تحلیل هم‌زمان ترک‌ها در حالتی که الگوی ترک‌خوردگی متقارن باشد، مقایسه شده است.

در لایه‌چینی $[90_2/0_4/90_2]_s$ ضخامت لایه بین دو لایه ترک‌خورده نسبت به لایه‌چینی $[90_2/0/90_2]_s$ افزایش یافته است و اختلاف سفتی به

نشان‌دهنده بررسی اثر ضخامت لایه‌های حاوی ترک ماتریسی در لایه 90 درجه بر وضعیت آسیب ویژه در لایه‌چینی‌های $[0/90]_s$ و $[0/90_3]_s$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه با فرض ثابت ماندن لایه صفر درجه، نرخ رهایی انرژی ناشی از ترک ماتریسی کاهش بیشتری داشته و با شیب بیشتری انجام گرفته است. به عبارت دیگر، افزایش ضخامت لایه حاوی ترک ماتریسی، چگالی اشباع ترک‌های ماتریسی را کاهش می‌دهد و همچنین گویای این است که میزان نرخ رهایی انرژی ناشی از جدایی بین‌لایه‌ای در این حالت با سرعت بیشتری رخ می‌دهد. به همین دلیل لایه‌چینی $[0/90_3]_s$ چگالی ترک ماتریسی کمتری را نسبت به $[0/90]_s$ نشان می‌دهد.

شکل 30 نشان‌دهنده بررسی اثر ضخامت لایه فاقد آسیب (لایه سالم) بر وضعیت آسیب ویژه در لایه‌چینی‌های $[0/90]_s$ و $[0_2/90]_s$ می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با تغییر ضخامت لایه‌های صفر درجه در چگالی اشباع ترک ماتریسی تغییر زیادی مشاهده نمی‌شود. نمودار نرخ رهایی انرژی شکل 31 رشد ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای در لایه‌چینی‌های $[90_2/0]_s$ و $[90/0]_s$ را نشان داده است.

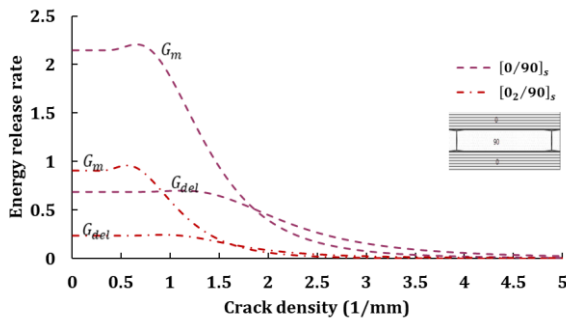


Fig. 30 Energy release rate due to matrix cracking and induced delamination for versus crack density Fibrite $[0/90]_s$ and $[0_2/90]_s$ composite laminates

شکل 30 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های $[0/90]_s$ و $[0_2/90]_s$ از جنس فایبریت

شکل 31 بیانگر این است که در مقادیر کم چگالی ترک ماتریسی، مود آسیب غالب در چندلایه‌های کامپوزیتی، ترک ماتریسی می‌باشد و در یک مقدار بحرانی از چگالی ترک ماتریسی تحت عنوان وضعیت آسیب ویژه، نرخ رهایی انرژی ناشی از جدایی بین‌لایه‌ای بیشتر شده و جدایی بین‌لایه‌ای از لبه‌های ترک ماتریسی شروع می‌شود. با گسترش جدایی بین‌لایه‌ای، ترک‌های ماتریسی متوقف شده و فرایند آسیب با جدایی بین‌لایه‌ای ادامه می‌یابد. این شکل نشان‌دهنده بررسی اثر ضخامت لایه‌های حاوی ترک ماتریسی در لایه 90 درجه بر وضعیت آسیب ویژه در لایه‌چینی‌های $[90/0]_s$ و $[90_2/0]_s$ می‌باشد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه با فرض ثابت ماندن لایه صفر درجه، نرخ رهایی انرژی ناشی از ترک ماتریسی کاهش بیشتری داشته و با شیب بیشتری انجام گرفته است. به عبارت دیگر، افزایش ضخامت لایه حاوی ترک ماتریسی، چگالی اشباع ترک‌های ماتریسی را کاهش می‌دهد و همچنین گویای این است که میزان نرخ رهایی انرژی ناشی از جدایی بین‌لایه‌ای در این حالت با سرعت بیشتری رخ می‌دهد.

شکل 32 نشان‌دهنده بررسی اثر ضخامت لایه فاقد آسیب (لایه سالم) بر وضعیت آسیب ویژه در لایه‌چینی‌های $[90/0]_s$ و $[90/0_2]_s$ می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با تغییر ضخامت لایه‌های صفر درجه در چگالی اشباع ترک ماتریسی تغییر زیادی مشاهده نمی‌شود.

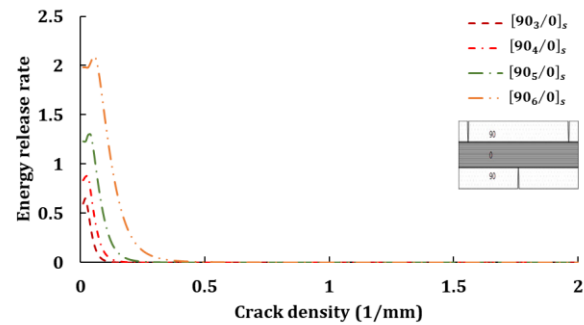


Fig. 28 Energy release rate due to matrix cracking versus crack density for Fibrite in different layups with staggered cracked pattern

شکل 28 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های متفاوت با الگوی ترک پادمتقارن از جنس فایبریت

5-4- بررسی ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای (وضعیت آسیب ویژه)

با افزایش بارگذاری بر تعداد ترک‌های ماتریسی افزوده می‌شود و از نرخ رشد چگالی ترک‌های ماتریسی کاسته می‌شود. شکل‌گیری ترک‌های ماتریسی اولیه، ابتدا با سرعت بسیار بالایی افزایش یافته و با افزایش بارگذاری سرعت رشد آن‌ها به مراتب کمتر می‌شود؛ بنابراین ترک‌های ماتریسی در یک چگالی ترک خاص متوقف می‌شوند و مود دیگری از آسیب شکل می‌گیرد. مود آسیب دوم تحت عنوان جدایی بین‌لایه‌ای از لبه‌های ترک ماتریسی شروع می‌شود و با افزایش بار اعمالی در مرز بین لایه‌ها رشد کرده و سرانجام منجر به شکست چندلایه می‌شود. بر اساس معیار نرخ رهایی انرژی می‌توان گفت که هر کدام از مودهای آسیب که نرخ رهایی انرژی بیشتری داشته باشد، آن مود غالب خواهد بود. پیش‌بینی وضعیت آسیب ویژه از طریق مقایسه نرخ رهایی انرژی رشد ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای صورت می‌گیرد. نمودار نرخ رهایی انرژی شکل 29 رشد ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای در لایه‌چینی‌های $[0/90]_s$ و $[0/90_3]_s$ را نشان داده است.

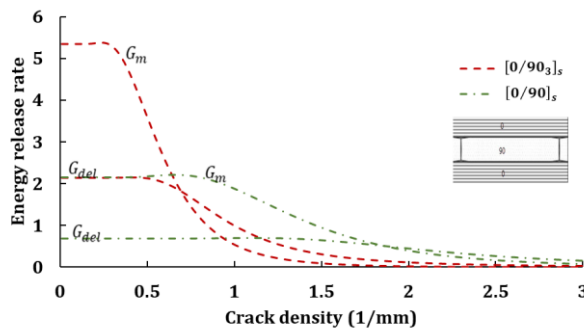


Fig. 29 Energy release rate due to matrix cracking and induced delamination versus crack density for Fibrite $[0/90]_s$ and $[0/90_3]_s$ composite laminates

شکل 29 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای بر حسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های $[0/90]_s$ و $[0/90_3]_s$ از جنس فایبریت

شکل 29 بیانگر این است که در مقادیر کم چگالی ترک ماتریسی، مود آسیب غالب در چندلایه‌های کامپوزیتی، ترک ماتریسی می‌باشد و در یک مقدار بحرانی از چگالی ترک ماتریسی تحت عنوان وضعیت آسیب ویژه، نرخ رهایی انرژی ناشی از جدایی بین‌لایه‌ای بیشتر شده و جدایی بین‌لایه‌ای از لبه‌های ترک ماتریسی شروع می‌شود. با گسترش جدایی بین‌لایه‌ای، ترک‌های ماتریسی متوقف شده و فرایند آسیب با جدایی بین‌لایه‌ای ادامه می‌یابد. این شکل

ترک خوردگی ماتریسی و اشباع آن تأثیرگذار باشد. همچنین نتایج حاصله نشان داد استفاده از روش مدل‌سازی همزمان ترک‌های ماتریسی در چند لایه ترک‌خورده می‌تواند دقت نتایج را افزایش داده و منجر به پیش‌بینی افت خواص مکانیکی و شروع ترک‌خوردگی ماتریسی متفاوتی گردد.

6- مراجع

- [1] Farrokhhabadi, A., Naghdinasab, M., "Micromechanical Study of Fibre/Matrix Debonding and Matrix Cracking Using Cohesive Zone Model and Extended Finite Element Method" In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 21-30, 2016.
- [2] Delbariani-Nejad, A., Farrokhhabadi, A., Fotouhi, M., "Reliability Analysis of the Delamination Onset and Growth Due To the Matrix Cracking in General Composite Laminates" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 1, pp. 1397-1410, 2021.
- [3] Nairn, J. A., "The Strain Energy Release Rate of Composite Microcracking: A Variational Approach" Journal of Composite Materials, Vol. 23, No. 11, pp. 1106-1129, 1989.
- [4] Mohammadi, B., Asl Kamkar, S., Farrokhhabadi, A., "Matrix Cracking and Induced Delamination in Symmetrically Laminated Composites Subjected to Static Loading by Using Multi Scale Damage Mechanics" In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 9-24, 2017.
- [5] Azadi, M., Raeisi, N., Moosavian, S. A., Shakouri, M., "Detection of Different Defects in Carbon Fiber Reinforced Polymer Matrix Laminated Composite Under Tension by Variation Analysis" In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 3, pp. 373-384, 2019.
- [6] Isometsa, J., Lahtinen, H., "Criteria for Matrix Failure in Continuous FRP-Composites-A Literature Study. Part I: Matrix Cracking" Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 29, No. 1, pp. 3-28, 1996.
- [7] Hashin, Z., "Analysis of Cracked Laminates: A Variational Approach" Mechanics of Materials, Vol. 4, No. 2, pp. 121-136, 1985.
- [8] Lacaze, S., Anquez, L., "Modelling of Transverse Crack Growth and Saturation in Cross-Ply Laminates" Journal of Materials Science, Vol. 27, No. 22, pp. 5982-5988, 1992.
- [9] Hahn, H., Tsai, S., "On the Behavior of Composite Laminates After Initial Failures" Journal of Composite Materials, Vol. 8, No. 3, pp. 288-305, 1974.
- [10] Rahmani, M., Farrokhhabadi, A., "Evaluation the Energy Release Rate of Induced Delamination Due to Matrix Cracking in Symmetric Composite Laminates" In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 1, pp. 53-68, 2019.
- [11] Wang, L., Yang, Q., "3D Geometrically Nonlinear Augmented Finite Element Method for Arbitrary Cracking in Composite Laminates" Computers & Structures, Vol. 239, p. 106327, 2020.
- [12] Jalalvand, M., "Modeling the Effects of Delamination Induced by Matrix Cracking using Multiscale Damage Mechanics" PhD thesis, Amirkabir University of Technology, Iran, 2013.
- [13] Crossman, F., Wang, A., "The Dependence of Transverse Cracking and Delamination on Ply Thickness in Graphite/Epoxy Laminates" In Damage in Composite Materials: Basic Mechanisms, Accumulation, Tolerance, and Characterization: ASTM International, 1982.
- [14] Abdussalam, S. R., "Damage and Fracture Mechanics of Composite Materials" PhD thesis, University of Manitoba, Canada, 1999.
- [15] Hashin, Z., "Finite Thermoelastic Fracture Criterion with Application to Laminate Cracking Analysis" Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 44, No. 7, pp. 1129-1145, 1996.
- [16] Cox, H., "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials" British Journal of Applied Physics, Vol. 3, No. 3, p. 72, 1952.
- [17] Naim, J. A., "Some New Variational Mechanics Results on Composite Microcracking," In Proceeding 10th International Conference on Composite Materials (ICCM-10), 1995, Vol. I, pp. 423-430.

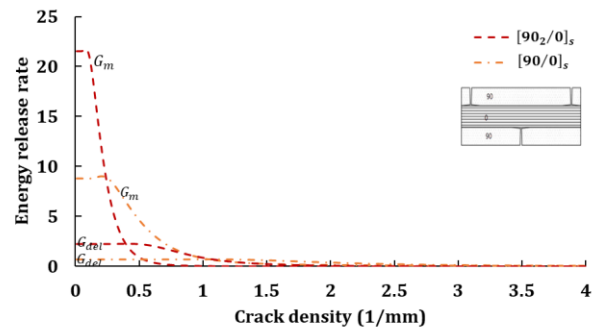


Fig. 31 Energy release rate due to matrix cracking and induced delamination versus crack density for Fibrite $[90_2/0]_s$ and $[90/0]_s$ composite laminates

شکل 31 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای برحسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های $[90_2/0]_s$ و $[90/0]_s$ از جنس فایبریت

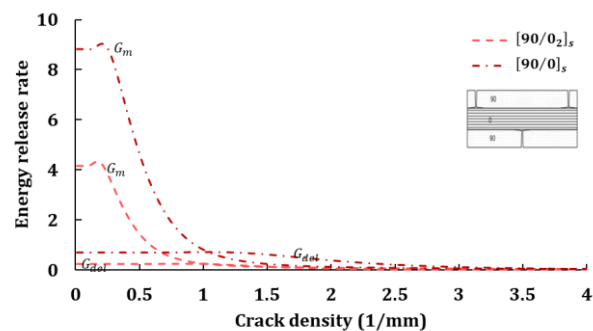


Fig. 32 Energy release rate due to matrix cracking and induced delamination versus crack density for Fibrite $[90/0_2]_s$ and $[90/0]_s$ composite laminates

شکل 32 نرخ رهایی انرژی برای ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای برحسب چگالی ترک در لایه‌چینی‌های $[90/0_2]_s$ و $[90/0]_s$ از جنس فایبریت

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی و تحلیل وضعیت آسیب چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد متقارن با لایه‌چینی تحت بارگذاری استاتیکی پرداخته شد. دو نوع از متداول‌ترین مودهای آسیب در چندلایه‌های کامپوزیتی ترک ماتریسی و جدایی بین‌لایه‌ای ناشی از ترک‌های ماتریسی مدنظر قرار گرفت. با استفاده از روش حساب تغییرات در مقیاس سلول واحد به محاسبه میدان تنش، افت سفتی، نرخ رهایی انرژی در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد متقارن با الگوهای ترک متقارن و پادمتقارن پرداخته شد. همچنین در فرمولاسیون ارائه شده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها استفاده شد. با استفاده از روش میکرومکانیکی بر اساس حساب تغییرات، میدان تنش برای یک سلول واحد چندلایه کامپوزیتی حاوی آسیب به دست آمد. همچنین استفاده از روش تقسیم‌بندی لایه‌ها، نتایج را تا حد زیادی بهبود داد و استفاده از این روش در میدان تنش و افت سفتی، در برخی موارد نتایج را تغییر می‌داد. مشاهده شد که با تقسیم نمودن لایه‌ها به زیرلایه بیشتر، همواره به یک مقدار مشخص همگرا خواهد شد. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که در تقسیم‌بندی لایه‌ها به زیرلایه در $n = 3$ نتایج از دقت خوبی برخوردارند. با افزایش تعداد زیرلایه‌ها در $n > 3$ تفاوت چشمگیری در نتایج حاصل نمی‌گردد. نتایج حاصله حاکی از آن است که با افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه شروع ترک خوردگی ماتریسی در بارهای کمتری خواهد بود. همچنین افزایش تعداد لایه‌های 90 درجه باعث افزایش افت سفتی چندلایه خواهد شد. در نظر گرفتن الگوی متقارن و پادمتقارن می‌تواند در نتایج شروع

- [18] Talreja, R., Singh, C. V., "Damage and Failure of Composite Materials". Cambridge University Press, 2012.
- [19] McCartney, L., "Model to Predict Effects of Triaxial Loading on Ply Cracking in General Symmetric Laminates" Composites Science and Technology, Vol. 60, No. 12-13, pp. 2255-2279, 2000.
- [20] Naim, J. A., "Matrix Microcracking in Composites" Polymer Matrix Composites, Vol. 2, pp. 403-432, 2000.
- [21] Naim, J., Hu, S., "The Initiation and Growth of Delaminations Induced by Matrix Microcracks in Laminated Composites" International Journal of Fracture, Vol. 57, No. 1, pp. 1-24, 1992.
- [22] Hajikazemi, M., Sadr, M. H., "A Variational Model for Stress Analysis in Cracked Laminates With Arbitrary Symmetric Lay-Up Under General In-Plane Loading" International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, No. 2, pp. 516-529, 2014.
- [23] Mohammadi, B., Pakdel, H., "Experimental and Variational-Based Analytical Investigation of Multiple Cracked Angle-Ply Laminates" Engineering Fracture Mechanics, Vol. 190, pp. 198-212, 2018.