



ارائه یک روش معادل سازی جدید برای مطالعه ارتعاشات آزاد پوسته‌های ساندویچی کامپوزیتی مخروطی با هسته‌های مشبک

مهدی زارعی¹، غلامحسین رحیمی^{2*}، میلاد همت نژاد³

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، تاکستان

* تهران، صندوق پستی 111-14115، rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

در این تحقیق، یک مدل تحلیلی به منظور بررسی ارتعاشات آزاد پانل‌های ساندویچی مخروطی با هسته مشبک ارائه می‌شود. از یک روش تحلیلی- تقریبی معادل‌سازی جدید برای محاسبه پارامترهای سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها استفاده می‌گردد. در این روش، هسته مشبک با یک پوسته مخروطی کامپوزیتی معادل‌سازی می‌شود. تقویت‌کننده‌ها (هسته) به صورت تیر در نظر گرفته می‌شوند که قابلیت تحمل ممان‌های خمشی علاوه بر بار محوری را دارا می‌باشند. برای این منظور، در ابتدا با استفاده از آنالیز نیرو و ممان بر روی یک سلول واحد، پارامترهای سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها تعیین می‌شوند و سپس به منظور دستیابی به سفتی کل سازه، با سفتی‌های پوسته‌ها جمع می‌شوند. با استفاده از روش گالرکین و تئوری کلاسیک دائل، معادلات حاکم بر پوسته ساندویچی استخراج و فرکانس‌های طبیعی ارتعاش به دست می‌آیند. به منظور اعتبار سنجی نتایج، یک مدل اجزای محدود سه‌بعدی نیز در نرم افزار آباکوس ساخته می‌شود. مقایسه نتایج توافقی خوبی را نشان داد و اثبات کرد که مدل تحلیلی، از دقت کافی برای بررسی ارتعاشات سازه‌های ساندویچی مخروطی با هسته مشبک برخوردار است. نتایج حاضر جدید بوده و می‌تواند به عنوان مبنایی برای مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد.

دریافت: 1398/11/24

پذیرش: 1399/06/25

کلیدواژگان:

ارتعاشات آزاد

پوسته ساندویچی

روش معادل‌سازی

روش گالرکین

روش اجزای محدود

A novel smeared method for investigating the free vibrations of sandwich conical shells with lattice cores

Mehdi Zarei¹, Gholam Hossein Rahimi^{1*}, Milad Hemmatnezhad²

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Faculty of Mechanical Engineering, Takestan Branch, Islamic Azad University, Takestan, Iran

* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

Keywords

Free vibrations
Sandwich conical shell
Smeared method
Galerkin method
FEM

Abstract

In this study, an analytical model was presented for investigating the free vibrations of sandwich conical shells with lattice cores. A novel smeared method was employed to determine the stiffness contribution of the stiffeners. In this approach, the lattice core was approximated with an equivalent composite conical shell. The stiffeners were considered as a beam which support the shear loads and bending moments in addition to the axial loads. For this purpose, the stiffness contribution due to the stiffeners was firstly determined through the forces and moments analysis of a unit cell and then superimposed with those of the inner and outer skins in order to obtain the stiffness parameters of the whole structure. The governing equations were deduced using the classical shell theory of Donnell type and Galerkin method. In order to validate the analytical results, a 3-D finite element model was also created using ABAQUS software. Comparison of the results, revealed good agreements between the two approaches and demonstrated that the proposed analytical model is qualified enough to investigate the free vibrational behavior of sandwich conical shells with lattice cores. Results given are novel and can be used as a benchmark for future studies

1- مقدمه

اغلب تحت بارهای دینامیکی قرار می‌گیرند و این سبب شده که بررسی رفتار ارتعاشی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد. همچنین، پیدایش مواد کامپوزیتی با کارایی زیاد باعث شده تا پوسته‌های مشبک کامپوزیتی جایگزین مناسبی برای سازه‌های تقویت‌شده با مواد سنتی باشند. سازه‌های تقویت‌شده کامپوزیتی متشکل از پوسته و تقویت‌کننده (به صورت تیر) که می‌تواند در

پوسته‌های مخروطی یکی از مهمترین اجزای تشکیل‌دهنده سازه‌های مورد استفاده در صنایع هوایی، عمران و هوافضا می‌باشند. سبکی وزن و قابلیت تحمل نیروی بالا این امکان را فراهم آورده که این سازه‌ها به طور گسترده در زمینه‌های مختلف مهندسی مورد استفاده قرار گیرند. پوسته‌های مخروطی

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Zarei, M., Hossein Rahimi, G., and Hemmatnezhad, M., "A novel smeared method for investigating the free vibrations of sandwich conical shells with lattice cores", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 4, pp. 1163-1170 2021.

کننده‌های متعامد را با استفاده از روش مجزا انجام دادند [12,11]. دانشجو و همکاران ارتعاشات پوسته‌های تقویت‌شده مخروطی دوار را مورد مطالعه قرار دادند و اثر پارامترهای مختلف را بر روی فرکانس بحرانی مورد مطالعه قرار دادند [13]. نادری و همکاران اثر زاویه الیاف را بر روی کمانش پوسته‌های مخروطی بررسی کردند [14]. زارعی و رحیمی ارتعاشات مخروط کامپوزیتی مشبک را مورد مطالعه قرار داده و اثر پارامترهای مهم طراحی را با مطالعه پارامتری بررسی نمودند [15]. با افزودن یک پوسته به پوسته تقویت‌شده به طوری که تقویت‌کننده ها مابین این پوسته قرار گیرند پوسته ساندویچی ایجاد می‌شود که سفتی بیشتری در کمانش و ارتعاشات نسبت به وزن سازه دارد [16]. به همین دلیل روش‌هایی به منظور استخراج سفتی جهت بررسی رفتار کمانشی و ارتعاشی این گونه سازه ها ارائه شده است [17]. در این تحقیق هدف توسعه مدلی تحلیلی به منظور استخراج ماتریس‌های سفتی تقویت‌کننده‌ها و در نتیجه کل سازه جهت تحلیل رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی ساندویچی حاوی هسته مشبک می‌باشد. فرمول‌بندی مساله براساس تئوری پوسته دانل و به کمک روش گالرکین³ استخراج شده است. سپس دقت مدل تحلیلی با مقایسه با نتایج عددی نرم‌افزار آباکوس⁴ سنجیده می‌شود. نتایج جدیدی ارائه می‌شود که می‌تواند به عنوان مبنایی جهت مطالعات آینده در نظر گرفته شوند.

2- روش معادل سازی

2-1- آنالیز سطح مشترک پوسته-تقویت‌کننده

شکل ۱ سیستم مختصات قرار گرفته بر روی تقویت‌کننده را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۲، مجموعه پوسته‌ها و تقویت‌کننده برای آنالیز ممان و نیرو در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا فرض می‌شود که سازه تحت خمش خالص قرار می‌گیرد. به منظور به دست آوردن سطح خنثی، بایستی نیروی محوری بر روی سطح تحت خمش خالص برابر صفر باشد. بنابراین با استفاده از روابط زیر سطح خنثی بدست می‌آید

$$\int_A \sigma_1 dA = \int_{A_{f1}} \sigma_{f1} dA + \int_{A_c} \sigma_{st} dA + \int_{A_{f2}} \sigma_{f2} dA = 0$$

$$\int_{(-h_0-t_2)}^{-h_0} E_{f2} \kappa_1 z dz + \int_{-h_0}^{(h_c-h_0)} E_c \kappa_1 z dz + \int_{(h_{st}-h_0)}^{(t_1+h_c-h_0)} E_{f1} \kappa_1 z dz = 0$$

(1)

که در آن l نشان دهنده جهت طولی تقویت‌کننده‌ها و κ_1 نشان‌دهنده انحنا تقویت‌کننده می‌باشد. با ساده‌سازی معادلات بالا، مکان سطح خنثی به صورت زیر به دست می‌آید

$$h_0 = \frac{-E_{f2} t_2^2 + E_c h_c^2 + 2E_{f1} t_1 h_c + E_{f1} t_1^2}{2(E_{f1} t_2 + E_{f2} t_1 + E_c h_c)}$$

(2)

دوطرف پوسته قرار گیرد باعث افزایش چشمگیری در مقاومت و سفتی سازه می‌شود بدون اینکه افزایش قابل توجهی در وزن آن ایجاد کند. سازه‌های مشبک کامپوزیتی به طور همزمان قابلیت‌های سازه‌های کامپوزیتی ساده و سازه‌های مشبک را دارند. آنچه که باعث استفاده گسترده از این نوع سازه‌ها شده نسبت مقاومت به وزن بالا و قابلیت تحمل بار در وزن محدود می‌باشد. سازه‌های ساندویچی با اضافه کردن یک پوسته به سازه تقویت‌شده ایجاد می‌شوند به نحوی که تقویت‌کننده‌ها در بین پوسته‌ها قرار گیرند. با توجه به اهمیت این سازه‌ها و همچنین هزینه بالای تست‌های تجربی، ارائه یک مدل تحلیلی که بتواند رفتار این سازه‌ها را تحت بارگذاری‌های مختلف به ویژه دینامیکی بررسی کند، از اهمیت بالایی برخوردار است. اکثر تحقیقات انجام شده بر روی رفتار مکانیکی پوسته‌های تقویت‌شده، محدود به تقویت‌کننده‌های متعامد بوده و تحقیقات کمتری به سازه‌های تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌های مورب (ریب) اختصاص یافته‌اند. بر همین اساس، کیدانه و همکاران با ارائه یک مدل تحلیلی بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مشبک با تقویت‌کننده‌های مورب را به دست آوردند و نتایج حاصل از تحلیل را با نتایج تجربی و عددی مقایسه کردند [۱]. یزدانی و رحیمی بررسی تجربی روی استوانه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده انجام دادند [2]. آنها همچنین تاثیر تعداد ریب و نوع شبکه روی کمانش سازه‌های استوانه‌ای مشبک مورد بررسی قرار دادند [4,3]. رحیمی و همکاران همچنین اثر تغییر سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها را روی کمانش استوانه مشبک انجام دادند [5]. رحیمی و همکاران رفتار ارتعاشی استوانه تقویت‌شده بر مبنای مدل کیدانه را مورد بررسی قرار دادند و برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف فرکانس‌های طبیعی ارتعاش سازه به دست آوردند و به این نتیجه رسیدند که زاویه ریب‌ها در فرکانس‌های بالاتر تاثیر بسزایی بر مشخصه‌های ارتعاشی دارد [6]. همت نژاد و همکاران با توسعه مدل کیدانه و در نظر گرفتن اثرات برشی خارج از صفحه و خمش، ارتعاشات آزاد استوانه تقویت‌شده کامپوزیتی را بر مبنای تئوری تنش برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که فرکانس ارتعاشات سازه تقویت‌شده از سازه تقویت‌نشده در ضخامت‌های پایین پوسته بیشتر است و ضخامت اثر مهمی روی فرکانس طبیعی دارد. این امر به این دلیل است که در ضخامت‌های پایین، اثر افزایش سفتی سازه در اثر وجود ساختار تقویت‌کننده بیشتر است [7]. همت نژاد و همکاران آنالیز تحلیلی، تجربی و عددی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تقویت‌شده را مورد مطالعه قرار دادند و تغییرات ضخامت و شرایط تکیه‌گاهی مختلف را مورد بررسی قرار دادند [8]. مقایسه نتایج روش تحلیلی با نتایج روش اجزای محدود¹ و نیز داده‌های به دست آمده از انجام آنالیز مودال تجربی بر روی نمونه‌های ساخته شده به کمک دستگاه پیچش الیاف، حاکی از دقت قابل قبول این مدل بود. قاسمی و همکاران پارامترهای موثر بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی مشبک را بر مبنای تئوری تنش برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند [9]. زارعی و رحیمی با استفاده از روش حل دقیق به مطالعه ارتعاشات پوسته‌های کامپوزیتی تقویت‌شده دوار با تقویت‌کننده‌های مارپیچی پرداخته و اثر ضخامت پوسته را برای حالات بهینه مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. با اینکه مقالات زیادی در زمینه پوسته‌های استوانه‌ای وجود دارد، مطالعات کمتری به سازه‌های مخروطی پرداخته‌اند و در بیشتر آنها پوسته و ریب‌ها از مواد مدرج تابعی^۲ تشکیل شده و تقویت‌کننده‌ها به صورت طولی و محیطی می‌باشند. طالی توتی و همکاران ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی مشبک با تقویت-

3 Galerkin method
4 ABAQUS

1 Finite element method
2 Functionally graded material (FGM)

کننده‌ها در راستای طولی به وسیله رابطه زیر در مختصات مخروطی بیان می‌شود

$$\kappa_l = \kappa_x c^2 + \kappa_{x\theta} SC + \kappa_\theta \quad (5)$$

حال فرض می‌شود که سازه ساندویچی تحت نیروی محوری (کششی یا فشاری) قرار گیرد، در این صورت ممان عکس العمل در تقویت‌کننده‌ها با توجه به سطح خنثی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$M_a = \int_{-h_0}^{h_{st}-h_0} b_h z \sigma_{st} dz = \int_{-h_0}^{h_{st}-h_0} E_{st} b_h \varepsilon_l^0 z dz \quad (6)$$

$$= E_{st} A_{st} \varepsilon_l^0 \left(\frac{h_{st}}{2} - h_0 \right)$$

کل ممان عکس‌العمل مربوط به تقویت‌کننده‌ها برابر است با مجموع ممان‌های ناشی از خمش خالص و نیروی محوری که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$M = M_a + M_b = E_c I_c \kappa_l + E_c A_c \varepsilon_l^0 \frac{\Delta t}{2} + E_c A_c \kappa_l \frac{\Delta t^2}{4} \quad (7)$$

به همین ترتیب، نیروی عکس العمل که ناشی از بارگذاری خمشی و محوری است به صورت زیر قابل محاسبه است

$$F = \int_{-h_0}^{h_c-h_0} b_h \sigma_c dz = \int_{-h_0}^{h_c-h_0} E_c b_h (\varepsilon_l^0 + z \kappa_l) dz = \quad (8)$$

$$E_c A_c \varepsilon_l^0 + E_c A_c \kappa_l \frac{\Delta t}{2}$$

2-2- آنالیز نیرویی و گشتاوری سلول واحد

نیروها و ممان‌های مربوط به هسته به شکل ۳ نشان داده شده است. نیروها در راستای تقویت‌کننده‌ها و ممان‌های عمود بر تقویت‌کننده‌ها به صورت زیر بدست می‌آیند

$$F_1 = K_1 \varepsilon_l^0(\varphi) + K_2 \kappa_l(\varphi)$$

$$F_2 = K_1 \varepsilon_l^0(-\varphi) + K_2 \kappa_l(-\varphi) \quad (9)$$

$$M_1 = K_2 \varepsilon_l^0(\varphi) + K_3 \kappa_l(\varphi)$$

$$M_2 = K_2 \varepsilon_l^0(-\varphi) + K_3 \kappa_l(-\varphi)$$

که در آن

$$K_1 = E_c A_c$$

$$K_2 = E_c A_c \frac{\Delta t}{2}$$

$$K_3 = E_c I_c + E_c A_c \frac{\Delta t^2}{4}$$

که در آن E_c ، E_{f1} و E_{f2} به ترتیب مدول یانگ مربوط به تقویت‌کننده‌ها، پوسته داخلی و پوسته خارجی می‌باشند.

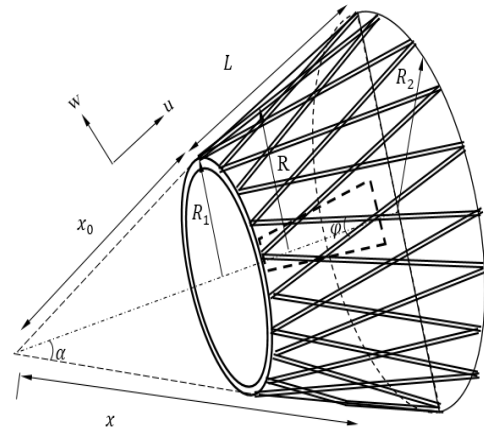


Fig. 1 sandwich conical shell with lattice core

شکل ۱ نمای از پوسته ساندویچی مخروطی با هسته مشبک

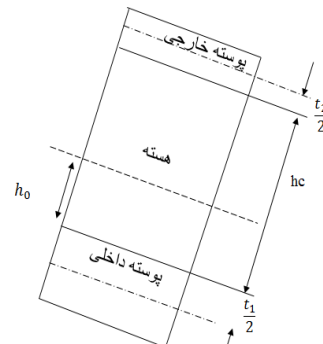


Fig. 2 Interfacing area and neutral surface

شکل ۲ سطح مقطع پوسته ساندویچی و موقعیت سطح خنثی

در این تحقیق، فرض می‌شود که تقویت‌کننده‌ها و پوسته‌ها دارای خواص مکانیکی مشابه می‌باشند. بنابراین رابطه ۲ به صورت زیر ساده می‌شود

$$h_0 = \frac{t_1 - t_2 + h_c}{2} = \frac{h_c - \Delta t}{2}, \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad (3)$$

که در آن t_1 و t_2 به ترتیب ضخامت پوسته‌های داخلی و خارجی است. هنگامی که سازه ساندویچی تحت خمش خالص قرار می‌گیرند، عکس‌العمل ممان مربوط به تقویت‌کننده‌ها عبارت است از:

$$M_b = \int_{-\frac{h_c - \Delta t}{2}}^{\frac{h_c + \Delta t}{2}} b_h z \sigma_l dz = \int_{-\frac{h_c - \Delta t}{2}}^{\frac{h_c + \Delta t}{2}} E_c b_h z \kappa_l z dz = \quad (4)$$

$$E_c I_c \kappa_l + E_c A_c \kappa_l \frac{\Delta t^2}{4}$$

که در آن A_c و I_c به ترتیب ارتفاع، پهنا، سطح مقطع و ممان اینرسی مرتبط به تقویت‌کننده‌ها می‌باشند. همچنین انحنای مربوط به تقویت-

$$a(x) = \frac{\pi R(x) \cos \varphi(x)}{N}$$

$$b(x) = \frac{a(x)}{\tan \varphi(x)}$$

همانطور که مشاهده می شود، رابطه ۱۲ با در نظر گرفتن شرایط خاص (پوسته داخلی با ضخامت صفر و کرنش یکنواخت در راستای عمق تقویت-کننده که معادل ممان اینرسی صفر است) به مدل کیدانه [۱] برای سفتی تقویت‌کننده‌ها کاهش می‌یابد. همچنین، نیروها و ممان‌های منتجه برای پوسته‌های داخلی و خارجی بر حسب کرنش‌های مربوط به سطح خنثی به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix}^{f1,f2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{f1,f2} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 \\ \epsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

که در آن سفتی‌های کششی، خمش-کشش و خمشی پوسته‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})^{f1,f2} = \sum_{k=1}^n \int_{t^{k-1}}^{t^k} \bar{Q}_{ij}^{f1,f2}(1, z, z^2) dz, \quad (14)$$

$$k = 1, 2, \dots \quad i, j = 1, 2, 6$$

با توجه به اینکه نیروها و ممان‌های منتجه بر حسب کرنش‌های سطح خنثی محاسبه می‌شوند، می‌توانند به صورت مستقیم با هم جمع شوند. با استفاده از

$$\text{جمع آثار این امر طبق رابطه زیر میسر می‌شود}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{f1} + N^c + N^{f2} \\ M^{f1} + M^c + M^{f2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (15)$$

که در آن N^c و N^{f2} ، N^{f1} به ترتیب نشان‌دهنده نیروهای منتجه ناشی از پوسته داخلی، خارجی و هسته مشبک می‌باشند. در نهایت، ماتریس‌های سفتی کل سازه به صورت زیر به دست می‌آیند

$$[A(x)] = [A(x)]^c + [A]^{f1} + [A]^{f2}$$

$$[B(x)] = [B(x)]^c + [B]^{f1} + [B]^{f2} \quad (16)$$

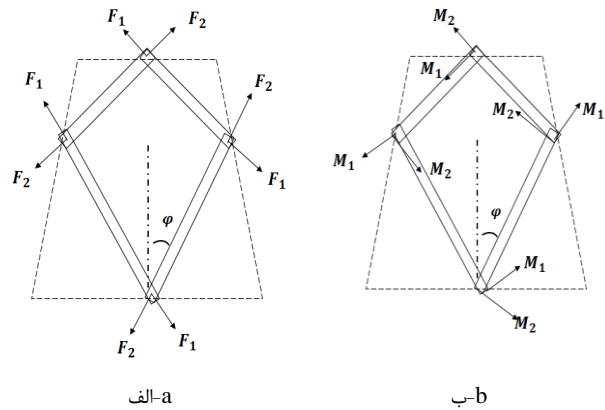


Fig. 3 Force (a) and moment (b) diagrams of a unit cell
شکل 3 دیاگرام (الف) نیروها و (ب) گشتاورهای یک سلول واحد از ساختار تقویت‌کننده

با جمع برداری نیروها و ممان‌ها بر روی یکی از اضلاع سلول واحد و در راستای مختصات مخروطی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_x &= F_1 \cos(\varphi) + F_2 \cos(\varphi) \\ F_\theta &= F_1 \sin(\varphi) + F_2 \sin(\varphi) \\ M_x &= M_1 \cos(\varphi) + M_2 \cos(\varphi) \\ M_\theta &= M_1 \sin(\varphi) + M_2 \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (10)$$

نیروها و ممان‌های برشی با جمع نیرو و ممان در راستای یکی از اضلاع به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} F_{x\theta} &= F_1 \sin(\varphi) - F_2 \cos(\varphi) \\ M_{x\theta} &= M_1 \sin(\varphi) - M_2 \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (11)$$

با تقسیم نیروها و ممان‌های به دست آمده بر طول‌های مربوطه، نیروها و ممان‌های منتجه به دست می‌آیند که در قالب ماتریسی به شکل زیر است

$$\begin{Bmatrix} N_x^c \\ N_\theta^c \\ N_{x\theta}^c \\ M_x^c \\ M_\theta^c \\ M_{x\theta}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]^c & [B]^c \\ [B]^c & [D]^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

که در آن

$$[A(x)]^c = 2E_c A_c \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a(x)} & \frac{cs^2}{a(x)} & 0 \\ \frac{sc^2}{b(x)} & \frac{s^3}{b(x)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b(x)} \end{bmatrix}$$

$$[B]^c = E_c A_c \begin{bmatrix} \frac{c^3 \Delta t}{a(x)} & \frac{sc^2 \Delta t}{a(x)} & 0 \\ \frac{sc^2 \Delta t}{b(x)} & \frac{cs^2 \Delta t}{b(x)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t sc^2}{b(x)} \end{bmatrix}$$

$$[D]^c = E_c A_c \begin{bmatrix} \left[\frac{c^3 \Delta t^2}{2} + \frac{2l_c}{A_c} c^3 \right] & \left[\frac{sc^2 \Delta t^2}{2} + \frac{2l_c}{A_c} sc^2 \right] & 0 \\ \frac{a(x)}{sc^2 \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{2l_c}{A_c} sc^2} & \frac{a(x)}{s^3 \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{2l_c}{A_c} s^3} & 0 \\ \frac{b(x)}{0} & \frac{b(x)}{0} & \left[\frac{sc^2 \Delta t^2}{2} + \frac{2l_c}{A_c} sc^2 \right] \end{bmatrix}$$

$$\psi(x) = \alpha_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m(x-x_0)}{L}\right) + \alpha_2 \cosh\left(\frac{\lambda_m(x-x_0)}{L}\right) - \xi_m \left(\alpha_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m(x-x_0)}{L}\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{\lambda_m(x-x_0)}{L}\right) \right) \quad (22)$$

که ثابت‌های α_i ، λ_i و ξ_i با توجه به نوع شرایط مرزی در جدول 1 لیست شده‌اند.

جدول 1 پارامترهای تابع تیر برای شرایط مرزی مختلف

Table 1 Beam function constants for different boundary conditions

α_i	λ_m	ξ_m	شرط مرزی
$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = -1$	$m\pi$	1	ساده-ساده
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1$	$(m + 1/2)\pi$	$\frac{\cosh\lambda_m - \cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m - \sin\lambda_m}$	گیردار-گیردار

شرایط مرزی هندسی بر حسب تابع تیر به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\begin{aligned} \text{تکیه گاه ساده} & \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi = 0 \\ \text{تکیه گاه گیردار} & \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi = 0 \\ \text{تکیه گاه آزاد} & \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

برای سادگی در انتگرال‌گیری، طرفین معادله 20 در R^i ضرب می‌شوند. سپس، روش گالرکین به منظور استخراج معادلات حاکم به صورت زیر استفاده می‌شود

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} R^2 \Gamma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin(n\theta + \omega t) \, dx d\theta &= 0 \\ \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} R^2 \Gamma_2 \psi \cos(n\theta + \omega t) \, dx d\theta &= 0 \\ \int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} R^3 \Gamma_3 \psi \sin(n\theta + \omega t) \, dx d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری معادله 21 در 20 و سپس در 24، دستگاه معادلات همگن زیر حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

برای رسیدن به یک حل غیر صفر لازم است دترمینان ماتریس ضرایب فوق برابر صفر شود. با انجام این کار به یک چند جمله‌ای مرتبه 6 و توان‌های زوج می‌رسیم که دارای 3 مقدار ویژه است

$$C_0 \omega^6 + C_1 \omega^4 + C_2 \omega^2 + C_3 = 0 \quad (26)$$

کوچکترین ریشه معادله مشخصه فوق به عنوان فرکانس طبیعی سازه ساندویچی در نظر گرفته می‌شود.

$$[D(x)] = [D(x)]^c + [D]^f + [D]^f$$

3-2- ارتعاشات پوسته مخروطی ساندویچی

شکل 1 نمای از مخروط ساندویچی با شعاع کوچک R_1 ، شعاع بزرگ R_2 ، طول L و زاویه نیم راس α را نشان می‌دهد. u, v و w به ترتیب مولفه‌های جابجایی در راستاهای x, θ و Z می‌باشند. روابط کرنش-جابجایی بر مبنای تئوری پوسته دائل و با فرض تغییر شکل‌های کوچک به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_\theta^0 &= \frac{u \sin \alpha + w \cos \alpha}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v \sin \alpha}{R} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_\theta &= -\frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ \kappa_{x\theta} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

معادلات حرکت برای یک پوسته مخروطی ناقص به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{R(x)} (N_x - N_\theta) &= I_1 \ddot{u} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{R(x)} N_{x\theta} + \frac{\cos \alpha}{R(x)} Q_\theta &= I_1 \ddot{v} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{R(x)} Q_x - \frac{\cos \alpha}{R(x)} N_\theta &= I_1 \ddot{w} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن

$$I_1 = \int_{-t1/2}^{t1/2} \rho_{f1} dz + \int_{-t2/2}^{t2/2} \rho_{f2} dz + \rho_{st} \frac{2A_{st}}{a(x)} \quad (19)$$

با جایگذاری معادلات 16 و 17 در معادلات 18، معادلات حرکت بر حسب جابجایی‌ها و مشتقات آنها به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w - I_1 \ddot{u} &= \Gamma_1 = 0 \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w - I_1 \ddot{v} &= \Gamma_2 = 0 \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w - I_1 \ddot{w} &= \Gamma_3 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

برای یک پوسته مخروطی، میدان جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_m \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x} \sin(n\theta + \omega t) \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_m \psi_m(x) \cos(n\theta + \omega t) \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_m \psi_m(x) \sin(n\theta + \omega t) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن A_m, B_m و C_m دامنه‌های ارتعاش و m و n به ترتیب نیم موج-های طولی و محیطی و ω فرکانس طبیعی می‌باشد. همچنین، $\psi(x)$ تابع تیر است که شرایط مرزی را ارضا کرده و به صورت زیر بیان می‌شود

4- آنالیز اجزای محدود

یک مدل سه بعدی از پوسته ساندویچی با هسته مشبک با استفاده از نرم‌افزار آباکوس نسخه 6.14 ساخته شد (شکل 4) که در آن ساختار تقویت‌کننده متشکل از 24 ریب می‌باشد که بر مبنای مسیر ژئودزیک تحت زاویه‌های 40 و 40- درجه نسبت به راستای طولی قرار گرفته‌اند. تقویت‌کننده‌ها با استفاده از قید tie به پوسته‌ها مقید شدند و بنابراین تقویت‌کننده و پوسته‌ها به صورت یک سازه یکپارچه مدل می‌شوند. از المان S8R برای پوسته‌ها و المان C3D20R برای مش‌بندی تقویت‌کننده‌ها استفاده شد. همگرایی مش نشان داد که 12000 المان برای هر یک از پوسته‌ها و حدود 760 المان برای هر یک از تقویت‌کننده‌ها، دقت لازم را فراهم می‌کند. پوسته‌ها به صورت 4 لایه $[+30, -30]$ مدل گردیدند که هرلایه دارای ضخامت 0.4 میلی‌متر می‌باشد. تکیه‌گاه گیردار برای این آنالیز در نظر گرفته شد. مشخصات هندسی و مکانیکی پوسته و تقویت‌کننده‌ها در جداول 2 و 3 داده شده‌اند.

جدول 2 خواص مکانیکی پوسته و تقویت‌کننده‌ها

Table 2 Material properties of the skin and lattice core

مقدار	خواص مکانیکی
5.525	مدول کششی (GPa) E_{33}, E_{22}, E_{11}
1.8, 1.8, 0.76	مدول برشی (GPa) G_{12}, G_{13}, G_{23}
0.28, 0.28, 0.076	نسبت پواسون $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
1420	چگالی (Kg/m^3) ρ

جدول 3 مشخصات هندسی پوسته مخروطی و تقویت‌کننده‌ها

Table 3 Geometrical properties for the skins and core

100	طول مخروط (mm)
100	شعاع کوچک (mm)
30	زاویه راس ($^\circ$)
1.6	ضخامت پوسته داخلی (mm)
1.6	ضخامت پوسته خارجی (mm)
40	زاویه تقویت‌کننده
4×4	مقطع تقویت‌کننده (mm^2)
24	تعداد تقویت‌کننده

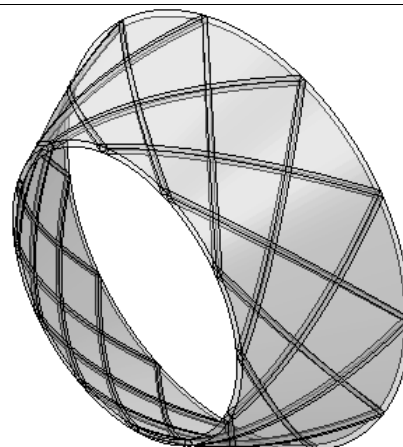


Fig. 4 3-D model built in ABAQUS 6.14 software

شکل 4 مدل سه‌بعدی ساخته‌شده در نرم‌افزار آباکوس

5- نتایج

به منظور اعتبارسنجی نتایج حاصل از مدل تحلیلی، چندین مقایسه صورت گرفته که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود. در ابتدا فرض می‌شود که ضخامت پوسته داخلی صفر باشد بنابراین مسئله به یک مخروط مشبک ساده می‌شود. برای این منظور، یک مقایسه بین نتایج این مقاله و مرجع [13] انجام شده که در شکل 5 آورده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود توافق خوبی بین دو حل وجود دارد. جدول 4 مقایسه‌ای را بین نتایج حاصل از روش تحلیلی و آنالیز اجزای محدود برای 6 فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود خطای کمی بین دو روش حل موجود است. از طرفی مشاهده می‌شود که با افزایش عدد نیم موج محیطی خطای بین دو روش حل افزایش می‌یابد. این بدان دلیل است که در عددهای موج بالا به دلیل تغییرشکل‌های بیشتر اثر تقویت‌کننده‌ها بر روی فرکانس طبیعی بیشتر شده و به دلیل فرضیات ساده‌سازی که در نظر گرفته شده این خطا بیشتر می‌شود. شکل 6 شکل مودهای ارتعاشی مربوط به این فرکانس‌ها را نشان می‌دهد. ممکن است در حین فرآیند ساخت پوسته‌های داخلی و خارجی، خطاهایی مانند ضخامت‌های غیر یکسان روی دهد. اثر این خطاها برای حالت متقارن محوری ($n=0$) در جدول 5 آورده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود انطباق خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی وجود دارد. همچنین فرکانس طبیعی در حالتی که ضخامت پوسته داخلی بیشتری دارد، بزرگتر است. در نهایت اثر لایه‌چینی‌های مختلف پوسته‌های درونی و بیرونی بر روی فرکانس طبیعی در حالت تقارن محوری در جدول 6 بررسی شده‌است. مقایسه‌ها نشان می‌دهد که مدل تحلیلی حاضر قادر است بدون صرف هزینه‌های تولید در روش تجربی و محاسبات در روش عددی، فرکانس‌های طبیعی ارتعاش سازه ساندویچی با هسته مشبک را با دقت خوبی پیش‌بینی کند.

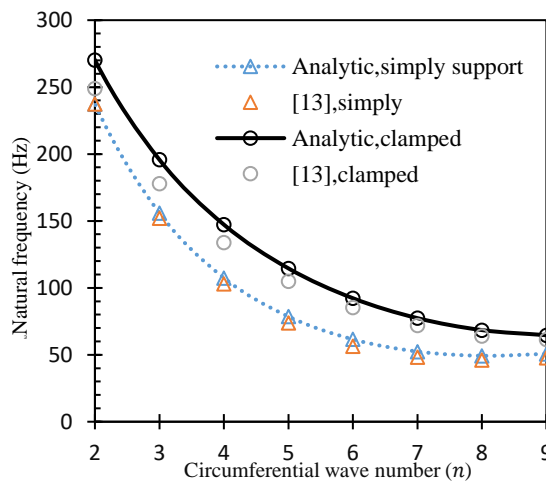


Fig. 5 comparison of the natural frequencies for grid-stiffened conical shell

شکل 5 مقایسه فرکانس طبیعی برای سازه مخروط مشبک

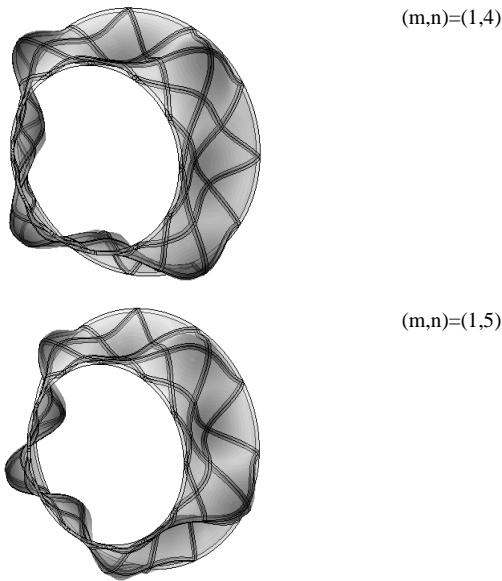


Fig. 6 Mode shapes of the sandwich conical shell under clamped-clamped end conditions
 شکل 6 شکل مودهای ارتعاشی پوسته ساندویچی مخروطی با شرایط مرزی دو سر گیردار

جدول 5 مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آنالیز تحلیلی و اجزای محدود یک مخروط ساندویچی برای ضخامت‌های متفاوت پوسته‌ها

Table 5 Comparison of the results obtained by CLT and FEM for different skin thicknesses

خطا (%)	FEM	CLT	t_2 (mm)	t_1 (mm)
2.59	2575	2510	1.8	1.6
2.62	2583	2517	1.6	1.8
2.73	2600	2531	1.6	2
2.50	2581	2518	2	1.6
2.51	2617	2553	2	2.2
2.52	2611	2547	2.2	2
2.43	2618	2556	2.4	2
2.38	2629	2568	2	2.4

جدول 6 مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آنالیز تحلیلی و اجزای محدود یک مخروط ساندویچی برای لایه‌چینی‌های مختلف پوسته‌ها

Table 6 Comparison of the results obtained by CLT and FEM for various lamination angles

خطا (%)	FEM	CLT	لایه‌چینی	
			پوسته بیرونی	پوسته درونی
0.48	2931	2917	[30/-30/30/-30]	[0/90/0/90]
1.29	2521	2554	[0/30/0/30]	[0/30/0/30]
0.07	2912	2910	[0/30/0/30]	[0/90/0/90]
2.52	2927	2855	[0/60/0/60]	[0/60/0/60]
4.25	3364	3227	[0/90/0/90]	[0/90/0/90]
2.39	2492	2553	[30/-30/30/-30]	[30/-30/30/-30]

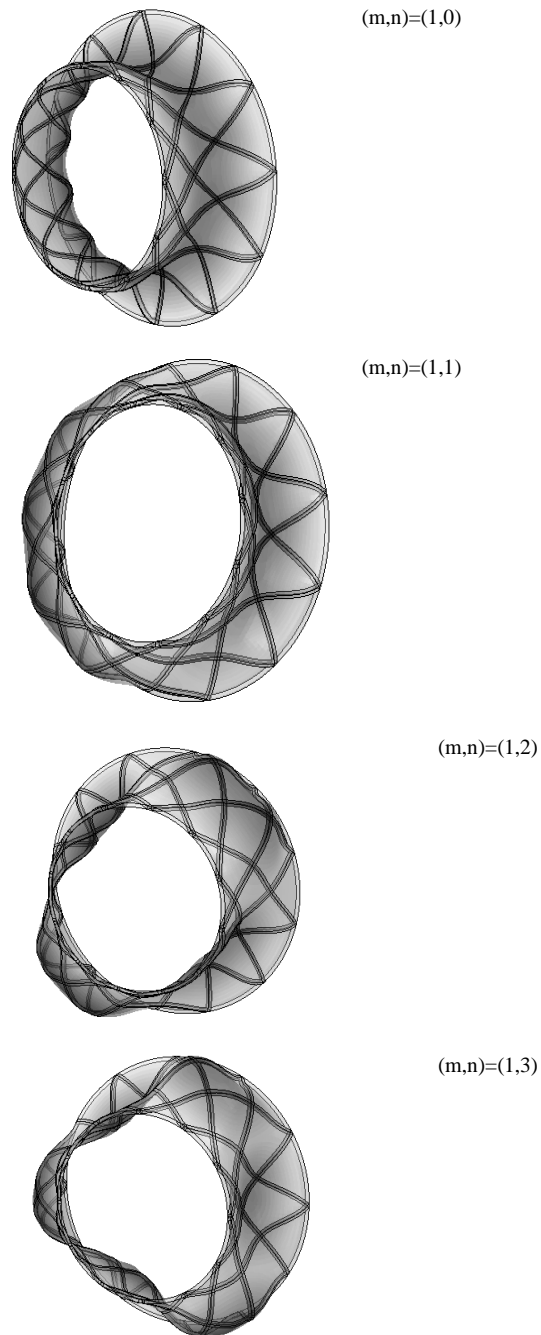
6- نتیجه گیری

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته‌های ساندویچی کامپوزیتی با هسته مشبک مورد مطالعه قرار گرفت. برای این منظور، یک مدل تحلیلی جدید به منظور محاسبه پارامترهای سفتی تقویت‌کننده‌ها ارائه شد که با اضافه کردن آنها به سفتی‌های پوسته، سفتی معادل کل سازه ساندویچی مورد بررسی به دست آمد.

جدول 4 مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های عددی و تحلیلی بر مبنای تئوری کلاسیک پوسته برای شماره مودهای ارتعاشی مختلف

Table 4 Comparison of the results obtained by CLT and FEM for different mode numbers

خطا (%)	FEM	CLT	(m,n)
0.52	2492	2505	(1,0)
0.33	2434	2442	(1,1)
0.04	2280	2279	(1,2)
2.80	2132	2074	(1,3)
8.41	2036	1878	(1,4)
11.54	1924	1725	(1,5)



- Composite Structures, Vol. 16, No. 4, pp. 375-387, 2014.
- [15] Zarei, M. and Rahimi, G.H., "Free Vibration Analysis of Grid Stiffened Composite Conical Shells", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 1-8, 2017.
- [16] Zhang, H. Sun, F. Fan, H. Chen, H. Chen, L. and Fang, D., "Free vibration behaviors of carbon fiber reinforced lattice-core sandwich cylinder", Composites science and technology, Vol. 100, pp. 26-33, 2014.
- [17] Sun, F. Fan, H. Zhou, C. and Fang, D., "Equivalent analysis and failure prediction of quasi-isotropic composite sandwich cylinder with lattice core under uniaxial compression", Composite Structures, Vol. 101, pp. 180-190, 2013.

برخلاف روش‌های معادل‌سازی که در اکثر مطالعات قبلی به کار رفته و در آنها هسته مشبک به صورت یک لایه پوسته ایزوتروپیک معادل می‌شود، در این روش معادل‌سازی هسته میانی به صورت یک لایه کامپوزیتی در نظر گرفته شده است. برای اعتبارسنجی نتایج، از مدل سه بعدی در نرم افزار آباکوس بهره برده شد. نتایج به دست آمده نشان داد که روش تحلیلی می‌تواند با دقت خوبی فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات را پیش‌بینی کند. تفاوت‌ها در برخی از موارد بیشتر به خاطر فرضیات ساده‌سازی که در مدل تحلیلی (مانند صرفنظر کردن از اثرات پیچشی و برشی) و همچنین خطاهایی است که در جریان ساخت مدل اجزای محدود ممکن است رخ داده باشد. نتایج حاضر جدید بوده و می‌تواند به عنوان مبنایی برای مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد.

7-مراجع

- [1] Kidane, S. Li, G. Helms, J. Pang, S.S. and Woldeesenbet, E., "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders", Composites part B, Vol. 34, pp. 1-9, 2003.
- [2] Yazdani, M. Rahimi, G.H. Afaghi Khatibi, A. and Hamzeh, S., "An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading", Scientific Research and Essays, Vol. 4, No. 9, pp. 914-920, 2009.
- [3] Yazdani, M. and Rahimi, G.H., "The effects of helical ribs' number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading", Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 29, No. 17, pp. 2568-2575, 2010.
- [4] Yazdani, M. and Rahimi, G.H., "The behavior of GFRP-stiffened and -unstiffened shells under cyclic axial loading and unloading", Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 30, No. 5, pp. 440-445, 2011.
- [5] Rahimi, G.H. Zandi, M. and Rasouli, S.F., "Analysis of the effect of stiffener profile on the buckling strength in composite isogrid stiffened shell under axial loading", Aerospace Science and Technology, Vol. 24, pp. 198-203, 2013.
- [6] Rahimi, G.H. Hemmatnezhad, M. and Ansari, R., "Prediction of Vibrational Behavior of Grid-Stiffened Cylindrical Shells", Advances in Acoustics and Vibration, Vol. 2014, Article ID 242573, 10 pages.
- [7] Hemmatnezhad, M. Rahimi, G.H. and Ansari, R., "On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells", Acta Mechanica, Vol. 225, pp. 609-623, 2014.
- [8] Hemmatnezhad, M. Rahimi, G.H. Tajik, M. and Pellicano, F., "Experimental, numerical and analytical investigation of free vibrational behavior of GFRP-stiffened composite cylindrical shells", Composite Structures, Vol. 120, pp. 509-518, 2015.
- [9] Ghasemi, M.A. Yazdani, M. and Hoseini, S.M., "Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory", In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013.
- [10] Zarei, M. and Rahimi, G.H., "Free vibration analysis of rotating grid stiffened composite cylindrical shells", In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 9, pp. 175-185, 2016.
- [11] Talebitooti, M. Ghayour, M. Ziaei-Rad, S. and Talebitooti, R., "Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners", Archive of Applied Mechanics, Vol. 80, pp. 201-215, 2010.
- [12] Talebitooti, M. Daneshjou, K. and Talebitooti, R., "Vibration and Critical Speed of Orthogonally Stiffened Rotating FG Cylindrical Shell Under Thermo-Mechanical Loads Using Differential Quadrature Method", Journal of Thermal Stresses, Vol. 36, pp. 160-188, 2013.
- [13] Daneshjou, K. Talebitooti, M. Talebitooti, R. and Saeidi Googarchin, H., "Dynamic analysis and critical speed of rotating laminated conical shells with orthogonal stiffeners using generalized differential quadrature method", Latin American Journal of Solids and Structure, Vol. 10, pp. 349-390, 2013.
- [14] Naderi, A.A. Rahimi, G.H. and Arefi, M., "Influence of fiber paths on buckling load of tailored conical shells", Steel and