



مطالعه پارامتریک تیرهای با حرکات طولی و دورانی تحت بارمحوری متشکل از مواد ویسکوالاستیک هدفمند محوری

علی فروغی¹، محمدرضا قضاوی^{2*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115143، ghazavim@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

دریافت: 1398/12/15

پذیرش: 1399/06/25

کلیدواژگان:

تیر متحرک محوری و چرخان
مواد مدرج تابعی محوری
تحلیل دایورژنس و فلاتر
نقشه پایداری
ارتعاشات کوپل

در این مقاله، باهدف بهبود عملکرد سیستم‌های بایژروسکوپی، ارتعاشات و پایداری یک تیر مدرج محوری با جفت حرکات‌های محوری و دورانی تحت بارمحوری مطالعه شده است. همچنین، یک مطالعه پارامتریک مفصل به منظور توضیح اثر فاکتورهای کلیدی مختلف مانند نرخ درجه‌بندی محوری مواد، نوع توزیع مواد، ضریب ویسکوزیته، چرخش و حرکت عبوری کوپل بر مشخصات دینامیکی سیستم انجام شده است. فرض شده است مشخصات مادی سیستم در راستای طولی به صورت خطی یا نمایی تغییر می‌کنند. با استفاده از تکنیک گسسته سازی گالرکین و تحلیل مقدار ویژه، سرعت‌های محوری و چرخشی بحرانی سیستم به دست می‌آیند. یک روش تحلیلی نیز برای شناسایی آستانه‌های ناپایداری سیستم به کار برده شده است. نقشه‌های پایداری سیستم آزموده شدند و برای اولین بار در این مقاله نشان داده شده است که با تنظیم صحیح درجه‌بندی محوری مواد می‌توان روند تکامل پایداری سیستم را تغییر داد. نتیجه شده است که تغییرات پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک اثرهای متضاد بر محدوده‌های دایورژنس و فلاتر سیستم دارند. همچنین نتایج نشان داده‌اند که با تعیین هم‌زمان گرادیان چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی می‌توان اثرات ناپایدارکننده نیروی محوری فشاری را تقلیل داد

Parametric investigation of dynamics of beams made of FG material with longitudinal and whirling movements exposed to axial forces

Ali Forooghi¹, Mohammad Reza Ghazavi^{2*}

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

2- School of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115143, Tehran, Iran, ghazavim@modares.ac.ir

Keywords

Axially moving and rotational beam
Axially functionally graded material
Coupled vibrations
Divergence and flutter
Stability map

Abstract

To improve the performance of the bi-gyroscopic systems, vibration and stability of an axially graded beam with both axial and rotational motion subjected to axial load have been studied. In addition, a detailed parametric study was performed to explain the effect of various key factors such as range of axial graded of materials, type of material distribution, viscosity coefficient, rotation and axial motion on the dynamic of the system. It was assumed that the material properties of the system change linearly or exponentially in the longitudinal direction. The critical axial and rotational speeds of the system were obtained by using the Galerkin discretization technique and eigenvalue analysis. An analytical method was used to identify system instability thresholds. The stability graphs were inspected. For the first time in this paper, it was verified that the stability evolution of the structure could be changed by properly regulating the axial graded of the material. It was concluded that changes in density gradient parameters and elastic modulus have opposite effects on the divergence and flutter boundaries of the system. Also, the destabilizing influences of compressive axial load can be reduced by determining the density gradient and elastic modulus in the longitudinal direction, simultaneously

1- مقدمه

مختلف، توسط پژوهشگران بی‌شماری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [2]. در این راستا، اثر فاکتورهای مختلفی بر پاسخ دینامیکی و مشخصه‌های دینامیکی سیستم‌های چرخان گزارش شده‌اند، مانند تغییرات دمایی [3]، راستای محور دوران [4]، هندسه نامتقارن [5]، نوسانات سرعت دوران [6] و جاذب غیرخطی [7].

دینامیک سازه‌های متحرک محوری، موضوع شمار زیادی از پژوهش‌های علمی در طول سال‌های گذشته بوده است. مرورهای جامع بر روی رفتار ارتعاشاتی و پایداری سیستم‌های متحرک محوری صورت گرفته است [1]. همچنین، سازه‌های چرخان به دلیل کاربردهای گسترده در صنایع مهندسی

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Forooghi A, and Ghazavi. M. R "Parametric investigation of dynamics of beams made of FG material with longitudinal and whirling movements exposed to axial forces", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 4, pp. 1177-1188, 2021.

مواد مدرج نوع خاصی از مواد مرکب هستند که خواص ترمومکانیکی آن‌ها در راستای مشخصی از جسم، به صورت نرم و پیوسته تغییر می‌کنند [8]. در مقایسه با مواد ایزوتروپیک و لایه‌ای مرسوم، مواد مدرج ویژگی‌های منحصر به فردی مانند چقرمگی شکست بالاتر، تمرکز تنش کمتر، مقاومت خوردگی و دمایی بهتر را نمایش می‌دهند [9]. به همین دلیل، به کارگیری مواد مدرج در سازه‌های متحرک محوری می‌تواند منجر به نتایج برجسته شود [10]. در این زمینه، ارتعاشات تیر متحرک محوری منعطف ساخته شده از مواد مدرج بر اساس روش المان محدود توسط پیوان و سامپایو [11] مطالعه شده است. نتایج آن‌ها نشان داد که استفاده از فلز به عنوان جزء اصلی تیر در مقایسه با سرامیک، منجر به نوسان فرکانسی کمتری در سیستم می‌شود. سویی و همکاران [12] ارتعاش آزاد عرضی تیر متحرک محوری مدرج را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو مطالعه کردند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلفی همچون سرعت حرکت محوری و شاخص قانون توانی را بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند. پایداری تیر متحرک محوری مدرج با سرعت وابسته به زمان توسط یان و همکاران [13] بررسی شد. آن‌ها برای به دست آوردن محدوده‌های پایداری سیستم از روش چندمقیاسی مستقیم استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که آستانه پایداری سیستم با افزایش سرعت محوری و پارامتر سختی تکیه‌گاه به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین، ترکیب مواد مدرج و سازه‌های چرخان توسط محققین متعددی مطالعه شده است [14]. به طور مثال، لی و ژانگ [15] پاسخ‌های دینامیکی تیرهای مخروطی مدرج تابعی محوری چرخان را بر اساس روش بی-اسپلاین مطالعه کردند. آن‌ها اثرات نسبت مخروطی، ناهمگنی ماده، سرعت دورانی و شعاع تویی را بر روی دینامیک سیستم بررسی کردند. بهالدینی و سعیدی [16] به تحلیل آبروالاستیک تیغه‌های مدرج تابعی چرخان تقویت شده با نانوصفحات گرافن در جریان فراصوت پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش گالرکین تعمیم یافته به حل مسئله پرداختند و نشان دادند که افزودن مقدار کمی از صفحات گرافنی به ماتریس پلیمر منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. ابراهیمی و مختاری [17] رفتارهای ارتعاش آزاد عرضی تیر تیموشنکو چرخان مدرج تابعی که از مواد متخلخل ساخته شده را با استفاده از روش نیمه تحلیلی تبدیل دیفرانسیلی مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که به ازای مقادیر مناسب شاخص قانون توانی، رفتار ارتعاشاتی تیرهای چرخان مدرج بهبود می‌یابد، درحالی که نسبت لاغری اثر ناچیزی بر رفتار ارتعاشی سیستم دارد. زرین زاده و همکاران [18] ارتعاشات آزاد تیرهای مخروطی چرخان مدرج محوری را با بکارگیری روش اجزا محدود برای شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. آن‌ها اثرات ناهمگنی مواد، نسبت مخروطیت، شعاع هاب و پارامتر سرعت چرخش را بر دینامیک سیستم بررسی کردند. اوه و همکاران [19] پایداری ترموالاستیک تیرهای دایروی جدار نازک مدرج چرخان را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که تغییرات شاخص توانی می‌تواند مرزهای پایداری سیستم را به طور قابل توجهی جابجا کند. رامش و راثو [20] فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات تیرهای چرخان یکسرگردار مدرج محوری پیش-تاب را مطالعه کردند. آن‌ها اثرات کوپلینگ مودهای طولی و عرضی را بر پاسخ دینامیکی سیستم به ازای گرادین‌های مختلف مواد بررسی کردند. اوه و همکاران [21] ارتعاشات پره‌های چرخان توربوماشین‌ها را که از مواد مدرج تابعی ساخته شده‌اند و در میدان‌های دما بالا عملیات می‌کنند، در نظر گرفتند. آن‌ها خواص مؤثر مواد را با فرض روش اختلاط و موری تاناکا به دست آوردند. فاضل زاده و حسینی [22] رفتار آبروترموالاستیک تیرهای جدار نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی را در جریان‌های فراصوت و تأثیر پارامترهای

هندسی بر این رفتار را مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که فرکانس‌های طبیعی تحت بار آبروترموالاستیک کاهش می‌یابد. لیرسکیو همکاران [23] ارتعاشات تیرهای جدار نازک مدرج را در محیط‌های حرارتی مدل کردند. آن‌ها فهمیدند که گرادین دما بعلاوه تغییرات خواص مواد نقش اساسی در تعیین سرعت‌های بحرانی کماتش سیستم دارند. تیرهای متحرک چرخان، یکی از اصلی‌ترین المان‌ها در سازه‌های مکانیکی هستند [24]. به دلیل داشتن همزمان حرکت محوری و حرکت چرخشی، این سیستم‌های بایژروسکوپیک، دارای پویایی دینامیکی غنی بین سیستم‌های ژيروسکوپیک هستند؛ اما علیرغم اهمیت بالای این سازه‌های کاربردی، مطالعات محدودی در زمینه مدل‌سازی ریاضی و تحلیل دینامیکی آن‌ها انجام شده است [25]. در این زمینه، یوه و یانگ [26] مدل‌سازی دینامیکی یک تیر چرخان متحرک محوری را به صورت شبیه‌سازی و آزمایشگاهی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که اثر نیروی اینرسی در تیرهای چرخان در سرعت‌های بالا قابل توجه است درحالی که در سرعت‌های پایین قابل صرف نظر است. پاسخ‌های دینامیکی پیش پیچش تیر چرخان متحرک محوری یکسرگردار بر اساس تئوری تیر اولیر-برنولی توسط لی [27] مطالعه شده است. او نشان داد که تغییرات جابه‌جایی سر تیر به ازای حرکت‌های نسبتاً سریع طولی و چرخشی، دارای نوسان کمتری است. ژو و چانگ [28] پاسخ ارتعاشی و پایداری یک تیر چرخان متحرک محوری را بر اساس تئوری تیر رابلی مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ممان اینرسی سیستم، نواحی پایداری سیستم کوچک می‌شوند. یانگ و همکاران [29] دینامیک تیر چرخان متحرک محوری را بررسی کردند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی و نقاط انشعاب سیستم را به ازای تغییرات سرعت محوری و سرعت دورانی به دست آوردند. برخلاف سازه‌های چرخان متحرک ایزوتروپیک، ادبیات فنی موجود بر روی تحلیل ارتعاشاتی سیستم‌های چرخان متحرک کامپوزیتی محدودتر است. قایش و همکاران [30] تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک روتور همراه با حرکت محوری را انجام دادند. آن‌ها با به کارگیری روش مقیاس چندگانه، فرکانس‌های غیرخطی و محدوده‌های پایداری پاسخ حالت ماندگار را به دست آوردند. صاحبکار و همکاران [31] ارتعاشات غیرخطی یک رشته حفاری متحرک محوری در یک چاه اریب را بررسی کردند. آن‌ها اثرات جرم نامتوازن و نیروی غیرخطی سیال بر پاسخ دینامیکی و مودهای غیرخطی سیستم را مطالعه کردند. اخیراً، لی و همکاران [32] مشخصه‌های کوپل شده ارتعاشاتی یک تیر کامپوزیتی جدار نازک چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. آن‌ها اثرات مشخصه‌های هندسی همچون نسبت‌های طول و ضخامت به شعاع و خواص مواد نظیر زاویه جهت بندی الیاف را بر روی رفتار دینامیکی سیستم بررسی کردند. بر طبق اطلاعات نویسندگان، تحلیل ارتعاشاتی تیرهای مدرج محوری با جفت حرکت محوری و دورانی تا به حال مطالعه نشده است. همچنین اثر به کارگیری مواد ویسکوالاستیک، مواد مدرج طولی (تغییرات مدول الاستیک و چگالی جداگانه و همزمان با توابع توزیع مختلف) و همچنین اثر نیروهای محوری فشاری و کششی بر رفتار ارتعاشاتی و پایداری دینامیکی سیستم‌های بایژروسکوپیک تاکنون گزارش نشده است. هدف اصلی این مقاله ارزیابی استفاده از مواد مدرج محوری، مواد ویسکوالاستیک و همچنین بررسی اثر نیروهای محوری فشاری و کششی در بهبود عملکرد سازه‌هایی که همزمان تحت حرکت محوری و چرخشی هستند، است. ابتدا در بخش 2، معادلات دینامیکی سیستم استخراج می‌شوند. سپس در بخش 3، برای استخراج معادلات کاهش مرتبه یافته، تکنیک گسسته سازی گالرکین استفاده می‌شود. در ادامه، مسئله مقدار ویژه در بخش 4 انجام می‌شود. برای اطمینان از

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\sigma_x = E(x)\varepsilon_x + \beta \frac{D}{Dt} \varepsilon_x \quad (8)$$

که در آن v و w به ترتیب جابجایی عرضی سیستم در راستای محوره‌های y و z هستند. ضمناً β ضریب ویسکوزیته، ε_x کرنش طولی و σ_x تنش محوری است. سپس انرژی پتانسیل سیستم این چنین محاسبه می‌شود [35]:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_x \varepsilon_x A dx \quad (9)$$

انرژی جنبشی سیستم این چنین بیان می‌شود [29]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A \left(u^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \Omega w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega v \right)^2 \right) dx \quad (10)$$

انرژی جنبشی سیستم ترکیبی از انرژی جنبشی ناشی از حرکات طولی و دورانی سیستم است که در سیستم‌های بایروسکوپی به کار گرفته می‌شود [36]. کار انجام شده توسط نیروی محوری فشاری نیز به دلیلی چرخش در سیستم این چنین به دست می‌آید [37]:

$$W_p = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (11)$$

برای استخراج معادلات دینامیکی سیستم از اصل همیلتون استفاده می‌شود [38]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_p - V) dt = 0 \quad (12)$$

با جایگذاری معادلات (9-11) در معادله (12)، معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم طبق روابط (13) و (14) استخراج می‌شوند.

$$\begin{aligned} \rho(x)A(\ddot{v} + 2u\dot{v}' - 2\Omega\dot{w} + u^2v'' - 2u\Omega w' - \Omega^2v) \\ + \rho'(x)Au(\dot{v} + uv' - \Omega w) \\ + P\dot{v}'' + E(x)Iv'''' \\ + 2E'(x)Iv'''' + E''(x)Iv'' \\ + \beta I(\dot{v}'''' + uv''''') = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho(x)A(\ddot{w} + 2u\dot{w}' + 2\Omega\dot{v} + u^2w'' + 2u\Omega v' - \Omega^2w) \\ + \rho'(x)Au(\dot{w} + uw' + \Omega v) \\ + P\dot{w}'' + E(x)Iw'''' \\ + 2E'(x)Iw'''' + E''(x)Iw'' \\ + \beta I(\dot{w}'''' + uw''''') = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

که علامت پریم و دات به ترتیب بیانگر مشتق نسبت به x و t هستند. برای استخراج روابط بی‌بعد، پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند:

درستی روش مورد استفاده در پژوهش حاضر، در زیربخش 1-5، نتایج به‌دست آمده با نتایج موجود در ادبیات مقایسه می‌شوند. در ادامه، اثر گرادیان مواد، توزیع‌های مختلف مواد، خاصیت ویسکوالاستیک، نیروی محوری، سرعت محوری و حرکت دورانی بر مرزهای پایداری و مشخصات دینامیکی سیستم با جزییات بحث و بررسی می‌شوند. ضمناً برای اولین بار نشان داده خواهد شد که روند تکامل تیرهای متحرک محوری دورانی چرخشی را می‌توان با درجه‌بندی محوری مواد و مواد ویسکوالاستیک تغییر داد. همچنین، مرزهای دایورژنس سیستم به‌صورت تحلیلی و عددی به دست می‌آیند و مقایسه می‌شوند. درنهایت، نیز بعضی از نتایج مهم بیان خواهند شد.

2- مدل سازی ریاضی

شکل 1 شماتیک یک تیر دو سر مفصل با حرکت‌های محوری و دورانی را نشان می‌دهد. فرض می‌شود که تیر نسبت به محور طولی متقارن است و یک نیروی محوری فشاری P در دو انتهای تیر به آن وارد می‌شود. تیر به‌صورت هم‌زمان با سرعت u در راستای محوری حرکت می‌کند و با سرعت دورانی Ω می‌چرخد. طول تیر L ، ممان اینرسی آن I و سطح مقطع آن نیز A است [33].

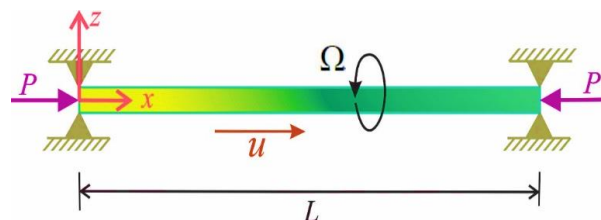


Fig. 1 Schematic of the axially graded beam with both axial and rotational motions

شکل 1 شماتیک تیر مدرج محوری با حرکت محوری و دورانی مشخصات مادی تیر یعنی مدول الاستیک $E(x)$ و چگالی $\rho(x)$ به ترتیب طبق معادلات (1) و (2)، در راستای طولی تیر طبق قانون خطی یا نمایی تغییر می‌کنند:

$$E(x) = E_0 f(x) \quad (1)$$

$$\rho(x) = \rho_0 g(x) \quad (2)$$

که در آن ρ_0 و E_0 چگالی و مدول الاستیک در ابتدای تیر هستند و

$$g(x) = 1 + \frac{x}{L}(\alpha_\rho - 1) \quad \text{or} \quad g(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_\rho)}{L}} \quad (3)$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{L}(\alpha_E - 1) \quad \text{or} \quad f(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_E)}{L}} \quad (4)$$

در روابط (3) و (4)، α_ρ و α_E به ترتیب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک هستند و چنین تعریف می‌شوند:

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_L}{\rho_0} \quad (5)$$

$$\alpha_E = \frac{E_L}{E_0} \quad (6)$$

در روابط (5) و (6) ρ_L و E_L چگالی و مدول الاستیک در انتهای تیر هستند. با در نظرگیری رابطه خطی کرنش-جابجایی و معادله ترکیبی اساسی ماده ویسکوالاستیک براساس مدل کلونین-وویت، می‌توان نوشت [34]:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Q} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & G_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که در آن:

$$\mathbf{Q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \quad (22)$$

$$\mathbf{P} = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T \quad (23)$$

$$(\mathbf{M}_1)_{sr} = \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \quad (24)$$

$$(\mathbf{G}_1)_{sr} = u \int_0^1 2g(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx + u \int_0^1 \lambda(\xi) \phi_s(x) \phi_r(x) dx + \eta \int_0^1 \gamma(x) \phi_r''''(x) dx \quad (25)$$

$$(\mathbf{G}_2)_{sr} = -2u \int_0^1 2g(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx \quad (26)$$

$$(\mathbf{K}_1)_{sr} = u^2 \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r''(x) dx - \Omega^2 \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx + u^2 \int_0^1 \lambda(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx + P \int_0^1 \phi_s(x) \phi_r''(x) dx + \int_0^1 f(x) \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx + 2 \int_0^1 \gamma(x) \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx + \int_0^1 \mu(x) \phi_s(x) \phi_r''(x) dx + \eta u \int_0^1 \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx \quad (27)$$

$$(\mathbf{K}_2)_{sr} = -2u \Omega \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx - u \Omega \int_0^1 \lambda(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \quad (28)$$

4- تحلیل پایداری

معادله ماتریسی مرتبه دوم حرکت سیستم را می‌توان به فرم مرتبه اول زیر کاهش داد:

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{Z}}(\tau) + \mathbf{E}\mathbf{Z}(\tau) = 0 \quad (29)$$

که در آن

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & G_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} & 0 \\ -\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}(\tau) = \begin{bmatrix} Q \\ P \\ \dot{Q} \\ \dot{P} \end{bmatrix} \quad (30)$$

حال با فرض راه حل $\mathbf{Z} = \mathbf{A}e^{\lambda t}$ معادله مرتبه کاهش یافته (29) منجر به مسئله مقدار ویژه زیر می‌شود:

$$\mathbf{Y}\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = 0 \quad (31)$$

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad v^* = \frac{v}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{E_0 L^2}{\rho_0 A}}, \quad (15)$$

$$u^* = \frac{u}{L^2} \sqrt{\frac{\rho_0 A}{E_0}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 A}{E_0}}, \quad P^* = \pm \frac{PL^2}{EI}, \quad \eta = \frac{\beta L}{\sqrt{\rho_0 A E_0}}, \quad \lambda(x^*) = g'(x)L, \quad \gamma(x^*) = f'(x)L, \quad \mu(x^*) = f''(x)L^2$$

لازم به ذکر است که در نیروی محوری (P^*)، علامت‌های مثبت و منفی، به ترتیب به نیروهای فشاری و کششی ارجاع داده می‌شوند. با جایگذاری پارامترهای بی‌بعد رابطه (15) در معادلات دینامیکی سیستم و حذف ستاره از پارامترهای بی‌بعد، معادلات دینامیکی بدون بعد سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$g(x)(\ddot{v} + 2u\dot{v}' - 2\Omega\dot{w} + u^2v'' - 2u\Omega w' - \Omega^2v) + \lambda(x)u(\dot{v} + uv' - \Omega w) + Pv'' + f(x)v'''' + 2\gamma(x)v'''' + \mu(x)v'' + \eta(\dot{v}'''' + uv''''') = 0 \quad (16)$$

$$g(x)(\ddot{w} + 2u\dot{w}' + 2\Omega\dot{v} + u^2w'' + 2u\Omega v' - \Omega^2w) + \lambda(x)u(\dot{w} + uw' + \Omega v) + Pw'' + f(x)w'''' + 2\gamma(x)w'''' + \mu(x)w'' + \eta(\dot{w}'''' + uw''''') = 0 \quad (17)$$

3- روش گسسته سازی

برای گسسته سازی معادلات و به دست آوردن معادله مرتبه کاهش یافته، از روش گالرکین استفاده می‌شود. به همین دلیل جابجایی‌های عرضی سیستم طبق روابط زیر تخمین زده می‌شوند [39]:

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_j(x) \quad (18)$$

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \phi_j(x) \quad (19)$$

که در آن n تعداد مودهای در نظر گرفته شده، q و p به ترتیب مختصات تعمیم یافته وابسته به زمان در راستای محورهای y و z هستند. همچنین، ϕ تابع تخمینی برای جابجایی عرضی سیستم در راستای محورهای y و z هستند و چنین بیان می‌شوند [29]:

$$\phi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x) \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (18-19) در معادلات (16) و (17) و به کارگیری روش گالرکین، فرم عمومی بدون بعد معادلات گسسته سیستم به شکل زیر نوشته می‌شود:

که در شکل 3-الف مشاهده می‌شود، در نبود سرعت دورانی در سیستم ($\Omega=0$)، فرکانس پایه‌ای سیستم یک شاخه دارد. در این حالت، با افزایش سرعت محوری، فرکانس پایه‌ای سیستم به‌طور یکنوا کاهش می‌یابد تا در سرعت محوری دایورژنس (u_d)، فرکانس پایه‌ای سیستم صفر می‌شود و بعداً آن سیستم در یک محدوده مشخصی از سرعت محوری متحمل پدیده دایورژنس می‌شود. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، فرکانس پایه‌ای بعلاوه سرعت محوری دایورژنس سیستم افزایش می‌یابد. این روند را می‌توان با این حقیقت توجیه کرد که از آنجایی‌که پارامتر گرادیان مدول الاستیک تنها در ماتریس سختی سیستم نقش دارد، بنابراین می‌توان گفت افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، اثر افزایش سختی بر سیستم القا می‌کند. در نتیجه، با افزایش α_E ، مقاومت سیستم به دایورژنس افزایش پیدا می‌کند و سیستم در سرعت‌های بالاتر متحمل پدیده دایورژنس می‌شود.

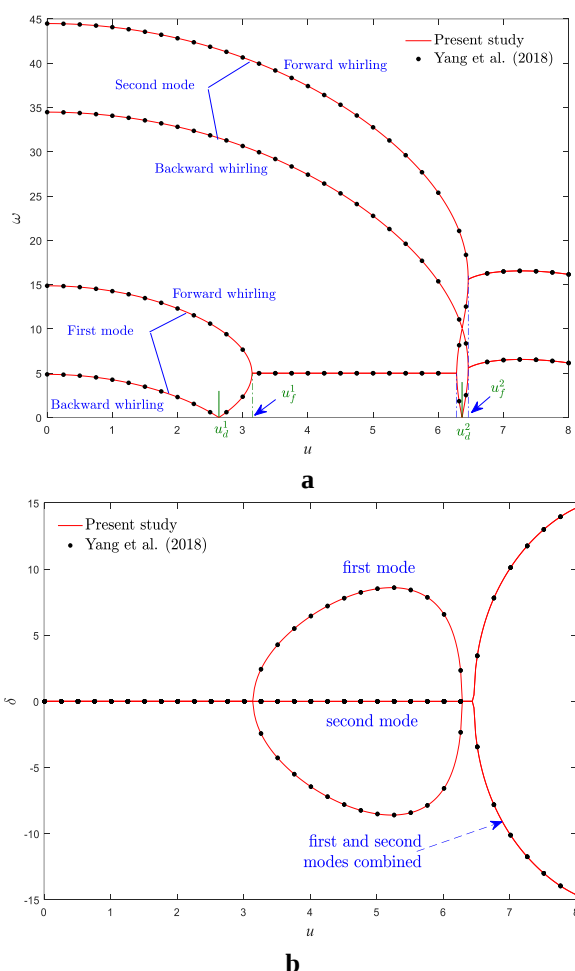


Fig.2 (a) Imaginary and (b) real parts of the first two eigenvalues of the isotropic beam for $\zeta=0, P=0, \Omega=5$

شکل 2 (الف) قسمت موهومی و (ب) حقیقی دو جفت مقدار ویژه اول تیر

ایزوتروپیک به ازای $\zeta=0, \Omega=5, P=0$

به بیان دیگر، افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک منجر به ساختار سفت‌تر سیستم می‌شود. هنگامی‌که سیستم ترکیبی از حرکت محوری و دورانی دارد (شکل‌های 3 ب-د)، به دلیل اثر ژبروسکوپیک کوریولیس، یک انشعاب در

که I ماتریس همانی است، λ مقدار ویژه مختلط است و $\mathbf{Y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$. قسمت موهومی مقدار ویژه سیستم ($\omega = \text{Image}(\lambda)$) به فرکانس طبیعی ارتعاشات سیستم مربوط است و قسمت حقیقی آن ($\delta = \text{Real}(\lambda)$) به دمپینگ سیستم مربوط می‌شود. هنگامی‌که $\omega=0$ سیستم دچار دایورژنس می‌شود. همچنین هنگامی‌که $\delta > 0$ است، در سیستم ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد.

5- نتایج عددی و بحث

در این بخش ابتدا برای اطمینان از درستی روش حل مورد استفاده، فرکانس‌های طبیعی سیستم با نادیده گرفتن گرادیان محوری مشخصات مواد استخراج می‌شوند و با نتایج موجود در ادبیات مقایسه می‌شوند. سپس، اثر گرادیان محوری چگالی و مدول الاستیک بر رفتار دینامیکی سیستم تحلیل می‌شود. در نهایت نیز تأثیر توزیع‌های مختلف مواد در راستای طولی و تغییرات هم‌زمان مشخصات مادی سیستم بر نواحی پایداری توضیح داده می‌شود.

5-1- صحنه سازی مدل

قسمت موهومی و حقیقی چهار مقدار ویژه اول تیر ایزوتروپیک (شامل دو جفت فرکانس طبیعی پسرو و پیشرو) هنگامی‌که $\Omega=5$ است، به ترتیب در شکل 2 (الف) و (ب) رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج پژوهش حاضر با نتایج یانگ و همکاران [29] تطابق خوبی دارد. لازم به ذکر است همان‌طور که در شکل 2-الف مشاهده می‌شود، در مقایسه با تیرهای متحرک محوری و تیرهای چرخان، تیرهایی که هم‌زمان حرکت محوری و چرخشی دارند، روند تکامل پایداری "پایدار-مود اول دایورژنس-پایدار-ترکیب مودفلاتر-پایدار-مود اول دایورژنس-پایدار-ترکیب مودفلاتر" را تجربه می‌کنند. به بیان دیگر، مطابق شکل 2-الف، در مقایسه با سیستم‌های مونوژبروسکوپیک، سیستم‌های بایژبروسکوپیک در یک سرعت دورانی ثابت با افزایش سرعت محوری، می‌توانند دو سرعت مختلف دایورژنس (u_d^1 و u_d^2) و دو سرعت مختلف فلاتر (u_f^1 و u_f^2) را تجربه کنند. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، بخش‌هایی از نمودار که دارای شیب منفی هستند اشاره به فرکانس طبیعی پسرو¹ یا مد فرکانسی فرد و قسمت‌های دارای شیب مثبت مربوط به فرکانس طبیعی پیشرو² یا مود فرکانسی زوج می‌باشد. لازم به ذکر است برای استخراج صحیح نتایج و مطابقت قابل قبول با نتایج ارائه شده توسط یانگ و همکاران [29]، از شش مود ارتعاشاتی در روش گالرکین استفاده شده است.

5-2- اثر پارامتر گرادیان مدول الاستیک

در این بخش فرض می‌شود که مدول الاستیک سیستم به‌طور خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده است. در شکل‌های 3 (الف-د) تغییرات فرکانس پایه‌ای سیستم برحسب تغییرات سرعت محوری سیستم به ازای سرعت‌های دورانی مختلف، هنگامی‌که $P=0$ است، رسم شده است. همچنان

1 Backward

1 Forward

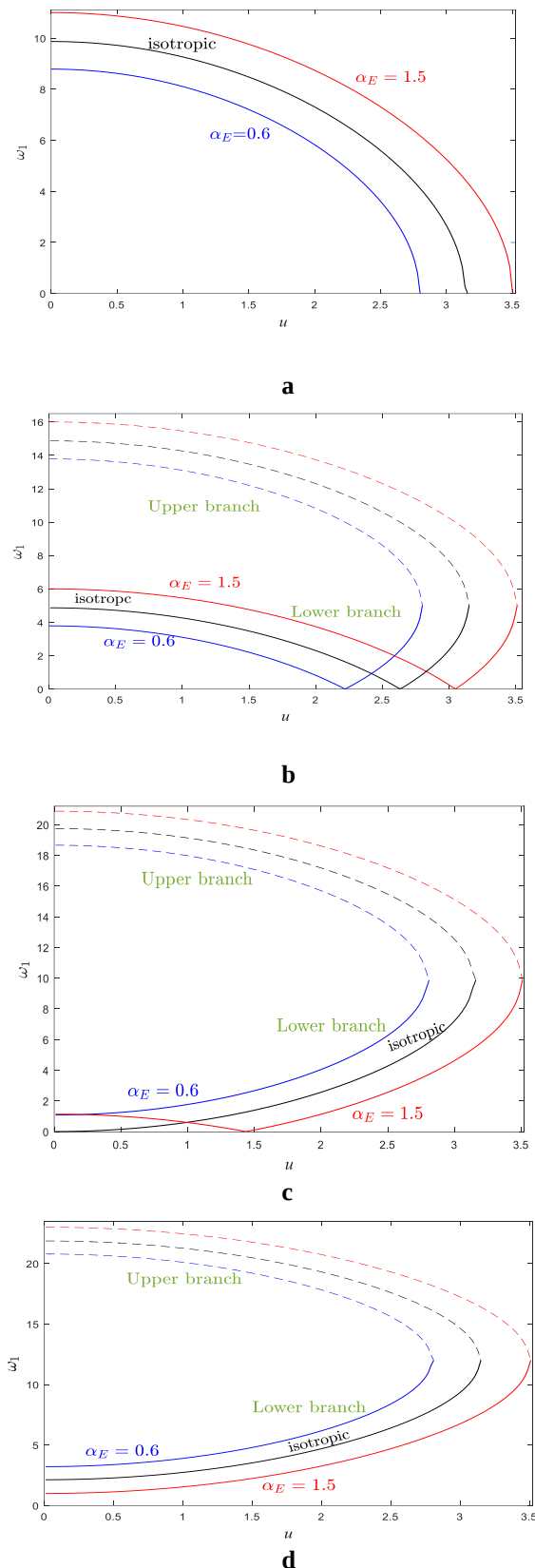


Fig.3 Fundamental frequency of the system based on axial velocity for $\zeta=0, P=0, \alpha_p=1$ (a) $\Omega=0$ (b) $\Omega=5$ (c) $\Omega=9.87$ (d) $\Omega=12$

شکل 3 فرکانس پایه‌ای سیستم برحسب سرعت محوری به ازای $P=0, \alpha_p=1$, $\Omega=12$ (د) $\Omega=9.87$ (ج) $\Omega=5$ (ب) $\Omega=0$ (الف) $\zeta=0$

فرکانس‌های طبیعی رخ می‌دهد. در نتیجه فرکانس پایه‌ای سیستم به دو شاخه مجزای چرخش پسر و (شاخه پایینی) و چرخش پیشرو (شاخه بالایی) تقسیم می‌شود که این مطلب قبلاً در [40] اثبات شده است. در این حالت، حرکت‌های چرخشی پیشرو و پسر برای دو مود اول به نوبت اتفاق می‌افتند و یک موج عرضی با پیکربندی فضایی در طول ارتعاشات ارائه می‌شود. اثر تغییرات سرعت محوری بر فرکانس پایه‌ای سیستم، وابسته به مقدار سرعت دورانی سیستم است. به طوری که مطابق شکل 3-ب، در سرعت‌های دورانی کوچک (مثلاً $\Omega=5$)، ابتدا با افزایش سرعت محوری تیر فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو سیستم به آرامی کاهش می‌یابند تا در یک سرعت محوری مشخص، فرکانس پایه‌ای پسر و پیشرو صفر می‌شود و سیستم پدیده کماتش را تجربه می‌کند. بعد از آن، بلافاصله با افزایش سرعت محوری، سیستم مجدداً پایدار می‌شود. در این شرایط با افزایش بیشتر سرعت محوری، فرکانس پسر و پیشرو افزایش پیدا می‌کند، در حالی که فرکانس شاخه بالایی همچنان کاهش می‌یابد. این روند ادامه پیدا می‌کند تا در سرعت محوری فلاتر، شاخه‌های پایینی و بالایی فرکانس با یکدیگر تلاقی پیدا می‌کنند و باهم یکی می‌شوند و یک فلاتر کوپلینگ دوجبه اتفاق می‌افتد. در نتیجه، سیستم دچار پدیده فلاتر می‌شود و یک کوپلینگ فلاتر بین مختصات عمومی در دو جهت عرضی اتفاق می‌افتد. در این حالت جابجایی‌های سیستم با نوسان ناپایدار می‌شوند. بر اساس این شکل، با افزایش α_E ، سرعت‌های محوری متناظر پدیده‌های دایورژنس و فلاتر هر دو افزایش می‌یابند. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای سرعت‌های محوری کمتر از سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d$)، تغییرات محوری مواد اثر یکسانی بر شاخه‌های پایینی و بالایی فرکانس پایه‌ای سیستم دارد، به طوری که با افزایش α_E ، فرکانس‌های پیشرو و پسر سیستم افزایش می‌یابند؛ اما به ازای $u > u_d$ ، این اثر بر شاخه پایینی فرکانس پایه‌ای سیستم معکوس می‌شود. در سرعت‌های دورانی متوسط، سرعت محوری دایورژنس سیستم ایزوتروپیک به مقدار صفر نزدیک می‌شود. به طور مثال همان‌طور که در شکل 3-ج مشاهده می‌شود، به ازای $\Omega=9.87$ ، سرعت محوری دایورژنس سیستم ایزوتروپیک برابر صفر می‌شود. در نتیجه به ازای $\alpha_E > 1$ ، از آنجاکه در سیستم دایورژنس رخ می‌دهد، رفتار دینامیکی سیستم و اثر گرادین محوری مواد بر آن مشابه شکل 3-ب است؛ اما به ازای $\alpha_E < 1$ ، در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ نمی‌دهد و سیستم فقط ناپایداری فلاتر را تجربه می‌کند. در این حالت شاخه‌های پایینی و بالایی، با افزایش سرعت محوری، به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند. در سرعت‌های دورانی زیاد (مثلاً $\Omega=12$)، در سیستم دایورژنس رخ نمی‌دهد (شکل 3-د). در این حالت، با افزایش پارامتر گرادین مدول الاستیک، فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند. بر اساس شکل‌های 3-الف-د، با افزایش سرعت دورانی سیستم، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم به سمت مقادیر فرکانس‌های بیشتر جابجا می‌شوند. در نتیجه سرعت دایورژنس سیستم با افزایش سرعت دورانی سیستم کاهش می‌یابد تا اینکه در سرعت‌های دورانی زیاد، در سیستم دایورژنس رخ نمی‌دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که تغییرات سرعت دورانی، بر روی سرعت فلاتر سیستم اثری ندارد، در حالی که با افزایش پارامتر گرادین مدول الاستیک می‌توان هردو سرعت‌های دایورژنس و فلاتر را به طور هم‌زمان به تأخیر انداخت.

فرکانس‌های پایه‌ای پسترو و پیشرو سیستم کاهش می‌یابند، درحالی‌که به ازای سرعت‌های دورانی بیشتر از سرعت دورانی دایورژنس ($\Omega > \Omega_d$)، فرکانس پایه‌ای پسترو با کاهش پارامتر گرادیان مدول الاستیک روند افزایشی دارد. مطابق شکل 5-ب، هنگامی‌که سرعت محوری سیستم افزایش می‌یابد (مثلاً $u=3$)، در سیستم ایزوتروپیک فرکانس پایه‌ای پیشرو کاهش می‌یابد؛ اما فرکانس پایه‌ای پسترو سیستم به ازای $\Omega < \Omega_d$ کاهش می‌یابد، درحالی‌که مقدار آن به ازای $\Omega > \Omega_d$ افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر در یک سرعت چرخشی یکسان، با افزایش سرعت محوری فرکانس پایه‌ای پیشرو سیستم کاهش می‌یابد؛ اما فرکانس پایه‌ای پسترو سیستم به ازای سرعت‌های دورانی کمتر و بیشتر از سرعت دورانی دایورژنس، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش سرعت محوری سرعت دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابد. ضمناً، با افزایش سرعت محوری سیستم، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم بعد از دایورژنس موازی یکدیگر هستند. بر طبق شکل 5 (الف-ب)، هنگامی شاخه‌های بالایی و پایینی فرکانس بر روی هم منطبق نباشند، سرعت چرخشی فلاتر سیستم از نظر تئوری بی‌نهایت است. در این حالت نیز با کاهش α_E ، سرعت دورانی دایورژنس و فرکانس‌های پایه‌ای پیشرو سیستم کاهش می‌یابند. همچنین با کاهش α_E ، فرکانس پسترو سیستم به ازای $\Omega < \Omega_d$ و $\Omega > \Omega_d$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. مطابق شکل‌های 5 (الف-ب)، با تغییرات α_E ، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم به صورت موازی جابجا می‌شوند. ضمناً همان‌طور که در شکل 5-ب مشاهده می‌شود، با کاهش پارامتر گرادیان مدول الاستیک (مثلاً $\alpha_E=0.6$)، در رفتار دینامیکی سیستم، ناپایداری دایورژنس مشاهده نمی‌شود. در این حالت شاخه‌های پسترو و پیشرو بر روی هم منطبق می‌شوند و سیستم پایداری خود را به ازای تمامی سرعت‌های دورانی از طریق ناپایداری فلاتر از دست می‌دهد. بر طبق شکل 5 (الف-ب)، هنگامی‌که شاخه‌های بالایی و پایینی فرکانس بر روی هم منطبق نباشند، سرعت چرخشی فلاتر سیستم از نظر تئوری بی‌نهایت است. همچنین، بر اساس شکل‌های 3 و 5 می‌توان نتیجه گرفت که در مقایسه با حالت ایزوتروپیک، با تغییرات پارامتر گرادیان مدول الاستیک، می‌توان روند تکاملی پایداری سیستم را تغییر داد. نقشه پایداری سیستم در صفحه Ω - P در شکل 6 به ازای $u=1$ رسم شده است و محدوده‌های مربوط به دایورژنس و فلاتر نشان داده شده‌اند. برای سیستم ایزوتروپیک، به ازای سرعت‌های دورانی کم (مثلاً $\Omega < 9.1$)، با افزایش P ، ابتدا سیستم پایدار است و در یک نیروی محوری مشخص متحمل ناپایداری دایورژنس می‌شود و سپس مجدداً پایدار می‌شود. به عبارت دیگر، برای سرعت‌های دورانی نسبتاً کم، ناپایداری اولیه همیشه از نوع دایورژنس است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، دو ناحیه پایدار توسط مرز ناپایداری دایورژنس از هم جدا می‌شوند و پدیده دایورژنس فقط بر روی این مرز اتفاق می‌افتد و ناحیه ناپایداری دایورژنس وجود ندارد. به طور فیزیکی، در این حالت تیر در هردو راستای عرضی کماتش می‌کند. همچنین از آنجایی‌که سیستم کانسرواتیو است، ناپایداری اولیه که در سیستم رخ می‌دهد، دایورژنس است. با افزایش بیشتر نیروی محوری فشاری، سیستم به ازای $P > 8.9$ از طریق ناپایداری فلاتر، پایداری خود را از دست می‌دهد و دیگر پایداری خود را به دست نمی‌آورد. به عبارت دیگر، در سمت راست خطوط قائم نشان داده شده، سیستم متحمل ناپایداری فلاتر می‌شود. همچنین به ازای سرعت‌های دورانی زیاد (مثلاً $\Omega > 9.1$)، سیستم ناپایداری دایورژنس را تجربه نمی‌کند و با افزایش نیروی فشاری محوری ابتدا پایدار است و سپس در سیستم ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد. سیستم ایزوتروپیک، به ازای نیروهای محوری فشاری کم (مثلاً $P < 8.9$) می‌تواند پایدار باشد و

نقشه پایداری سیستم در صفحه u - P در شکل 4 به ازای $\Omega=5$ رسم شده است و سرعت‌های مربوط به دایورژنس و فلاتر نشان داده شده‌اند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که سیستم به ازای تمامی سرعت‌های کمتر از اولین سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d^1$) پایدار است. همچنین فراتر از دومین سرعت محوری فلاتر ($u < u_f^2$) سیستم ناپایداری فلاتر را تجربه خواهد کرد. از آنجاکه با افزایش نیروی محوری فشاری سختی مؤثر سیستم کاهش می‌یابد، در نتیجه مناطق پایداری سیستم کوچک می‌شوند و مقاومت سیستم به دایورژنس و فلاتر کم می‌شود. به بیان دیگر، افزایش نیروی محوری فشاری، جابجایی مرزهای ناپایداری فلاتر و دایورژنس به سمت سرعت‌های کمتر را نتیجه می‌دهد. همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، نقش تعیین‌کننده‌ای در جابجایی مرزهای پایداری دایورژنس و فلاتر به سرعت‌های بالاتر ایفا می‌کند. در مقایسه با سیستم ایزوتروپیک، سرعت‌های محوری دایورژنس و فلاتر با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک افزایش می‌یابند و مناطق پایداری منبسط می‌شوند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که اثر گرادیان محوری بر سرعت‌های دایورژنس و فلاتر اول محسوس‌تر است.

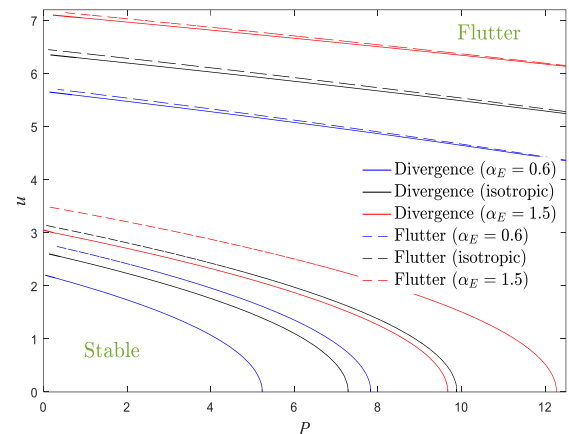


Fig.4 Axial velocities of the divergence and flutter of the system versus the axial load for $\zeta=0$, $\Omega=5$, $\alpha p=1$

شکل 4 سرعت‌های محوری دایورژنس و فلاتر سیستم برحسب نیروی محوری به ازای $\Omega=5$ ، $\alpha p=1$ ، $\zeta=0$

در شکل‌های 5 (الف-ب)، فرکانس پایه‌ای پسترو و پیشرو تیر مدرج محوری برحسب سرعت چرخشی به ازای سرعت‌های محوری مختلف هنگامی‌که $P=0$ است رسم شده است. بر اساس شکل 5-الف، هنگامی‌که سیستم ایزوتروپیک است و تنها دارای حرکت دورانی است ($u=0$)، با افزایش سرعت دورانی، فرکانس پایه‌ای پیشرو، افزایش می‌یابد، درحالی‌که فرکانس پایه‌ای پسترو کاهش می‌یابد. این روند ادامه می‌یابد تا هنگامی‌که فرکانس پایه‌ای پسترو در یک سرعت دورانی مشخص صفر می‌شود و سیستم دچار دایورژنس می‌شود. سرعت دورانی متناظر، سرعت دورانی دایورژنس (Ω_d) نامیده می‌شود. بعد از این نقطه عطف، با افزایش بیشتر سرعت دورانی سیستم، فرکانس‌های پسترو و پیشرو سیستم هر دو افزایش می‌یابند و شاخه‌های فرکانسی پایینی و بالایی سیستم باهم موازی می‌شوند. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با کاهش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، سرعت دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابد. همچنین، به ازای سرعت‌های دورانی کمتر از سرعت دورانی دایورژنس ($\Omega < \Omega_d$)، با کاهش α_E ، هردوی

هنگامی که $P=0$ است، در شکل 10 رسم شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت.

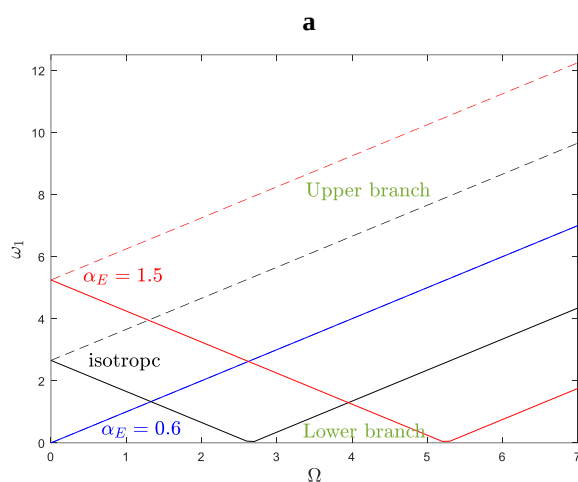
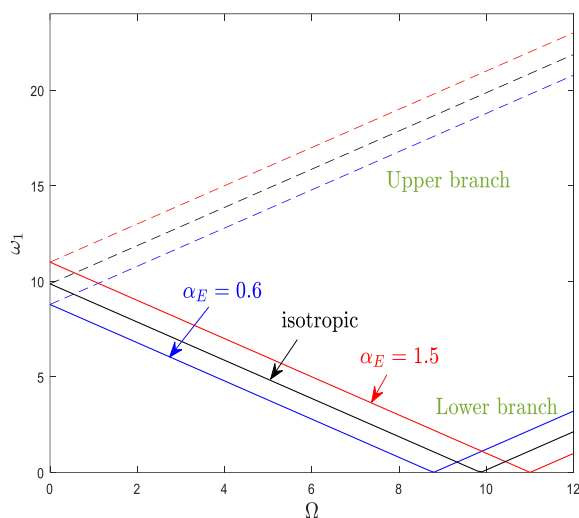


Fig.5 Fundamental frequency of the system versus rotating velocity for $P=0$, $\zeta=0$, $\alpha_p=1$ (a) $u=0$ (b) $u=3$

شکل 5 فرکانس پایه‌ای سیستم برحسب سرعت دورانی به ازای $P=0$, $\alpha_p=1$, $\zeta=0$ (الف) $u=0$ (ب) $u=3$

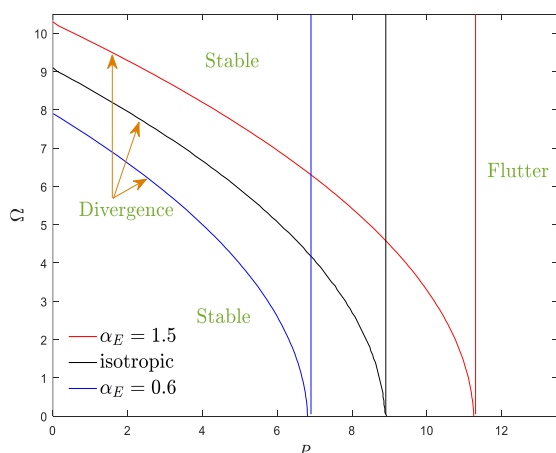


Fig.6 Stability map of the system in Ω - P plane for $\zeta=0$, $u=1$, $\alpha_p=1$
شکل 6 نقشه پایداری سیستم در صفحه Ω - P به ازای $u=1$, $\alpha_p=1$, $\zeta=0$

ناپایداری دایورژنس را تجربه کند، اما به ازای $P > 8.9$ ، تنها ناپایداری فلاتر را متحمل می‌شود. نقشه پایداری نشان می‌دهد که با افزایش سرعت دورانی تیر و در نتیجه افزایش اثرات ژيروسکوپیک در سیستم، نواحی پایداری گسترش می‌یابند. بر اساس شکل 6، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، مرزهای دایورژنس به سمت نیروهای محوری فشاری و سرعت‌های دورانی بیشتر جابجا می‌شوند. به بیان دیگر، با افزایش α_E ، ناحیه پایداری اولیه برای سیستم بزرگ‌تر می‌شود. از آنجاکه افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک خاصیت افزایش سختی دارد، در نتیجه محدوده فلاتر نیز به سمت نیروهای محوری بزرگ‌تر جابجا می‌شوند و پدیده فلاتر در نیروهای محوری فشاری بزرگ‌تر رخ می‌دهد. بر اساس شکل‌های 3-6، افزایش سرعت دورانی و سرعت محوری در سیستم، به ترتیب موجب کاهش سرعت محوری دایورژنس و سرعت دورانی دایورژنس می‌شود. سرعت دورانی دایورژنس سیستم برحسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک در شکل 7 نشان داده شده است. منحنی‌های سرعت دورانی دایورژنس سیستم به ازای تمامی سرعت‌های محوری با افزایش α_E ، افزایشی هستند. با افزایش سرعت محوری سیستم، سرعت‌های دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابند. همچنین برای سرعت‌های محوری بزرگ، به ازای مقادیر کوچک α_E ، سرعت دورانی دایورژنس ناپدید می‌شوند. در این حالت تیر متحرک محوری حتی در نبود حرکت چرخشی، در شرایط فلاتر قرار دارد که با افزایش سرعت محوری سیستم، محدوده رخداد ناپایداری فلاتر نیز افزایش می‌یابد.

5-3- اثر پارامتر گرادیان چگالی

در این بخش فرض می‌شود که چگالی سیستم به‌طور خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده است. برای بررسی اثرات تغییرات محوری چگالی بر رفتار ارتعاشاتی سیستم، تغییرات فرکانس پایه‌ای پشرو و پیشرو سیستم برحسب سرعت محوری به ازای پارامترهای گرادیان چگالی مختلف در نبود نیروی محوری فشاری، هنگامی که $\Omega=9.5$ است، در شکل 8 رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش α_p ، فرکانس‌های پایه‌ای پشرو سیستم به ازای تمامی سرعت‌های محوری کاهش می‌یابد. همچنین، برای سرعت‌های محوری کمتر از سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d$)، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی فرکانس پایه‌ای پشرو کاهش می‌یابد، درحالی‌که برای $u > u_d$ این روند معکوس می‌شود. ضمناً همان‌طور که مشخص است با افزایش α_p ، سرعت‌های محوری دایورژنس و فلاتر سیستم کاهش می‌یابد. تغییرات فرکانس پایه‌ای سیستم برحسب سرعت دورانی به ازای پارامترهای گرادیان چگالی مختلف هنگامی که $u=2.5$ است، در شکل 9 رسم شده است. همان‌طور که مشخص است، با تغییر چگالی سیستم در راستای طولی، منحنی‌های فرکانس پایه‌ای سیستم همچنان موازی باقی می‌مانند. بر اساس این شکل، با افزایش α_p ، فرکانس پایه‌ای پشرو سیستم به ازای تمامی مقادیر Ω کاهش می‌یابد. همچنین برای $\Omega < \Omega_d$ فرکانس پایه‌ای پشرو سیستم با افزایش α_p کاهش می‌یابد، درحالی‌که برای $\Omega > \Omega_d$ این روند معکوس می‌شود. در نتیجه می‌توان گفت پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک اثرات معکوس بر رفتار ارتعاشاتی سیستم دارند. باهدف بررسی دقیق‌تر رفتار دینامیکی سیستم به ازای تغییرات α_p ، تغییرات سرعت دورانی دایورژنس سیستم برحسب پارامتر گرادیان چگالی برای سرعت‌های محوری مختلف

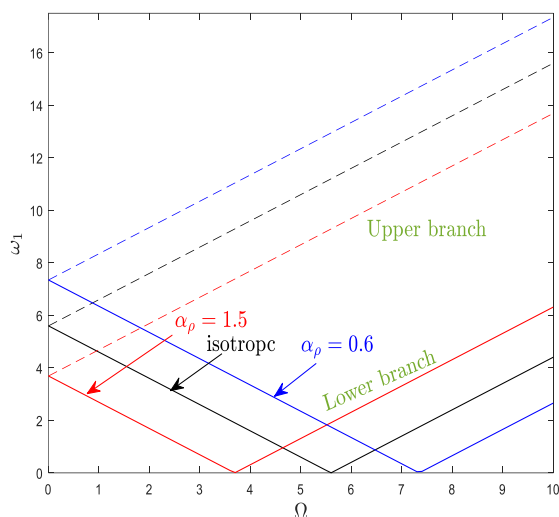


Fig.9 Fundamental frequency of the system versus the rotating velocity for $\zeta=0$, $P=0$, $u=2.5$, $\alpha_E=1$

شکل 9 فرکانس پایه‌ای سیستم بر حسب سرعت دورانی به ازای $P=0$, $u=2.5$, $\alpha_E=1$, $\zeta=0$

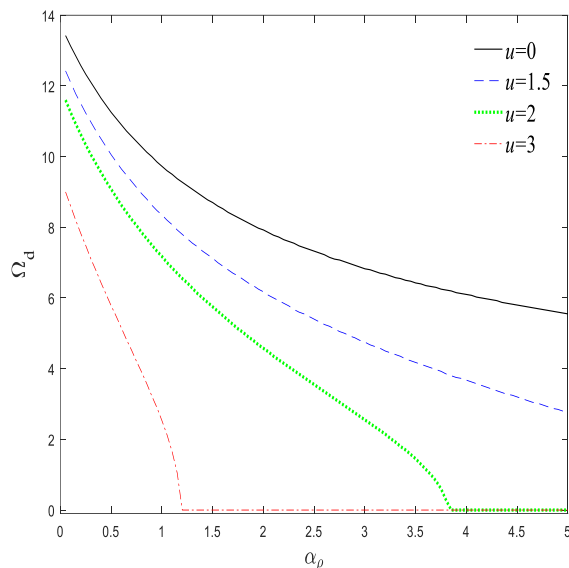


Fig.10 Divergence rotating velocity of the axially graded beam versus the density gradient parameter for $\zeta=0$, $P=0$, $\alpha_E=1$

شکل 10 سرعت دورانی دایورژنس تیر مدرج محوری بر حسب پارامتر گرادیان چگالی به ازای $P=0$, $\alpha_E=1$, $\zeta=0$

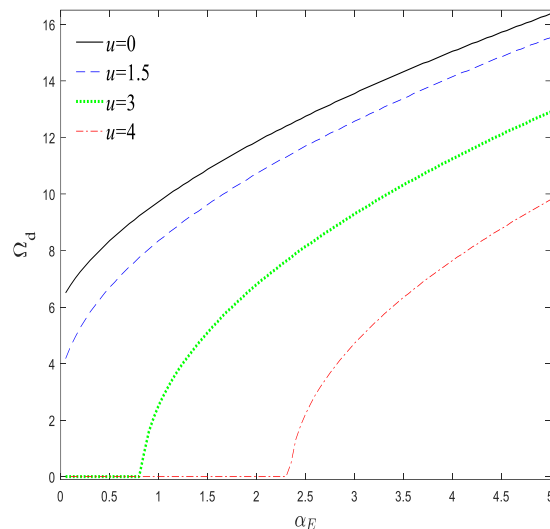


Fig.7 Divergence rotating velocity of the axially graded beam based on elastic modulus gradient parameter for $\zeta=0$, $P=0$, $\alpha_\rho=1$

شکل 7 سرعت دورانی دایورژنس تیر مدرج محوری بر حسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک به ازای $P=0$, $\alpha_\rho=1$, $\zeta=0$

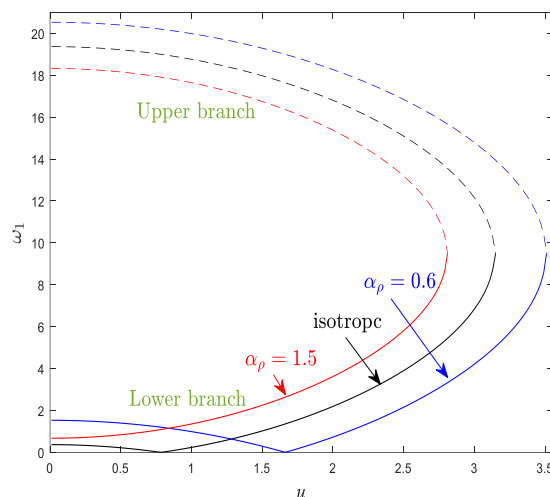


Fig.8 Fundamental frequency of the system versus axial velocity for $\zeta=0$, $P=0$, $\alpha_E=1$, $\Omega=9.5$

شکل 8 فرکانس پایه‌ای سیستم بر حسب سرعت محوری به ازای $\Omega=9.5$, $P=0$, $\alpha_E=1$, $\zeta=0$

با افزایش سرعت محوری سیستم، سرعت دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابد. این موضوع اشاره به آن دارد که کاهش سرعت محوری، منجر به بزرگ شدن ناحیه پایداری سیستم می‌شود، مخصوصاً در α_ρ های بزرگ. به عبارت دیگر، تیرهای چرخان بدون حرکت محوری، پایداری بیشتری نسبت به تیرهای تحت حرکت چرخشی و محوری هم‌زمان دارند. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت محوری، در α_ρ های بزرگ سرعت دورانی دایورژنس سیستم صفر می‌شود. در این حالت در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ نمی‌دهد و به ازای تمامی سرعت‌های دوران، ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد. یک نکته مهم دیگر در این شکل این است که برعکس نمودارهای سرعت دورانی دایورژنس در صفحه Ω_d - α_E ، منحنی‌ها در صفحه Ω_d - α_ρ با افزایش پارامتر گرادیان چگالی کاهشی می‌باشند. در نتیجه می‌توان گفت پارامتر گرادیان چگالی بر پایداری سیستم اثر کاهشی دارد.

برای ارزیابی بهتر اثر گرادیان چگالی در راستای طولی سازه بر دینامیک سیستم، مرزهای دایورژنس به ازای α_ρ های مختلف هنگامی که $P=0$ است، رسم شده است و با حالت ایزوتروپیک مقایسه شده است. همان‌طور که قابل مشاهده است، در مقایسه با سیستم ایزوتروپیک، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی پدیده دایورژنس در سرعت‌های محوری و دورانی کمتر رخ خواهد داد و برعکس. پارامتر گرادیان چگالی در ماتریس‌های جرم، دمپینگ و سختی نقش دارد. با توجه به شکل‌های 8-11، می‌توان نتیجه گرفت اثر افزودگی جرم پارامتر گرادیان چگالی بر رفتار دینامیکی سیستم غالب است و افزایش پارامتر گرادیان چگالی اثر ناپایدارکننده بر سیستم دارد. بر اساس شکل‌های 3-11، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش سختی ساختاری به علاوه کاهش نسبت جرمی، روش‌های مؤثر برای بهبود رفتار پایداری سیستم‌های

چگالی و مدول الاستیک به ازای $u=1$, $\Omega=4$, $P=0$, $\zeta=0$ در شکل 13 اثر توزیع‌های مختلف مشخصات مواد بر مرزهای دایورژنس تیر مدرج محوری هنگامی که $\Omega=2$ و $P=0$ است، نشان داده شده است. طبق انتظار مرزهای دایورژنس سیستم به ازای $\alpha_E=1$ و یا $\alpha_\rho=1$ بر روی هم منطبق می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم در حالت تغییرات محوری چگالی و مدول الاستیک، به ترتیب در حالت‌های توزیع نمایی و خطی پایدارتر است. به بیان دیگر، در حالت چگالی متغیر، توزیع نمایی، ناحیه پایداری بزرگ‌تری را پیش‌بینی می‌کند، درحالی‌که در حالت مدول الاستیک متغیر، توزیع خطی منجر به یک سیستم پایدارتر خواهد بود. همچنین افزایش α_E و کاهش α_ρ منجر به یک سیستم پایدارتر می‌شود.

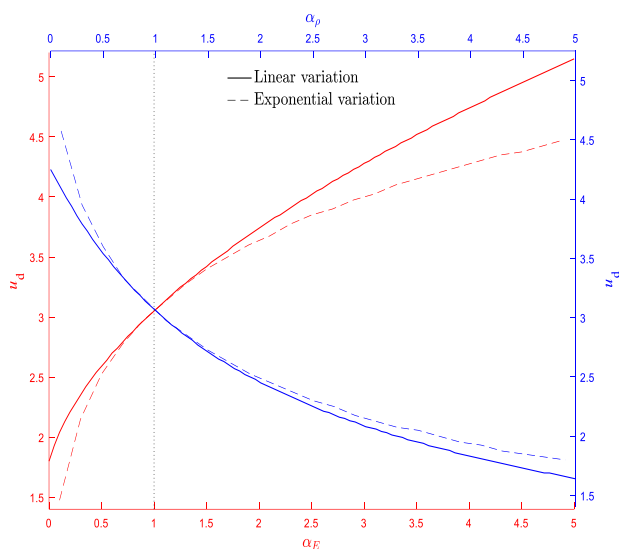


Fig.13 Divergence axial velocity of the axially graded beam versus the density and elastic modulus gradient parameters for $\zeta=0$, $P=0$, $\Omega=2$

شکل 13 سرعت محوری دایورژنس تیر مدرج محوری برحسب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک به ازای $\zeta=0$, $P=0$, $\Omega=2$

5-5- اثر تغییرات هم‌زمان چگالی و مدول الاستیک

فرض می‌شود که چگالی و مدول الاستیک سیستم به‌طور هم‌زمان $(\alpha_\rho=\alpha_E=\alpha)$ به‌صورت خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده‌اند. در شکل 14، تغییرات سرعت محوری دایورژنس سیستم برحسب پارامتر گرادیان (α) برای بارهای محوری مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که واضح است، مرزهای دایورژنس سیستم که به‌صورت عددی محاسبه شده‌اند، با نتایج حل تحلیلی مطابقت خوبی دارد. همان‌طور که انتظار می‌رود با کاهش نیروی محوری فشاری و یا افزایش نیروی کششی، مناطق پایداری سیستم بزرگ می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حالت نیروی فشاری افزایش پارامتر گرادیان خاصیت پایداری‌کننده بر سیستم دارد، درحالی‌که در حالت نیروی کششی، افزایش پارامتر گرادیان خاصیت ناپایداری‌کننده بر سیستم دارد. همچنین، یک تغییر سریع در سرعت محوری دایورژنس سیستم در مقادیر کم پارامتر گرادیان مشاهده می‌شود. از سوی دیگر، به ازای مقادیر بزرگ α ، سرعت محوری دایورژنس سیستم، حساسیت خود را نسبت به نیروی محوری از دست می‌دهد و مرزهای پایداری به ازای نیروهای محوری مختلف، باهم موازی می‌شوند. بنابراین، می‌توان با تعیین هم‌زمان گرادیان

بایزوسکوپی و روشی برای به تأخیر انداختن شروع ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی، هم‌زمان در سیستم هستند.

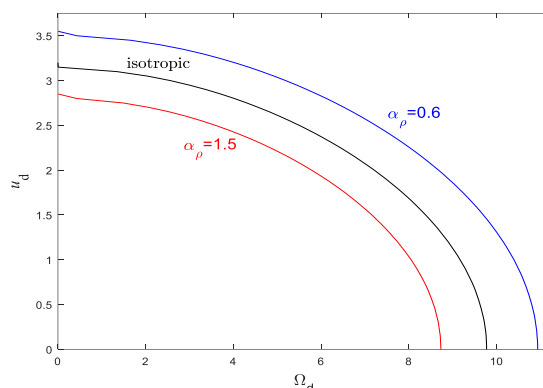


Fig.11 Effect of density gradient parameter on the divergence boundaries of the system for $\zeta=0$, $P=0$, $\alpha_E=1$

شکل 11 اثر پارامتر گرادیان چگالی بر مرزهای دایورژنس سیستم به ازای $P=0$, $\alpha_E=1$, $\zeta=0$

5-4- اثر پروفایل توزیع مشخصات مادی

در این بخش فرض می‌شود که چگالی و مدول الاستیک سیستم جداگانه به‌صورت خطی یا نمایی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده‌اند. در شکل 12، فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو سیستم با توزیع‌های نمایی و خطی مشخصات مادی برحسب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک هنگامی که $u=1$ و $\Omega=4$ رسم شده‌اند. همان‌طور که مشخص است فرکانس پایه‌ای سیستم با افزایش α_E و α_ρ به ترتیب افزایشی و کاهشی هستند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که هنگامی که $\alpha_E=1$ و یا $\alpha_\rho=1$ است، سیستم به حالت ایزوتروپیک کاهش می‌یابد، درنتیجه در این حالت فرکانس‌های طبیعی برای توزیع‌های نمایی و خطی مشخصات مادی سیستم باهم برابر هستند. یک ویژگی مهم دیگر در این نمودار این است که در مقایسه با تغییرات نمایی مدول الاستیک، فرکانس‌های پایه سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک بزرگ‌تر هستند. درحالی‌که فرکانس‌های پایه‌ای سیستم در حالت تغییرات نمایی چگالی در مقایسه با تغییرات خطی چگالی بزرگ‌تر هستند.

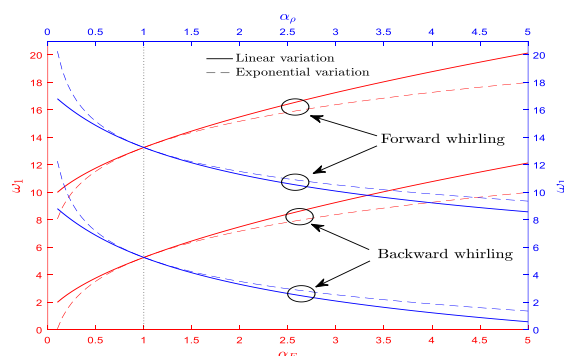


Fig.12 Fundamental frequencies of the axially graded beam versus the density and elastic modulus gradient parameters for $\zeta=0$, $P=0$, $u=1$, $\Omega=4$

شکل 12 فرکانس‌های پایه‌ای تیر مدرج محوری برحسب پارامترهای گرادیان

است. اگر در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ دهد، افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک و کاهش پارامتر گرادیان چگالی، فرکانس پایه‌ای پسر را در سرعت‌های کمتر و بیشتر از سرعت محوری دایورژنس به ترتیب افزایش و کاهش می‌دهند، در غیر این صورت، منجر به کاهش فرکانس پایه‌ای پسر می‌شوند. همچنین، در حالت چگالی متغیر و مدول الاستیک متغیر، به ترتیب توزیع‌های نمایی و خطی منجر به فرکانس‌های بزرگ‌تر و سیستم پایدارتر می‌شوند. همچنین، فهمیده شد که پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک، به ترتیب اثرات ناپایدارکننده و پایدارکننده بر سیستم دارند. به بیان دیگر، در مقایسه با تیرهای ایزوتروپیک، تیرهای مدرج محوری هنگامی که چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی سیستم به ترتیب کاهش و افزایش یابند، پایدارتر خواهند بود. نتیجه پژوهش حاضر نشان داد که تغییرات سرعت دورانی، تأثیری بر آستانه ناپایداری فلاتر سیستم ندارد. نشان داده شد که با تنظیم درست تغییرات محوری مواد می‌توان مرز ناپایداری دایورژنس را حذف نمود و محدوده‌های ناپایداری فلاتر را به تعویق انداخت. نتایج نشان دادند که با تعیین هم‌زمان گرادیان چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی می‌توان اثرات ناپایدارکننده نیروی محوری فشاری را تقلیل داد. مدل‌سازی و نتایج پژوهش حاضر می‌تواند در طراحی سیستم‌های بازپروسکوپی غیرهمگن مفید باشد.

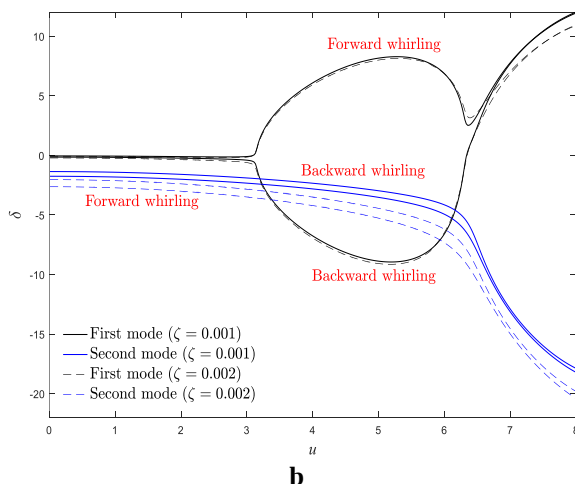
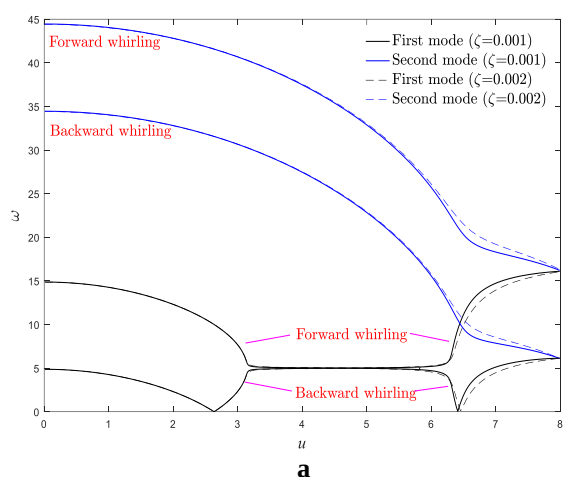


Fig.15 (a) Real and (b) imaginary parts of two first natural frequencies based on axial velocity for $P=0$, $u=2$, $\Omega=5$, $\zeta=0.001$

شکل 15 (الف) قسمت حقیقی و (ب) مجازی دو فرکانس طبیعی اول بر حسب سرعت محوری به ازای $P=0$, $\zeta=0.001$, $\Omega=5$

چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی اثرات ناپایدارکننده نیروی محوری فشاری را تقلیل داد.

5-6- اثر ویسکوزیته

در نهایت باهدف بررسی اثر مواد ویسکوالاستیک بر دینامیک سیستم، قسمت موهومی و حقیقی دو جفت فرکانس طبیعی اول ارتعاشات (شامل فرکانس‌های پسر و پیشرو) تیر بر حسب سرعت متحرک محوری در شکل 15 (الف-ب) به ازای دو مقدار مختلف از پارامتر ویسکوالاستیک (ζ) نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش خاصیت ویسکوالاستیک مواد، سرعت بحرانی دایورژنس سیستم تغییر نمی‌کند که این ویژگی با راه‌حل تحلیلی ارائه شده در پیوست، قابل اثبات است. از آنجایی که سیستم ویسکوالاستیک، ناپایستار است، فرکانس‌های طبیعی سیستم قبل از رخداد دایورژنس مختلط می‌شوند، مخصوصاً فرکانس‌های مدهای بالاتر. براساس شکل 15-ب، هنگامی که سیستم ویسکوالاستیک باشد، قسمت موهومی منحنی‌های فرکانسی، تقارن خود را نسبت به محور X از دست می‌دهند. ضمناً همچنان که مشاهده می‌شود، سیستم ویسکوالاستیک، روند تکامل پایداری "پایدار-فلاتر مود اول-دایورژنس مود دوم" را تجربه می‌کند. در نتیجه می‌توان گفت، در مقایسه با سیستم ایزوتروپیک، مواد ویسکوالاستیک روند تکامل پایداری سیستم را تغییر می‌دهند. در مجموع می‌توان گفت که پایداری کیفی تیرهای متحرک محوری به اثرات مواد ویسکوالاستیک سیستم وابستگی دارد، درحالی که گرادیان محوری مواد، نقش قابل توجهی در تعیین مقدار کمی سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم دارد.

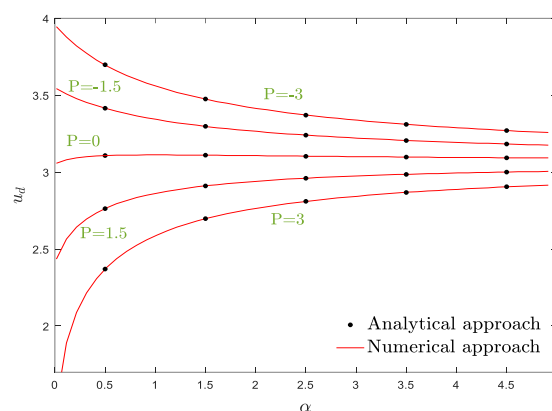


Fig.14 Divergence axial velocity of the system versus gradient parameter for $\zeta=0$, $\Omega=1$

شکل 14 سرعت محوری دایورژنس سیستم بر حسب پارامتر گرادیان به ازای $\Omega=1$, $\zeta=0$

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک تحقیق مفصل بر روی دینامیک سازه‌های تیرهای مدرج محوری با حرکت محوری و دورانی تحت بارمحوری خارجی انجام شده است. روش‌های عددی و تحلیلی به کار برده شده‌اند تا شرایط ناپایداری دایورژنس و فلاتر سیستم مطالعه شود. اثر پارامترهای مختلف مانند تغییرات محوری خصوصیات مادی، نیروی محوری، سرعت محوری و دورانی بر رفتار ارتعاشاتی سیستم بررسی شد. نتایج نشان دادند که با افزایش مدول الاستیک و کاهش چگالی در راستای طولی سیستم، فرکانس پایه‌ای پیشرو سیستم افزایش می‌یابد. اثر گرادیان محوری مواد بر فرکانس پایه‌ای پسر سیستم پیچیده‌تر

7- پیوست

هنگامی که سیستم سرعت محوری یا دورانی بحرانی دارد، کمترین فرکانس طبیعی سیستم یعنی فرکانس پایه‌ای پسر سیستم صفر می‌شود و سیستم سختی خود را به ازای مود اصلی از دست می‌دهد [41]. به منظور استخراج سرعت بحرانی مربوط به مود اول، معادله (۱۹) با در نظر گرفتن یک مود ($r=s=1$)، به معادله زیر کاهش می‌یابد [42]:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q}_1(\tau) = 0 \quad (\text{a-1})$$

با تغییرات خطی مشخصات مادی می‌توان نوشت:

$$k_{11} = \pi^4(\alpha_E + 1) - \pi^2((\alpha_p + 1)v^2 + 2P) - v^2(\alpha_p - 1) - \Omega^2(\alpha_p + 1) \quad (\text{a-2})$$

$$k_{12} = 2v\alpha_p - 4\Omega \quad (\text{a-3})$$

$$k_{13} = 2v(\alpha_p - 2) + 4\Omega \quad (\text{a-4})$$

$$k_{22} = \pi^4(\alpha_E + 1) - \pi^2((\alpha_p + 1)v^2 + 2P) - v^2(\alpha_p - 1) - \Omega^2(\alpha_p + 1) \quad (\text{a-5})$$

بر طبق تئوری پایداری سیستم‌های خطی ژیروسکوپیک [43]، هنگامی که مقادیر ویژه سیستم صفر شود، درمیان ماتریس سختی صفر می‌شود [44]. در نتیجه سرعت محوری (یا دورانی) بحرانی سیستم را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad (\text{a-6})$$

5- مراجع

- [12] Chan, M. L., Lau, K. T., Wong, T. T., Ho, M. P. and Hui, D., "Mechanism of Reinforcement in a Nanoclay/Polymer Composite" *Composites Part B-Eng*, Vol. 42, pp. 1708-1712, 2011.
- [13] Albdiry, M. T., Yousif, B. F. and Ku, H., "Fracture Toughness and Toughening Mechanisms of Unsaturated Polyester-Based Clay Nanocomposites", 13TH International Conference on Fracture June 16-21, Beijing, China, 2013.
- [14] Chowdary, M. S. and Kumar, M. S. R. N., "Effect of Nanoclay on the Mechanical properties of Polyester and S-Glass Fiber (Al)" *International Journal of Advanced Science and Technology*, Vol. 74, pp. 35-42, 2015.
- [15] Rafiq, A., Al-Qadhib, M., Merahc, N., Ali, Y., "Mechanical Behavior of Hybrid Glass Fibre/Epoxy Clay Nanocomposites" *Advanced Materials Research*, Vol. 894, pp. 336-341, 2014.
- [16] Pol, M. H., Liaghat, Gh. H., Mehrabani, Yeganeh, E., Afrouzian, A., "Experimental Investigation of Nanoclay and Nanosilica Particles Effects on Mechanical Properties of Glass Epoxy Composites" *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 16, pp. 76-82, 2015.
- [17] Khosravi, H. and Eslami-Farsani, R., "On the mechanical characterizations of unidirectional basalt fiber/epoxy laminated composites with 3-glycidoxypropyltrimethoxysilane functionalized multi-walled carbon nanotubes-enhanced matrix" *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 35(5), 421-434, 2016
- [18] Khosravi, H. and Eslami-Farsani, R., "Enhanced Mechanical Properties of Unidirectional Basalt Fiber/Epoxy Composites Using Silane-Modified Na+- Montmorillonite Nanoclay" *Polymer Testing*, Vol. 55, pp. 135-142, 2016.
- [19] Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials, ASTM D790, 2003.
- [20] Mariche, R., Sanchez, M., Suarez, A. J., Prolongo, S. G. and Urena, A., "Electrically Conductive Functionalized- GNP/Epoxy Based Composites: From Nanocomposite to Multiscale Glass Fibre Composite Material" *Composites Part B*, Vol. 98, pp. 49-55, 2016.
- [21] Avila, A. F., Peixoto, L. G. Z., Silva Neto, A., De avila, J. and Carvalho, M. G. R., "Bending Investigation on Carbon Fiber/Epoxy Composites Nano- Modified by Graphene" *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, Vol. 35, pp. 269-275, 2012.
- [22] Kim, J. K. and Mai, Y. W., "Engineered Interfaces in Fiber Reinforced Composites" Elsevier, 1998.
- [23] Singh, S. K., Singh, S., Sharma, and S., Sharma, V., "Strength Degradation of Mechanical Properties of Unidirectional E- glass Fiber Epoxy Resin Nanoclay Composites Under Hygrothermal Loading Conditions" *Procedia Materials Science*, Vol. 5, pp. 1114-1119, 2014.
- [24] Sharma, B., Khosravi, H., Chibber, S., and Mehta, R., "Effect of surface treatment of nanoclay on the mechanical properties of epoxy/glass fiber/clay nanocomposites" *Composite Interfaces*, Vol. 23, pp. 6323-640, 2016.
- [25] Rahimi, Gh.H., Zamani, R. and Pol, M. H., "Studies on The Tensile and Flexural Properties of TETA-Cured Epoxy Resins Modified With Clay" *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 29-34, 2014 (In Persian).
- [26] Ngo, T. D., Nguyen, Q. T., Nguyen, T. P. and Tran, P., "Effect of Nanoclay on Thermomechanical Properties of Epoxy/Glass Fiber Composites" *Arabian Journal Science and Engineering*, Vol. 41, pp. 1251-1261, 2016.
- [27] Han, J. T. and Cho, K., "Layered Silicate-Induced Enhancement of Fracture Toughness of Epoxy Molding Compounds over a Wide Temperature Range" *Macromolecular Materials and Engineering*, Vol. 290, pp. 1184-1191, 2005.
- [1] Barbero, E. J. "Introduction to Composite Materials Design: 2nd edition", CRC Press, 2010
- [2] Sano, T., Srivastan, T. S. and Peretti, M. W., "Advanced Composites for Aerospace, Marine, and Land Applications" Wiley TMS, 2014.
- [3] Deborah, D. L., "Composite Materials: Functional Materials for Modern Technologies" Springer London, 2003.
- [4] Hyer, M. W., "Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials" WCB/McGraw-Hill, New York, 1998.
- [5] Fischer, H., "Polymer Nanocomposites Fundamental Research to Specific Applications", *Materials Science and Engineering C*, Vol. 23, pp.763-772, 2003.
- [6] Kumar, M. S. S., Raju, N. M. S., Sampath, P. S. and Jayakumari, L. S., "Effects of Nanomaterials on Polymer Composites: An Expatriate View" *Review Advanced Materials Science*, Vol. 38, pp. 40-54, 2014.
- [7] Hussain, F. and Hojjati, M., "Review Article: Polymer-matrix Nanocomposites, Processing, Manufacturing, and Application: An Overview" *Journal of Composite Materials*, Vol. 40, No. 17, pp. 1511-1574, 2006.
- [8] Xu, Y., Peng, H., Wang, X., and Su, S., "Comparative Study of Different Polymerically modified Clays on Curing Reaction and Thermal Properties of Epoxy Resin" *Thermochemical Acta*, Vol. 516, pp. 13-18, 2011.
- [9] Azeez, A. A., Rhee, K. Y., Park, S. J. and Hui, D., "Epoxy Clay Nanocomposites- Processing, Properties and Applications: A review" *Composites: Part B*, Vol. 45, pp. 308-320, 2013.
- [10] Uddin, F., "Clays, Nanoclays, and Montmorillonite Minerals" *Metallurgical and Materials Transactions, A*, Vol. 39, pp. 2804-2814, 2008.
- [11] Ayatollahi, M. R., Shokrieh, M. M., Shadlou, S., Kefayati, A. R. and Chitsazadeh, M., "Mechanical and Electrical Properties of Epoxy/Multi-walled Carbon Nanotube/ Nanoclay Nanocomposites" *Iranian Polymer Journal*, Vol. 20, pp. 835-843, 2011.