



## مقایسه عددی و تحلیلی مدل‌های محاسبه طول ناحیه چسبناک در جدایش بین لایه‌های چندلایه‌های کامپوزیتی

علی اسمعیلی<sup>1</sup>، فتح‌اله طاهری بهروز<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران

\* تهران، صندوق پستی 16846-13114، Taheri@iust.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

در دهه‌های اخیر، استفاده از مواد کامپوزیتی در سازه‌های مهندسی به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است. بنابراین درک ساختار و مکانیزم‌های آسیب در این مواد ضروری است. در میان آسیب‌های رایج مواد کامپوزیتی، آسیب تورق یا جدایش بین‌لایه‌ای از مودهای خطرناک آسیب است. مدل ناحیه چسبناک یکی از ابزارهای مناسب برای بررسی و تحلیل پدیده تورق در کامپوزیت‌های لایه‌ای است. مدل ناحیه چسبناک با ردیابی آسیب از شروع تا تکامل آن، به تحلیل تورق می‌پردازد. در مدل ناحیه چسبناک، ناحیه پشت نوک ترک که در آن نیروهای چسبیده فعال هستند، از اهمیت بالایی برخوردار است. این ناحیه به طور مستقیم تحت تاثیر مود بارگذاری، انرژی شکست، تنش بیشینه ناحیه چسبناک، مدول الاستیک موثر و هندسه سازه است. مدل‌های بسیاری برای تخمین طول ناحیه چسبناک پیشنهاد شده است. در این پژوهش طول ناحیه چسبناک در مود بارگذاری یک و دو خالص، با استفاده از تحلیل اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس استخراج شد. این نتیجه‌ها با مدل‌های تحلیلی تخمین طول ناحیه چسبناک مقایسه شد. در مدل‌هایی که علاوه بر اثر نوع ماده، اثر هندسه سازه نیز در تخمین طول ناحیه چسبناک در نظر گرفته شد، تخمین دقیق‌تری از طول این ناحیه مشاهده شد.

دریافت: 1399/02/04

پذیرش: 1399/06/25

### کلیدواژگان:

مدل ناحیه چسبناک

طول ناحیه چسبناک

جدایش بین لایه‌ای در کامپوزیت‌ها

## Comparison of numerical and analytical cohesive zone length models in the delamination of composite laminates

Ali Esmaili, Fathollah Taheri-Behrooz\*

School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

\* P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran, Taheri@iust.ac.ir

### Keywords

Cohesive Zone Model  
Cohesive Zone Length  
Delamination in Composites

### Abstract

In recent decades, the use of composite materials in engineering structures has increased dramatically. Therefore, it is necessary to understand the structure and mechanisms of damage to these materials. Among the most common damages in composite materials, delamination is one of the catastrophic failure modes. Cohesive zone model is one of the appropriate tools for analyzing the phenomenon of delamination in the laminated composites. The cohesive zone model analyzes the delamination by tracking the damage from its onset to its evolution. In the cohesive zone model, the area behind the crack tip, where the cohesive forces are active, is of great importance. This zone is directly affected by loading mode, fracture energy and cohesive strength, active elastic modulus, and structural geometry. Many models have been proposed to estimate the length of the cohesive zone. In this study, the length of the cohesive zone in first and second pure mode was obtained by using finite element analysis in Abaqus software. The results of the simulation were compared with the analytical models for estimating the length of the cohesive zone. It was observed a more accurate estimate of the cohesive zone length in models that consider the material type and effect of structural geometry.

### 1- مقدمه

جدایش بین لایه‌ای جزو مودهای آسیب خطرناک در نظر گرفته می‌شود. زیرا در این حالت چند لایه کامپوزیتی قادر به انتقال تنش بین لایه‌های مختلف نیست. آسیب جدایش بین لایه‌ای در بارگذاری فشاری باعث افزایش احتمال پدیده کماتش در سازه می‌شود. یکی از دلایل تورق در کامپوزیت‌های لایه‌ای استحکام ضعیف بین لایه‌های کامپوزیت است. در پژوهشی که توسط پاگانو<sup>1</sup> و شاپنر<sup>1</sup> انجام شده است دلایل ایجاد تورق را به سه دسته اصلی

با گسترش استفاده از مواد کامپوزیتی در عصر حاضر، لزوم شناخت رفتار مکانیکی این مواد حائز اهمیت است. از مهم‌ترین ویژگی‌های این مواد می‌توان به نسبت استحکام به وزن بالاتر نسبت به فلزها اشاره کرد. مودهای آسیب در سازه‌های کامپوزیتی نسبت به فلزات بیش‌تر و دارای مکانیزم پیچیده‌تری هستند. از جمله مودهای رایج آسیب در سازه‌های کامپوزیتی می‌توان به ترک در زمینه، شکست الیاف، کماتش الیاف و جدایش بین لایه‌ای اشاره کرد.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Esmaili, A. and Taheri-Behrooz, F., "Comparison of numerical and analytical cohesive zone length models in the delamination of composite laminates", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 4, pp. 1235-1242, 2021.

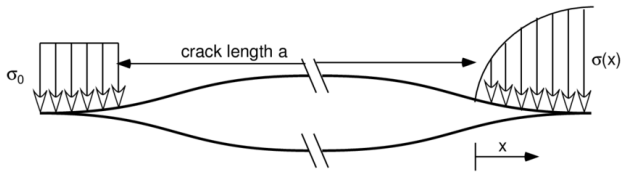


Fig. 1 Barenblatt (right) and Dugdale (left) models [8]

شکل 1 مدل برنبلات (سمت راست) و مدل داگدایل (سمت چپ) [8]

## 1-2- مدل ناحیه چسبناک

در بین مدل‌های ارائه شده مدل ناحیه چسبناک<sup>7</sup> دوخطی به دلیل سادگی و دقت در شبیه‌سازی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل 2 مدل ناحیه چسبناک دو خطی نشان داده شده است. پارامترهای مهم در مدل ناحیه چسبناک، انرژی شکست، استحکام ناحیه چسبناک و سفتی جبرانی هستند. سفتی جبرانی شیب قسمت الاستیک منحنی کشش - جدایش را مشخص می‌کند. رفتار فیزیکی و عددی مدل ناحیه چسبناک به صورت شکل 2 است. در مدل عددی یک سفتی اولیه برای غلبه بر مشکلات حل عددی در نظر گرفته می‌شود. این پارامتر نشان دهنده سفتی نمونه قبل از جدایش است.

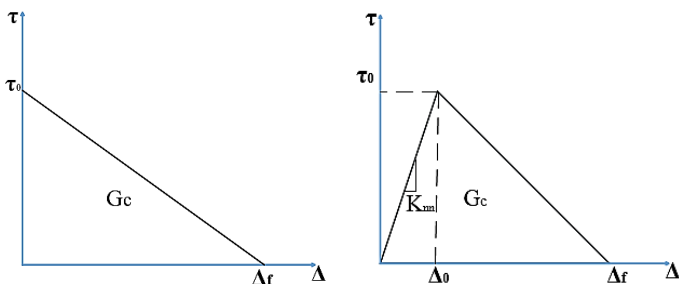


Fig. 2 Physical (Left) and numerical (Right) cohesive zone model [9]

شکل 2 مدل فیزیکی (سمت چپ) و مدل عددی (سمت راست) ناحیه چسبناک [9]

بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در حوزه کاربرد مدل ناحیه چسبناک برای شبیه‌سازی جدایش بین‌لایه‌ای از مقدار  $10^6 \text{ N/mm}^3$  که توسط کامانها<sup>8</sup> [10] ارائه شده است استفاده کرده‌اند. با این حال، رابطه‌ها (1) تا (6) برای محاسبه سفتی بین‌لایه‌ای پیشنهاد شده است [9].

$$K_{nm} = \frac{50E'_I}{h} \quad (1)$$

$$K_{sn} = \frac{50E'_{II}}{h} \quad (2)$$

$$E'_I = E_1 \lambda^{0.75} \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \quad (3)$$

تقسیم کرده‌اند. گروه اول شامل تورق در مقاطع منحنی، مقاطع دایروی مثل لوله‌ها و مقاطع کروی می‌شوند. در موارد ذکر شده تنش‌های عمودی و برشی بین وجهی دو لایه چسبیده موجب کاهش چسبندگی و شروع ترک بین‌لایه‌ای می‌شوند. در گروه دوم، تغییر ناگهانی در مقطع، اثر لبه آزاد و اتصالات پیچی جای می‌گیرند. در گروه سوم می‌توان به اثر دما و رطوبت محیط اشاره کرد. از دیگر عوامل تورق می‌توان به ضربه سرعت پایین اشاره کرد. تفاوت ضریب انبساط حرارتی رزین و الیاف در هنگام پخت کامپوزیت نیز می‌تواند عامل ایجاد تنش پسماند و در نتیجه جدایش لایه‌ها در هنگام سرویس‌دهی سازه باشد. با توجه به موارد ذکر شده شناخت و مدل‌سازی پدیده جدایش بین‌لایه‌ای اهمیت فراوانی دارد. برای مدل‌سازی این پدیده به طور معمول از دو رویکرد مکانیک شکست و مدل ناحیه چسبناک استفاده می‌شود. در بررسی ترک نیاز است که حالت‌های مختلف بارگذاری برای تغییر شکل نسبی سطح‌های ترک فرض شود که به این حالت‌ها در اصطلاح موده‌های شکست می‌گویند. در مکانیک شکست سه نوع مود شکست وجود دارد. مود اول یا مود بازشدگی سطوح ترک که رایج‌ترین مود رشد ترک است. در این مود سطح‌های ترک در جهت مخالف یک‌دیگر از هم دور می‌شوند. مود برش داخل صفحه‌ای که به مود دوم شکست نیز معروف است. در این حالت دو سطح ترک نسبت به هم و موازی با جبهه ترک دچار لغزش می‌شوند. مود سوم یا برش خارج از صفحه نیز نشان‌دهنده لغزش سطح‌های ترک نسبت به هم و عمود بر جبهه ترک است رویکرد مکانیک شکست، با توجه به تکینگی تنش در نوک ترک دارای پیچیدگی‌های بیش‌تری نسبت به مدل ناحیه چسبناک است. هم‌چنین در تحلیل‌های عددی استفاده از رویکرد مکانیک شکست سبب هزینه تحلیل بالاتر می‌شود. در مقابل مدل ناحیه چسبناک عیب تکینگی تنش را رفع کرده و هم‌چنین در این مدل برخلاف مدل‌های مکانیک شکست، نیاز به ترک اولیه نیست. در مواد همسان‌گرد به‌طور معمول از مفهوم ضریب شدت تنش برای بیان چقرمگی و مقاومت ماده نسبت به رشد ترک استفاده می‌شود. با توجه به این موضوع که ضریب شدت تنش بسیار وابسته به توزیع تنش در نوک ترک است و محاسبه تنش در نوک ترک در مواد کامپوزیتی دارای پیچیدگی است، استفاده از نرخ رهاسازی انرژی کرنشی در مواد کامپوزیتی مفیدتر است و نتایج بهتری ارائه می‌دهد [1]. داگدایل<sup>2</sup> [2] و برنبلات<sup>3</sup> [3] پیشگامان توسعه و استفاده از مدل ناحیه چسبناک بودند. داگدایل برای مواد پلاستیک ایده آل این مفهوم را با فرض وجود تنش ثابت در نوک ترک توسعه داد. برنبلات فرض تنش ثابت داگدایل را در طول ناحیه چسبیده تصحیح کرد و مدل ناحیه چسبناک که امروزه استفاده می‌شود را توسعه داد. برنبلات فرض کرد که تنش در ناحیه چسبیده ثابت نیست بلکه با دور شدن از نوک ترک، تنش به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد. در شکل 1 مدل برنبلات و داگدایل نشان داده شده است. پس از برنبلات و داگدایل محققین بسیاری به پژوهش در این حوزه پرداختند. از جمله مهم‌ترین پژوهش‌ها مربوط به نیدلمن<sup>4</sup> [4] است که از این مدل با استفاده از روش اجزای محدود بهره برد. در ادامه پژوهشگرانی مانند تورگارد<sup>5</sup> [5] و گوبل<sup>6</sup> [6] از مدل‌های مختلف برای بیان رابطه کشش - جدایش استفاده کردند.

1 Schoeppner  
2 Dugdale  
3 Barenblatt  
4 Needleman  
5 Tvegaard  
6 Geubelle

7 Cohesive zone model  
8 Camanho

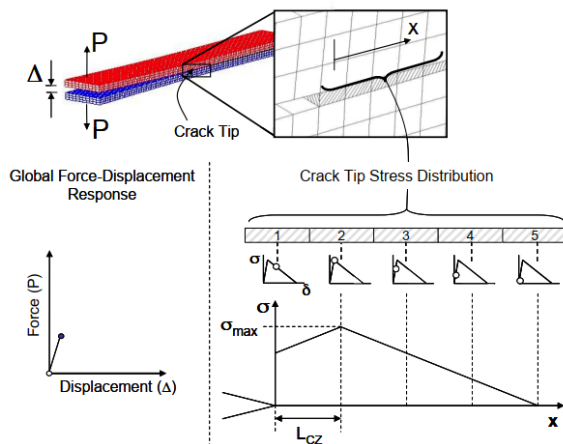


Fig. 3 Cohesive zone length [11]

شکل 3 طول ناحیه چسبناک [11]

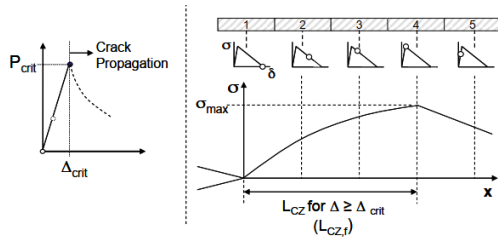


Fig. 4 Extended cohesive zone length [11]

شکل 4 طول ناحیه چسبناک توسعه یافته [11]

با توجه به این که تمام مکانیزم رشد و تکامل آسیب در این ناحیه رخ می‌دهد، ناحیه چسبناک مهم‌ترین ناحیه در پشت ترک است. برای محاسبه تقریبی این مقدار مدل‌های مختلفی پیشنهاد شده است. تمامی مدل‌های ارائه شده به شکل رابطه (7) هستند.

$$L_{cz} = M \frac{EG_c}{\tau_0} \quad (7)$$

در این رابطه  $G_c$  انرژی شکست،  $E$  مدول یانگ موثر و  $\tau_0$  مقدار استحکام ناحیه چسبناک را نشان می‌دهد که در مود یک، استحکام عمودی ناحیه چسبناک بوده و در مود دو، استحکام برشی ناحیه چسبناک است. تفاوت مدل‌های پیشنهاد شده در ضریب بی‌بعد  $M$  است. هیلبرگ [13] به‌عنوان فردی پیشگام در زمینه استفاده از مدل ناحیه چسبناک به روش اجزای محدود رابطه (8) را پیشنهاد داد که بعدها توسط یانگ [14] طول مشخصه نامیده شد. در این رابطه  $E$  مدول یانگ موثر برای مواد ارتوتروپیک است که توسط سیه [15] پیشنهاد شده است. در جدول 1 مدل‌های مختلف پیشنهادی را که شامل روابط (9) تا (13) هستند، نشان داده شده است.

$$L_{ch} = \frac{EG_c}{\tau_0^2} \quad (8)$$

$$E'_{II} = E_2 \lambda^{0.25} \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{E_2}{E_1} \quad (5)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2G_{12}} - \sqrt{v_{12} v_{21}} \quad (6)$$

که در روابط ذکر شده  $G_{12}$  مدول برشی داخل صفحه تک‌لایه،  $E_1$  مدول یانگ در جهت الیاف،  $E_2$  مدول یانگ در جهت عمود بر الیاف،  $E'_{II}$  مدول یانگ موثر برای مود اول بارگذاری،  $E'_{II}$  مدول یانگ موثر برای مود دوم بارگذاری است.  $\lambda$  و  $\rho$  پارامترهای بی‌بعدی هستند که نشان‌دهنده درجه ارتوتروپی مواد هستند.  $h$  ضخامت بازوی نمونه و  $K_{sn}$  و  $K_{nn}$  به ترتیب بیان‌گر سفتی عمودی و برشی بین لایه‌ای هستند. تنش بیشینه ناحیه چسبناک نشان‌دهنده مقدار تنش است که آسیب شروع می‌شود. هارپر<sup>1</sup> و هلت<sup>2</sup> [11] اثر استحکام ناحیه چسبناک را بر روی نمودار نیرو-جابجایی در نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار (DCB) بررسی کردند. با اندازه المان 0.125 میلی‌متر مشاهده شد که از استحکام 45 تا 30 مگاپاسکال نتایج عددی با نتایج تحلیلی مطابقت خوبی دارد. با کاهش استحکام از 30 مگاپاسکال تا 10 مگاپاسکال سفتی به‌صورت تدریجی کم می‌شود ولی تاثیر زیادی در دقت نتایج در ناحیه گسترش آسیب ندارد. با کاهش استحکام از 10 مگاپاسکال تا 5 مگاپاسکال مقدار سفتی بیش‌تر افت می‌کند و شروع آسیب نسبت به حالت تحلیلی تاخیر دارد. تحلیل قبلی با اندازه المان 1 میلی‌متر نیز انجام شد. در این حالت افت سفتی با کاهش استحکام بیش‌تر شده و نقطه شروع آسیب با حالت تحلیلی اختلاف بیش‌تری پیدا می‌کند. انرژی شکست در مدل ناحیه چسبناک از تست‌های رایج مکانیک شکست به‌دست می‌آید. مهم‌ترین پارامتر انرژی در مدل ناحیه چسبناک انرژی شکست است. پس از شروع آسیب در مودهای خالص از مقایسه نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی و انرژی شکست، تکامل آسیب بررسی می‌شود. در مودهای بارگذاری ترکیبی از مقدار انرژی شکست معادل برای بررسی تکامل آسیب استفاده می‌شود. رایج‌ترین مدل محاسبه انرژی شکست در مود ترکیبی مدل بنزگاق و کنان<sup>3</sup> [12] است.

## 1-2- طول ناحیه چسبناک

به ناحیه ایجاد شده در پشت نوک ترک که پارامتر آسیب به مقدار بیشینه خود نرسیده است طول ناحیه چسبناک<sup>4</sup> می‌گویند. یعنی پارامتر آسیب مقداری بین 0 تا 1 خواهد داشت. در شکل 3 طول ناحیه چسبناک در یک نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار نشان داده شده است. هنگامی که اولین المان در نوک ترک به‌طور کامل تخریب می‌شود و استحکام و سفتی آن به صفر می‌رسد، ناحیه‌ای پشت این المان ایجاد می‌شود که شامل المان‌هایی با پارامتر آسیب بین صفر و یک است. به طول این ناحیه، طول ناحیه چسبناک توسعه یافته می‌گویند. در شکل 4 طول ناحیه چسبناک توسعه یافته نشان داده شده است

1 Harper  
2 Hallet  
3 B-K

4 Hillerborg  
5 Yang  
6 Sih

بررسی های عددی [23,11] نشان داد که در بسیاری از نمونه‌ها، رابطه‌های (14) و (15) نمی‌توانند پیش‌بینی مناسبی از طول ناحیه چسبناک داشته باشند. بنابراین سوتو و همکاران رابطه (16) را برای محدوده وسیعی از ضخامت‌ها و طول مشخصه‌های مختلف ارائه دادند. این رابطه یک تابع تقریبی بر مبنای درون‌یابی بین حد طول ناحیه چسبناک قطعه با ابعاد بی‌نهایت و قطعه نازک است.

$$l_{czI} = (l_{czI}^0)^{-n_I} + l_{czI}^\infty)^{\frac{-1}{n_I}} \quad (16)$$

بر همین مبنای، رابطه (17) برای بارگذاری مود دو خالص پیشنهاد شده است. در روابط (16) و (17)،  $n_I$  و  $n_{II}$  پارامترهای بی‌بعد هستند که از برازش منحنی محاسبه می‌شوند.

$$l_{czII} = (l_{czII}^0)^{-n_{II}} + l_{czII}^\infty)^{\frac{-1}{n_{II}}} \quad (17)$$

برای مود یک بارگذاری، سوتو و همکاران با تحلیل عددی 75 نمونه تیر دولبه یک‌سرگیردار و استفاده از مدل ناحیه چسبناک دوخطی، نقاطی روی نموداری بر حسب پارامترهای بی‌بعد شده  $\frac{l_{czI}}{l_{chI}}$  و  $\frac{h}{l_{chI}}$  استخراج کردند. این نمونه‌ها در گستره وسیعی از درجه ارتوتروپیک ( $\rho$ ) و ضخامت‌های مختلف شبیه‌سازی شده‌اند. نمودار شکل 5 نقاط استخراج شده از هر تحلیل را نشان می‌دهد. با استفاده از برازش منحنی بر نقاط استخراج شده از تحلیل عددی، رابطه (18) به‌دست آمده است. این رابطه علاوه بر اثرات ماده، اثر هندسه نمونه را نیز در نظر گرفته است.

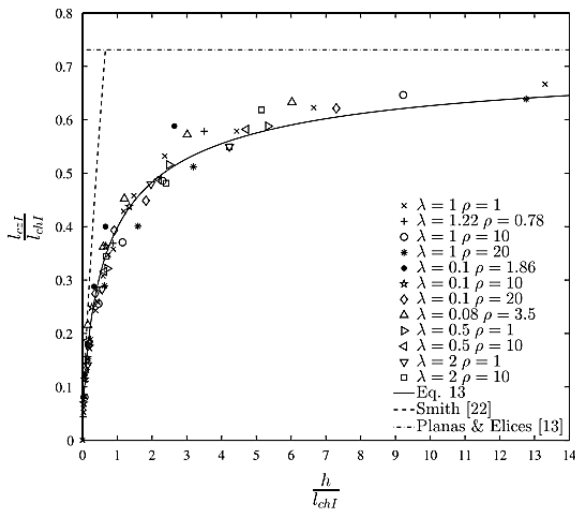


Fig. 5 Chart of extracted point from numerical analysis for mode I [16]

شکل 5 نمودار نقاط استخراج شده از تحلیل عددی برای مود یک [16]

$$\frac{l_{czI}}{l_{chI}} = \left( \left( \frac{h}{l_{chI}} \right)^{0.75} \right)^{-0.9204} + 0.731)^{-0.9204} \frac{-1}{0.9204} \quad (18)$$

برای مود دوم بارگذاری نیز با تحلیل عددی 75 نمونه خمشی چهار نقطه‌ای با ترک انتهایی و استفاده از مدل ناحیه چسبناک دوخطی، مقدار طول ناحیه چسبناک را برای هر نمونه استخراج کردند. برای بی‌بعد سازی از نسبت  $\frac{l_{czII}}{l_{chII}}$

در هیچ‌یک مدل‌های ارائه شده در جدول 1 اثر هندسه سازه در تخمین طول ناحیه چسبناک در نظر گرفته نشده است.

جدول 1 مدل‌های مختلف طول ناحیه چسبناک

نام مدل	طول ناحیه چسبناک	
هیلبرورگ [13]	$L_{cz} = \left( \frac{EG_c}{\tau_0^2} \right)$	(9)
اروین [20]	$L_{cz} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{EG_c}{\tau_0^2} \right)$	(10)
داگدایل [2]، برنبلات [21]	$L_{cz} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{EG_c}{\tau_0^2} \right)$	(11)
رایس [22]	$L_{cz} = \frac{9\pi}{32} \left( \frac{EG_c}{\tau_0^2} \right)$	(12)
بانو [19]	$L_{cz} = 0.732 \left( \frac{EG_c}{\tau_0^2} \right)$	(13)

در مدلی که توسط سوتو<sup>۲</sup> و همکاران [16] ارائه شده است نقص مدل‌های پیشین برطرف شده و دقت پیش‌بینی طول ناحیه چسبناک افزایش یافته است. در این مدل یک رابطه تجربی برای پیش‌بینی طول ناحیه چسبناک در مواد ارتوتروپیک همگن پیشنهاد شده است. حد بالایی و پایینی طول ناحیه چسبناک برای نمونه با ابعاد بی‌نهایت و نمونه نازک است. مدل‌های ارائه شده در جدول 1 برای قطعه با ابعاد بی‌نهایت است. برای قطعات نازک مثل نمونه تیر دولبه یک‌سرگیردار که طول ناحیه چسبناک با ضخامت بازوی نمونه قابل مقایسه است و گاهی بیش‌تر است، اسمیت<sup>۴</sup> [17] با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی و در نظر گرفتن یک ترک اولیه با طول زیاد نسبت به ضخامت نمونه، رابطه (14) را برای محاسبه طول ناحیه چسبناک در مود یک خالص پیشنهاد داد.

$$l_{cz}^0 = (M_I^0 l_{chI})^{0.25} h^{0.75} \quad (14)$$

در رابطه (14)،  $l_{chI}$ ، طول مشخصه،  $h$ ، ضخامت قطعه و  $M_I^0$  یک ضریب بی‌بعد است. اسمیت برای مدل چسبناک با نرم شوندگی ثابت و نرم شوندگی خطی مقدار  $M_I^0$  را به ترتیب 0.33 و 1 در نظر گرفت.

برای محاسبه طول ناحیه چسبناک در نمونه‌های نازک و بارگذاری مود دو خالص، ماسابو<sup>۵</sup> و کاکس<sup>۶</sup> [18] رابطه (15) را پیشنهاد دادند.

$$l_{cz}^0 = (M_{II}^0 l_{chII} h)^{0.5} \quad (15)$$

ماسابو و کاکس مقدار  $M_{II}^0$  برای قانون چسبناک با نرم شوندگی ثابت را 0.5 در نظر گرفتند. بانو [19] برای قانون چسبناک با نرم شوندگی ثابت مقدار 0.33 را برای  $M_{II}^0$  پیشنهاد داد. اسمیت [17] مقدار  $M_{II}^0$  را برای قانون چسبناک با نرم‌شوندگی خطی 1 در نظر گرفت.

1 Rice  
2 Bao  
3 Soto  
4 Smith  
5 Maassabo  
6 Cox

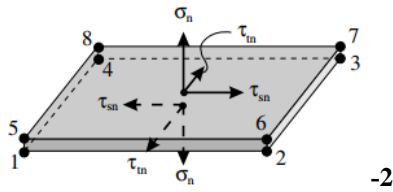


Fig. 7 Cohesive element

شکل 7 المان چسبناک [24]

1-3-1 معیارهای شروع آسیب در ناحیه چسبیده

رفتار الاستیک در المان چسبناک به صورت رابطه (21) تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{nn} & k_{ns} & k_{nt} \\ k_{sn} & k_{ss} & k_{st} \\ k_{tn} & k_{ts} & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} \quad (21)$$

که در این رابطه  $t$  ماتریس بردار تنش اسمی بوده که مؤلفه  $t_n$  در جهت نرمال و دو مؤلفه  $t_s$  و  $t_t$  در جهت برشی می‌باشند. ماتریس  $k$  ماتریس الاستیک و  $\varepsilon$  ماتریس کرنش‌ها است که مؤلفه‌های این ماتریس به صورت رابطه (22) محاسبه می‌شوند. در این رابطه  $\delta$  مقدار جابجایی و  $T_0$  ضخامت لایه چسب است. برای تعیین شروع آسیب دومعیار بر اساس تنش و دومعیار بر اساس کرنش در المان چسبناک وجود دارد.

$$\varepsilon_n = \frac{\delta_n}{T_0}, \quad \varepsilon_t = \frac{\delta_t}{T_0}, \quad \varepsilon_s = \frac{\delta_s}{T_0} \quad (22)$$

1-3-1-1 معیار تنش اسمی بیشینه

در این معیار، آسیب زمانی شروع می‌شود، که مقدار تنش بین لایه‌ای به مقدار بیشینه تنش ناحیه چسبناک رسیده باشد. رابطه (23) معیار تنش اسمی بیشینه را نشان می‌دهد. در این رابطه پارامترهای با بالانویس صفر نشان دهنده استحکام ناحیه چسبناک هستند.

$$\text{Max} \left\{ \frac{t_n}{t_n^0} \cdot \frac{t_s}{t_s^0} \cdot \frac{t_t}{t_t^0} = 1 \right\} \quad (23)$$

1-3-2 معیار کرنش اسمی بیشینه

در این معیار، شروع آسیب با استفاده از مقدار کرنش در المان بین لایه‌ای، مشخص می‌شود. هنگامی که نسبت مقدار بیشینه کرنش در المان بین لایه‌ای به مقدار کرنش اسمی، به عدد یک برسد، آسیب شروع خواهد شد که در رابطه (24) مشخص شده است. در این رابطه پارامترهای با بالانویس صفر نشان دهنده کرنش اسمی هستند.

$$\text{Max} \left\{ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^0} \cdot \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0} \cdot \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} = 1 \right\} \quad (24)$$

و  $\frac{h\lambda^{0.25}\sqrt{1+\rho}}{\lambda^{0.25}l_{chII}}$  به عنوان پارامترهای بی بعد برای رسم نمودار استفاده شده است. نمودار شکل 6 نقاط استخراج شده از هر تحلیل را برای مود دوم بارگذاری نشان می‌دهد. با استفاده از برازش منحنی بر نقاط استخراج شده از تحلیل عددی، رابطه (19) به دست آمده است. این رابطه نیز علاوه بر اثرات ماده، اثر هندسه نمونه را در نظر گرفته است.

$$\frac{l_{czII}}{l_{chII}} = \left( \left( \frac{h}{l_{chII}} \sqrt{\frac{1+\rho}{2\lambda}} \right)^{-1.1587} + \left( \frac{9\pi}{32} \right)^{-1.1587} \right)^{-\frac{1}{1.1587}} \quad (19)$$

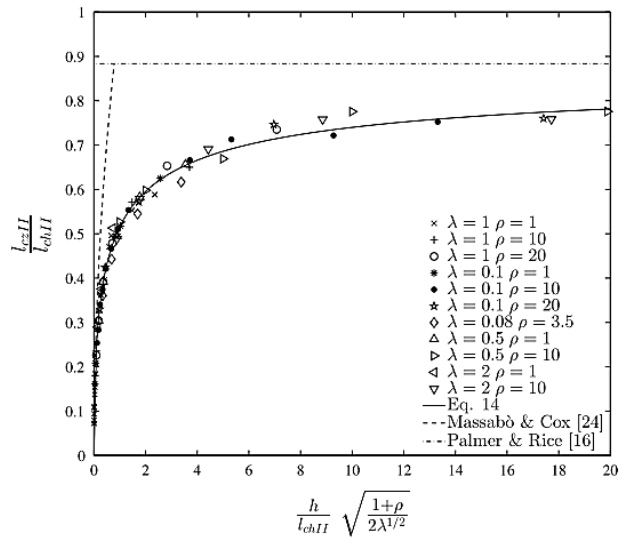


Fig. 6 Chart of extracted point from numerical analysis for mode II [16]

شکل 6 نمودار نقاط استخراج شده از تحلیل عددی برای مود دو [16]

تعداد المان‌های استفاده شده در ناحیه چسبناک بسیار مهم است. حداقل تعداد المان مورد نیاز برای این ناحیه 3 المان است که توسط تورو [9] پیشنهاد شده است.

برای محاسبه حداکثر طول المان در این ناحیه می‌توان از رابطه (20) استفاده کرد. یعنی اگر مش بندی ساختار به اندازه  $L_e$  باشد از وجود 3 المان در ناحیه چسبناک اطمینان حاصل می‌شود.

$$L_e = \frac{L_{cz}}{3} \quad (20)$$

3- ساختار المان چسبناک

المان چسبناک نشان داده شده در شکل 7 دارای 8 گره است. در این نوع المان فقط تنش‌هایی که موجب جدایش بین دو لایه می‌شوند محاسبه می‌شوند، یعنی یک تنش عمودی در جهت ضخامت و دو تنش برشی خارج از صفحه. مقدار ضخامت این المان بسیار محدود و کوچک است و باید در حدی انتخاب شود که گشتاور خمشی ناشی از عدم هم‌مرکزی نیروهای گرهی صفر شود [24].

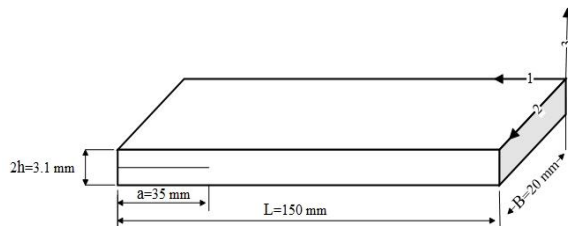


Fig. 9 Geometry of DCB model

شکل 9 هندسه نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار

در شبیه‌سازی نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار تعداد 7950 المان کرنش صفحه‌ای چهار گره‌ای استفاده شده است. در شبیه‌سازی نمونه خمشی چهار نقطه‌ای نیز از 7956 المان کرنش صفحه‌ای چهار گره‌ای استفاده شده است. خواص مکانیکی کامپوزیت و خواص بین لایه‌ای المان چسبانک در جدول 2 نشان داده شده است.

جدول 2 خواص مکانیکی کامپوزیت کربن/اپوکسی [7]

Table 2 Mechanical properties of carbon/epoxy composite [7]			
$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$E_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
120	10.5	5.25	0.3
$G_{Ic}$ (Kj/m <sup>2</sup> )	$\sigma_{nm}$ (MPa)	$\sigma_{sn}$ (MPa)	$K_{nn} = K_{sn}$ (N/mm <sup>3</sup> )
0.26	30	60	1000000

شرایط مرزی و بارگذاری روی نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار در شکل 10 نشان داده شده است. بارگذاری در هر دو نمونه به صورت جابه‌جایی-کنترل اعمال شده است. در شکل 11 وضعیت شرایط مرزی و بارگذاری نمونه خمشی چهار نقطه‌ای نشان داده شده است.

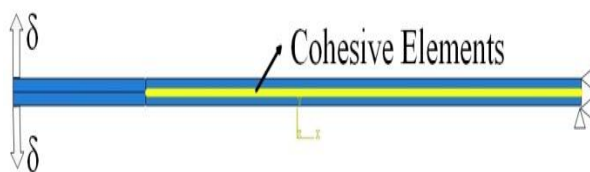


Fig. 10 Loading and boundary condition of DCB sample

شکل 10 شرایط مرزی و بارگذاری نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار

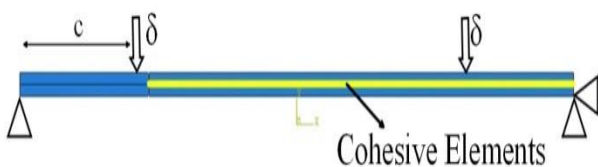


Fig. 11 Loading and boundary condition of 4ENF sample

شکل 11 شرایط مرزی و بارگذاری نمونه خمشی چهار نقطه‌ای

### 3-1-3- معیار تنش اسمی درجه دوم

در این معیار اثر تنش‌ها بر یکدیگر در نظر گرفته شده است. در این معیار آسیب زمانی آغاز می‌شود که رابطه (25) برقرار شود.

$$\left\{\frac{t_n}{t_n^0}\right\}^2 + \left\{\frac{t_s}{t_s^0}\right\}^2 + \left\{\frac{t_t}{t_t^0}\right\}^2 = 1 \quad (25)$$

### 4-1-3- معیار کرنش اسمی درجه دوم

این معیار نیز بر هم‌کنش کرنش‌ها را در نظر گرفته است. رابطه‌ی (26) معیار آغاز جدایش را نشان می‌دهد.

$$\left\{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_n^0}\right\}^2 + \left\{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_s^0}\right\}^2 + \left\{\frac{\epsilon_t}{\epsilon_t^0}\right\}^2 = 1 \quad (26)$$

### 4- تحلیل عددی

به منظور تحلیل عددی جدایی بین لایه‌ای در مود یک و دو از نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس استفاده شده است. برای ساده‌سازی و کاهش حجم محاسبات، تحلیل دوبعدی در حالت کرنش صفحه‌ای انجام شده است. در ناحیه اتصال دو لایه از المان‌های چسبانک استفاده شده است. به منظور بررسی حساسیت نتایج به اندازه المان چسبانک، نیروی شروع آسیب با مقدار 52 نیوتن حاصل از حل تحلیلی، به عنوان مینا در نظر گرفته شد. در شکل 8 نمودار تغییرات مقدار نیروی شروع آسیب با تغییرات اندازه المان نمایش داده شده است. مشاهده شد که در اندازه المان 0.1 میلی‌متر نتایج از اندازه المان مستقل شده و به جواب تحلیلی هم‌گرا می‌شود.

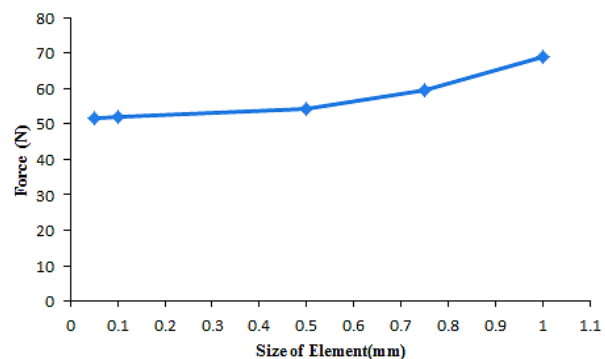


Fig. 8 Mesh sensitivity of numerical results

شکل 8 حساسیت نتایج عددی به اندازه المان

در شکل 9 مشخصات هندسه نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار برای شبیه‌سازی مود یک بارگذاری نشان داده شده است. مشخصات هندسی نمونه خمشی چهار نقطه‌ای نیز مانند نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار است.



رابطه پیشنهاد شده توسط سوتو و همکاران مقدار طول ناحیه چسبناک را برای نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار ذکر شده 1.18 میلی‌متر پیش‌بینی می‌کند. این رابطه خطای بسیار کمی در مقایسه با مدل‌های دیگر دارد. همچنین در مدل خمشی چهار نقطه‌ای با استفاده از تحلیل عددی مقدار طول ناحیه چسبناک برای مود دوم بارگذاری 4.7 میلی‌متر استخراج شد و رابطه پیشنهادی سوتو و همکاران برای این نمونه، طول ناحیه چسبناک را 4.81 میلی‌متر پیش‌بینی کرد. در مود دوم بارگذاری نیز رابطه سوتو و همکاران از دقت بالاتری نسبت به سایر مدل‌ها برخوردار است. در جدول 4 مقادیر طول ناحیه چسبناک در مدل‌های مختلف برای مود دوم بارگذاری نشان داده شده است.

جدول 4 مقایسه مقادیر طول ناحیه چسبناک در مدل‌های مختلف مود دو

Table 4 Comparison of CZL models in mode II

نام مدل	$L_{czII}$ (mm)
بانو	4.36
اسمیت	13.21
ماسابو و کاکس	3.2
سوتو	4.7

## 6- نتیجه گیری

در این پژوهش به بررسی عددی و تحلیلی طول ناحیه چسبناک در مودهای اول و دوم بارگذاری در کامپوزیت‌های لایه‌ای پرداخته شد. برای شبیه‌سازی مود یک بارگذاری، از نمونه استاندارد تیر دولبه یک‌سرگردار و برای مود دو بارگذاری، از نمونه استاندارد خمشی چهار نقطه‌ای استفاده شد. مدل‌های تحلیلی پیش‌بینی طول ناحیه چسبناک بررسی شد و دقت رابطه‌های پیشنهادی با یکدیگر مقایسه شدند. مشخص شد که مدل‌هایی که علاوه بر اثرات مادی، اثر هندسه را نیز در نظر می‌گیرند دقت قابل توجه‌تری نسبت به مدل‌هایی که فقط اثر جنس ماده را در نظر می‌گیرند، دارند. با مقایسه نتایج تحلیلی مدل‌های مختلف با نتایج تحلیل عددی مشخص شد که نتایج حاصل از رابطه پیشنهادی سوتو و همکاران پیش‌بینی دقیق‌تری نسبت به سایر مدل‌ها دارد.

## 7- فهرست علائم

$E$	مدول یانگ موثر (Pa)
$G_c$	انرژی شکست
$h$	ضخامت بازو
$L_{czI}$	طول ناحیه چسبناک مود یک (m)
$L_{czII}$	طول ناحیه چسبناک مود دو (m)
$L_{czI}^0$	طول ناحیه چسبناک مود یک در نمونه نازک (m)
$L_{czI}^\infty$	طول ناحیه چسبناک مود یک در نمونه با عرض بی‌نهایت
$L_{chI}$	طول مشخصه مود یک
$L_{chII}$	طول مشخصه مود دو
$L_e$	طول المان چسبناک
$K_{nm}$	سفتی عمودی المان چسبناک
$K_{sh}$	سفتی برشی المان چسبناک
$\Delta_0$	مقدار جابجایی در شروع آسیب
$\Delta_f$	مقدار جابجایی در لحظه جدایش

در شکل 12 نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار پس از بارگذاری نشان داده شده است. تعداد المان‌های پشت نوک ترک که مقدار پارامتر آسیب در آن‌ها بین صفر و یک هستند، طول ناحیه چسبناک را مشخص می‌کنند که در شکل 12 اندازه مجموع این المان‌ها اندازه گذاری شده است. در شکل 13 نیز نمونه خمشی چهار نقطه‌ای پس از بارگذاری نمایش داده شده است.

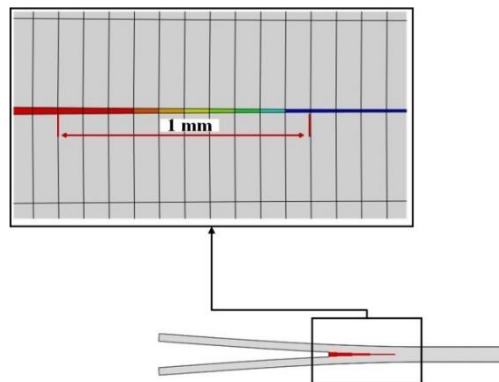


Fig. 12 DCB sample after loading in abaqus

شکل 12 نمونه تیر دولبه یک‌سرگردار در نرم افزار آباکوس پس از بارگذاری

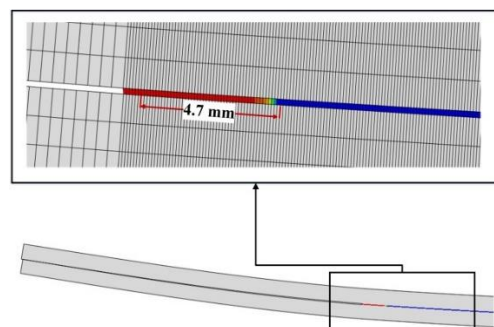


Fig. 13 4ENF sample after loading in abaqus

شکل 13 نمونه خمشی چهار نقطه‌ای در نرم‌افزار آباکوس پس از بارگذاری

## 5- مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

طول ناحیه چسبناک عددی در مدل تیر دولبه یک‌سرگردار 1.1 میلی‌متر اندازه‌گیری شد. جدول 3 مقادیر طول ناحیه چسبناک محاسبه شده توسط مدل‌های مختلف را برای مود یک بارگذاری نشان می‌دهد.

جدول 3 مقایسه مقادیر طول ناحیه چسبناک در مدل‌های مختلف مود یک

Table 3 Comparison of CZL models in mode I

نام مدل	$L_{czI}$ (mm)
بانو	3.31
اروین	1.44
رایس	3.99
هیلمبورگ	4.52
داگدایل	1.77
سوتو	1.18
اسمیت	2.02

ضریب بی‌بعد	$M$
ضریب بی‌بعد	$M_I^0$
ضریب بی‌بعد	$M_I^\infty$
ضریب بی‌بعد	$M_{II}^0$
ضریب بی‌بعد	$M_{II}^\infty$
ضریب بی‌بعد	$n_I$
ضریب بی‌بعد	$n_{II}$
علائم یونانی	
ضریب بی‌بعد	$\rho$
ضریب بی‌بعد	$\lambda$
استحکام شروع آسیب	$\tau_0$

### 5- مراجع

- [1] Pagano N. J. and Schoeppner, G. a “Delamination of Polymer Matrix Composites : Problems and Assessment,” *Compr. Compos. Mater.*, 2000, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/B0-08-042993-9/00073-5>.
- [2] Dugdale, D. S. “Yielding of steel sheets containing slits,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, no. 2, pp. 100–104, 1960, doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.
- [3] Barenblatt, G. I. “Self-similarity: Dimensional analysis, and intermediate asymptotics,” *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 44, no. 2, pp. 267–272, 1980, doi: 10.1016/0021-8928(80)90161-6.
- [4] Needleman, A. “Numerical modeling of crack growth under dynamic loading conditions,” *Comput. Mech.*, vol. 19, no. 6, pp. 463–469, 1997, doi: 10.1007/s004660050194.
- [5] Tvergaard, V. and Hutchinson, J. W. “The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 40, no. 6, pp. 1377–1397, 1992, doi: 10.1016/0022-5096(92)90020-3.
- [6] Geubelle, P. H. and Baylor, J. S. “Impact-induced delamination of composites: a 2D simulation,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 29, no. 5, pp. 589–602, 1998, doi: 10.1016/S1359-8368(98)00013-4.
- [7] Turon Travesa, A. Costa, J. P. M. P. R. de, Balanzat, C. Camanho, and Girona, d. Departament d’Enginyeria Mecànica i de la Construcció Industrial., *Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models*. Universitat de Girona, 2007.
- [8] Ingo, S., “Cohesive model for crack propagation analyses of structures with elastic–plastic material behavior Foundations and implementation,” GKSS research center Geesthach, Dept. WMS, 2001.
- [9] Turon, A. Dávila, C. G. Camanho, P. P. and Costa, J. “An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, no. 10, pp. 1665–1682, 2007, doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.08.025.
- [10] Camanho, P. Dávila, P. C. G. and Moura, M. F. De “Numerical simulation of mixed-mode progressive delamination in composite materials,” *J. Compos. Mater.*, vol. 37, no. 16, pp. 1415–1438, 2003, doi: 10.1177/0021998303034505.
- [11] Harper, P. W. and Hallett, S. R. “Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 75, no. 16, pp. 4774–4792, 2008, doi: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2008.06.004.
- [12] Kenane, M. and Benzeggagh, M. L. “Mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites under fatigue loading,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 57, No. 5, pp. 597–605, 1997, doi: 10.1016/S0266-3538(97)00021-3.