



تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته

سهیل هاشمی¹، علی اصغر جعفری^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* * تهران، صندوق پستی 16765-3381، AJafari@Kntu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

در تحقیق حاضر، تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای اولین بار مورد بررسی واقع شده است. برای این منظور ابتدا با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن روابط کرنش جابجایی غیرخطی و ن کارمن استخراج شده اند. پس از آن با اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حرکت به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل می شوند. سپس با استفاده از روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته، معادله غیرخطی حرکت عرضی ورق مدرج تابعی بصورت تحلیلی حل گشته و فرکانس های غیرخطی استخراج می شوند. خواص مواد مدرج تابعی ورق به صورت تابع توانی و پیوسته در راستای ضخامت فرض گردیده است. در نهایت، اثرات برخی پارامتر های کلیدی سیستم همچون دامنه ارتعاش بدون بعد، توان کسر حجمی ماده تابعی و همچنین نسبت ابعاد ورق روی نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی مورد بحث قرار گرفته است. برای تایید و صحت فرمولاسیون مساله، نتایج این مطالعه با نتایج مقالات منتشر شده قبلی و همچنین راه حل عددی مقایسه گشته و تطابق خوبی دیده شده است.

دریافت: 98/02/14

پذیرش: 98/12/14

کلیدواژگان:

ارتعاش غیرخطی

ورق مستطیلی

مواد مدرج تابعی

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول،

روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته

Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rectangular plate using modified Lindstedt-Poincare method

Soheil Hashemi¹, Ali Asghar Jafari^{2*}

1- MSc. Student, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

2- Professor, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 16765-3381, Tehran, Iran, AJafari@Kntu.ac.ir

Keywords

Nonlinear vibrations
Rectangular plate
Functionally graded materials
First order shear deformation theory
modified Lindstedt-Poincare method

Abstract

In this research, the nonlinear free vibration analysis of functionally graded (FG) rectangular plate is investigated analytically using first order shear deformation theory (FSDT) for the first time. For this purpose, firstly, using Hamilton principle, the partial differential equations of motion are developed based on first order shear deformation theory (FSDT) and von Karman nonlinearity strain displacement relations. Afterward, by applying Galerkin method, the nonlinear partial differential equations are transformed into nonlinear ordinary differential equations. Then, using the modified Lindstedt-Poincare method, the nonlinear equation of transverse motion of the FG plate is solved analytically to determine nonlinear frequency ratio. The material properties of the plate are assumed to be graded continuously according to power law distribution in the thickness direction. The effects of some key system parameters such as vibration amplitude, volume fraction index and aspect ratio on the nonlinear natural frequency ratio to linear natural frequency are discussed. To validate the analysis, the results of this study are compared with the results of previously published papers and numerical solution and good agreement has been observed.

1-مقدمه

و پیوسته تغییر می کند. استفاده از مواد مدرج تابعی در دهه های اخیر افزایش چشم گیری داشته است. این مواد به دلیل مقاومت حرارتی بالا و دیگر خواصی که دارند کاربرد های مهندسی زیادی در صنایع مختلفی همچون صنایع دفاعی و صنایع هوافضایی دارند. همچنین از این مواد در ساخت تجهیزات

مواد هدفمند یا همان مواد مدرج تابعی (FGM¹) نوعی کامپوزیت هستند که خواص مکانیکی یا حرارتی آنها از یک سطح تا سطح دیگر بصورت تابعی

¹ Functionally graded material

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Hashemi, S. and Asghar Jafari, A., "Nonlinear free vibration analysis of functionally graded rectangular plate using modified Lindstedt-Poincare method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 4, pp. 637-648, 2020.

هدفمند روی بستر الاستیک را بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول مورد تحقیق قرار دادند. ژائو⁹ و همکاران [12] با استفاده از روش المان آزاد کی-پی-ریتز⁴ به مطالعه ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد هوشمند براساس تئوری برشی مرتبه اول پرداختند. آنها در این تحقیق چهار نوع ماده هدفمند را مورد بررسی قرار دادند. یانگ و شن⁵ [13] به تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری ورق های مدرج تابعی که تحت پیش تنش بوده و در محیط حرارتی قرار دارند، پرداختند. آنها از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر استفاده کردند و همچنین شرایط مرزی گوناگونی را مورد بررسی قرار دادند. گوپتا⁶ و همکاران [14] با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر به استخراج فرکانس های طبیعی ورق از جنس مواد هدفمند با شرایط مرزی مختلف پرداختند. با توجه به اینکه برای طراحی و تحلیل دقیق و قابل اطمینان یک سازه نیاز است تا ارتعاش با دامنه بزرگ مورد بررسی واقع شود چراکه در واقعیت همه پدیده ها غیرخطی هستند لذا تحلیل غیرخطی به واقعیت نزدیکتر از تحلیل خطی می باشد. لذا برخی دیگر از محققان به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق ها پرداختند. نشیر و قاهری [15] به مطالعه ارتعاش اجباری غیرخطی ورق های نازک دایروی از جنس مواد هدفمند پرداختند. آنها شرایط مرزی را دورگیردار در نظر گرفته و از روش اغتشاشات برای حل معادلات غیرخطی استفاده کردند. نورالدین خسرویان و همکاران [16] به شبیه سازی دینامیکی ارتعاش غیرخطی ورق مربع شکل چهار سر گیردار با جابجایی بزرگ پرداختند. یان کینگ و وانگ و جین زو⁷ [17] بر اساس تئوری کلاسیک، به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند متخلخل پرداختند. آنها با استفاده از اصل آلمبرت⁸ معادله غیرخطی جزئی حاکم بر ورق را استخراج و در نهایت پس از تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی به روش گالکین⁹ آن را با روش هارمونیک بالانس حل نمودند. علی امین یزدی [18] با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون کارمن¹⁰ به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند پرداخت. او از روش اغتشاشی هوموتوپیک¹¹ برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیر خطی استفاده کرد. لطف آور و همکاران [19] با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون کارمن¹² به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی کامپوزیتی پرداخت. آنها از دو روش تحلیلی تقریبی برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیر خطی استفاده کردند. جی، وو¹³ و همکاران [20] به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق ساخته شده از جنس مواد هدفمند پرداختند. آنها براساس تئوری کلاسیک ورق ها و با استفاده از یک بسط فوریه، اثر خواص مواد، شرایط مرزی و بار های حرارتی را روی رفتار دینامیکی ورق مورد مطالعه قرار دادند. ملک زاده و منجم زاده [21] با به کارگیری تئوری کلاسیک ورق ها، به تحلیل پاسخ غیرخطی ورق از جنس مواد هدفمند تحت نیروی در حال حرکت پرداختند. نوین دیندانه و فام هونگ کونگ¹⁴ [22] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و تابع تنش به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند پرداختند. آنها فرض کردند ورق روی بستر الاستیک و تحت بار های مکانیکی، حرارتی و میرایی باشد، سپس پاسخ دینامیکی ورق را با استفاده از روش عددی رانج گوتا¹⁵ استخراج کردند. چین پینگ فانگ و چان شنگ چنگ¹⁶ [23] براساس تئوری

همچون مخازن تحت فشار، پره های توربین، مبدل های حرارتی، مواد بیوپزشکی مثل ایمپلنت دندان استفاده می شود. با توجه به اهمیت و کاربرد مواد مدرج تابعی برخی محققان مطالعاتی در این زمینه انجام دادند. خورشیدی و همکاران [1] ارتعاش آزاد الکترومکانیکی نانورق مستطیلی کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی بهبود یافته مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. خورشیدی و همکاران [2] ارتعاش نانورق های مستطیلی مدرج تابعی را براساس تئوری تغییرشکل برشی نمای غیرمحلی مورد تحلیل قرار دادند. خورشیدی و بخششی [3] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی در تماس با سیال را مطالعه کردند. یکی از سازه های رایج ساخته شده از مواد مدرج تابعی که کاربرد های زیادی در سازه های مهندسی همچون وسایل نقلیه فضایی و غیره دارد، ورق ها می باشند. بسیاری از کاربردهای ورق های ساخته شده از مواد مختلف در مهندسی یافت می شود به عنوان مثال: صفحات دایره ای بسیار نازک در هارد دیسک های رایانه ای استفاده می شود. صفحات مستطیلی و دوزنقه ای را می توان در پوست بال، سطوح دم افقی، فلپ و باله های عمودی هواپیما یافت. صفحات مستطیلی یکسرگیردار در تشدیدکننده های نانو برای تشخیص مواد مخدر استفاده می شوند. همچنین پانل های مستطیل مسطح تا حد زیادی در ساختمانهای عمرانی استفاده می شود. لذا بدلیل اهمیت بالایی که دارند مطالعات زیادی روی دینامیک ورق های مدرج تابعی انجام شده است. برخی محققان روی ارتعاش ورق های ساخته شده از جنس مواد هدفمند براساس تئوری کلاسیک کار کردند. ژانگ و ژوو¹ [4] ارتعاش آزاد، کماتش و خیز ورق نازک از جنس مواد هدفمند را براساس تئوری کلاسیک ورق و سطح خنثی فیزیکی تحلیل کردند. ابریت² [5] فرکانس های طبیعی ورق های نازک با تکیه گاه ساده و گیردار را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق ها استخراج کرد. با توجه به اینکه در تئوری کلاسیک از تغییرشکل های برشی در ضخامت ورق صرف نظر می گردد، فرکانس های طبیعی با کمی تقریب بدست می آیند. به منظور حل این مشکل برخی پژوهشگران با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و یا مرتبه بالاتر به مطالعه ارتعاش خطی ورق ها پرداختند. برای نمونه، نجفی زاده و عالیوار [6] با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاش آزاد ورق مستطیلی شکل ساخته شده از جنس مواد تابعی پرداختند. کوروش خورشیدی و همکاران [7] به بررسی تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم پرداختند. حسینی هاشمی و همکاران [8] با ارائه یک حل دقیق پاسخ بسته به تحلیل ارتعاش آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم هدفمند با لایه های هوشمند براساس تئوری میندلین پرداختند. محمد عباسی بیات و همکاران [9] براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر به برسی ارتعاش ورق تابعی مندرج دوبعدی پرداختند. سیاوش عظیمی عراقی و همکاران [10] براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم و با استفاده از روش انرژی و اصل هامیلتون به برسی ارتعاش ورق تابعی مندرج دوبعدی پرداختند. حسینی هاشمی و همکاران [11] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی ساخته شده از جنس مواد

⁹ Galerkin method¹⁰ Von karman¹¹ Homotopy Perturbation Method¹² Von karman¹³ J. Woo¹⁴ Nguyen Dinh Duc and Pham Hong Cong¹⁵ Runge kutta method¹⁶ Chin-Ping Fung and Chun-Sheng Chen¹ Zhang and Zhou² Abrate³ Zhao⁴ Element-free *kp*-Ritz method⁵ Yang and Shen⁶ Gupta⁷ Yan Qing Wang And Jean W. Zu⁸ Alembert's principle

روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته^۴ بصورت تحلیلی حل شده و نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی ورق استخراج شده است. برای اطمینان از صحت محاسبات مساله، نتایج این تحقیق با ادبیات گذشته و همچنین حل عددی مقایسه و اعتبارسنجی شده است.

2- فلوجارت فرایند حل مساله

شکل ۱ فلوجارت فرایند حل مساله را در این تحقیق نشان می دهد.

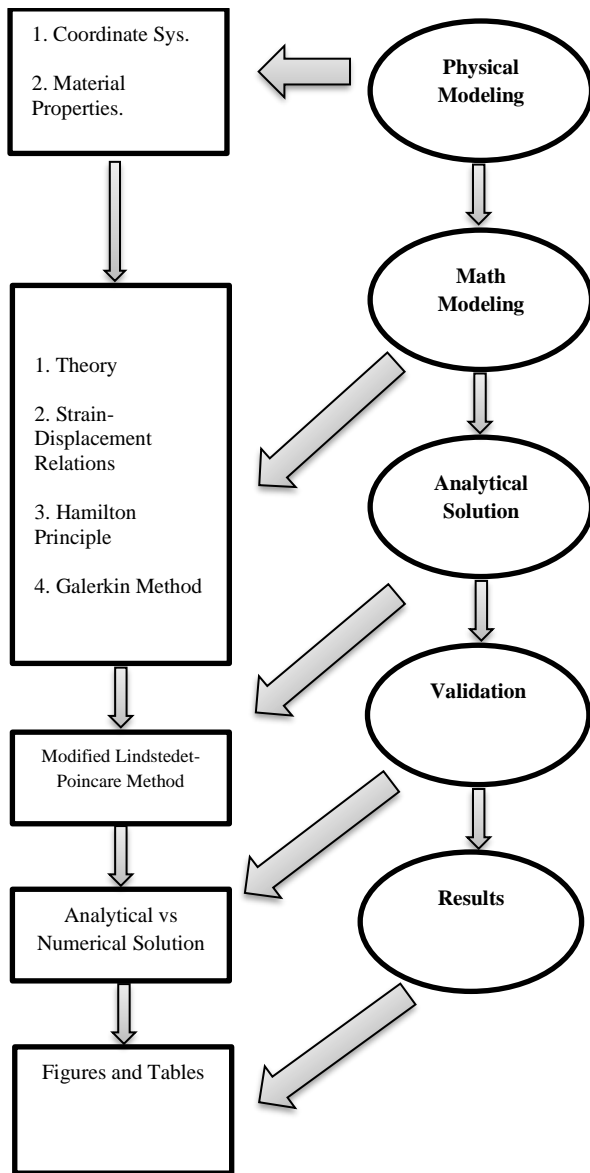


Fig. 1 Flowchart of problem solving process

شکل ۱ فلوجارت فرایند حل مساله

۳- هندسه و خواص ورق

شکل ۲ یک ورق مستطیلی نازک از جنس مواد مدرج تابعی را نشان می دهد که دارای طول a ، عرض b و ضخامت h می باشد. این ورق از هر چهار طرف

مرتبه اول، ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند را مورد بررسی قرار دادند. آنها ناصاف بودن ورق و همچنین وجود تنش اولیه در ورق را لحاظ نموده و با استفاده از روش گالرکین و روش عددی رانج گوتا به حل معادلات پرداختند. وحید فخاری و همکاران [24] به مطالعه ارتعاش غیرخطی آزاد و اجباری ورق های از جنس مواد هدفمند براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر و روش المان محدود پرداختند. آنها دولایه پیزوالکتریک روی سطوح بالایی و پایینی ورق در نظر گرفته و همچنین آن را تحت بار های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی قرار دادند. هائو^۱ و همکاران [25] به تحلیل دینامیک غیرخطی ورق مستطیلی یکسرگیردار از جنس مواد هدفمند که در یک محیط حرارتی تحت بارگذاری عرضی خارجی قرار دارد، پرداختند. آنها از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر استفاده کردند و در نهایت با بهره گیری از یک روش اغتشاشی تقریبی و با استفاده از روش عددی رانج گوتا، رزونانس^۲ های دینامیکی غیرخطی ورق را پیدا کردند. وی ژانگ^۳ و همکاران [26] براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر و با استفاده از یک روش اغتشاشی تقریبی بسط فوری به تحلیل دینامیک بی نظم و غیرخطی یک ورق دورمفصل از جنس مواد هدفمند که تحت بار های خارجی و پارامتری قرار دارد پرداختند. نوین دین داک و همکاران [27] پاسخ دینامیکی غیرخطی و ارتعاش ورق مستطیلی ناصاف از جنس مواد هدفمند که روی بستر الاستیک واقع بوده و تحت بارگذاری حرارتی و بارگذاری ضربه ای است را براساس تئوری برشی مرتبه بالاتر محاسبه کردند.

برای حل معادلات و مسائل غیرخطی، محققان از روش های مختلفی برای حل تحلیلی آنها از معایب روش های اغتشاشی مرسوم (استریت فوروارد، هارمونیک بالانس، مقیاس های زمانی چندگانه، متوسط گیری و...) میتوان به دومورد اشاره کرد. اولاً این روش ها معمولاً زمانی نتایج خوبی می دهند که ضرایب و پارامتری های معادله از ترم های غیرخطی کوچک تشکیل شده باشند. ثانیاً این روش ها دارای حجم محاسبات سنگین و ریاضیات پیچیده ای می باشند. اما روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته نه تنها برای ضرایب غیرخطی کوچک بلکه برای ضرایب غیرخطی بزرگ هم قابل استفاده است. همچنین این روش یک ابزار تحلیلی نسبتاً ساده است که پیچیدگی خاصی ندارد و درعین حال نتایج بسیار خوبی ارائه می دهد.

در این تحقیق، تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای اولین بار بررسی می شود. نوآوری تحقیق حاضر نسبت به مطالعات پیشین شامل موارد زیر می باشد: الف) ارتعاشات غیرخطی با استفاده از تئوری مرتبه اول برای مساله ورق مدرج تابعی بصورت تحلیلی تا بحال کار نشده است که در این مقاله مورد بررسی واقع شده است. ب) در این نوع مساله برای اولین بار از روش تحلیلی لیندشتد پوانکاره بهبود یافته استفاده شده است و مشاهده شد که تطابق بسیار خوبی با روش های دیگر همچنین حل عددی رانج گوتا مرتبه چهار دارد. ج) اثر برخی پارامتر های سیستم از جمله نسبت ابعاد، اندیس توانی مدرج تابعی و همچنین دامنه ارتعاش روی نسبت فرکانسی غیرخطی برای اولین بار در تئوری مرتبه اول برشی مورد تحلیل قرار می گیرد. برای این منظور، معادلات غیرخطی حرکت براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون کارمن استخراج شده است. سپس معادلات غیرخطی حرکت با استفاده توابع شکل مود و روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل شده اند. و در نهایت معادله ارتعاش عرضی ورق با استفاده از

¹ Y.X. Hao
² Resonance

³ Wei Zhang
⁴ Modified Lindstedt-Poincare method

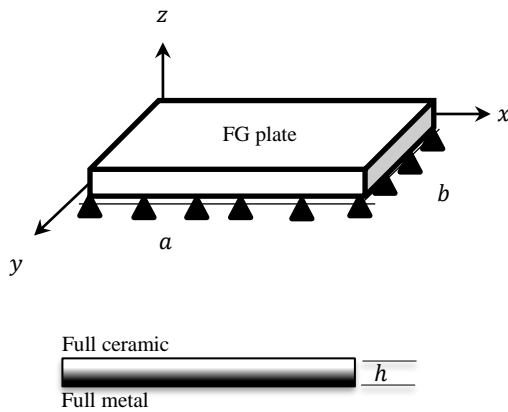


Fig. 2 Geometry of an FG rectangular plate

شکل 2 هندسه یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که در آن ضرایب سختی ماتریس هستند که به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (12)$$

$$Q_{12}(z) = \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (13)$$

$$Q_{44}(z) = Q_{55}(z) = Q_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (14)$$

در روابط بالا ضریب پواسان ثابت و برابر با مقدار ۰.۳ فرض می‌شود.

معادلات حرکت ورق براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشند [28]:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \mathcal{N}(w_0) + q(x, y, t) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (19)$$

که $\mathcal{N}(w_0)$ در معادلات بالا بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(w_0) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

در معادلات بالا N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} نیروهای منتهی در صفحه، M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} ممان های منتهی و Q_x, Q_y نیروهای عرضی منتهی می‌باشند. I_0, I_1, I_2 ممان اینرسی جرمی و q نیروی تحریک عرضی وارد بر ورق می‌باشد که در تحلیل ارتعاش آزاد، صفر در نظر گرفته می‌شود. لازم بذکر است، باتوجه به نازک بودن

دارای تکیه‌گاه مفصلی می‌باشد. دستگاه مختصات کارترین^۱ در گوشه ورق و روی صفحه میانی آن قرار دارد.

با توجه به اینکه جنس ورق از نوع مواد هدفمند است، فرض می‌شود که خواص آن از جمله چگالی و مدول یانگ^۲ در راستای ضخامت بصورت پیوسته و با قانون توانی تغییر کند:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + E_m \quad (1)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n + \rho_m \quad (2)$$

که در آن n ضریب توانی کسر حجمی، E_c و E_m به ترتیب بیانگر مدول یانگ سرامیک و فلز و همچنین ρ_c و ρ_m به ترتیب بیانگر چگالی سرامیک و فلز می‌باشد که مقادیر آن در جدول ۱ آورده شده است.

4- معادلات حرکت

براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، جابجایی هر نقطه از ورق در راستای محورهای x, y, z از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \quad (3)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (4)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (5)$$

در معادلات بالا، u, v, w به ترتیب جابجایی های یک نقطه دلخواه از ورق در راستای محور های x, y, z و u_0, v_0, w_0 جابجایی های نقطه متناظر با همان نقطه بر روی صفحه میانی می‌باشند. همچنین ϕ_x, ϕ_y به ترتیب چرخش حول محور x, y می‌باشند. با فرض تغییرشکل های بزرگ، روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون کارمن بصورت زیر بیان می‌شوند [28]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad (9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \quad (10)$$

براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، روابط تنش کرنش برای ورق از جنس مواد هدفمند را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

جدول 1 خواص مواد برای ورق از جنس مواد هدفمند

Table 1 Material properties for FG plate

خواص	سرامیک (Al_2O_3)	فلز (Al)
مدول یانگ	380 Gpa	70 Gpa
چگالی	3800 $\frac{kg}{m^3}$	2702 $\frac{kg}{m^3}$

² Young's modulus

¹ Cartesian coordinate system

$$\begin{aligned}
 & + B_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left(A_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + B_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right. \\
 & \left. + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right) + B_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right) \\
 & + \frac{\partial w_0}{\partial y} \left(A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
 & = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + B_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - KA_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \\
 & B_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + B_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - KA_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

در معادلات بالا ضرایب A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} از رابطه زیر محاسبه می گردند:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} Q_{ij}(z) dz, \quad i, j = 1, 2, 4, 5, 6 \tag{35}$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی دور مفصل بدون جابجایی صفحه ای روابط زیر برقرار هستند:

$$(36) \text{ at } x = 0, a \quad v_0 = w_0 = N_{xx} = M_{xx} = \phi_y = 0$$

$$(37) \text{ at } y = 0, b \quad u_0 = w_0 = N_{yy} = M_{yy} = \phi_x = 0$$

توابع جابجایی زیر به منظور ارضا شدن شرایط مرزی تعریف می گردند [22]:

$$u_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \tag{38}$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \tag{39}$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \tag{40}$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \tag{41}$$

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \tag{42}$$

ورق می توان از ترم های اینرسی صفحه ای در معادلات ۱۹ تا ۱۵ صرف نظر نمود [29]. در نهایت این معادلات به شکل زیر بدست می آیند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \mathcal{N}(w_0) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{23}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \tag{25}$$

برای محاسبه نیرو و ممان متوجه از روابط زیر استفاده می شود:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{26}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \tag{27}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \tag{28}$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho(z) dz \tag{29}$$

K در رابطه ۲۸ ضریب اصلاح برشی است که برابر با مقدار $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری معادلات ۲۹ تا ۲۶ در معادلات حرکت ۲۵ تا ۲۱:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) \\
 & + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 & KA_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + KA_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) \\
 & + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) \\
 & + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\
 & + A_{12} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right) + B_{12} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\
 & + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left(A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \omega^2 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots \quad (55)$$

ضرایب c_i, ω در معادله ۵۵ مجهول هستند که در ادامه محاسبه خواهند شد. به منظور دقت بیشتر، معادله ۵۰ تا تقریب مرتبه دوم یا به بیان دیگر تا سه جمله حل می‌گردند. برای این منظور با جایگذاری معادله ۵۴ و ۵۵ در معادله ۵۲، و با صفر برابر قرار دادن ضرایب $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2$ معادلات زیر استخراج می‌شوند:

$$p^0: \quad \ddot{W} + \omega^2 \bar{W}_0 = 0 \quad (56)$$

$$\bar{W}_0(0) = A \quad \frac{d\bar{W}_0}{d\tau}(0) = 0$$

$$p^1: \quad \ddot{W}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = -c_1 \bar{W}_0 - \beta \bar{W}_0^2 - \gamma \bar{W}_0^3 \quad (57)$$

$$\bar{W}_1(0) = 0 \quad \frac{d\bar{W}_1}{d\tau}(0) = 0$$

$$p^2: \quad \ddot{W}_2 + \omega^2 \bar{W}_2 = -c_2 \bar{W}_0 - c_1 \bar{W}_1 - 2\beta \bar{W}_0 \bar{W}_1 - 3\gamma \bar{W}_1 \bar{W}_0^2 \quad (58)$$

$$\bar{W}_2(0) = 0 \quad \frac{d\bar{W}_2}{d\tau}(0) = 0$$

حل معادله ۵۶ با شرایط اولیه مربوطه به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{W}_0 = A \cos(\omega\tau) \quad (59)$$

سپس با جایگذاری معادله ۵۹ در معادله ۵۷:

$$\ddot{W}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = \left(-c_1 A - \frac{3}{4} \gamma A^3\right) \cos(\omega\tau) - \frac{1}{2} \beta A^2 \cos(2\omega\tau) - \frac{\beta A^2}{2} \quad (60)$$

با صفر قرار دادن ترم سکولار در معادله ۶۰ ضریب c_1 بدست می‌آید:

$$c_1 = -\frac{3}{4} \gamma A^2 \quad (61)$$

حل معادله ۶۰ به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{W}_1 = \left(\frac{\beta A^2}{3\omega^2} - \frac{\gamma A^3}{32\omega^2}\right) \cos(\omega\tau) + \frac{\beta A^2}{6\omega^2} \cos(2\omega\tau) + \frac{\gamma A^3}{32\omega^2} \cos(3\omega\tau) - \frac{\beta A^2}{2\omega^2} \quad (62)$$

همچنین بطور مشابه با جایگذاری معادلات ۵۹ و ۶۲ در معادله ۵۸ و حذف ترم سکولار، ضریب c_2 بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$c_2 = \frac{\beta \gamma A^3}{4\omega^2} - \frac{3\gamma^2 A^4}{128\omega^2} + \frac{5\beta^2 A^2}{6\omega^2} - \frac{3\beta \gamma A^3}{4\omega^2} + \frac{3\gamma^2 A^4}{64\omega^2} \quad (63)$$

در نهایت، از رابطه ۵۵ فرکانس طبیعی غیرخطی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega_{NL} = \sqrt{\frac{\left(\alpha + \frac{3}{4} \gamma \epsilon A^2\right) + \Lambda}{2}} \quad (64)$$

$$\Lambda = \sqrt{\left(\alpha + \frac{3}{4} \gamma \epsilon A^2\right)^2 + \left(2\beta \gamma A^3 - \frac{10\beta^2 A^2}{3} - \frac{3\gamma^2 A^4}{32}\right) \epsilon^2}$$

پس از حل معادله ۵۸ مقدار \bar{W}_2 بصورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\bar{W}_2 = \left(\frac{c_1 \beta A^2}{2\omega^4} - \frac{\beta^2 A^3}{3\omega^4} + \frac{21\beta \gamma A^4}{32\omega^4}\right) + \left(-\frac{5c_1 \beta A^2}{9\omega^4} - \frac{c_1 \gamma A^3}{256\omega^4} + \frac{61\beta^2 A^3}{144\omega^4} - \frac{17\beta \gamma A^4}{32\omega^4} - \frac{\gamma^2 A^5}{256\omega^4}\right) \cos(\omega\tau) + \left(\frac{c_1 \beta A^2}{18\omega^2} - \frac{\beta^2 A^3}{9\omega^2} - \frac{\beta \gamma A^4}{6\omega^2}\right) \cos(2\omega\tau) \quad (65)$$

در روابط بالا U, V, W, X, Y ترم های زمانی مجهول، $\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}$ همچنین m, n شماره نیم موج می‌باشند.

با در نظر گرفتن فقط یک جمله در معادلات ۳۸ تا ۴۲ ارتعاش در مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور با قرار دادن $m = n = 1$ در معادلات ۳۸ تا ۴۲ و جایگذاری آنها در معادلات حرکت ۳۰ تا ۳۵ و اعمال روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی حرکت بصورت زیر استخراج می‌گردند:

$$C_{11}W^2 - C_{12}U - C_{13}V - C_{14}X - C_{15}Y = 0 \quad (43)$$

$$C_{21}W^2 - C_{22}U - C_{23}V - C_{24}X - C_{25}Y = 0 \quad (44)$$

$$I_0 \ddot{W} + C_{31}W^3 + C_{32}W + C_{33}X + C_{34}Y - C_{35}UW - C_{36}VW - C_{37}XW - C_{38}YW = 0 \quad (45)$$

$$C_{41}W^2 - C_{42}W - C_{43}U - C_{44}V - C_{45}X - C_{46}Y = 0 \quad (46)$$

$$C_{51}W^2 - C_{52}W - C_{53}U - C_{54}V - C_{55}X - C_{56}Y = 0 \quad (47)$$

ضرایب C_{ij} در معادلات بالا وابسته به هندسه و خواص ورق می‌باشند که در پیوست (الف) آورده شده‌اند. از چهار معادله ۴۳، ۴۴، ۴۶، ۴۷ چهار مجهول U, V, X, Y را بر حسب W بدست آورده و با جایگذاری در معادله ۴۵، معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{d^2W}{dt^2} + a_1 W + a_2 W^2 + a_3 W^3 = 0 \quad (48)$$

پارامتر های بی بعد زیر به منظور ساده سازی معرفی می‌شوند:

$$\tau = \frac{t}{h} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}, \quad \frac{W}{h} = \bar{W} \quad (49)$$

پس از اعمال پارامترهای بی بعد، معادله بی بعد زیر استخراج می‌گردد:

$$\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2} + \alpha \bar{W} + \beta' \bar{W}^2 + \gamma' \bar{W}^3 = 0 \quad (50)$$

ضرایب α, β', γ' در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

5- حل تحلیلی: روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته

در این پژوهش، از روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته برای حل معادله ۵۰ استفاده می‌شود. وسط ورق تحت شرایط اولیه زیر می‌باشد:

$$\bar{W}(0) = \frac{W_{max}}{h} = A, \quad \frac{d\bar{W}(0)}{d\tau} = 0 \quad (51)$$

A بیشترین جابجایی وسط ورق می‌باشد. با توجه به ملزومات روش حل، بایستی یک پارامتر کوچک، مثبت و بی بعد معرفی گردد. بنابراین، معادله ۵۰ بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{W} + \alpha \bar{W} + \epsilon \beta \bar{W}^2 + \epsilon \gamma \bar{W}^3 = 0 \quad (52a)$$

که ϵ پارامتر مورد نظر می‌باشد. ضرایب ϵ, β و γ بصورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\epsilon = \frac{h}{a}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\epsilon}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\epsilon} \quad (52b)$$

لازم به ذکر است فرکانس خطی ورق از معادله ۵۲ قابل استخراج است که بصورت زیر می‌باشد:

$$\alpha = \omega_L^2 \quad (53)$$

بر اساس مراجع [30,31]، ضریب α و ترم تابع زمانی $\bar{W}(\tau)$ می‌توانند بصورت یک سری توانی از ϵ نوشته شوند:

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \epsilon \bar{W}_1 + \epsilon^2 \bar{W}_2 + \dots \quad (54)$$

شکل 4 که به نمودار پشتواره¹ معروف است، تاثیر دامنه ارتعاش روی نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی برای مقادیر مختلف نسبت طول به عرض را در ورق مدرج تابعی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به عرض ورق، منحنی از محور عمودی دورتر شده یا به بیان دیگر در دامنه های بزرگ، منحنی رفتار غیرخطی از نوع فنر سخت را از خود نشان می‌دهد.

جدول 2 مقایسه پارامتر بدون بعد فرکانس طبیعی پایه برای ورق مربعی آلومینیوم/آلومینا

Table 2 Comparison of fundamental frequency parameter for

Al/Al_2O_3 square plates ($\beta = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$)

منابع	$\frac{a}{h}$	n				
		0	0.5	1	4	10
[11]		0.0148	0.0128	0.0115	0.0101	0.0096
[12]	20	0.0146	0.0124	0.0112	0.0097	0.0093
تحقیق حاضر		0.0148	0.0126	0.0113	0.0098	0.0094
[11]		0.0577	0.0492	0.0445	0.0383	0.0363
[12]	10	0.0567	0.0482	0.0435	0.0376	0.0359
تحقیق حاضر		0.0581	0.0494	0.0445	0.386	0.0369
[11]		0.2112	0.1806	0.1650	0.1371	0.1304
[12]	5	0.2055	0.1757	0.1587	0.1356	0.1284
تحقیق حاضر		0.2158	0.1847	0.1672	0.1435	0.1356

جدول 3 مقایسه نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برای ورق مربعی از جنس مواد مدرج تابعی

Table 3 Comparison of nonlinear to linear frequency ratio for square FGM plate ($\frac{a}{h} = 40$)

$\frac{W_{max}}{h}$	$n = 0.2$		$n = 10$	
	FSDT	CPT [18]	FSDT	CPT [18]
0.25	1.0529	1.0467	1.0473	1.0413
0.5	1.1962	1.1758	1.1766	1.1563
0.75	1.4005	1.3641	1.3630	1.3266
1.0	1.6428	1.5911	1.5860	1.5335
1.25	1.9086	1.8426	1.8323	1.7645
1.5	2.1895	2.1103	2.0937	2.0115
1.75	2.4805	2.3890	2.3654	2.2996
2	2.7785	2.6755	2.6442	2.5355

$$+ \left(\frac{c_1 \gamma A^3}{256 \omega^2} + \frac{\beta^2 A^3}{48 \omega^2} + \frac{\beta \gamma A^4}{32 \omega^2} + \frac{3 \gamma^2 A^5}{1024 \omega^2} \right) \cos(3 \omega \tau)$$

$$+ \left(\frac{\beta \gamma A^4}{96 \omega^2} \right) \cos(4 \omega \tau) + \left(\frac{\gamma^2 A^5}{1024 \omega^2} \right) \cos(5 \omega \tau)$$

در نهایت از رابطه ۵۴ حل کلی تا تقریب مرتبه دوم معادله ۵۰ به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{W}_{2nd} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1 + \bar{W}_2 \quad (66)$$

6- اعتبارسنجی و نتایج

در این بخش، ابتدا به منظور اطمینان از صحت نتایج بدست آمده تحقیق، نتایج این پژوهش با ادبیات پیشین و همچنین حل عددی مقایسه گشته و پس از آن تاثیر پارامترهای مختلف روی فرکانس های طبیعی غیرخطی ورق مورد بررسی قرار گرفته است.

با در نظر گرفتن ترم های خطی و حذف ترم های غیرخطی از معادلات حرکت ورق مدرج تابعی میتوان فرکانس های طبیعی خطی سیستم را بدست آورد. در جدول 2 فرکانس طبیعی بدون بعد برای ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند استخراج شده و با ادبیات موجود مقایسه گردیده است.

در مرجع [11] حسینی هاشمی و همکاران از تئوری میندلین ورق و یک تابع جابجایی برای حل مساله استفاده کردند و همچنین در مرجع [12] ژائو و همکاران با بهره گیری از تئوری میندلین ورق و با استفاده از یک روش عددی به استخراج فرکانس های طبیعی پرداختند. همانطور که از این جدول ملاحظه می‌گردد برای نسبت ابعادی های بزرگ نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار می‌باشد و با کاهش این نسبت دقت نتایج کمتر شده که دلیل آن صرف نظر کردن از ترم های اینرسی صفحه ای در ورق نازک می‌باشد.

با توجه به اینکه معادله غیرخطی حرکت از روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته حل شده است لذا به منظور اطمینان از صحت روش حل، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی استخراج شده از مساله حاضر با نتایج مرجع [18] مقایسه شده است. همانطور که از جدول 3 مشاهده می‌گردد نتایج از دقت خوبی برخوردار می‌باشد. در مرجع [18] نویسنده از تئوری کلاسیک ورق استفاده کرده است لذا با توجه به اینکه در تحقیق حاضر از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است و اثرات برشی در نظر گرفته شده اند در نتیجه اختلاف بین نتایج بدلیل تئوری های حل می‌باشد که نتایج این مطالعه دقیق تر از مرجع [18] است.

جدول 4 نسبت فرکانس های طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند را برای مقادیر مختلف دامنه ارتعاش و ضریب n نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌گردد، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی به دامنه ارتعاش وابسته بوده و با افزایش دامنه ارتعاش، اثر غیرخطی سازی افزایش یافته و به دنبال آن این نسبت افزایش می‌یابد. به منظور اعتبار سنجی بیشتر روش حل استفاده شده در تحقیق حاضر، پاسخ دینامیکی وسط ورق مربعی از جنس مواد هدفمند با استفاده از دو روش لیندشتد پوانکاره بهبود یافته و حل عددی رانج گوتا مرتبه چهارم حل گردیده و نتایج در شکل 3 مقایسه شده است. همانطور که از این نمودار مشاهده می‌شود حل تحلیلی و حل عددی تطابق بسیار خوبی باهم دارند.

¹ Backbone curve

همچنین برای مقادیر $1 < \frac{a}{b} < 5$ با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی افزایش میابد. یا به بیان دیگر نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی در اطراف نقطه ۱ رفتار کاهشی دارد و در این نقطه که ورق مربعی است نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی مینیمم می باشد. دلیل این رفتار این است که با فاصله گرفتن ورق از هندسه مربعی، اثر ترم های غیرخطی هندسی مساله شدیدتر شده و نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی افزایش میابد.

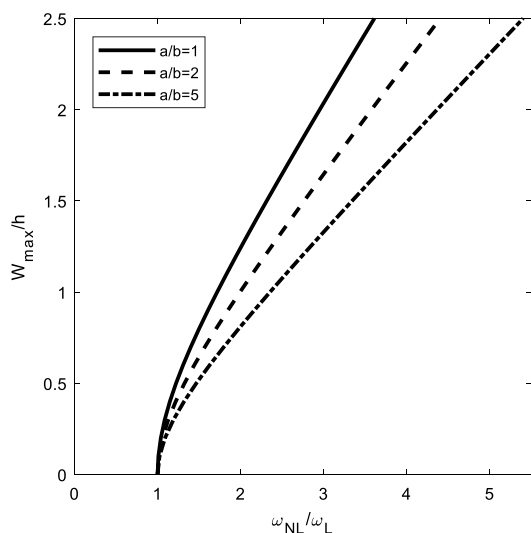


Fig. 4 Effect of vibration amplitude on nonlinear to linear frequency ratio for different values of aspect ratio ($\frac{a}{b}$)

شکل 4 تاثیر دامنه ارتعاش روی نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برای مقادیر مختلف نسبت ابعاد

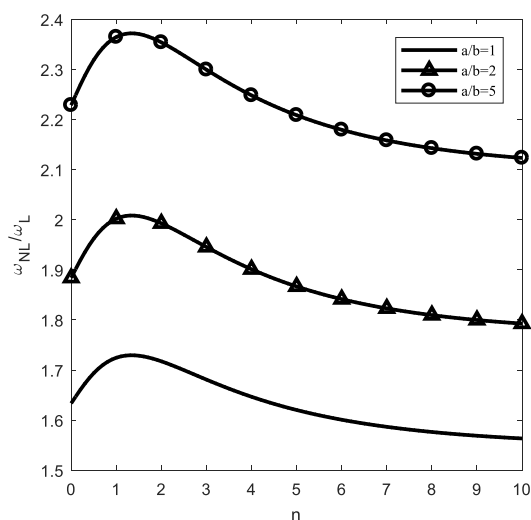


Fig. 5 Variation of nonlinear to linear frequency ratio versus the values of n for different values of aspect ratio ($\frac{W_{max}}{h} = 1$)

شکل 5 تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برحسب مقادیر مختلف n برای ضرایب مختلف نسبت ابعاد

جدول 4 نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برای ورق از جنس مواد هدفمند

Table 4 Nonlinear to linear frequency ratio for FG plate ($\frac{a}{h} = 20$, $\frac{a}{b} = 5$)

A	n				
	0	2	5	10	100
0.25	1.1201	1.1364	1.1175	1.1069	1.1135
0.5	1.4161	1.4664	1.4081	1.3746	1.3954
0.75	1.8007	1.8885	1.7868	1.7274	1.7644
1	2.2287	2.3541	2.2087	2.1234	2.1766
1.5	3.1439	3.3430	3.1121	2.9758	3.0608
2	4.0942	4.3656	4.0509	3.8645	3.9808

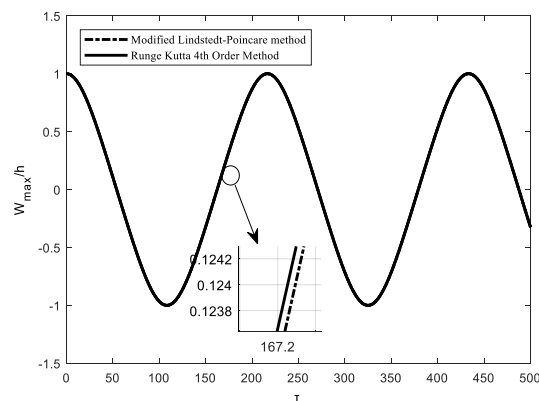


Fig. 3 Comparison of numerical and analytical solutions of FG square plate for ($\frac{a}{h} = 20$, $n = 10$, $\frac{W_{max}}{h} = 1$)

شکل 3 مقایسه حل تحلیلی و عددی ورق مربعی از جنس مواد هدفمند

شکل 5 تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برحسب مقدار n برای ضرایب مختلف نسبت ابعاد را نشان می دهد. همانطور که از نمودار مشاهده می شود، در بازه $0 < n < 1$ با افزایش مقدار n نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی افزایش میابد و در بازه $n > 1$ ، این نسبت با افزایش مقدار n کاهش یافته و تقریباً به یک مقدار همگرا می شود.

این رفتار را می توان به این واقعیت نسبت داد که با افزایش مقدار n چگالی و همچنین ضرایب D_{ij} و A_{ij} کاهش میابد درحالی که ضریب B_{ij} افزایش میابد که نتیجه این تغییرات منجر به افزایش نسبت فرکانسی می شود. علاوه، این نکته قابل توجه است که با افزایش n اختلاف خواص بالا برای مقادیر $n < 1$ قابل توجه تر است درحالی که برای مقادیر $n > 1$ این تغییرات قابل چشم پوشی است.

شکل 6 تاثیر نسبت طول به عرض ورق ($\frac{a}{b}$) روی نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی را برای مقادیر مختلف اندیس n نشان می دهد. همانطور که در این شکل دیده می شود برای مقادیر $0.5 < \frac{a}{b} < 1$ با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی کاهش میابد.

$$C_{21} = \frac{4C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} - A_{66}) - 2A_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \right)$$

$$C_{22} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} + A_{66})$$

$$C_{23} = A_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$C_{24} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} + B_{66})$$

$$C_{25} = B_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$C_{31} = \frac{9}{32} \left(A_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + A_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) + \frac{1}{16} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 (A_{12} + 2A_{66}) \right)$$

$$C_{32} = K \left(A_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + A_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$C_{33} = KA_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right)$$

$$C_{34} = KA_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)$$

$$C_{35} = \frac{8C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) (A_{12} - A_{66}) + A_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \right)$$

$$C_{36} = \frac{8C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} - A_{66}) + A_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \right)$$

$$C_{37} = \frac{8C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) (B_{12} - B_{66}) + B_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \right)$$

$$C_{38} = \frac{8C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} - B_{66}) + B_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \right)$$

$$C_{41} = \frac{4C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) (B_{12} - B_{66}) - 2B_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \right)$$

$$C_{42} = KA_{55} \left(\frac{m\pi}{a} \right)$$

$$C_{43} = B_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$C_{44} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} + B_{66})$$

$$C_{45} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + KA_{55}$$

$$C_{46} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (D_{12} + D_{66})$$

$$C_{51} = \frac{4C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} - B_{66}) - 2B_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \right)$$

$$C_{52} = KA_{44} \left(\frac{n\pi}{b} \right)$$

$$C_{53} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} + B_{66})$$

$$C_{54} = B_{66} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

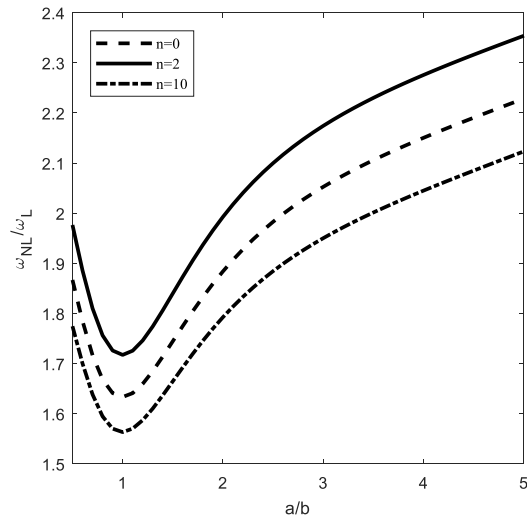


Fig. 6 Variation of nonlinear to linear frequency ratio versus the aspect ratio for different values of n ($\frac{W_{max}}{h} = 1$)

شکل 6 تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی برحسب نسبت ابعاد برای مقادیر مختلف n

7- نتیجه گیری

در این تحقیق به تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از جنس مواد هدمند پرداخته شد. با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی کرنش و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، معادلات غیرخطی حرکت استخراج شدند. در نهایت معادله غیرخطی ارتعاش عرضی ورق با روش تحلیلی لیندشتد پوانکاره بهبودیافته حل گردید و نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی محاسبه شد. برای اعتبارسنجی تحقیق حاضر، نتایج این پژوهش با نتایج مقالات منتشر شده قبلی و همچنین حل عددی مقایسه گردید و مشاهده شد که نتایج از دقت بسیار خوبی برخوردار می باشند. در ادامه اثرات برخی پارامترهای سیستم نظیر دامنه ارتعاش، توان کسر حجمی ماده تابعی و نسبت ابعاد روی نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت. به طور خلاصه از نتایج این تحقیق می توان مشاهده نمود که دامنه ارتعاش بدون بعد ورق تاثیر چشم گیری روی نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی دارد. با افزایش n اختلاف خواص ورق برای مقادیر $n < 1$ قابل توجه تر است در حالی که برای مقادیر $n > 1$ این تغییرات قابل چشم پوشی است. همچنین دیده شد که نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی ورق برای هندسه مربعی مینیمم می باشد.

پیوست الف

$$C_{11} = \frac{4C_{mn}}{9mn\pi^2} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 (A_{12} - A_{66}) - 2A_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \right)$$

$$C_{12} = A_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$C_{13} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (A_{12} + A_{66})$$

$$C_{14} = B_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + B_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$C_{15} = \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) (B_{12} + B_{66})$$

$$-C_{23}C_{43}C_{56} + C_{22}C_{44}C_{56})/G$$

$$T_{32} = (C_{15}C_{44}C_{53} - C_{13}C_{46}C_{53} - C_{15}C_{43}C_{54} + C_{12}C_{46}C_{54}$$

$$+ C_{13}C_{43}C_{56} - C_{12}C_{44}C_{56})/G$$

$$T_{33} = (-C_{15}C_{23}C_{53} + C_{13}C_{25}C_{53} + C_{15}C_{22}C_{54} - C_{12}C_{25}C_{54}$$

$$- C_{13}C_{22}C_{56} + C_{12}C_{23}C_{56})/G$$

$$T_{34} = (C_{15}C_{23}C_{43} - C_{13}C_{25}C_{43} - C_{15}C_{22}C_{44} + C_{12}C_{25}C_{44}$$

$$+ C_{13}C_{22}C_{46} - C_{12}C_{23}C_{46})/G$$

$$T_{41} = (C_{24}C_{44}C_{53} - C_{23}C_{45}C_{53} - C_{24}C_{43}C_{54} + C_{22}C_{45}C_{54}$$

$$+ C_{23}C_{43}C_{55} - C_{22}C_{44}C_{55})/G$$

$$T_{42} = (-C_{14}C_{44}C_{53} + C_{13}C_{45}C_{53} + C_{14}C_{43}C_{54} - C_{12}C_{45}C_{54}$$

$$- C_{13}C_{43}C_{55} + C_{12}C_{44}C_{55})/G$$

$$T_{43} = (C_{14}C_{23}C_{53} - C_{13}C_{24}C_{53} - C_{14}C_{22}C_{54} + C_{12}C_{24}C_{54}$$

$$+ C_{13}C_{22}C_{55} - C_{12}C_{23}C_{55})/G$$

$$T_{44} = (-C_{14}C_{23}C_{43} + C_{13}C_{24}C_{43} + C_{14}C_{22}C_{44} - C_{12}C_{24}C_{44}$$

$$- C_{13}C_{22}C_{45} + C_{12}C_{23}C_{45})/G$$

$$G = (C_{15}C_{24}C_{44}C_{53} - C_{14}C_{25}C_{44}C_{53} - C_{15}C_{23}C_{45}C_{53}$$

$$+ C_{13}C_{25}C_{45}C_{53} + C_{14}C_{23}C_{46}C_{53} - C_{13}C_{24}C_{46}C_{53}$$

$$- C_{15}C_{24}C_{43}C_{54} + C_{14}C_{25}C_{43}C_{54} + C_{15}C_{22}C_{45}C_{54}$$

$$- C_{12}C_{25}C_{45}C_{54} - C_{14}C_{22}C_{46}C_{54} + C_{12}C_{24}C_{46}C_{54}$$

$$+ C_{15}C_{23}C_{43}C_{55} - C_{13}C_{25}C_{43}C_{55} - C_{15}C_{22}C_{44}C_{55}$$

$$+ C_{12}C_{25}C_{44}C_{55} + C_{13}C_{22}C_{46}C_{55} - C_{12}C_{23}C_{46}C_{55}$$

$$- C_{14}C_{23}C_{43}C_{56} + C_{13}C_{24}C_{43}C_{56} + C_{14}C_{22}C_{44}C_{56}$$

$$- C_{12}C_{24}C_{44}C_{56} - C_{13}C_{22}C_{45}C_{56} + C_{12}C_{23}C_{45}C_{56})$$

8- مراجع

- [1] Khorshidi, K., Siahpush, A., & Fallah, A. "Electro-Mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories," In Persian, Journal of Science and Technology of Composite, Vol. 4, No. 1, pp. 151- 160, 2017.
- [2] Khorshidi, K., Asgari, T., & Fallah, A. "Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory," Mechanics of Advanced Composite Structures, Vol. 2, No. 2, pp. 79- 93, 2015.
- [3] Khorshidi, K., & Bakhsheshy, A. "Free vibration analysis of a functionally graded rectangular plate in contact with a bounded fluid," Acta Mechanica, Vol. 226, No. 10, pp. 3401-3423, 2015.
- [4] Zhang, D.G. and Zhou, Y.H., "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface," Computational Materials Science, Vol. 44, No. 2, pp. 716-720, 2008.
- [5] Abrate, S., "Functionally graded plates behave like homogeneous plates," Composites Part B: Engineering, Vol. 39, No. 1, pp. 151-158, 2008.

$$C_{55} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)(D_{12} + D_{66})$$

$$C_{56} = D_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + KA_{44}$$

$$C_{mn} = (1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n), \quad m = n = 1$$

پیوست ب

$$\alpha = \left(\frac{\rho_m}{E_m} h\right) \left(\frac{C_{32} - C_{33}C_{42}T_{33} - C_{33}C_{52}T_{34} - C_{34}C_{42}T_{43} - C_{34}C_{52}T_{44}}{I_0}\right)$$

$$\beta' = \left(\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} h^2\right) (C_{35}C_{42}T_{13} + C_{35}C_{52}T_{14} + C_{36}C_{42}T_{23}$$

$$+ C_{36}C_{52}T_{24} + C_{11}C_{33}T_{31} + C_{21}C_{33}T_{32}$$

$$+ C_{33}C_{41}T_{33} + C_{37}C_{42}T_{33} + C_{33}C_{51}T_{34}$$

$$+ C_{37}C_{52}T_{34} + C_{11}C_{34}T_{41} + C_{21}C_{34}T_{42}$$

$$+ C_{34}C_{41}T_{43} + C_{38}C_{42}T_{43} + C_{34}C_{51}T_{44}$$

$$+ C_{38}C_{52}T_{44})/I_0$$

$$\gamma' = \left(\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} h^3\right) (C_{31} - C_{21}C_{35}T_{12} - C_{35}C_{41}T_{13}$$

$$- C_{35}C_{51}T_{14} - C_{11}C_{36}T_{21} - C_{21}C_{36}T_{22} - C_{36}C_{41}T_{23}$$

$$- C_{36}C_{51}T_{24} - C_{11}C_{37}T_{31} - C_{21}C_{37}T_{32} - C_{37}C_{41}T_{33}$$

$$- C_{37}C_{51}T_{34} - C_{11}C_{38}T_{41} - C_{21}C_{38}T_{42} - C_{38}C_{41}T_{43}$$

$$- C_{38}C_{51}T_{44} - C_{11}C_{35}T_{11})/I_0$$

$$T_{11} = (-C_{25}C_{45}C_{54} + C_{24}C_{46}C_{54} + C_{25}C_{44}C_{55} - C_{23}C_{46}C_{55}$$

$$- C_{24}C_{44}C_{56} + C_{23}C_{45}C_{56})/G$$

$$T_{12} = (C_{15}C_{45}C_{54} - C_{14}C_{46}C_{54} - C_{15}C_{44}C_{55} + C_{13}C_{46}C_{55}$$

$$+ C_{14}C_{44}C_{56} - C_{13}C_{45}C_{56})/G$$

$$T_{13} = (-C_{15}C_{24}C_{54} + C_{14}C_{25}C_{54} + C_{15}C_{23}C_{55} - C_{13}C_{25}C_{55}$$

$$- C_{14}C_{23}C_{56} + C_{13}C_{24}C_{56})/G$$

$$T_{14} = (C_{15}C_{24}C_{44} - C_{14}C_{25}C_{44} - C_{15}C_{23}C_{45} + C_{13}C_{25}C_{45}$$

$$+ C_{14}C_{23}C_{46} - C_{13}C_{24}C_{46})/G$$

$$T_{21} = (C_{25}C_{45}C_{53} - C_{24}C_{46}C_{53} - C_{25}C_{43}C_{55} + C_{22}C_{46}C_{55}$$

$$+ C_{24}C_{43}C_{56} - C_{22}C_{45}C_{56})/G$$

$$T_{22} = (-C_{15}C_{45}C_{53} + C_{14}C_{46}C_{53} + C_{15}C_{43}C_{55} - C_{12}C_{46}C_{55}$$

$$- C_{14}C_{43}C_{56} + C_{12}C_{45}C_{56})/G$$

$$T_{23} = (C_{15}C_{24}C_{53} - C_{14}C_{25}C_{53} - C_{15}C_{22}C_{55} + C_{12}C_{25}C_{55}$$

$$+ C_{14}C_{22}C_{56} - C_{12}C_{24}C_{56})/G$$

$$T_{24} = (-C_{15}C_{24}C_{43} + C_{14}C_{25}C_{43} + C_{15}C_{22}C_{45} - C_{12}C_{25}C_{45}$$

$$- C_{14}C_{22}C_{46} + C_{12}C_{24}C_{46})/G$$

$$T_{31} = (-C_{25}C_{44}C_{53} + C_{23}C_{46}C_{53} + C_{25}C_{43}C_{54} - C_{22}C_{46}C_{54}$$

- [21] Malekzadeh, P. and Monajjemzadeh S.M., "Nonlinear response of functionally graded plates under moving load," *Thin-Walled Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 120–129, 2015.
- [22] Duc, N.D. and Cong, P.H., "Nonlinear vibration of thick FGM plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads using the first-order shear deformation plate theory," *Cogent Engineering*, Vol. 2, No. 1, pp. 1045222, 2015.
- [23] Fung, C.P. and Chen, C.S., "Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of functionally graded plates," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 25, No. 3, pp 425–461, 2006.
- [24] Fakhari, V., Ohadi and A., Yousefian, P., "Nonlinear free and forced vibration behaviour of functionally graded plate with piezoelectric layers in thermal environment," *Composite Structures*, 93 (2011) 2310–2321.
- [25] Hao, Y.X., Zhang W., and Yang J., "Nonlinear oscillation of a cantilever FGM rectangular plate based on third-order plate theory and asymptotic perturbation method," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 3, pp 402–413, 2011.
- [26] Zhang, W., Hao, Y., Guo, X. and Chen, L., "Complicated nonlinear responses of a simply supported FGM rectangular plate under combined parametric and external excitations," *Meccanica*, Vol. 47, No. 4, pp 985–1014, 2012.
- [27] Dinh Duc, N., Tuan, N.D., Tran, P. and Quan, T.Q., "Nonlinear dynamic response and vibration of imperfect shear deformable functionally graded plates subjected to blast and thermal loads," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 24, No. 4, pp 318-329, 2017.
- [28] Reddy JN, "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis," CRC press, 2004.
- [29] Chia CY, "Nonlinear analysis of plates," McGraw-Hill International, Book Company, 1980.
- [30] Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., "Nonlinear oscillation," John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [31] He, J.H., "Modified Lindstedt–Poincare methods for some strongly non-linear oscillations: Part I: expansion of a constant," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, No. 2, pp 309-314, 2002.
- [6] Najafzadeh, M.M. and Alayval, A., "Investigation of free vibrations of functionally graded rectangular plate using first-order shear deformation theory," In Persian, Iranian society of mechanical engineering, Vol. 7, No. 1, pp. 52- 68, 2006.
- [7] Khorshidi, K., Bakhsheshi, A. and Ghadrian, H., "The Study of the Effects of Thermal Environment on Free Vibration Analysis of Two Dimensional Functionally Graded Rectangular Plates on Pasternak Elastic Foundation," In Persian, Journal of solid and fluid mechanics, Vol. 6, No. 3, pp. 137-147, 2017.
- [8] Hosseini Hashemi, SH., Akhavan and Fadaee, M. "Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers," In Persian, Journal of Modares mechanical engineering, Vol. 11, No. 3, pp. 57-74, 2012.
- [9] Abbasi, M., Najafzadeh, S.S.M. and Nezamabadi, A., "Vibration of two-dimensional functionally graded plate based on first-order shear deformation theory" International Conference on New Research Findings in Industrial Engineering and Mechanical Engineering, Tehran, Nikan Institute of Higher Education, 2015.
- [10] Azimiaraghi, S., Najafzadeh, S.M.M. and Nezamabadi, A., "Vibration of two-dimensional functionally graded plate based on third-order shear deformation theory" International Conference on New Research Findings in Industrial Engineering and Mechanical Engineering, Tehran, Nikan Institute of Higher Education, 2015.
- [11] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H.R., Akhavan, H., and Omid, M., "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 5, pp. 1276–1291, 2010.
- [12] Zhao, X., Lee, Y.Y. and Liew K.M., "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method," *Journal of sound and Vibration*, Vol. 319, No. 3-5, pp. 918–939, 2009.
- [13] Yang, J. and Shen, H.S., "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 3, pp. 579–602, 2002.
- [14] Gupta, A., Talha, M. and Singh, B.N., "Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 94, No. 1, pp. 64–74, 2016.
- [15] Ghaheri, A. and Nosier, A., "Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates," In Persian, Journal of Science and Technology of Composite, Vol. 1, No. 2, pp. 1- 10, 2015.
- [16] Khosravian, N., Tavakolpour, A., Roozegar, S. and Roozegar, J. "Dynamic simulation of nonlinear vibration of square plate with large displacement," First National Conference on Mechanical and Mechatronics Engineering of Iran, Shahrekord, Islamic Azad University, Shahrekord Branch, 2016.
- [17] Wang, Y.Q. and Zu, J.W., "Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities," *Thin-Walled Structures*, Vol. 119, No. 1, pp. 911–924, 2017.
- [18] Yazdi, A.A., "Homotopy perturbation method for nonlinear vibration analysis of functionally graded plate," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, No. 2, pp. 12–21, 2013.
- [19] Lotfavar, A., Rafiei Pour, H., Hamze Shalamdari, S. and Mohammadi, T., "Nonlinear vibration analysis of laminated composite plates using approximate and analytical methods," In Persian, Iranian society of mechanical engineering, Vol. 1, No. 17, pp. 16- 39, 2015.
- [20] Woo, J., Meguid S.A. and Ong L.S., "Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, No. 3, pp. 595–611, 2006.

