



## بررسی تجربی و عددی رفتار کمانشی و پس کمانشی استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده تحت بارگذاری فشار جانبی بین صفحه‌های صلب موازی

امین داداشی<sup>1</sup>، غلامحسین رحیمی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران  
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران  
\* صندوق پستی 14115-111، [rahimi\\_gh@modares.ac.ir](mailto:rahimi_gh@modares.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت: 97/2/30 پذیرش: 97/10/2	<p>امروزه از استوانه‌های پلیمری تقویت‌شده با الیاف شیشه‌ای در صنایع مختلفی استفاده می‌شود. یکی از بارگذاری‌هایی که استوانه‌های کامپوزیتی در حین کاربری متحمل می‌شوند، بارگذاری فشاری عرضی است. به منظور بررسی رفتار کمانشی و پس کمانشی استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده نمونه‌های آزمایشگاهی با زاویه‌ی پیچش <math>\pm 75^\circ</math> ساخته شد. بدین منظور نمونه‌ها تحت بارگذاری فشاری بین دو صفحه‌ی صلب موازی طبق استاندارد ASTM D2412-02 قرار گرفتند. در طی انجام آزمایش، نمودار نیرو-جابجایی حاصل از بارگذاری در راستای عمود بر صفحه‌ی صلب اندازه‌گیری شد. علاوه بر انجام آزمایش‌های تجربی، شبیه‌سازی عددی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس انجام گرفته است. با توجه به آنکه در حین فرآیند بارگذاری، استوانه‌ی کامپوزیتی دچار آسیب می‌شود، به منظور لحاظ این اثرات، مدل آسیب هشین 3 بعدی استفاده شده است. جهت اعمال مدل آسیب هشین 3 بعدی، با بهره‌گیری از نرم‌افزار برنامه‌نویسی فرترن 77 زیر برنامه‌ای در قالب UMAT کد نویسی گردید. تعریف خواص مکانیکی و استحکام‌های شکست استوانه‌ی کامپوزیتی، بر اساس اندازه‌گیری خواص الیاف و رزین به طور جداگانه طبق استانداردهای مربوطه و با استفاده از روابط میکرو مکانیک لایه‌ها انجام گرفت. با توجه به نتایج آزمایش فشار نمونه‌ها بین دو صفحه‌ی صلب موازی و در نظر داشتن نمودار نیرو-جابجایی، استوانه‌ی کامپوزیتی دچار کمانش می‌شوند اما با توجه به اینکه پس از کمانش وضعیت آن‌ها پایدار است، اتفاق افتادن کمانش تأثیر قابل ملاحظه‌ای در رفتار نمونه استوانه‌ها نمی‌گذارد. با مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از آزمایش‌های تجربی و حاصل از شبیه‌سازی عددی، توافق مناسب نتایج با یکدیگر قابل مشاهده است.</p>
<p><b>کلیدواژگان:</b> استوانه‌ی کامپوزیتی کمانش و پس کمانش معیار هشین 3 بعدی</p>	

## Experimental and numerical investigation of buckling and post-buckling behavior of filament wound composite cylinders under lateral compression loading by parallel rigid plates

Amin Dadashi, Gholam Hossein Rahimi\*  
Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.  
\* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, [rahimi\\_gh@modares.ac.ir](mailto:rahimi_gh@modares.ac.ir)

**Keywords**  
Composite cylinder  
Buckling and post-buckling  
Hashin's 3D damage model

**Abstract**  
Nowadays, reinforced polymers using by means of glass fibers are extensively used in industry. One of the used loads that composite cylinders undergo during use are lateral compression loading. To investigate the buckling and post-buckling behavior of filament wound composite cylinder, some prototypes were prepared with winding angle equal to  $\pm 75^\circ$  degree. The samples were pressurized by means of two parallel rigid plates according to ASTM standard. The force-displacement diagrams resulting from normal loading on the rigid plates were plotted experimentally. In addition to experimental tests, numerical simulations were carried out by means of Abaqus commercial software. Since the composite cylinder experiences damage, the Hashin's three dimensional damage model was utilized to consider the damage effects occurring during loading. To apply Hashin's three dimensional damage model, a UMAT subroutine coding procedure was conducted using program Fortran 77. The mechanical properties and composite cylinder fracture strengths were obtained by measuring fiber and resin properties based on the relative standard and then separately by micro mechanical relations concerning the layers. The cylinder undergoes buckling because of the existence of pressure between the parallel rigid plates. However since the cylinder undergoes a stability condition after buckling. This phenomena does not have significant effected on the overall behavior of the cylinders. Appropriate agreement is observed between the experimental results and the numerical simulations.

1-مقدمه  
استفاده قرار می‌گیرند. استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده از جنس پلیمر و الیاف شیشه‌ای نسبت به استوانه‌های ساخته شده از مواد معمولی، دارای مزایای زیادی مانند مقاومت در برابر خوردگی، نسبت استحکام به وزن بالا، وزن سبک و پوشش داخلی صاف هستند. پیشرفت‌هایی که در ساخت استوانه‌های

امروزه از استوانه‌های پلیمری تقویت‌شده با الیاف شیشه‌ای در صنایع مختلفی از جمله انتقال نفت و گاز، نمک‌زدایی آب دریا، آبیاری زمین‌های کشاورزی، کارخانه‌های شیمیایی و حتی در صنایع دفاعی در پرتاب‌کننده‌های بازو کا مورد

**Please cite this article using:**

Dadashi, A. and Rahimi, G.H., "Experimental and numerical investigation of buckling and post-buckling behavior of filament wound composite cylinders under lateral compression loading by parallel rigid plates", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 1, pp. 151-166, 2019.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

پهنای آن در جهت محیطی، نیروی کمانش کاهش می‌یابد. هندسه گشودگی مستطیلی در نظر گرفته شده بود.

گودس<sup>11</sup> [7] روش تقریبی برای تحلیل تنش لوله‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری برشی را در سال 2006 ارائه کرد. این روش از روش توسعه داده شده توسط شیا و همکاران دقیق تر بود. او همچنین رابطه‌ای ساده در الاستیسیته دوبعدی ارائه کرد. نتایج به دست آمده از روش مذکور توافق خوبی با نتایج حاصل از روش المان محدود برای بارگذاری متمرکز داشت.

در سال 2008 زنگ<sup>12</sup> و همکاران به پیش‌بینی کمانش استوانه با استفاده از ضریب بسط<sup>13</sup> با حس‌گرهای فیبر بریلون<sup>14</sup> به صورت تجربی پرداختند [8]. آن‌ها کرنش محوری استوانه فلزی را تحت بارگذاری ترکیبی فشار داخلی، نیروی کشش محوری و ممان خمشی تحت شرایط آزمایشگاهی کنترل شده که موجب کمانش محلی می‌شد، اندازه‌گیری کردند. برای اولین بار از فیبرهای پوشش داده شده با کربن<sup>15</sup> و فیبرهای مخابراتی استاندارد<sup>16</sup> استفاده شد. با بهره‌گیری از ضریب بسط از عرض طیف بریلون، محل و گسترش متوالی الگوهای کمانش قبل از تشخیص با مشاهده در آزمایشگاه با موفقیت پیش‌بینی شدند. پردازش زمانی ضریب بسط از روش انطباق چند-پیک<sup>17</sup>، از طیف بریلون بسیار کارآمدتر است. بنابراین در کاربردهای پیش سلامت سازه<sup>18</sup> قابلیت نشان دادن توسعه لحظه به لحظه تغییر شکل را دارد. لازم به ذکر است که فیبرهای پوشش داده شده کربنی نسبت به فیبرهای مخابراتی استاندارد از دو جهت برتری دارند: ارائه خوانش دقیق تر مقدار اندازه‌گیری شده و همچنین قادر به اندازه‌گیری کرنش‌های بزرگ تر هستند.

در سال 2008 مورنو<sup>19</sup> و همکاران به بررسی تأثیر الگوی پیچش بر رفتار مکانیکی در استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده تحت بارگذاری فشار خارجی هیدرواستاتیک پرداختند [9]. آن‌ها با در نظر گرفتن استوانه کامپوزیتی رشته‌پیچی شده به صورت کامپوزیت چندلایه، آن را به صورت ریاضی مدل و بارهای بحرانی کمانشی را محاسبه کردند. سپس نمونه استوانه‌هایی به طول 350 میلی‌متر، قطر داخلی 125 میلی‌متر، ضخامت 4.4 میلی‌متر (برای استوانه‌های جدار نازک) و 12.6 میلی‌متر برای استوانه‌های جدار ضخیم با طول مؤثر 250 میلی‌متر و دو الگوی پیچش مختلف تهیه کردند. نمونه‌ها در داخل محفظه فشار قرار گرفته و فشار خارجی توسط سیال به آن‌ها اعمال شد. مقایسه بین نتایج تئوری و تجربی برای استوانه‌های جدار نازک در مورد پیش‌بینی فشار کمانش رضایت‌بخش بود. بررسی نتایج حاصل از کار آن‌ها هیچ ارتباط معناداری بین فشار ترکیدگی یا رفتار کمانشی با الگوی پیچش چه برای استوانه‌های جدار نازک و چه برای استوانه‌های جدار ضخیم نشان نمی‌دهد.

آرلانو<sup>20</sup> و همکاران در سال 2010، میدان کرنش را در یک قطعه‌ی تخت از کامپوزیت رشته‌پیچی شده با زاویه  $\pm 55^\circ$  با استفاده از روش همبستگی تصویر دیجیتال<sup>21</sup> اندازه‌گیری کردند [10]. آن‌ها قطعه کامپوزیتی را تحت کشش با اندازه نیروهای مختلف قرار داده و با استفاده از کرنش سنج و تصویربرداری میدان کرنش‌های ایجاد شده را اندازه‌گیری کردند. آزمایش انجام شده با

رشته‌پیچی شده ایجاد شده است، موجب افزایش علاقه به استفاده از آن‌ها در ساختارهای کامپوزیتی استوانه‌ای تقویت شده با الیاف گردیده است.

هابس<sup>1</sup> در سال 1981 کمانش خطوط استوانه فلزی در بستر دریا<sup>2</sup> تحت بارگذاری محوری را مورد بررسی قرار داد [1]. بار فشاری ناشی از اصطکاک خاک به علت تغییرات دما یا فشار داخلی ایجاد می‌گردد. نشان داده شده است که این نیرو می‌تواند باعث ایجاد کمانش به علت وجود عیوب اولیه شود که به طور خاص در هنگام جاگذاری استوانه ایجاد می‌شود. او دو نوع کمانش جانبی<sup>3</sup> و به سمت بالا<sup>4</sup> در خطوط استوانه در بستر دریا را در نظر گرفت و معادلات حاکم را به صورت تحلیلی استخراج و با روش عددی حل نمود. وی در نهایت شکل موده‌های مربوط به هر دو کمانش به صورت جداگانه همراه با مقادیر ویژه مربوط به هر کدام را گزارش کرد.

شیا<sup>5</sup> و همکاران [2] در سال 2001 برای به دست آوردن مؤلفه‌های تنش و کرنش لوله‌های رشته پیچی شده تحت فشار داخلی بر مبنای الاستیسیته‌ی سه‌بعدی با فرض خواص غیر همسانگرد<sup>6</sup>، حل دقیقی ارائه دادند. آن‌ها اثرات برشی را به خاطر زاویه‌های مختلف لایه‌ها در نظر گرفتند. به منظور بررسی نتایج به صورت عددی، سه لوله چهار لایه، با ترتیب با چینش لایه‌ها با زوایای  $[-55/+55/-55/+55]$ ،  $[-30/+30/-55/+55]$  و  $[-55/+30/-30/+55]$  فرض جنس کربن/ اپوکسی تحلیل‌ها انجام گرفت. نتایج نشان داد که توالی قرارگیری لایه‌ها پارامتر مهمی است.

در مقاله‌ای دیگر در سال 2001 از همین نویسندگان دو روش برای محاسبه تنش و کرنش‌های لوله‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری برشی با بهره‌گیری از تئوری‌های چندلایه و تیر کامپوزیتی منحنی<sup>7</sup>، ارائه کردند [3]. لوله‌های ساندویچی به هر دو روش آزمایشگاهی و تئوری مورد بررسی و نتایج آن‌ها با یکدیگر مقایسه گردید.

او و همکارانش، همچنین در سال 2001 تحلیل تنش و تغییر شکل لوله‌های ساندویچی کامپوزیتی تحت فشار داخلی و تغییرات دما با بهره‌گیری از تئوری کلاسیک ورق‌های چندلایه<sup>8</sup> را انجام دادند [4].

همین نویسندگان در سال 2002 حل دقیقی برای لوله‌های کامپوزیتی رشته پیچی شده جدار ضخیم تحت بارگذاری خمشی خالص با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها ارائه کردند [5]. آن‌ها در این بررسی، لوله‌های ساندویچی با هسته ساخته شده از رزین و پوسته‌های از جنس لوله‌های کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند.

در سال 2002 نفرشی به بررسی عددی با استفاده از روش المان محدود<sup>9</sup> به منظور مشاهده پاسخ پوسته‌های کامپوزیتی با گشودگی<sup>10</sup> که تحت فشار داخلی و محوری قرار می‌گرفتند، پرداخت [6]. برای شبیه‌سازی از نرم‌افزار آباکوس استفاده شد. پاسخ‌های کمانش و پس کمانش در تعدادی از پوسته‌ها با اندازه مختلف گشودگی ارائه شدند. نتایج عددی نشان می‌دهد که نیروی کمانش با افزایش اندازه گشودگی کاهش یافته و با افزایش فشار داخلی، افزایش می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهد با ثابت بودن محیط گشودگی با افزایش

<sup>12</sup> Zhang

<sup>13</sup> Broadening factor

<sup>14</sup> Brillouin fiber sensors

<sup>15</sup> Carbon-coated fibers

<sup>16</sup> Standard communication fibers

<sup>17</sup> Multiple-peak fitting

<sup>18</sup> Structural health monitoring

<sup>19</sup> Moreno

<sup>20</sup> Arellano

<sup>21</sup> Digital Image Correlation (DIC)

<sup>1</sup> Hobbs

<sup>2</sup> Submarine

<sup>3</sup> Lateral

<sup>4</sup> Upward

<sup>5</sup> Xia

<sup>6</sup> Anisotropic

<sup>7</sup> Curved composite-beam

<sup>8</sup> Classical Laminated-plate Theory (CLT)

<sup>9</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>10</sup> Cutouts

<sup>11</sup> Guedes

در واقع با توجه به آنکه در حین فرآیند بارگذاری، استوانه‌ی کامپوزیتی دچار آسیب می‌شود، به منظور لحاظ اثرات مذکور، در شبیه‌سازی عددی، مدل آسیب هشین 3 بعدی استفاده شده است. جهت اعمال مدل آسیب هشین 3 بعدی، با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌نویسی فرترن 77 زیر برنامه‌ای در قالب UMAT کد نویسی شده است.

## 2- بررسی تجربی

در این قسمت به ترتیب به شرح کارهای آزمایشگاهی انجام شده اعم از نحوه‌ی ساخت نمونه‌ها، اندازه‌گیری خواص مکانیکی و چگونگی انجام آزمایش فشار بین دو صفحه‌ی صلب موازی پرداخته خواهد شد.

## 2-1- ساخت نمونه

نمونه استوانه‌ها، از استوانه‌ی ساخته شده به روش رشته‌پیچی گسسته تهیه شدند. به منظور اینکه چیدمان و زاویه رشته الیاف در تمامی نمونه‌ها به طور مشابه و یکسان با یک زاویه پیچش معین باشد، استوانه‌ای با طول چند برابر طول نمونه‌های مورد نظر ساخته و سپس 3 نمونه از آن استخراج گردید. نمونه‌ها به طول 10 سانتی‌متر و قطر 20 سانتی‌متر می‌باشد. شایان ذکر است که ساخت استوانه‌ی کامپوزیتی به طور صنعتی و در شرکت دیبا فایبرگلاس انجام شده است.

مواد مورد استفاده در ساخت نمونه استوانه‌های کامپوزیتی، شامل رزین پلی‌استر و الیاف شیشه می‌باشد. این رزین از نوع رزین‌های ایزوفتالیک است. در آماده‌سازی رزین برای تهیه نمونه‌ها در ابتدا کبالت به رزین اضافه شده و پس از اختلاط کامل آن با رزین، متیل اتیل کتون پراکساید<sup>5</sup> (اسید) به ترکیب آن‌ها افزوده می‌شود. در جدول 1 اطلاعات کبالت و اسید مورد استفاده، ذکر شده است.

جدول 1 مشخصات اسید و کبالت و درصدهای استفاده شده

Table 1 Used percentages and Specifications of MEKP and Cobalt		
نام ماده	متیل اتیل کتون پراکساید	کبالت
حالت در دمای اتاق	مایع	مایع
رنگ	بی‌رنگ	بنفش
چگالی ویژه	0.3 to 0.95	1.05 to 1.09
دمای اشتعال (سانتی‌گراد)	93	95
درصد وزنی اختلاط (/)	1.1	1

الیاف از جنس شیشه نوع E و به صورت دایرکت رووینگ<sup>6</sup> استفاده شده است. در ساخت استوانه، به منظور رشته‌پیچی در ابتدا دسته الیاف به پهنای 200 میلی‌متر که از کنار هم قرار گرفتن 48 رشته الیاف تشکیل می‌شود، در مکان ابتدایی استوانه پیچیده می‌شود. دسته الیاف در ابتدا از حمام رزین عبور کرده که در خروجی حمام رزین اضافی رزین از آن گرفته شده و دسته رشته الیاف در حالت کشیده شده و مرتب از آن خارج می‌شود.

در طول ساخت استوانه در این بررسی، سرعت دورانی مندرل و سرعت رفت و برگشت حامل به طوری تنظیم شد که با یکبار رفت حامل و پیچش

استفاده از روش المان محدود نیز مدل‌سازی شد. در نهایت نتایج بدست آمده از سه روش به صورت کیفی با یکدیگر مقایسه شدند.

لی<sup>1</sup> و کیاو<sup>2</sup> در سال 2015 به بررسی رفتار کمانشی و پس کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه غیر همسانگرد با طول محدود تحت بارگذاری ترکیبی فشار خارجی هیدرواستاتیک و فشار محوری با لحاظ تأثیر گرمای محیط، با استفاده از تئوری لایه‌های مرزی<sup>3</sup> پرداختند [11]. ماده هر لایه از پوسته، الاستیک خطی، غیر همسانگرد و مقاوم شده با الیاف در نظر گرفته شد. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک<sup>4</sup> و روابط جابه‌جایی-کرنش ون کارمن-دائل<sup>5</sup> استخراج کردند. در روند حل، تغییر شکل غیرخطی قبل از کمانش و عیب هندسی ابتدایی لحاظ شد. برای تعیین فشار کمانش و مسیر تعادل پس کمانش از روش اغتشاش تکین استفاده شده است. در نهایت پاسخ پس کمانشی پوسته چندلایه غیر همسانگرد عاری از عیب و با عیب هندسی اولیه تحت شرایط بارگذاری و مرزی در نظر گرفته شده در شرایط مختلف دمایی محیط به صورت عددی گزارش شد.

فوریس<sup>6</sup> در سال 2015 پوسته استوانه‌های تقویت‌شده با رینگ داخلی، تحت بارگذاری فشاری روی سطح خارجی با در نظر گرفتن رفتار پس کمانشی را مورد بررسی قرار داد [12]. او برای انجام بهینه‌سازی از روش الگوریتم پرندگان (تراکم ذرات)<sup>7</sup> استفاده کرد. در بهینه‌سازی اولین بار بحرانی کمانش بیشینه شد. محدودیت‌های بهینه‌سازی حجم ماده و شیب مسیر تعادل فرض شد. او برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش و رفتار پس کمانشی پوسته استوانه‌ای از روش المان محدود با بهره‌گیری از نرم‌افزار تجاری انسیس استفاده کرد. پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد در نظر گرفته شده بودند. او با بررسی نتایج کار خود نتیجه گرفت که موقعیت قرارگیری یک رینگ در وسط برای استوانه‌ای کوتاه و سه رینگ به طوری که فاصله بین آن‌ها مساوی از یکدیگر باشند، برای استوانه‌های بلند بهینه حالت می‌باشد.

یکی از بارگذاری‌هایی که استوانه‌های کامپوزیتی در حین کاربری متحمل می‌شوند، بارگذاری فشاری عرضی است. در این حالت علاوه بر تحمل سازه با توجه به توزیع تنش بوجود آمده در آن، مسئله پایداری سازه نیز مطرح است. به عبارت دیگر به منظور اطمینان از رفتار ایمن سازه در حین کاربری می‌بایست شناخت دقیقی از وضعیت پایداری و چگونگی رفتار آن در طی بارگذاری وجود داشته باشد. با توجه به مقالات بررسی شده ملاحظه می‌گردد که در مقالات مورد مطالعه، بررسی رفتار کمانشی و پس کمانشی استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده تحت فشار عرضی با لحاظ اثرات غیرخطی رفتار ماده کامپوزیتی وجود ندارد. در این مقاله با توجه به اهمیت رفتار استوانه‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی شده تحت بارگذاری فشاری عرضی، به بررسی چگونگی رفتار این نوع سازه‌ها با استفاده از روش آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی پرداخته شده است. فرآیند و شرایط بارگذاری طبق استاندارد ASTM D2412-02 برای نمونه استوانه‌هایی با قطر 20 سانتی‌متر و طول 10 سانتی‌متر انجام شده است. معمولاً به منظور بررسی رفتار کمانشی و پس کمانشی، اثر عیوب هندسی در نظر گرفته می‌شود. در مقاله‌ی حاضر، با توجه به ارتقاء سطح کیفیت ساخت قطعات، اثر عیوب هندسی ناچیز فرض شده و با توجه به رفتار واقعی سازه‌های کامپوزیتی حین بارگذاری و شروع آسیب و افزایش آن، رفتار کمانشی و پس کمانشی عرضی شبیه‌سازی می‌شود.

<sup>1</sup> Li

<sup>2</sup> Qiao

<sup>3</sup> Boundary layer theory

<sup>4</sup> Classical shell theory

<sup>5</sup> Von Kármán-Donnell strain displacement

<sup>6</sup> Forýs

<sup>7</sup> Modified Particle Swarm Optimization Method (MPSOM)

<sup>8</sup> Methyl Ethyl Ketone Peroxide (MEKP)

<sup>9</sup> Direct roving

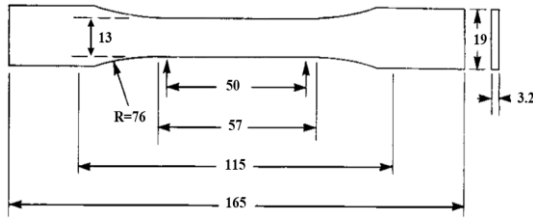


Fig. 2 Geometry and sizes of the tensile test specimen

شکل 2 هندسه و اندازه‌های مربوط به نمونه آزمایش کشش

آزمایش با دستگاه SANTAM-STM 20 در آزمایشگاه کامپوزیت و سازه‌های هوشمند دانشگاه تربیت مدرس انجام گرفت. برای اندازه‌گیری دقیق کرنش از اکستنسومتر تک‌محوری استفاده گردید. آزمایش‌ها با سرعت  $2.5 \frac{mm}{min}$  انجام شده است.

به صورت معمول، آزمایش فشار انجام نمی‌گیرد و خواص ماده در حالت فشار با پارامترهای مشابه آن در حالت کشش برابر یا یک ضریبی از آن فرض می‌گردد، اما در مقاله حاضر به منظور بررسی دقیق رفتار رزین ابعاد نمونه آزمون‌های فشار طبق استاندارد ASTM D695-02 تعیین و ساخته شد. هندسه نمونه‌های آزمون فشار به صورت استوانه‌ای به قطر 12.7 میلی‌متر و طول 50.8 میلی‌متر می‌باشد. نکته حائز اهمیت این است که دو صفحه فوقانی و تحتانی نمونه آزمون فشار می‌بایست صاف و موازی یکدیگر باشد. این مورد در ساخت نمونه‌های مربوط به این آزمایش لحاظ گردید. در شکل 3 نمونه آزمون فشار در دستگاه نشان داده شده است. با توجه به نحوه اعمال بارگذاری که به صورت فشاری است، برای ثبت کرنش، در این آزمایش نیازی نیست که از اکستنسومتر استفاده شود. در واقع، جابه‌جایی نمونه حین بارگذاری توسط فک بالایی که توسط دستگاه اندازه‌گیری می‌شود، از دقت لازم برخوردار می‌باشد. لازم به ذکر است که سرعت انجام این آزمایش‌ها مطابق با استاندارد مذکور  $1.3 \frac{mm}{min}$  تنظیم شد.

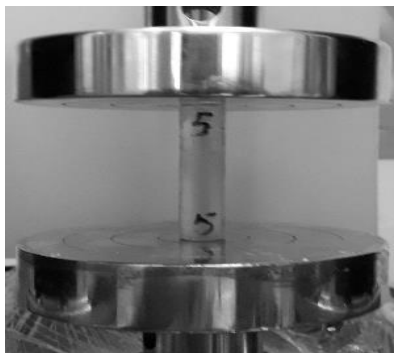


Fig. 3 Resin pressure test sample after placement in the universal testing machine

شکل 3 نمونه مربوط به آزمایش فشار رزین پس از قرارگیری در دستگاه

خواص مکانیکی الیاف اعم از مدول الاستیسیته، استحکام نهایی و ضریب پواسون از موارد تعیین کننده در خواص مکانیکی و آسیب کامپوزیت‌ها بشمار می‌رود. در این پژوهش به علت افزایش دقت در تعیین خواص مکانیکی استوانه کامپوزیتی و شبیه‌سازی عددی مربوط به آزمایش‌های انجام شده، آزمون کشش الیاف انجام گردید. نمونه الیاف مورد آزمایش مطابق استاندارد

الیاف سطح مندرل به صورت کامل پوشیده شود. رشته‌پیچی با زاویه الیاف  $\pm 75^\circ$  انجام شد. در مرحله‌ی بعد استوانه رشته‌پیچی شده تحت حرارتی که از قرار گرفتن در مجاورت مشعل الکتریکی است در محدوده‌ی دمای 80 الی 100 درجه سانتی‌گراد به صورت دوار در زمان بیشتر از 120 دقیقه قرار می‌گیرد، تا فرآیند پخت به صورت کامل و متقارن در تمامی استوانه انجام گیرد. برای اطمینان از کامل شدن فرآیند پخت سطح استوانه تحت آزمایش سختی سنجی قرار می‌گیرد. سختی استوانه طبق استاندارد ASTM D2583 می‌بایست در محدوده‌ی 30 الی 70 بارکول<sup>1</sup> باشد. البته باید اشاره کرد که اگر سختی 30 بارکول باشد می‌بایست در 50 نقطه در طول استوانه سختی سنجی انجام شده و تمامی مقادیر اندازه‌گیری شده بیشتر از 30 باشد و اگر 70 بارکول باشد، تعداد اندازه‌گیری‌ها، به عدد 5 کاهش می‌یابد.

پس از ساخت و آماده‌سازی استوانه، توسط برش دهنده، نمونه‌ها از قسمت وسط آن برش داده می‌شود. باید خاطر نشان کرد که در برش استوانه و تهیه نمونه‌ها می‌بایست در لبه‌های برش خورده نمونه‌ها هیچ‌گونه ترک و شکستگی ایجاد نشود. با توجه به ماهیت شکنندگی الیاف و رزین پس از خشک شدن به منظور تأمین دقت لازم از دستگاه فرز سنگ‌بر استفاده شد. در شکل 1 نمونه استوانه ساخته شده مشاهده می‌شود.

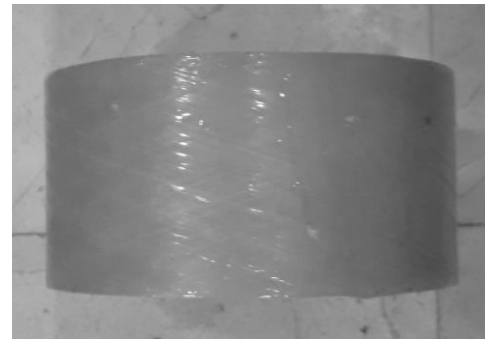


Fig. 1 Cylinder sample

شکل 1 نمونه استوانه

در جدول 2 مشخصات هندسی مربوط به نمونه آورده شده است.

جدول 2 ویژگی‌های هندسی نمونه استوانه

Table 2 Geometric features of cylinder sample

زاویه پیچی (degree)	رشته تعداد لایه‌ها	ضخامت اسمی (mm)	قطر داخلی اسمی (mm)	طول اسمی (mm)
$\pm 75$	7	4	200	100

## 2-2- اندازه‌گیری خواص مکانیکی

آزمون کشش تک‌محوری، رایج‌ترین نوع آزمون‌های مواد برای تعیین مشخصات اولیه مکانیکی می‌باشد. با انجام این آزمون می‌توان در حالت کشش مدول الاستیسیته، تنش تسلیمی، استحکام نهایی، کرنش نهایی و چقرمگی (مساحت زیر نمودار تنش-کرنش) را بدست آورد. نمونه‌ها طبق استاندارد ASTM D638-03، مطابق نوع یک تهیه و مورد آزمایش قرار گرفتند. اندازه‌های مربوط به نمونه آزمون کشش در واحد میلی‌متر، در شکل 2 نشان داده شده است.

<sup>1</sup> Barcol

خواص یک‌لایه می‌تواند با استفاده از نتایج آزمایش، در حالت ساخته شده و یا به‌صورت ریاضی بر پایه خواص مواد سازنده تخمین زده شود؛ به عبارت دیگر می‌توان خواص لایه را از طریق تجهیزات اندازه‌گیری و در مقیاس ماکرومکانیکی اندازه‌گیری کرد. البته این نکته قابل ذکر است که تحلیل میکرومکانیکی، شامل فرض‌های ساده‌کننده‌ای است. برای مثال، پیوند کامل بین الیاف و ماتریس یک حالت ایده‌آل بوده و در عمل لزوماً اتفاق نمی‌افتد. در این پژوهش به‌منظور محاسبه‌ی خواص مکانیکی لایه‌های تشکیل دهنده از معادلات هالپین-تسای<sup>1</sup> استفاده می‌شود. زیبایی این روش به دو علت است؛ اول سادگی آن که می‌تواند به آسانی در فرآیند طراحی استفاده شود و دوم اینکه این روش می‌تواند برای محدوده‌های معمول، اگرچه بسیار دقیق، برای نتایج میکرومکانیکی، تعمیم یابد [16].

برای استفاده از روابط میکرومکانیک، توجه به نکات ذیل حائز اهمیت می‌باشد.

- الیاف و ماده زمینه کاملاً با یکدیگر پیوند خورده‌اند.
- الیاف موازی بوده و به‌صورت یکنواخت در لایه پخش شده‌اند.
- الیاف و ماده زمینه به‌صورت مستقل، کشسان و همسانگرد هستند و از قانون هوک تبعیت می‌کنند.
- ماده زمینه، تهی از هرگونه ترک و خلل و فرج است و هیچ تنش اولیه‌ای در آن ایجاد نشده است.
- کرنش الیاف با کرنش ماتریس، در جهت الیاف برابر باشد.

روابط بین خواص مواد تشکیل دهنده و خواص مکانیکی لایه مطابق روابط 1 الی 6 می‌باشد [17].

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (1)$$

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2)$$

$$v_{12} = v_f V_f + v_m V_m \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} E_m ; \eta = \frac{\frac{E_f}{E_m} - 1}{\frac{E_f}{E_m} + \xi} ; \xi = 2 + 40V_f^{10} \quad (4)$$

$$G_{12} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} G_m ; \eta = \frac{\frac{G_f}{G_m} - 1}{\frac{G_f}{G_m} + \xi} ; \xi = 1 + 40V_f^{10} \quad (5)$$

$$v_{23} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} v_m ; \eta = \frac{\frac{v_f}{v_m} - 1}{\frac{v_f}{v_m} + \xi} ; \xi = 1 \quad (6)$$

در این روابط  $\rho_f$ ،  $\rho_m$  و  $\rho$  به ترتیب چگالی الیاف، زمینه و کامپوزیت نهایی را بیان می‌کند.  $E_1$  مدول الاستیسیته لایه در جهت الیاف،  $E_2$  مدول الاستیسیته لایه در جهت عمود بر الیاف درون صفحه‌ای،  $G_{12}$  مدول برشی درون صفحه‌ای،  $v_{12}$  ضریب پواسون درون صفحه‌ای لایه،  $v_{23}$  ضریب پواسون خارج صفحه‌ای لایه،  $E_f$  مدول یانگ الیاف،  $E_m$  مدول یانگ ماتریس،  $G_m$  مدول برشی ماتریس،  $V_f$  درصد حجمی الیاف،  $V_m$  درصد حجمی ماتریس،  $v_f$  ضریب پواسون الیاف،  $v_m$  ضریب پواسون ماتریس می‌باشند.

عبارت  $\eta V_f$  در مخرج روابط می‌تواند معنای درصد حجمی الیاف کاهش‌یافته<sup>2</sup> باشد. اصطلاح کاهش‌یافته به این علت استفاده شده است که  $\eta \leq 1$  است. علاوه بر این از رابطه‌های که  $\eta$  بدست می‌آید، واضح است که  $\eta$

ASTM D2256-02، طولی به اندازه‌ی 250 میلی‌متر داشتند. سرعت کشش دستگاه طبق استاندارد مذکور  $(\frac{mm}{min})$  250 تنظیم شد. آزمایش با دستگاه Instron-5566 انجام گرفت.

با توجه به آنکه نسبت در صد حجمی الیاف و رزین در یک قطعه کامپوزیتی بر خواص مکانیکی آن تأثیر دارد، درصد حجمی الیاف و رزین، طبق استاندارد ASTM D2584-02 با انجام آزمایش سوزاندن تعیین گردید. مطابق با استاندارد، 8 نمونه‌ی کوچک با ابعاد تقریبی  $2.5 \times 2.5$  سانتی‌متر از استوانه‌ی مورد بررسی، جدا و طبق شکل 4 آماده گردید.

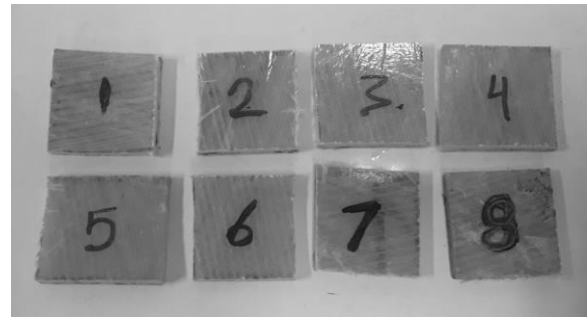


Fig. 4 Samples of burning test

شکل 4 نمونه‌های مربوط به آزمایش سوزاندن

جرم نمونه‌ها با استفاده از ترازو دیجیتالی به دقت 0.001 گرم، اندازه‌گیری شدند. در مرحله‌ی بعد، نمونه‌ها در روی بوتله‌های سرامیکی به مدت یک ساعت تا دمای 600 درجه سانتی‌گراد در داخل کوره قرار گرفتند. با اندازه‌گیری جرم نمونه و بوتله پس از سوزاندن، با توجه به جرم بوتله‌ها، نمونه‌ها قبل و پس از سوزاندن، جرم الیاف باقی‌مانده محاسبه و با در نظر داشتن مقدار چگالی الیاف و رزین کسر حجمی الیاف و رزین تعیین گردید. پس از تعیین خواص مکانیکی الیاف و رزین و نیز کسر حجمی آن‌ها، در این مرحله با استفاده از روابط میکرومکانیک خواص مکانیکی نمونه استوانه‌ها محاسبه شده است. پیش از اشاره به این روابط، خواص بدست آمده برای الیاف و زمینه در جدول 3 خلاصه شده است. لازم به ذکر است که از آنجا که الیاف شیشه و نیز رزین ماده ایزوتروپ محسوب می‌شوند خواص مکانیکی آن‌ها در جهات محوری و عرضی یکسان خواهد بود [13]. همچنین مدول برشی بر حسب مدول یانگ و ضریب پواسون قابل محاسبه است و از این رو، از درج آن در جدول صرف‌نظر شده است.

جدول 3 خواص مکانیکی الیاف شیشه و رزین

Table 3 Mechanical properties of glass fiber and resin		
مشخصه	الیاف	رزین پلی‌استر
چگالی $(\frac{kg}{m^3})$	2600*	1265.51
مدول الاستیسیته (GPa)	61.83	2.884
ضریب پواسون	0.18*	0.33#
استحکام کششی (MPa)	1734.436	47.687
استحکام فشاری (MPa)	867.218**	95.175

\* مرجع [14]

\*\* طبق مرجع [15] استحکام کششی الیاف دو برابر استحکام فشاری آن

است.

# مرجع [15]

<sup>1</sup> Halpin-Tsai

<sup>2</sup> Reduced fiber volume fraction

جدول 4 خواص الاستیک و استحکام استوانه

Table 4 Elastic properties and strength of cylinder

مشخصه	استوانه کامپوزیتی
چگالی $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	1966.1
مدول الاستیسیته	33.831
$E_2 = E_3$ (GPa)	10.307
مدول برشی	3.167
$G_{23}$ (GPa)	4.150
ضریب پواسون	0.251
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.241
استحکام کششی (MPa)	949.010
$X_T$	37.587
استحکام فشاری (MPa)	474.500
$X_C$	75.018
$Y_C$	65
استحکام برشی (MPa)	$S$

2-3- آزمایش فشار بین دو صفحه‌ی صلب موازی

به منظور انجام آزمایش فشار بین دو صفحه صلب موازی طبق استاندارد ASTM D2412-02 شرایط آزمایش تعیین گردید. این استاندارد برای اندازه‌گیری مشخصات لوله حاصل از نمودار بار-جابجایی تحت بارگذاری دو صفحه موازی می‌باشد. با انجام این آزمون مشخصه‌های سفتی لوله، ضریب سفتی و نیروی اعمالی بر لوله در جابه‌جایی مشخصی از لوله بدست می‌آید. طبق این استاندارد ضخامت حداقلی صفحه‌های صلب می‌بایست 6 میلی‌متر باشد. ابعاد آن‌ها می‌بایست در راستای قرارگیری طول نمونه، از طول نمونه مورد آزمایش کمتر نباشد؛ همچنین پهنا‌ی صفحه‌های صلب در حالت بیشترین طول تماس نمونه با صفحه صلب، 150 میلی‌متر و بیشتر از آن باشد. سرعت انجام آزمایش‌ها برای تمامی حالات  $12.5 \left(\frac{mm}{min}\right)$  است. برای انجام آزمایش دو صفحه صلب به ابعاد  $30 \times 30$  سانتی‌متر به ضخامت 2 سانتی‌متر آماده گردید. تصویر دستگاه پس از نصب صفحه‌های صلب که با دایره‌ی قرمز رنگ در شکل 5 مشخص شده، نشان داده شده است.



Fig. 5 Image universal testing machine for conducting a pressure test between two parallel rigid plates

شکل 5 تصویر دستگاه انجام آزمایش فشار بین دو صفحه‌ی صلب موازی

لازم به ذکر است که در ابتدای انجام آزمایش‌ها پس از قرارگیری نمونه بین دو صفحه صلب و تنظیم فاصله با لبه‌های کناری صفحه‌ها، قبل از شروع بارگذاری، فاصله صفحه بالایی از صفحه پایینی، با توجه به قطر استوانه طوری تنظیم شد که نمونه بین دو صفحه مستقر ولی تحت فشار نباشد. این آزمایش

از خصوصیات مواد تشکیل دهنده و ضریب هندسه تقویت‌کننده<sup>1</sup> یعنی  $\xi$ ، به خوبی تأثیر گرفته است [16].

برای مدول‌های  $E_3$  مدول الاستیسیته لایه در جهت عمود بر الیاف بیرون صفحه‌ای و  $G_{13}$  مدول برشی بیرون صفحه‌ای و ضریب پواسون  $\nu_{13}$  ضریب پواسون خارج صفحه‌ای روابط 7 الی 9 فرض می‌شود.

$$E_2 = E_3 \quad (7)$$

$$G_{12} = G_{13} \quad (8)$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} \quad (9)$$

همچنین مدول برشی  $G_{23}$  مدول برشی بیرون صفحه‌ای طبق رابطه 10 حاصل می‌گردد [18].

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (10)$$

باید در نظر داشت که در استخراج روابط استحکام‌ها، استحکام همی الیاف‌ها یکسان فرض می‌شود. خواص استحکام مطابق روابط 11 الی 15 محاسبه شدند [13].

$$X_T = S_f V_f + \frac{S_f}{E_f} E_m (1 - V_f) \quad (11)$$

$$X_C = \frac{1}{2} X_T^* \quad (12)$$

$$Y_T = E_2 \left( \frac{d E_m}{s E_f} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \right) \frac{S_m^T}{E_m} \quad (13)$$

$$Y_C = E_2 \left( \frac{d E_m}{s E_f} + \left(1 - \frac{d}{s}\right) \right) \frac{S_m^C}{E_m} \quad (14)$$

$$S = 65 \text{ (MPa)} \quad (15)$$

$X_T$ ،  $X_C$  و  $Y_C$  به ترتیب، استحکام کششی و فشاری کامپوزیت در راستای طولی و عرضی را نشان می‌دهند. استحکام برشی کامپوزیت نیز با  $S$  نشان داده شده است.  $S_f$  بیانگر استحکام الیاف در کشش و  $G_f$  مدول برشی الیاف است.  $S_m^C$  و  $S_m^T$  بیانگر استحکام کششی و فشاری ماده زمینه هستند. مطابق مرجع [15]، استحکام فشاری کامپوزیت برابر نصف استحکام کششی کامپوزیت و همچنین استحکام برشی کامپوزیت برابر با  $65 \text{ (MPa)}$  در نظر گرفته شد.  $d$  و  $s$  به ترتیب قطر الیاف و فاصله مرکز به مرکز قرارگیری الیاف نسبت به یکدیگر می‌باشند. روابط 11 الی 15 با فرض آرایش مربعی الیاف استخراج شده است. با مشخص بودن کسر حجمی الیاف، نسبت  $\frac{d}{s}$  طبق رابطه 16 بدست می‌آید [13].

$$\frac{d}{s} = \sqrt{\frac{4V_f}{\pi}} \quad (16)$$

با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده خواص مکانیکی و کسر حجمی الیاف و رزین، مطابق با روابط موجود، خواص مکانیکی نمونه استوانه‌ها محاسبه و در جدول 4 آورده شده است.

<sup>1</sup> Reinforcement geometry factor

است، استوانه‌ی کامپوزیتی رشته‌پیچی شده با یک استوانه‌ی کامپوزیتی چندلایه مدل‌سازی و در واقع هر لایه، یک‌لایه‌ی کامپوزیتی تک جهته در نظر گرفته شده است. با توجه به معیار هشین 3 بعدی، چهار حالت مختلف آسیب، یعنی آسیب الیاف در کشش، آسیب الیاف در فشار، آسیب ماتریس در کشش و آسیب ماتریس در فشار همگی لحاظ شدند. در ادامه معیارهای آسیب با فرض برابر بودن استحکام برشی طولی و عرضی معرفی می‌شود [21].

1- آسیب الیاف در کشش برای حالت  $\sigma_{11} \geq 0$ :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S^2} = 1 \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_{11}}{X_T} = 1 \quad (18)$$

هر کدام از روابط بالا مقدار بزرگ‌تری داشت، آن در حساب پارامتر آسیب در محاسبات لحاظ می‌شود.

2- آسیب الیاف در فشار برای حالت  $\sigma_{11} < 0$ :

$$\frac{\sigma_{11}}{X_C} = 1 \quad (19)$$

3- آسیب ماتریس در کشش برای حالت  $\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0$ :

$$\left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S^2} + \frac{\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2}{S^2} = 1 \quad (20)$$

4- آسیب ماتریس در فشار برای حالت  $\sigma_{22} + \sigma_{33} < 0$ :

$$\left[\left(\frac{Y_C}{2S}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{Y_C}\right) + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4S^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S^2} + \frac{\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2}{S^2} = 1 \quad (21)$$

در روابط 17 الی 21،  $\sigma_{11}$ ،  $\sigma_{22}$  و  $\sigma_{33}$  به ترتیب مؤلفه‌های تنش نرمال در جهت 1، 2 و 3 است.  $\sigma_{12}$ ،  $\sigma_{13}$  و  $\sigma_{23}$  به ترتیب بیانگر تنش‌های برشی مربوط به صفحات برشی 12، 13 و 23 است. جهت 1 نشان‌دهنده‌ی جهت الیاف، جهت 2 نشان‌دهنده‌ی عمود بر الیاف در صفحه و جهت 3 بیانگر جهت عمود بر الیاف در خارج از صفحه است. در حقیقت جهت‌های 1، 2 و 3 جهت دستگاه مختصات محلی در هر لایه می‌باشد [21].

خواص مکانیکی تک لایه کامپوزیت اورتوتروپیک طبق رابطه تنش- کرنش به صورت رابطه 22 بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ثوابت مربوط به ماتریس سفتی در حالتی که آسیب شروع نشده است، مطابق روابط 23 الی 29 می‌باشد [22].

$$C_{11}^0 = E_{11}^0 (1 - \nu_{23}\nu_{32})\Delta \quad (23)$$

توسط دستگاه تک‌محوره SHIJIN WDW-300E در آزمایشگاه مکانیک ضربه دانشکده مکانیک دانشگاه تربیت مدرس انجام گرفت.

### 3- بررسی عددی

در بررسی رفتار استوانه کامپوزیتی پدیده‌ای که علاوه بر رفتار نیرو-جابجایی اهمیت به سزایی داشته و حتی بر نحوه و مقادیر نمودار مذکور مؤثر است، بررسی آسیب‌های به وجود آمده در استوانه کامپوزیتی می‌باشد.

در حین بارگذاری ممکن است استوانه بدون هیچ گونه شروع شکل خاصی از آسیب دچار ناپایداری شده و کمانش کند، حالت دیگر ممکن است سازه اصلاً دچار ناپایداری نشده و تا مرحله‌ای از افزایش بارگذاری رفته و پس از آن شکل‌های مختلف آسیب روی داده و پس از آن شکست اتفاق افتد و در حالت دیگر با شروع شکل یا شکل‌های خاص آسیب، پدیده ناپایداری در سازه اتفاق افتاده و با شروع شکست هم‌زمان شود. البته معمولاً با افزایش آسیب (مود یا موده‌های مختلف) سازه دیگر رفتار قبلی (قبل از وقوع آسیب) را نداشته و با توجه به کاهش سفتی مؤثر سریع‌تر مرحله شکست اتفاق می‌افتد. شایان ذکر است در اینجا منظور از ناپایداری، در واقع این است که اگر در موقعیت زمانی مدنظر اغتشاشی بر سازه اعمال شود، سازه از حالت تعادل خارج شده و به وضعیت اولی قبل از اعمال اغتشاش برنگردد [19]. در نتیجه برای در نظر گرفتن تمامی مواردی که ممکن است در عمل اتفاق افتد، نوع حل از روش دینامیکی با لحاظ اثرات آسیب مواد کامپوزیتی در نظر گرفته شد.

مکانیک آسیب به طور فزاینده‌ای برای تجزیه و تحلیل واماندگی در کاربری‌های مختلف مهندسی شامل مواد بتنی، سنگی، فلزات، کامپوزیت‌ها و غیره مورد استفاده قرار گرفته است. مکانیک آسیب یک رویکرد غیر محلی<sup>1</sup> (شبهه به مکانیک شکست)، اما با فرمول‌بندی ظاهری مشابه به نظریه نرم شدگی پلاستیک<sup>2</sup> می‌باشد. در مکانیک آسیب، هر دو پارامتر استحکام و سفتی یک نقطه مادی در صورتی کاهش می‌یابد که مقداری آسیب را تجربه کند. این در مقایسه با تئوری کلاسیک پلاستیک، در حالی است که سفتی بدون تغییر باقی می‌ماند و تنها استحکام با توجه به رفتار سخت شدگی<sup>3</sup> / نرم شدگی<sup>4</sup> تصحیح می‌شود [20].

در این مقاله جهت مدل‌سازی اثرات آسیب به وجود آمده در استوانه‌ی کامپوزیتی از روش مکانیک آسیب استفاده شده است. بدین منظور از معیار آسیب هشین 3 بعدی بهره گرفته شده است. علت انتخاب معیار هشین 3 بعدی به دلیل آن است که در این معیار 4 مود آسیب از هم تفکیک و در نظر گرفته شده است. در واقع این معیار در مقایسه با معیارهای دیگر مانند هافمن<sup>5</sup>، تسای-هیل<sup>6</sup>، تسای-وو<sup>7</sup>، چنگ-چنگ<sup>8</sup>، شهید-چنگ<sup>9</sup> به جهت 3 بعدی بودن رابطه و مؤثر بودن تمامی مؤلفه‌های تنش در روابط معیار و تفکیک 4 مود آسیب، کامل‌تر به نظر می‌رسد. البته نسبت به سایر معیارهای 3 بعدی دیگر مانند پاک<sup>10</sup> که پارامترهای بیشتری نسبت به این معیار لازم دارد نیز در مجموع مناسب‌تر است چرا که با صرف زمان کمتری خواص مورد نیاز این معیار قابل حصول است.

### 3-1- معیار هشین 3 بعدی

به منظور مدل‌سازی شروع و رشد آسیب از معیار هشین 3 بعدی استفاده شد. با توجه به آنکه معیار هشین برای یک تک لایه‌ی تک جهته استخراج شده

<sup>1</sup> Non-local

<sup>2</sup> Softening theory of plasticity

<sup>3</sup> Hardening

<sup>4</sup> Softening

<sup>5</sup> Hoffman

<sup>6</sup> Tsai-Hill

<sup>7</sup> Tsai-Wu

<sup>8</sup> Chang-Chang

<sup>9</sup> Shahid-Chang

<sup>10</sup> Puck

مساوی تقسیم گردید. سپس استوانه ایجاد شده، در راستای طول با مقطع‌های دایره‌ای، قسمت‌بندی شدند. در نهایت استوانه‌ای با 7 لایه با ضخامت‌های برابر حاصل شد. در شکل 6 هندسه‌ی استوانه پس از رسم و قسمت‌بندی شدن ضخامت آن نشان داده شده است.

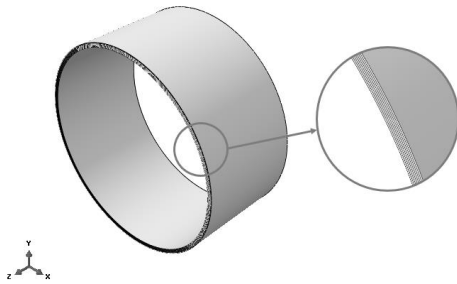


Fig. 6 Cylinder geometry and its thickness partitioning

شکل 6 هندسه استوانه و قسمت‌بندی ضخامت آن

خواص مکانیکی هر لایه مطابق با آنچه از نتایج آزمایش‌های تجربی، برای تعیین خواص بدست آمده در جدول 4 خلاصه شده، در نظر گرفته شده است. برای اعمال جهت هر لایه، از دستگاه مختصات محلی استفاده شد. برای هر لایه، دستگاه مختصات استوانه‌ای با لحاظ جهت پیچش الیاف تعریف گردید. در واقع جهت محور 1 در راستای الیاف، جهت محور 2 در راستای عمود بر الیاف درون صفحه‌ای و جهت 3 در راستای عمود بر الیاف خارج صفحه‌ای می‌باشد. در شکل 7 نحوه اعمال دستگاه مختصات محلی آمده است.

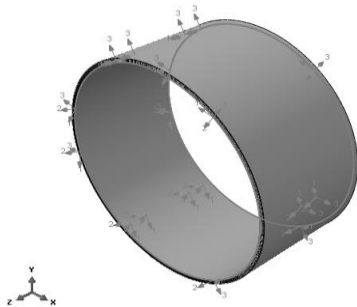


Fig. 7 Different layers of composite cylinder and definition of the local coordinate system for each layer

شکل 7 لایه‌های مختلف استوانه‌ی کامپوزیتی و نحوه تعریف دستگاه مختصات محلی برای هر لایه

در مدل‌سازی آزمایش فشار تحت دو صفحه صلب موازی، به منظور تعریف صفحات صلب، ابتدا مکعب مستطیلی به صورت 3 بعدی رسم سپس با اختصاص دادن نقطه‌ی مرجعی<sup>2</sup> به آن، مکعب مستطیل رسم شده به صورت صلب تعریف گردید. لازم به ذکر است که علت تعریف نقطه‌ی مرجع در واقع مربوط به رفتار مواد صلب است. در واقع مواد صلب به قطعه‌هایی گفته می‌شود که جابه‌جایی نسبی بین نقاط مختلف آن وجود نداشته و تمامی نقاط هم‌زمان با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. لذا جابه‌جایی یک نقطه از قطعه‌ی صلب مشخص کننده‌ی حرکت کل جسم می‌باشد. در واقع این نقطه مرجع با نسبت دادن آن به قطعه صلب، نماینده‌ی کل جسم صلب می‌باشد. در شکل 8 نمای کلی مدل استوانه همراه با صفحه‌های صلب پس از مونتاژ آورده شده است.

$$C_{22}^0 = E_{22}^0(1 - \nu_{13}\nu_{31})\Delta \quad (24)$$

$$C_{33}^0 = E_{33}^0(1 - \nu_{12}\nu_{21})\Delta \quad (25)$$

$$C_{12}^0 = E_{11}^0(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\Delta \quad (26)$$

$$C_{13}^0 = E_{11}^0(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\Delta \quad (27)$$

$$C_{23}^0 = E_{22}^0(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})\Delta \quad (28)$$

$$\Delta = 1/(1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{31}) \quad (29)$$

پس از شروع آسیب درایه‌های مختلف ماتریس سفتی از پارامترهای آسیب تأثیر پذیرفته و با افزایش آن‌ها، از مقدار اولیه‌ی درایه‌های سفتی کاسته می‌شود. درایه‌های مختلف ماتریس سفتی با لحاظ پارامترهای آسیب از روابط 30 الی 38 پیروی می‌کنند [22].

$$C_{11} = (1 - d_f)C_{11}^0 \quad (30)$$

$$C_{22} = (1 - d_f)(1 - d_m)C_{22}^0 \quad (31)$$

$$C_{33} = (1 - d_f)(1 - d_m)C_{33}^0 \quad (32)$$

$$C_{12} = (1 - d_f)(1 - d_m)C_{12}^0 \quad (33)$$

$$C_{13} = (1 - d_f)(1 - d_m)C_{13}^0 \quad (34)$$

$$C_{23} = (1 - d_f)(1 - d_m)C_{23}^0 \quad (35)$$

$$G_{12} = (1 - d_f)(1 - s_{mt}d_{mt})(1 - s_{mc}d_{mc})G_{12}^0 \quad (36)$$

$$G_{13} = (1 - d_f)(1 - s_{mt}d_{mt})(1 - s_{mc}d_{mc})G_{13}^0 \quad (37)$$

$$G_{23} = (1 - d_f)(1 - s_{mt}d_{mt})(1 - s_{mc}d_{mc})G_{23}^0 \quad (38)$$

که  $d_m$  و  $d_f$  مطابق روابط 39 و 40 تعریف می‌شود.

$$d_f = 1 - (1 - d_{ft})(1 - d_{fc}) \quad (39)$$

$$d_m = 1 - (1 - d_{mt})(1 - d_{mc}) \quad (40)$$

پارامترهای  $d_m$ ،  $d_f$ ،  $d_{ft}$ ،  $d_{fc}$ ،  $d_{mt}$  و  $d_{mc}$  به ترتیب بیانگر مود آسیب عمومی الیاف، مود آسیب عمومی ماتریس، مود آسیب کششی الیاف، مود آسیب فشاری الیاف، مود آسیب کششی ماتریس، مود آسیب فشاری ماتریس می‌باشد. طبق مرجع [22] ضرایب  $s_{mt}$  و  $s_{mc}$  به منظور کنترل سفتی برشی به ترتیب 0.5 و 0.9 فرض شده است.

جهت محاسبه‌ی پارامترهای آسیب، در روابط مربوط به چهار مود آسیب به جای عدد یک پارامتر آسیب در نظر گرفته شده است. به طور مثال مقدار عددی  $d_{ft}$  از روابط 17 و 18 بدست می‌آید. هر کدام از رابطه‌ها مقدار بزرگ‌تری داشته باشد، در محاسبات لحاظ خواهد شد. همین ترتیب برای سایر پارامترها به طور مشابه برقرار است. در این مدل‌سازی از ابتدای بارگذاری بر اساس مؤلفه‌های تنش پارامترهای آسیب حساب شده و در هر نمو بر خواص ماده البته به طور دقیق‌تر در ماتریس سفتی اثر داده می‌شود. این روش از مرجع [22] اقتباس شده است.

### 3-2- شبیه‌سازی

فرآیند مدل‌سازی شامل مراحل است که در این قسمت شرح داده می‌شود. تمامی مراحل شبیه‌سازی عددی در نرم‌افزار آباکوس انجام گرفته است. در ابتدا سطح مقطع استوانه رسم و به وسیله‌ی دستور ارتفاع دادن<sup>1</sup> یک استوانه ایجاد گردید. سپس با توجه به تعداد لایه‌های رشته‌پیچی شده مقطع به 7 قسمت

<sup>2</sup> Reference point

<sup>1</sup> Extrude



اولیه آن کاهش می‌یابد. برای کاهش مقدار درایه‌های مربوطه ناشی از پارامتر آسیب ماتریس در کشش و ماتریس در فشار این مقدار 0.05 تعیین گردید.

#### 4- بحث و نتایج

به منظور بررسی نتایج در ابتدا نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی برای نمونه استوانه‌های کامپوزیتی با زاویه پیچش  $75 \pm$  بیان شده سپس با نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مقایسه می‌شود.

#### 4-1- نتایج آزمایش فشار بین دو صفحه‌ی صلب موازی

جهت نشان دادن قابلیت تکرارپذیری آزمایش، سه نمونه استوانه به طول 10 سانتی‌متر مورد آزمایش قرار گرفتند. نمودار تغییرات بار-جابه‌جایی در شکل 9 برای نمونه شماره 3 آورده شده است.

به منظور بیان مشخص مطالب و جلوگیری از پیچیدگی ارائه‌ی نتایج، در ابتدا، نمودار مربوط به یک نمونه آورده شده و پس از اتمام توضیحات این بخش در ادامه نتایج سه نمونه با یکدیگر مقایسه خواهند شد. در شکل 9 محور عمودی نیروی اعمالی از طرف صفحه صلب بالایی و محور افقی مقدار جابه‌جایی در راستای حرکت صفحه صلب در نقطه‌ی میانی کمان فوقانی استوانه را نشان می‌دهد.

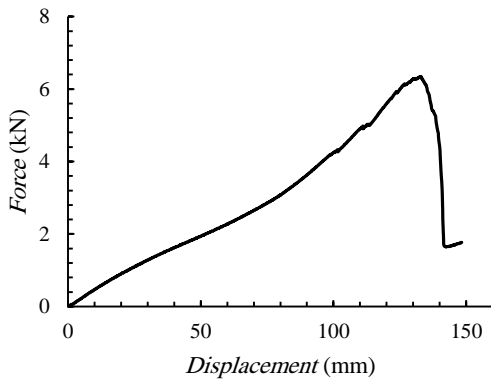


Fig. 9 Load-displacement diagram for composite cylinder sample number 3

شکل 9 نمودار تغییرات بار-جابه‌جایی مربوط به نمونه استوانه کامپوزیتی شماره 3

اولین پارامتر بیان کننده رفتار استوانه کامپوزیتی که می‌شود از روی نمودار نیرو-جابه‌جایی بدست آورد، مقدار سفتی لوله آ می‌باشد. بر طبق استاندارد ASTM D2412-02، سفتی لوله از تقسیم کردن مقدار نیرو بر واحد طول بر تغییر شکل استوانه به ازای تغییر درصد قطر مشخصی حاصل می‌شود. مقدار نیرو و جابه‌جایی، در تغییر قطر به اندازه‌ی 5 یا 10 درصد قطر اولیه اندازه‌گیری می‌شود. مقدار سفتی لوله از معادله‌ی 41 محاسبه می‌گردد.

$$PS = \frac{F}{\Delta y} \quad (41)$$

در رابطه 41،  $F$  مقدار نیرو بر واحد طول،  $\Delta y$  میزان جابه‌جایی بالاترین نقطه لوله (تاج لوله) می‌باشد. مقدار مربوط به سفتی لوله در تغییر قطر 5 و 10 درصد

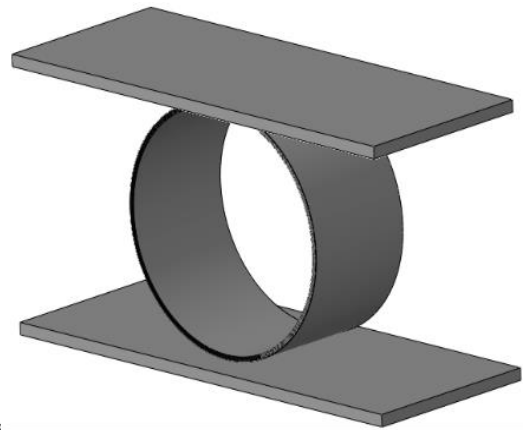


Fig. 8 Position of rigid plates after assembly

شکل 8 وضعیت قرارگیری صفحه‌های صلب پس از مونتاژ

پس از مونتاژ قسمت‌های استوانه با صفحه‌های صلب، تماس بین استوانه و صفحات به کمک قید تماس عمومی<sup>1</sup> و با فرض وجود ضریب اصطکاک 0.3 بین آن‌ها مدل شد [23]. به منظور مدل‌سازی اعمال فشار، به صفحه صلب بالایی سرعت ثابت  $12.5 \frac{mm}{min}$  در راستای عمود بر صفحه به طرف پایین تعریف و سایر درجه‌های آزادی آن بسته شد. همچنین تمامی درجات آزادی صفحه صلب پایینی بسته و به صورت ثابت مدل گردید.

جهت شبیه‌سازی فرآیند فشار جانبی استوانه در حالات مورد نظر و بررسی رفتار استوانه کامپوزیتی از روش حل غیرخطی ضمنی استفاده شده است. به منظور مش‌بندی استوانه کامپوزیتی از المان 3 بعدی مرتبه دوم آجری شکل یعنی C3D20 استفاده شد. این المان برای شبیه‌سازی‌های که در خمش در سازه اتفاق می‌افتد بهترین نتایج را حاصل خواهد کرد [24]. با توجه به خواص استوانه‌ی کامپوزیتی و شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی، در قسمت‌های مختلف سازه استوانه کشش، فشار، برش، پیچش و خمش ایجاد می‌شود. در حقیقت سازه استوانه، حالت کلی 3 بعدی تنش را تجربه کرده و تمامی مؤلفه‌های تنش نرمال و برشی مقدار دارند. بنابراین هر چند هزینه محاسباتی تحلیل‌های عددی افزایش پیدا خواهد کرد اما بهترین انتخاب المان C3D20 خواهد بود.

برای شبیه‌سازی مذکور با لحاظ اثر آسیب در تحلیل 3 بعدی، در روش حل ضمنی می‌بایست زیر برنامه UMAT نوشته می‌شد. در نتیجه زیر برنامه UMAT به زبان فرترن 77 که قالب تعریف شده برای نرم‌افزار آباکوس می‌باشد، نوشته شد. معیارهای آسیب هشین 3 بعدی با توجه به روابط 17 الی 21 تعریف و درایه‌های سفتی ماتریس با لحاظ اثرات پارامترهای آسیب طبق روابط 22 الی 40 کد نویسی گردید.

در این کد مقادیر پارامترهای آسیب از صفر تا یک برحسب مقادیر مؤلفه‌های تنش، می‌توانند مقدار داشته باشند. در صورتی که مقدار آن‌ها صفر باشد یعنی در موقعیت جاری المان مربوطه بدون آسیب است و هنگامی که مقدار آن‌ها به یک برسد یعنی المان مربوطه کاملاً دچار آسیب شده و درایه‌ی سفتی مربوطه از دست رفته است. به منظور جلوگیری از مشکلات عدم همگرایی پس از کاسته شدن درایه‌های سفتی، کاهش مقدار درایه‌های مربوطه ناشی از پارامتر آسیب الیاف در کشش و الیاف در فشار تا مقدار 0.0025 مقدار

<sup>1</sup> General contact

<sup>2</sup> Pipe Stiffness (PS)

در فیزیک سازه استوانه رخ می‌دهد، قابل تفسیر است. پس از تغییر قطر و کاهش آن به زیر 45 درصد قطر اولیه، آسیب در استوانه شروع می‌شود. آسیب از قسمت سطح داخلی در سطح مقطع افقی استوانه، با به وجود آمدن ترک‌هایی در ماتریس شروع می‌شود. با افزایش میزان بارگذاری، آسیب از سطح داخلی استوانه افزایش یافته تا به سطح خارجی استوانه برسد. تا زمانی که گسترش آسیب به سطح خارجی کاملاً نرسیده باشد، سازه‌ی استوانه‌ی کامپوزیتی در مقابل بارگذاری مقاومت می‌کند. وضعیتی که در آن دقیقاً قبل از زمانی که تمام سطح مقطع افقی استوانه دچار آسیب شود، معادل حداکثر نیروی تحملی استوانه در نمودار بار-جابه‌جایی بوده و پس از آن با افزایش جابه‌جایی صفحه‌ی صلب، کاهش شدید نیرو در نمودار شکل 9 قابل مشاهده است.

نمودار بار-جابه‌جایی هر سه نمونه استوانه در شکل 10 آورده شده است. با توجه به شکل 10 مشخص است که رفتار نمودار هر سه نمونه مشابه یکدیگر است.

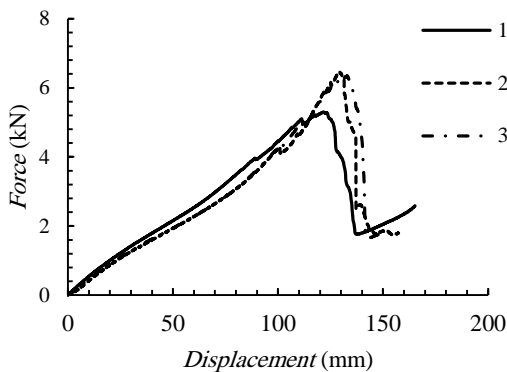


Fig. 10 Load-displacement diagram of cylinder samples

شکل 10 نمودار بار-جابه‌جایی نمونه استوانه‌ها

پارامتر سفتی استوانه برای نمونه‌های شماره 1 و 2 طبق معادله 41 محاسبه و در جدول 7 درج شده است.

جدول 7 مقدار سفتی نمونه استوانه‌های شماره 1 و 2 در تغییر قطر 5 و 10 درصد

Table 7 The Pipe Stiffness of the sample cylinders number 1 and 2 in the change of diameter of 5 and 10 percentage

درصد تغییر قطر	5%	10%
سفتی نمونه استوانه شماره 1 (kPa)	501.49	546.81
سفتی نمونه استوانه شماره 2 (kPa)	434.05	424.16

به منظور مقایسه مقادیر سفتی نمونه استوانه‌ها مقادیر آن‌ها در نمودار میله‌ای شکل 11 آورده شده است. با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که مقادیر سفتی هر کدام از نمونه‌ها در درصد تغییر قطر 5 و 10 درصد اختلاف ناچیزی با یکدیگر داشته و می‌توان بیان داشت که اختلاف ما بین آن‌ها زیر 10 درصد است. میانگین مقادیر سفتی نمونه استوانه‌ها برای درصد تغییر قطر 5 و 10 در به ترتیب 461.84 و 480.07 کیلو پاسکال محاسبه شد.

با دقت در نمودارهای شکل 10 مشاهده می‌شود که نمودار بار-جابه‌جایی نمونه استوانه‌های کامپوزیتی شماره 2 و 3 به یکدیگر نزدیک بوده؛ اما مقادیر نمودار مربوط به نمونه شماره 1 با دو نمونه دیگر اختلاف داشته و نیروی شکست اختلاف قابل توجهی دارد. این امر سبب شده که مقادیر سفتی بدست

در جدول 5 آورده شده است. شایان ذکر است که اندازه نمونه مورد آزمایش طوری انتخاب شده است که استوانه‌ی کامپوزیتی مورد بررسی، لوله کوتاه به شمار می‌رود [25].

جدول 5 مقدار سفتی نمونه استوانه شماره 3 در تغییر قطر 5 و 10 درصد

Table 5 The Pipe Stiffness of the sample cylinder number 3 in the change of diameter of 5 and 10 percentage

درصد تغییر قطر	5%	10%
سفتی نمونه استوانه کوتاه شماره 3 (kPa)	450	469.24

با توجه به نمودار شکل 9 مشخص است که پس از جابه‌جایی 10 درصد قطر یعنی در جابه‌جایی 20 میلی‌متر، رفتار استوانه از حالت الاستیک خطی خارج می‌شود. تا قبل از این جابه‌جایی رفتار استوانه خطی است. نحوه رفتار نمودار بعد از 10 درصد تغییر قطر، به صورت الاستیک غیرخطی است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، سفتی استوانه که همان شیب نمودار است کاهش می‌یابد. این کاهش تا 42.8 میلی‌متر یعنی 21.4 درصد تغییر قطر ادامه دارد. پس از 42.8 میلی‌متر تا مقدار 100 میلی‌متر شیب نمودار افزایش می‌یابد. این طور نیز می‌توان بیان داشت که از 21.4 درصد تا 50 درصد تغییر قطر، سفتی استوانه افزایش می‌یابد. پس از این تغییر شکل در نمودار نیرو-جابه‌جایی نوسان کوچکی در مقدار نیرو در نمودار مشاهده می‌شود.

با توجه به آنچه بیان گردید، رفتار استوانه به گونه‌ای است که در محدوده‌ی رفتار الاستیک آن قبل از شروع آسیب، روندهای مختلفی را تجربه می‌کند. در واقع در ابتدای بارگذاری با اعمال بار جابه‌جایی رفتار استوانه به گونه‌ای است که می‌توان گفت شیب نمودار ثابت است؛ سپس با افزایش نیرو شیب آن کاهش و پس از طی جابه‌جایی مشخصی دوباره روند تغییرات شیب نمودار به صورت افزایشی است. به عبارت دیگر رفتار استوانه در محدوده‌ی رفتار الاستیک را می‌توان به 3 ناحیه تقسیم‌بندی کرد. ابتدا استوانه با سفتی تقریباً ثابت تا فشار آستانه کمانش تغییر شکل می‌دهد، بعد از آن تغییر شکل بیشتر باعث کاهش سفتی کلی سیستم می‌شود. پس از آن، سفتی سیستم به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد تا فشار آستانه‌ای که در آن استوانه، سفتی بیشتری را به دست می‌آورد. موقعیت نیرو و جابه‌جایی کمانش همان موقعیت نقطه عطف نمودار است. به منظور یافتن جابه‌جایی دقیق مربوط به نقطه عطف نمودار و تعیین نیروی کمانش، بر روی قسمت هموار خطی نمودار با استفاده از نرم‌افزار متلب برازش منحنی انجام گرفت. تابع برازش از نوع چندجمله‌ای درجه چهار انتخاب گردید. با استفاده از ضابطه تابع بدست آمده، مشتق دوم تابع محاسبه و ریشه‌ی آن تعیین شد. در جدول 6 مشخصات جابه‌جایی و نیرویی که کمانش اتفاق افتاده است، آورده شده است. جزئیات مربوط به برازش منحنی در پیوست ضمیمه شده است.

جدول 6 مقدار جابه‌جایی و نیروی کمانش نمونه استوانه شماره 3

Table 6 Displacement and buckling force of sample cylinder number 3

جابه‌جایی (mm)	نیروی کمانش (kN)
46.32	1.824

نمونه استوانه کوتاه شماره 3

با توجه به نمودار شکل 9، تا قبل از جابه‌جایی 100 میلی‌متر نمودار به صورت هموار تغییر کرده و با افزایش جابه‌جایی اندازه بار افزایش می‌یابد. اما پس از این مقدار رفتار نمودار به صورت هموار نبوده و به ازای افزایش بار اعمالی تغییرات نوسانی در نمودار مشاهده می‌شود. نوسان در نمودار با توجه به آنچه

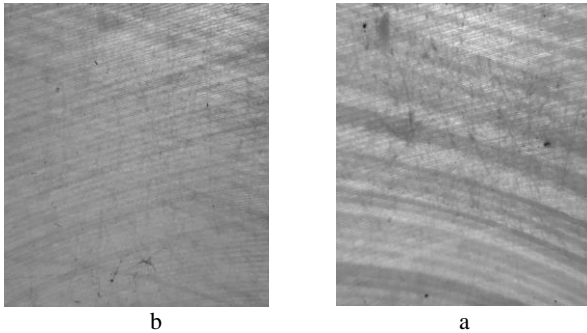


Fig. 13 Images of the position of the fibers in the sample cylinders (a) Sample No. 1 (b) Sample No. 3

شکل 13 تصاویر از وضعیت قرارگیری الیاف در نمونه استوانه‌ها (الف) نمونه شماره 1 (ب) نمونه شماره 3

شکل 13 تصاویر از سطح داخلی نمونه استوانه‌ها هنگامی که در برابر نور گرفته شده است، می‌باشد. همان‌طوری که از تصاویر شکل 13-الف نمایان است، در نمونه مربوط به شماره 1 بعضی از رشته الیاف تیره‌تر از سایرین هستند. این امر می‌تواند از قرارگیری رشته الیاف بر روی یکدیگر و همچنین ناشی از آن باشد که این رشته الیاف به صورت کامل با رزین آغشته نشده و اصطلاحاً کامل خیس نشده باشند. این عامل موجب آن شده است که یکنواختی توزیع الیاف در نمونه شماره 1 همانند نمونه‌های شماره 2 و 3 نباشد و در پاسخ نمونه مذکور تأثیر نامطلوب گذاشته است.

در انتهای این قسمت، موقعیت نقاط کمانش در نمودار بار-جابجایی مربوط به نمونه استوانه‌های کوتاه شماره 1 و 2 تعیین می‌گردد. در جدول 8 مشخصات این نقاط آمده است.

جدول 8 مقدار جابه‌جایی و نیروی کمانش نمونه استوانه‌های شماره 1 و 2  
Table 8 The amount of displacement and buckling force of sample cylinders No. 1 and 2

جابجایی (mm)	نیروی کمانش (kN)	
43.76	1.926	نمونه استوانه شماره 1
48.56	1.876	نمونه استوانه شماره 2

به منظور مقایسه مقادیر نیروی کمانش نمونه استوانه‌های کوتاه مقادیر آن‌ها در نمودار میله‌ای شکل 14 آورده شده است.

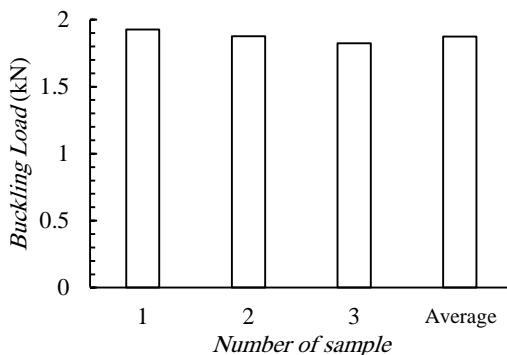


Fig. 14 Comparison of sample cylinders buckling force

شکل 14 مقایسه نیروی کمانش نمونه استوانه‌ها

با توجه به نمودار شکل 14 مشاهده می‌شود که مقادیر نیروی کمانش هر کدام از نمونه‌ها اختلاف ناچیزی با یکدیگر داشته و می‌توان بیان داشت که اختلاف

آمده برای نمونه شماره 1 با دو نمونه دیگر تقریباً اختلاف 15 درصدی داشته باشد.

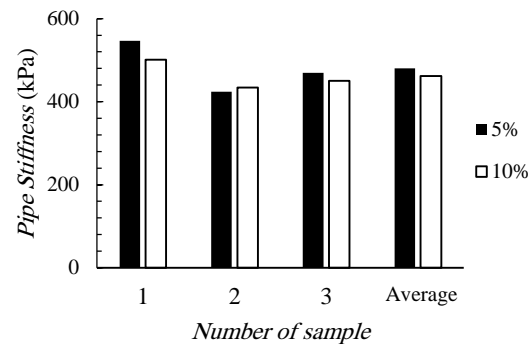


Fig. 11 Comparison bar graph of cylinders Pipe Stiffness

شکل 11 نمودار میله‌ای مقایسه‌ای سفتی استوانه‌ها

به منظور مقایسه‌ی نیروهای شکست سه نمونه مقادیر مربوط به هر کدام از نمونه‌ها در نمودار میله‌ای شکل 12 آورده شده است. میزان نیروی شکست میانگین هر سه نمونه 6.03 کیلو نیوتن است. برای نمونه شماره‌های 2 و 3، مقدار میانگین نیروی شکست 6.4 کیلو نیوتن بدست آمد. با توجه به مقادیر میانگین‌ها قابل مشاهده است که مقدار نیروی شکست مربوط به نمونه شماره 1، مقدار میانگین را 6 درصد تغییر می‌دهد. همان‌طوری که قابل مشاهده است اختلاف نیروی شکست و همچنین سفتی نمونه شماره 1 با دو نمونه مشابه دیگر قابل توجه است؛ به همین جهت در ادامه به بررسی علت ایجاد این اختلاف پرداخته می‌شود.

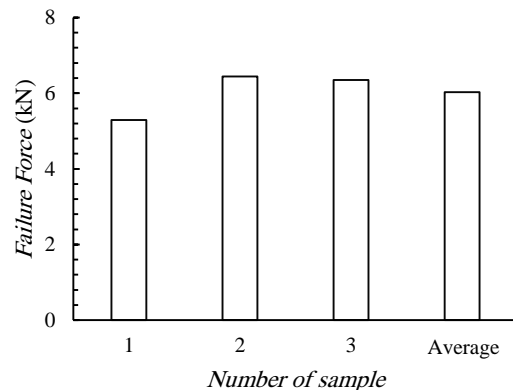
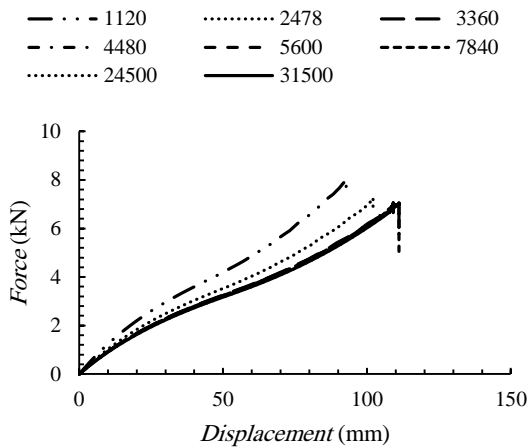


Fig. 12 Comparison of sample cylinders failure force

شکل 12 مقایسه نیروی شکست نمونه استوانه‌ها

نظر به اینکه رفتار استوانه‌ی کامپوزیتی وابسته به هندسه سازه و مصالح مورد استفاده در ساخت آن است، می‌بایست دقت شود که نمونه شماره 1 با دو نمونه دیگر در چه چیزی اختلاف دارند. با دقت در سازه نمونه استوانه‌های شماره 1، 2 و 3 مشاهده می‌شود که چینش الیاف در نمونه 1 همانند نمونه‌های دیگر نیست. در واقع نظم و یکنواختی که می‌بایست با در کنار یکدیگر قرار گرفتن رشته الیاف در دسته الیاف ایجاد می‌شد، در نمونه شماره 1 ایجاد نشده است. این پدیده در واقع مربوط به عیوب ایجاد شده در فرآیند ساخت می‌باشد. در شکل 13 تصاویر مربوط به نمونه استوانه‌های 1 و 3 آورده شده است.

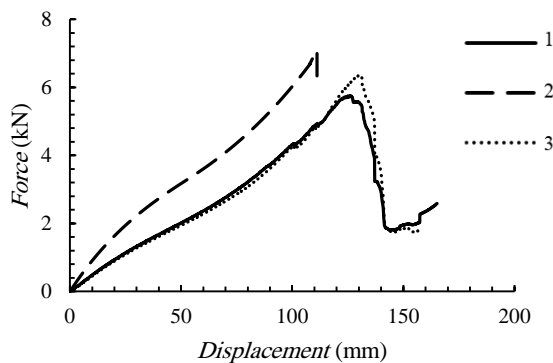


**Fig. 16** Load-displacement diagram of solving a number of different elements

شکل 16 نمودار بار-جاب‌جایی حاصل از حل با تعداد المان‌های مختلف

### 3-4- مقایسه نتایج تجربی و عددی

برای آنکه یک رفتار واحد از نتایج تجربی معرفی شود و همچنین اثر نتایج هر کدام از نمونه‌ها لحاظ گردد، میانگین عددی نمودارهای نمونه استوانه‌ها در انجام مقایسه استفاده خواهد شد. در شکل 17 نمودارهای بار-جاب‌جایی حاصل از شبیه‌سازی عددی و میانگین نتایج تجربی آورده شده است. در این نمودار میانگین نتایج تجربی هر سه نمونه با منحنی شماره 1، نتیجه‌ی حاصل از شبیه‌سازی عددی با منحنی شماره 2 و میانگین نتایج شماره‌های 2 و 3 با منحنی شماره 3 آورده شده است.



**Fig. 17** Load-displacement diagram of numerical simulation and average experimental results of cylinder

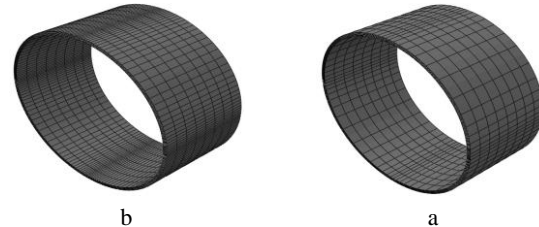
شکل 17 نمودار بار-جاب‌جایی حاصل از شبیه‌سازی عددی و میانگین نتایج تجربی نمونه استوانه‌ها

به منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش‌های تجربی و عددی دو عامل تأثیرگذار است؛ عامل اول، مقدار کمیت و تطابق آن با مقدار مرجع، عامل دوم، نحوه‌ی محاسبه‌ی عددی آن. در توضیح عامل اول می‌توان بیان داشت که با توجه به فرض‌های در نظر گرفته شده در مدل‌سازی عددی که اهم آن عبارت‌اند از فرض‌های روابط میکرو مکانیک، عیوب ساختاری سازه، ایده‌آل بودن هندسه و عدم در نظر گرفتن جدایش بین لایه‌ها رفتار بدست آمده از نتایج روش عددی بزرگ‌تر از نتایج تجربی می‌باشد. در واقع در محدوده‌ی رفتاری الاستیک، رفتار سازه حاصل از روش عددی نسبت به رفتار سازه در محدوده‌ی جاب‌جایی‌های بزرگ‌تر که پارامترهای آسیب تأثیرگذار هستند، به حالت ایده‌آل نزدیک بوده

ما بین آن‌ها زیر 6 درصد است. میانگین مقدار نیروی کمانش نمونه استوانه‌ها 1.875 کیلو پاسکال محاسبه شد. با بررسی نمودار بار-جاب‌جایی هر سه نمونه استوانه و دقت در رفتار آن‌ها در قبل و بعد از کمانش مشاهده می‌شود که سازه هر چند دچار کمانش می‌شود اما وضعیت نمونه استوانه ناپایدار نمی‌شود. با توجه به پایدار ماندن وضعیت نمونه استوانه‌های پس از کمانش می‌توان بیان داشت که هر چند اتفاق افتادن کمانش در رفتار استوانه تأثیرگذار است اما تعیین کننده نیست. به عبارت دیگر در بررسی و تصمیم‌گیری در مورد رفتار سازه استوانه‌ی کامپوزیتی مقادیر سختی و نیروی شکست نسبت به نیروی کمانش از اهمیت بیشتری برخوردار هستند.

### 2-4- نتایج شبیه‌سازی عددی آزمایش فشار بین دو صفحه‌ی صلب موازی

قبل از ارائه نتایج، به بررسی مش‌بندی و استقلال از مش نتایج حاصله پرداخته می‌شود. در المان بندی هندسه، با توجه به بحرانی بودن 4 منطقه میانی کمان‌ها و کاهش تعداد المان‌های مورد استفاده در حل، این موقعیت‌های هندسی با بهره‌گیری از ابزار المان بندی جهت‌دار، نسبت به سایر قسمت‌های استوانه از تراکم بیشتر تعداد المان‌ها برخوردار شدند. به منظور بررسی مستقل بودن نتایج از تعداد المان‌های مورد استفاده در تحلیل، این حل با تعداد المان‌های 1120، 2478، 3360، 4480، 5600، 7840، 24500 و 31500 انجام گرفت. در شکل 15 تصاویر مربوط به نحوه المان بندی در تعداد المان 3360 و 7840 نشان داده شده است.



**Fig. 15** Meshing cylinder geometry (a) 3360 Element (b) 7840 Element

شکل 15 نحوه المان بندی هندسه‌ی استوانه (الف) المان 3360 (ب) المان 7840

در شکل 16 نمودار مربوط به بار-جاب‌جایی حاصل از تحلیل عددی با تعداد المان‌های مختلف آورده شده است. بدیهی است با افزایش تعداد المان‌ها، حجم محاسباتی نیز افزایش پیدا خواهد کرد. بنابراین انتخاب نوع و تعداد المان‌های کافی برای انجام تحلیل امری مهم خواهد بود. البته تعداد المان‌ها باید از تعداد مشخصی کمتر نباشد که بر نتایج حل تأثیرگذار باشد. با دقت در شکل 16 مشخص است که نتایج حاصل از تحلیل با تعداد المان‌های مختلف، بعد از تعداد 7840 المان، چندان تأثیری در نتایج نهایی نداشته و می‌توان اظهار داشت که نمودارهای حاصل از تحلیل با تعداد المان‌های مختلف بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند. این نتیجه تأثیر المان بندی مناسب برای حل این مسئله را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج به دست آمده برای انجام تحلیل از تراکم تعداد المان 7840 و با نوع المان بندی جهت‌دار استفاده گردید. این انتخاب باعث کاهش حجم و زمان محاسباتی تحلیل‌ها می‌شود.

شماره 1 درصد اختلاف جابه‌جایی شکست با میانگین نمونه شماره 2 و 3 نسبت به میانگین کل نمونه‌ها بیشتر می‌شود. این از آن جهت است که نمونه شماره 1 در جابه‌جایی کوچک‌تری نسبت به دو نمونه دیگر دچار شکست می‌شود. البته تفاوت مابین درصد اختلاف در جابه‌جایی شکست در دو حالت مقایسه‌ای با یکدیگر مقدار کوچکی است.

جدول 9 مقادیر نیروی شکست و جابه‌جایی متناظر با آن

Table 9 Failure force and displacement corresponding

جابه‌جایی در شکست (mm)	نیروی شکست (kN)	
111.09	7.045	حل عددی
126.26	5.748	میانگین کل تجربی
129.85	6.344	میانگین نمونه شماره 2 و 3

جدول 10 درصد خطای نیروی شکست و جابه‌جایی حاصل از روش عددی با نتایج تجربی  
Table 10 Error percent of failure force and error rate of displacement resulting from numerical method with experimental results

22.57	درصد خطای نیروی شکست با میانگین کل
11.05	درصد خطای نیروی شکست با میانگین نمونه شماره 2 و 3
12.02	درصد خطای جابه‌جایی شکست با میانگین کل
14.44	درصد خطای جابه‌جایی شکست با میانگین نمونه شماره 2 و 3

### 5- نتیجه‌گیری

با توجه به بررسی نتایج حاصل از دو روش عددی و تجربی، مشخص است که شبیه‌سازی انجام شده روشی مناسب برای بررسی رفتار استوانه‌های کامپوزیتی می‌باشد. خطای حاصل از روش عددی زیر 23 درصد حاصل شد. خطای حاصل، با توجه به عیبی که در حین ساخت به وجود می‌آید و فرض‌های ایده‌آلی که در حین بارگذاری و اعمال شرایط مرزی در شبیه‌سازی عددی اعمال می‌گردد، مناسب است.

در بررسی حاضر با توجه به نمودار بار-جابه‌جایی، رفتار نمودار استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری فشار جانبی عرضی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد. ابتدا سازه با سفتی تقریباً ثابت تا فشار آستانه کمانش تغییر شکل می‌دهد، بعد از آن، تغییر شکل بیشتر باعث کاهش سفتی کلی سیستم می‌شود. پس از آن، سفتی سیستم به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد تا فشار آستانه‌ای که در آن سازه، سفتی بیشتری را به دست می‌آورد. در این نوع رفتار نیروی کمانش همان نقطه عطف نمودار که مشتق دوم در آن تغییر علامت می‌دهد، تعیین می‌شود. شایان ذکر است که در این نوع رفتار، سفتی سازه کاهش می‌یابد اما مقدار منفی را تجربه نمی‌کند.

در پایان می‌توان چنین اظهار داشت که با توجه به نمودار نیرو-جابه‌جایی، استوانه‌ی کامپوزیتی رشته‌پیچی شده تحت بارگذاری فشار جانبی عرضی دچار کمانش می‌شوند اما با توجه به اینکه پس از کمانش وضعیت آن‌ها پایدار است، اتفاق افتادن کمانش تأثیر قابل ملاحظه‌ای در رفتار آن نمی‌گذارد.

و در نتیجه مقدار اختلاف از نتایج تجربی بیشتر خواهد شد. علاوه بر آن با توجه به کوچک بودن مقدار رفتار حاصل از نتایج تجربی محدوده‌ی الاستیک، اختلاف شیب حاصله با نتایج تجربی، بزرگ‌تر به دست می‌آید. در واقع هر چقدر مقدار و محدوده‌ی اندازه‌ها به نسبت ماهیت مسئله کوچک‌تر شود، اختلاف‌های عددی در مقایسه بین دو مقدار، تأثیر بیشتری خواهد داشت. به بیان دیگر، همان‌طوری که از روند تغییرات نمودار شکل 17 مشخص است، فاصله‌ی بین نمودار حاصل از شبیه‌سازی عددی و میانگین مقادیر تجربی از جابه‌جایی صفر به تدریج با افزایش جابه‌جایی بیشتر شده و با تقریب مناسب بعد از مقدار جابه‌جایی 40 میلی‌متر می‌توان ثابت فرض کرد. با توجه به توضیحات ذکر شده، میزان اختلاف بین نتایج از محدوده رفتار الاستیک خطی تا محدوده رفتاری که آسیب تأثیرگذار است، با در نظر داشتن افزایش اندازه جابه‌جایی کاهش می‌یابد. مورد دیگری که در مقایسه رفتارهای حاصل از شبیه‌سازی عددی و تجربی حائز اهمیت است، مربوط به اندازه خواص مکانیکی تعیین شده است. با توجه به روش استفاده شده در تعیین خواص مکانیکی در این مقاله، اختلاف مابین خواص مکانیکی تعیین شده با آنچه که سازه استوانه کامپوزیتی دارد، سهم بسزایی در اختلاف بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و تجربی خواهد داشت.

همچنان که از شکل 17 نمایان است، رفتار نمودار حاصل از شبیه‌سازی عددی تطابق مناسبی با رفتار حاصل از آزمایش‌های تجربی دارد. این نتیجه حاکی از آن است که روند شبیه‌سازی و انتخاب معیار آسیب و نحوه تعریف آن مناسب است. با دقت در نمودار شکل 17 مشاهده می‌شود که مقدار نیروی کمانش، شکست و سفتی پیش‌بینی شده توسط حل عددی بزرگ‌تر است از آنچه که در عمل اتفاق می‌افتد است. به منظور توضیح علت این نتیجه باید دقت داشت که در نظر نگرفتن عیوب مانند عیوب هندسی، عیوب ساختاری و... همچنین عدم لحاظ پدیده‌هایی مانند جدایش بین لایه‌ای در روند مدل‌سازی منجر به آن می‌شود که سفتی سازه در مدل‌سازی عددی نسبت به آنچه در عمل سازه از خود نشان می‌دهد، بیشتر شود. به همین جهت نیرویی که سازه در جابه‌جایی مشخصی می‌تواند تحمل کند در نتایج عددی از نتایج تجربی مقدار بزرگ‌تری خواهد داشت.

بدیهی است زمانی که نیروی شکست مقدار مشخصی باشد، هر چند که اختلاف کوچکی مابین نتایج عددی و تجربی وجود دارد، نموداری که شیب بزرگ‌تری داشته باشد، سریع‌تر به این مقدار رسیده و در نتیجه جابه‌جایی کمتری در این وضعیت خواهد داشت. این مطلب را این‌گونه نیز می‌توان بازگو کرد که آنچه در تجربه اتفاق می‌افتد، تمامی عوامل مختلف شامل عیوب موجود در نمونه و پدیده‌هایی که می‌توانند رخ بدهند مانند جدایش بین لایه‌ای، عملاً محقق می‌شوند در نتیجه در این حالت سفتی سازه نسبت به حالت ایده‌آل که بدون عیب در نظر گرفته می‌شود سفتی کمتر خواهد داشت و بنابراین می‌توان گفت در نیروی شکست مشخص جابه‌جایی بیشتری پیدا خواهد کرد. نمودار مربوط به میانگین نمودارهای نمونه شماره 2 و 3 آورده شده است تا اختلاف مابین نتایج تجربی و عددی با در نظر گرفتن و عدم در نظر گرفتن نمونه شماره 1 مقایسه شود.

در جدول 9 مقادیر نیروی شکست و جابه‌جایی متناظر با آن برای هر سه نمودار حاصل از نتایج عددی و تجربی آورده شده است.

در جدول 10 درصد اختلاف نیروی شکست و جابه‌جایی حاصل از روش عددی با نتایج تجربی آورده شده است. با توجه به این جدول مشاهده می‌شود که درصد اختلاف نیروی شکست مابین نتایج تجربی و عددی با در نظر گرفتن نتیجه نمونه شماره 1، دو برابر شده است. در عین حال بدون لحاظ نمودار نمونه

6- فهرست علائم

$C$	درایه‌ی ماتریس سفتی بعد از شروع آسیب ( $Nm^{-2}$ )
$C^0$	درایه‌ی ماتریس سفتی قبل از شروع آسیب ( $Nm^{-2}$ )
$d$	مؤلفه‌ی آسیب
$E$	مدول یانگ ( $Nm^{-2}$ )
$G$	مدول برشی ( $Nm^{-2}$ )
$\frac{d}{s}$	نسبت قطر الیاف به فاصله‌ی آن‌ها از هم در آرایش مربعی
$s$	ضریب کنترل سفتی برشی
$S$	استحکام ( $Nm^{-2}$ )
$X$	استحکام ( $Nm^{-2}$ )
$Y$	استحکام ( $Nm^{-2}$ )
$V$	کسر حجمی

علائم یونانی

$\sigma$	تنش ( $Nm^{-2}$ )
$\varepsilon$	کرنش
$\nu$	ضریب پواسون
$\pi$	عدد پی
$\xi$	ضریب هندسه‌ی تقویت‌کننده
$\eta$	ضریب کاهش‌دهنده‌ی کسر حجمی الیاف
$\gamma$	کرنش برشی
$\Delta$	ثابت برحسب ضرایب پواسون

زیرنویس‌ها

$f$	الیاف
$m$	ماتریس
$ft$	کششی الیاف
$fc$	فشاری الیاف
$mt$	کششی ماتریس
$mc$	فشاری ماتریس
1	جهت محور $x$ ، در راستای الیاف
2	جهت محور $y$ ، در راستای عمود بر الیاف (درون صفحه‌ای)
3	جهت محور $z$ ، در راستای عمود بر الیاف (خارج صفحه‌ای)

7- تقدیر و تشکر و پیوست‌ها

از مدیریت محترم و مدیر فنی و تمامی عوامل شرکت دیبا فایبر گلاس به خاطر همکاری در ساخت نمونه استوانه‌های کامپوزیتی کمال قدرانی و تشکر می‌شود.

7-1- پیوست

در این قسمت ضرایب چند جمله‌ای مربوط به برازش منحنی‌های نیرو-جابه‌جایی به منظور یافتن نقاط عطف آن‌ها آورده شده است. رابطه کلی چند جمله‌ای درجه 4 به شکل زیر است.

$$y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

در ادامه ضرایب محاسبه شده در ماتریس سطری بر حسب قرارگیری به ترتیب از ضریب  $a_4$  تا  $a_0$  از سمت چپ به راست آمده است.

ضرایب منحنی درجه چهار برازش شده‌ی مربوط به نمودار نیرو-جابه‌جایی نمونه استوانه شماره 1:

$$a = [0.000000017791500115677536842412562200812, 0.0000016277885232545368768866363498593, 0.00041806838259278564142590317587178, 0.057525904760261717396652159095538, 0.0081845979241719421515277588241588]$$

ضرایب منحنی درجه چهار برازش شده‌ی مربوط به نمودار نیرو-جابه‌جایی نمونه استوانه شماره 2:

$$a = [0.000000019931174828102304318871505046072, 0.000000075430583583465971673890672344331, 0.00027132132817324155181493150479355, 0.051001176521796968976740771495315, 0.05305428964228088573040764686084]$$

ضرایب منحنی درجه چهار برازش شده‌ی مربوط به نمودار نیرو-جابه‌جایی نمونه لوله استوانه شماره 3:

$$a = [0.000000011354349091515804402350862446248, 0.0000019873848125192343574702946024102, 0.00042235730199226121685252000048649, 0.054183351015292292862657319574282, 0.029223093776274605692933050704596]$$

8- مراجع

[1] Hobbs, R. E., "Pipeline Buckling Caused by Axial Loads" Journal of Constructional Steel Research, Vol. 1, No. 2, pp. 2-10, 1981.

[2] Xia, M., Takayanagi, H. and Kemmochi, K., "Analysis of Multi-Layered Filament-Wound Composite Pipes under Internal Pressure" Composite Structures, Vol. 53, No. 4, pp. 483-491, 2001.

[3] Xia, M., Takayanagi, H. and Kemmochi, K., "Analysis of Transverse Loading for Laminated Cylindrical Pipes" Composite Structures, Vol. 53, No. 3, pp. 279-285, 2001.

[4] Xia, M., Kemmochi, K. and Takayanagi, H., "Analysis of Filament-Wound Fiber-Reinforced Sandwich Pipe under Combined Internal Pressure and Thermomechanical Loading" Composite Structures, Vol. 51, No. 3, pp. 273-283, 2001.

[5] Xia, M., Takayanagi, H. and Kemmochi, K., "Bending Behavior of Filament-Wound Fiber-Reinforced Sandwich Pipes" Composite Structures, Vol. 56, No. 2, pp. 201-210, 2002.

[6] Tafreshi, A., "Buckling and Post-Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shells with Cutouts Subjected to Internal Pressure and Axial Compression Loads" International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, No. 5, pp. 351-359, 2002.

[7] Guedes, R. M., "Stress Analysis of Transverse Loading for Laminated Cylindrical Composite Pipes: An Approximated 2-D Elasticity Solution" Composites Science and Technology, Vol. 66, No. 3, pp. 427-434, 2006.

[8] Zhang, C., Bao, X., Ozkan, I. F., Mohareb, M., Ravet, F., Du, M. and DiGiovanni, D., "Prediction of the Pipe Buckling by Using Broadening Factor with Distributed Brillouin Fiber Sensors" Optical Fiber Technology, Vol. 14, No. 2, pp. 109-113, 2008.

[9] Hernández-Moreno, H., Douchin, B., Collombet, F., Choqueuse, D. and Davies, P., "Influence of Winding Pattern on the Mechanical Behavior of Filament Wound Composite Cylinders under External Pressure" Composites Science and Technology, Vol. 68, No. 3, pp. 1015-1024, 2008.

[10] Torres Arellano, M., Crouzeix, L., Douchin, B., Collombet, F., Hernández Moreno, H. and González Velázquez, J., "Strain Field Measurement of Filament-Wound Composites at  $\pm 55^\circ$  Using Digital Image Correlation: An Approach for Unit Cells Employing Flat Specimens" Composite Structures, Vol. 92, No. 10, pp. 2457-2464, 2010.

[11] Li, Z.-M. and Qiao, P., "Buckling and Postbuckling of Anisotropic Laminated Cylindrical Shells under Combined External Pressure and Axial Compression in Thermal Environments" Composite Structures, Vol. 119, pp. 709-726, 2015.

- [12] Foryś, P., "Optimization of Cylindrical Shells Stiffened by Rings under External Pressure Including Their Post-Buckling Behaviour" *Thin-Walled Structures*, Vol. 95, pp. 231-243, 2015.
- [13] Gibson, R. F., "Principles of Composite Material Mechanics", CRC press, 2011.
- [14] Wallenberger, F. T. and Bingham, P. A., "Fiberglass and Glass Technology" *Energy-Friendly Compositions And Applications*, 2010.
- [15] Rafiee, R. and Amini, A., "Modeling and Experimental Evaluation of Functional Failure Pressures in Glass Fiber Reinforced Polyester Pipes" *Computational Materials Science*, Vol. 96, pp. 579-588, 2015.
- [16] Jones, R. M., "Mechanics of Composite Materials", CRC press, 2014.
- [17] Affdl, J. H. and Kardos, J. "The Halpin-Tsai Equations: A Review" *Polymer Engineering & Science*, Vol. 16, No. 5, pp. 344-352, 1976.
- [18] Barbero, E. J., "Introduction to Composite Materials Design", CRC press, 2017.
- [19] Jones, R. M., "Buckling of Bars, Plates, and Shells", Bull Ridge Corporation, 2006.
- [20] Mohammadi, S., "Xfem Fracture Analysis of Composites", John Wiley & Sons Incorporated, 2012.
- [21] Hashin, Z., "Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites" *Journal of applied mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 329-334, 1980.
- [22] Pederson, J., "Finite Element Analysis of Carbon Fiber Composite Ripping Using Abaqus", 2008.
- [23] Mahdavi, H. R., "Analysis of Behavior of Composite Pipes under Internal Cyclic Pressure and External Pressure", In Persian, MSc Thesis, Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Iran, 2015.
- [24] Abaqus 6.14 Documentation, 2014.
- [25] Ugural, A. C., "Stresses in Beams, Plates, and Shells", CRC Press, 2009.

