نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیـــت**

http://jstc.iust.ac.ir

پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال ساکن تحت بار نقطه‌ای متحرک

شهروز یوسف‌زاده [1*] ، اشکان اکبری [2]، محمد نجفی [3]

1- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز

2- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز

3- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

* الیگودرز، 159، shy@iau-aligudarz.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: 96/09/04

پذیرش: 97/02/12

کلیدواژگان:

ورق مستطیلی

پاسخ دینامیکی

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

مواد مدرج تابعی

چکیده

این تحقیق، ارتعاشات اجباری ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی از جنس مواد مدرج تابعی در تماس با سیال غیرقابل تراکم تحت بار متحرک را مورد بررسی قرار داده است. معادلات حاکم بر ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول رایزنر- میندلین با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و تنش‌های برشی عرضی استخراج شده است. برای مطالعه اثر فشار اعمال شده از سیال بر روی سطح آزاد ورق از مدل‌سازی جرم افزوده استفاده شده است. ابتدا برای ورق مستطیلی با دو لبه‌ی موازی بر روی تکیه‌گاه ساده، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی با غیرکوپله کردن و حل دستگاه معادلات حرکت استخراج شده سپس با بکارگیری روش بسط شکل مودها، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاش اجباری ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی بدست آمده است. در پایان، پس از صحه‌گذاری روی پاسخ‌های دقیق بدست آمده از طریق نتایج سایر محققان، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت طول به عرض ورق، ضخامت به طول ورق، چگالی سیال، ارتفاع سیال و ضریب توانی کسر حجمی روی پاسخ دینامیکی ورق پرداخته شده است.

Dynamic response of FG rectangular plate in contact with stationary fluid under moving load

Shahrouz Yousefzadeh[1*], Ashkan Akbari[1], Mohammad Najafi[2]

1-Department of Mechanical Engineering, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran.

2-Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

*P.B.O 159, Aligudarz, shy@iau-aligudarz.ac.ir

Keywords

Rectangular plate

Dynamic response

First-order shear deformation theory

Functionally graded materials

Abstract

This study is investigated the forced vibration analysis of a moderately thick rectangular plate under moving load, which are composed of functionally graded materials and floating on incompressible fluid. The governing equations of the plate are analytically derived based on First-order Shear Deformation Theory (FSDT) with consideration of rotational inertial effects and transverse shear stresses. In order to obtain the applied pressure on the free surface of the plate, the method of added mass is used. At first, the natural frequencies and shape modes of the rectangular plate with two parallel simply-supported edges are determined by decoupling and solving the motion equations system. Then, the forced vibration of the plate is investigated by shape mode expansions. The results of this study are compared and validated with results of other works. Finally, the effects of the different geometrical parameters such as the length to width ratio, the height to length ratio, fluid density, fluid depth and index of volume fraction on the dynamic response of the plate are investigated.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Yousefzadeh, S., Akbari, A., Najafi, M., “Dynamic response of FG rectangular plate in contact with stationary fluid under moving load”, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 2, pp. 213-224, 2019.

1- مقدمه

ورق‌ها سازه‌های صلبی هستند که به طور گسترده در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند. بررسی مشخصات ارتعاشی ورق‌ها با توجه به کاربرد آن‌ها در صنایع مختلف مهندسی مورد توجه بسیاری از محققان می‌باشد [1، 2]. همچنین، مطالعه رفتار ارتعاشی ورق‌ها در تماس با سیال در صنایع مختلفی از جمله صنایع هسته‌ای، مخازن سوخت، اجزای داخلی راکتورها، صفحات خورشیدی و سازه‌های دریایی دارای اهمیت زیادی می‌باشد چون در برخی موارد حضور سیال باعث خستگی و یا از کارافتادگی سازه می‌گردد لذا آگاهی از رفتار سازه و سیال در اندرکنش دینامیکی بین آنها ضروری به نظر می‌رسد [3]. واضح است که فرکانس‌های طبیعی یک سازه از جمله ورق در حالت تماس با سیال متفاوت از فرکانس‌های آن در حالت بدون تماس با سیال می‌باشد [4]. محققان مطالعات تئوری و تجربی زیادی در زمینه ارتعاشات ورق‌های در تماس با سیال انجام دادند. تاریوردی‌لو و همکاران به منظور مطالعه ارتعاشات ورق دایروی در تماس با سیال غیرقابل تراکم، با محاسبه جرم افزوده[1] فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی را تعیین کردند [5]. الهوردی زاده و همکاران یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاشات یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی ارائه دادند. آنها معادلات حاکم بر ورق دایروی را با پاسخهای فرضی و روش کانترویچ حل کردند [6]. اسماعیل‌زاده و همکاران به استخراج فرکانس‌های طبیعی سازه‌های حامل سیال و غوطه‌ور در سیال پرداختند. آنها از تابع پتانسیل برای محاسبه فشار هیدرودینامیکی روی سازه استفاده کردند [7]. اوغورلو و همکاران به مطالعه رفتار دینامیکی ورق‌های مستطیلی روی بستر الاستیک و در تماس با سیال محدود پرداختند. آنها از روش اجزای محدود ترکیبی برای استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ورق استفاده کردند [8]. جئونگ به بررسی ارتعاشات دو ورق دایروی یکسان در تماس با سیال محدود و نامحدود پرداخت. او برای تحلیل خود از روش بسط بسل-فوریه و روش ریلی ریتز کمک گرفت. همچنین اثر فاصله دو ورق روی فرکانسهای طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت [9]. در سال 2010 دونگ به بررسی ارتعاش آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند در حالت سه بعدی پرداخت. وی در تحقیق خود از روش چبیشف-ریتز با در نظر گرفتن حاصلضرب سری‌های چندجمله ای چبیشف در توابع مرزی که شرایط مرزی را ارضاء می کنند، برای استخراج فرکانسهای طبیعی استفاده کرد [10]. کوتلو و همکاران، ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی روی بستر الاستیک و در تماس با سیال مطالعه کردند. آنها برای تحلیل ورق میندلین روی فونداسیون پسترناک از روش المان محدود و برای مدل کردن سیال از روش المان مرزی استفاده کردند [11]. کواک به مطالعه تأثیر جرم مجازی ناشی از تماس آب روی فرکانسهای طبیعی ورق دایروی پرداخت. او با بکارگیری تبدیل فوریه به محاسبه فاکتورهای نمو جرم مجازی افزوده در حالت بی‌بعد پرداخت [12]. در سال 2012 حسینی هاشمی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی در تماس با سیال پرداختند. آنها برای استخراج روابط حاکم بر ورق از تئوری میندلین و برای استخراج روابط حاکم بر سیال از معادله برنولی استفاده کردند [13]. اخیراً جئونگ و همکاران ارتعاش آزاد یک ورق دایروی با تکیه گاه گیردار در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها جابجایی دینامیکی ورق در تماس با سیال را با استفاده از ترکیب توابع مودال ورق خشک تعیین کردند. توابع ویژه مسئله را از روش ریلی-ریتز بدست آورده که برای استخراج شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی ورق در تماس با سیال استفاده کردند [14]. در سال 2003 مایونگ مو جانگ و همکاران، فرکانسهای طبیعی دو ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای معادله حرکت ورق‌های در تماس با سیال از روش بسط سری‌های بسل-فوریه و روش ریلی-ریتز استفاده کردند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج عددی حاصل از نرم افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت [15]. احسان عسگری و همکاران در سال 2013 ارتعاش یک ورق دایروی غوطه ور در سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها با نتایج آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفت [16].

مواد هدفمند (FGM[2]) مواد مرکب جدید با ریزساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آن‌ها بطور ملایم و پیوسته و طبق یک تابع معین از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. مزیت اصلی استفاده از این مواد این است که قادر به تحمل درجه حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده و مقاوم در برابر خوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارد. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که در مقابل درجه حرارت بالا باید مقاوم باشند استفاده می‌شود. این نوع از مواد به دلیل ویژگی خاص در سپرهای حرارتی موشک‌ها، مخازن شیمیایی و محیط‌های سایشی بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند [17]. با توجه به اهمیت مواد هدفمند در صنایع، محققین زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این نوع از مواد پرداختند. در سال 2009 جعفری مهرآبادی و همکارانش ارتعاش آزاد یک ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک بدست آورده و برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده کردند [18]. حسینی هاشمی و همکاران ارتعاشات ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای تحلیل ارتعاشات ورق روی بستر الاستیک از روش تحلیلی استفاده کردند [19]. در سال 2014 علی بخششی و کوروش خورشیدی ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تقریب جابجایی های ورق با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم از توابع سعی هارمونیک مثلثاتی استفاده کردند. برای دستیابی به فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش ریلی-ریتز بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استفاده کردند [20].

در سال 1394 رضوانی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق تقویت شده در آب پرداختند. آنها مطالعه خود را با سه روش تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام دادند و از تئوری ورق ارتوتروپیک برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند. همچنین آنها از روش جرم افزوده برای مدلسازی اثر سیال روی ارتعاشات ورق بهره بردند [21]. در سال 2017، خورشیدی و همکاران ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی در تماس با سیال را بصورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. ورق مستطیل به عنوان یکی از دیواره‌های مخزن مکعبی حاوی سیال در نظر گرفته شده است. آن‌ها از آزمایش مودال برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق استفاده کردند [22]. در سال 2017، کانالس و مانتاری یک روش تحلیلی برای مطالعه ارتعاشات ورق مستطیلی

1. Added mass

2. Functionally graded materils

کامپوزیتی ضخیم در تماس با سیال محدود ارائه کردند. میدان جابجایی ورق با استفاده از روش ریتز تقریب زده شد. آنها در تحقیق خود سیال را بصورت ایده‌ال، غیرویسکوز و غیرقابل تراکم فرض کردند. در نهایت اثر جهتگیری الیاف کامپوزیت به همراه پارامترهای هندسی ورق روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفت [23].

مرور کارهای انجام شده توسط محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاشات ورق از جنس مواد تابعی در تماس با سیال کارهای بسیار محدودی انجام شده است و این کارهای محدود نیز بیشتر به مطالعه ارتعاشات آزاد پرداخته‌اند. همچنین، در اغلب تحقیقات گذشته برای مطالعه رفتار ورق، از تئوری‌های مرتبه پایین مانند تئوری کلاسیک استفاده شده است..

در این پژوهش که مراحل آن بسیار دقیق انجام شده است به ارائه راه‌حل دقیقی برای ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی با ضخامت ثابت در تماس با سیال محدود تحت بار عرضی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پرداخته شده است. نکته قابل توجه آن است راه‌حل ارائه شده برای هر نوع بار خارجی قابل تعمیم است ولی در این تحقیق نیروی تحریک بصورت نقطه‌ای متحرک در نظر گرفته شده است. در ادامه پس از اعتبارسنجی روش ارائه شده، به بررسی اثر پارامترهای مختلف از جمله ارتفاع سیال، چگالی سیال و ترکیب ماده تابعی بر روی پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی پرداخته شده است.

2- فرمول‌بندی ریاضی و روابط حاکم

2-1 روابط حاکم بر ورق مستطیلی در تماس با سیال

یک ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم از جنس مواد تابعی را در نظر بگیرید که مطابق شکل 1 با سیال غیرقابل تراکم به ارتفاع h_1 در تماس است. پارامترهای a، b و h به ترتیب بیانگر طول، عرض و ارتفاع ورق می‌باشد. محورهای مختصات (x_1,x_2,x_3) برای استخراج روابط حاکم انتخاب شده است که در آن محورهای x_1 و x_2 منطبق بر صفحه میانی ورق می‌باشند.

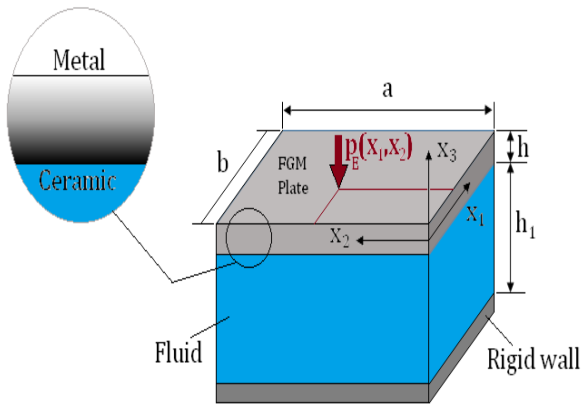

Fig. 1 Schematic of FG rectangular plate in contact with fluid under moving load with coordinate convection.

شکل 1 ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال تحت بار متحرک و نحوه استقرار محورهای مختصات

جابجایی در طول محورهای x_1 و x_2 به ترتیب با U_1 و U_2 و جابجایی در امتداد x_3 با U_3 نمایش داده می‌شود. طبق تئوری ورق میندلین، مولفه‌های جابجایی در امتداد محورهای مختصات (x_1,x_2,x_3) به صورت زیر بیان می شود [19]:

$$U_1=-x_3\psi_1(x_1,x_2,t),$$
$$U_2=-x_3\psi_2(x_1,x_2,t),$$
$$U_3=\psi_3(x_1,x_2,t), \tag{1}$$

که ψ_1 و ψ_2 به ترتیب چرخش حول محورهای x_1 و x_2 در صفحه میانی، ψ_3 جابجایی عرضی ورق و t متغیر زمان می‌باشد. با فرض جابجایی‌های کوچک و روابط کرنش-جابجایی خطی، نیروهای درون صفحه‌ای و گشتاور خمشی و پیچشی بر واحد طول ورق طبق روابط زیر حاصل می‌شود:

$$M_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11}x_3dx_3=-D\left(\psi_{1,1}+v\psi_{2,2}\right)$$
$$M_{22}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{22}x_3dx_3=-D\left(\psi_{2,2}+v\psi_{1,1}\right)$$
$$M_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{12}x_3dx_3=-\frac{D(1-v)}{2}(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})$$
$$Q_1=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{13}dx_3=-\frac{A(1-v)\kappa^2}{2}(\psi_1-\psi_{3,1})$$
$$Q_2=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{23}dx_3=-\frac{A(1-v)\kappa^2}{2}(\psi_2-\psi_{3,2}) \tag{2}$$

در روابط فوق κ^2 ضریب تصحیح برشی است که در این تحقیق برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته شده است [19]. همچنین ضرایب A و D برابر است با

$$(A,D)=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(x_3)}{1-v^2}(1,x_3{}^2)\mathrm{d}x_3 \tag{3}$$

با بکارگیری معادلات حرکت ناویر-استوکس، روابط حاکم بر ارتعاش ورق مستطیل به صورت زیر حاصل می شود:

$$M_{11,1}+M_{12,2}-Q_1=-I_3\ddot{\psi}_1$$
$$M_{12,1}+M_{22,2}-Q_2=-I_3\ddot{\psi}_2$$
$$Q_{1,1}+Q_{2,2}-P=I_1\ddot{\psi}_3 \tag{4}$$

در رابطه (4)، P نیروی خارجی است که می‌تواند به صورت مجموع نیروی حاصل از فشار هیدرودینامیکی p_L و نیروی تحریک p_E تعریف شود. همچنین، ضرایب I_1 تا I_3 به صورت زیر تعریف می شود:

$$I_1,I_2,I_3=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(x_3)(1,x_3,x_3{}^2)dx_3 \tag{5}$$

در روابط (3) تا (5)، $E(x_3)$ و $\rho(x_3)$ به ترتیب مدول الاستیسیته و چگالی ورق می‌باشند که طبق قانون نسبت حجمی حاکم بر مواد تابعی به صورت زیر تعریف می شوند [17]:

$$E(x_3)=E_c+(E_m-E_c)\left(\frac{1}{2}-\frac{x_3}{h}\right)^p \tag{6}$$

$$\rho(x_3)=\rho_c+(\rho_m-\rho_c)\left(\frac{1}{2}-\frac{x_3}{h}\right)^p \tag{7}$$

که در آن E_m و E_c به ترتیب بیانگر مدول الاستیسیته فلز و سرامیک و ρ_m و ρ_c چگالی فلز و سرامیک، x_3 مختصات در جهت ضخامت ورق و p ضریب توانی نسبت حجمی است. واضح است با انتخاب $p = 0$ می‌توانیم به ورق همگن از جنس فلز خالص دست بیابیم. از آنجایی که فشار دینامیکی وارد بر ورق از طرف سیال عمود بر سطح ورق است واضح است که نیروی هیدرودینامیکی p_L در رابطه (4) فقط در راستای x_3 بر ورق وارد شده و به صورت زیر می‌باشد:

$$p_L = m^* \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = m^* \ddot{\psi}_3 \tag{8}$$

در رابطه (8)، m^* جرم افزوده نام دارد که وابسته به مدلسازی سیال و نحوه تراکنش آن با سازه می‌باشد. با توجه به مرجع [13]، m^* برای ورق مستطیلی در تماس با سیال غیرقابل تراکم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m^* = -\frac{\rho_f}{\mu_f}\left[\frac{1 + c_1 e^{\mu_f h}}{1 - c_1 e^{\mu_f h}}\right] \tag{9}$$

که در آن ρ_f بیانگر چگالی سیال و μ_f شماره یا (عدد) موج خالص است. با جایگذاری رابطه (2) در رابطه (4) و استفاده از رابطه (9)، معادلات حرکت ورق در تماس با سیال تحت نیروی تحریک خارجی برحسب مولفه‌های جابجایی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2\psi_1 + \frac{D(1+\nu)}{2}\left(\psi_{1,1} + \psi_{2,2}\right)_{,1} - \frac{Ak^2(1-\nu)}{2}\left(\psi_1 - \psi_{3,1}\right) = I_3\ddot{\psi}_1$$

$$\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2\psi_2 + \frac{D(1+\nu)}{2}\left(\psi_{1,1} + \psi_{2,2}\right)_{,2} - \frac{Ak^2(1-\nu)}{2}\left(\psi_2 - \psi_{3,2}\right) = I_3\ddot{\psi}_2$$

$$\frac{Ak^2(1-\nu)}{2}\left[\nabla^2\psi_3 - (\psi_{1,1} + \psi_{2,2})\right] + p_E = (I_1 + m^*)\ddot{\psi}_3 \tag{10}$$

به منظور کدنویسی و دستیابی به نتایج کلی‌تر، پارامترهای بدون بعد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$X_1 = \frac{x_1}{a},\quad X_2 = \frac{x_2}{b},\quad \eta = \frac{a}{b},$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\frac{I_3}{A}},\quad \beta_2 = a\omega\sqrt{\frac{I_1}{A}},$$

$$\delta^2 = \frac{D}{Aa^2},\quad \gamma = \frac{m^*}{I_1 h} \tag{11}$$

که β_1 و β_2 پارامترهای فرکانسی بدون بعد نامیده می‌شوند. برای حرکت هارمونیک، تغییرمکان‌ها را به فرم زیر برحسب پارامترهای بی‌بعد می‌نویسیم:

$$\tilde{\psi}_1(X_1, X_2) = \psi_1(x_1, x_2, t)e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\psi}_2(X_1, X_2) = \psi_2(x_1, x_2, t)e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\psi}_3(X_1, X_2) = \frac{1}{a}\psi_3(x_1, x_2, t)e^{-i\omega t} \tag{12}$$

که در آن ω فرکانس طبیعی برحسب رادیان و $i = \sqrt{-1}$ است. باید توجه داشت که پارامترهای دارای علامت $(\tilde{\ })$ بدون بعد هستند. با جایگذاری معادلات (11) و (12) در رابطه (10)، معادلات حرکت حاکم بر ورق مستطیلی در تماس با سیال تحت نیروهای خارجی برحسب مولفه‌های بی‌بعد جابجایی حاصل می‌شود:

$$\tilde{\psi}_{1,11} + \eta^2\tilde{\psi}_{1,22} + \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\left(\tilde{\psi}_{1,11} + \eta\tilde{\psi}_{2,12}\right) - \frac{Ak^2a^2}{D}\left(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_{3,1}\right) + \frac{I_3a^2}{D\upsilon_1}\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial\tilde{t}^2} = 0 \tag{13}$$

$$\tilde{\psi}_{2,11} + \eta^2\tilde{\psi}_{2,22} + \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\eta\left(\tilde{\psi}_{1,12} + \eta\tilde{\psi}_{2,22}\right) - \frac{Ak^2a^2}{D}\left(\tilde{\psi}_2 - \eta\tilde{\psi}_{3,2}\right) + \frac{I_3a^2}{D\upsilon_1}\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial\tilde{t}^2} = 0 \tag{14}$$

$$\tilde{\psi}_{3,11} + \eta^2\tilde{\psi}_{3,22} - \left(\tilde{\psi}_{1,1} + \eta\tilde{\psi}_{2,2}\right) + \tilde{p}_E - (1+\gamma)\frac{a^2 I_1}{Ak^2\upsilon_1}\frac{\partial\tilde{\psi}_3}{\partial\tilde{t}^2} = 0 \tag{15}$$

2-2- تحلیل ارتعاشات آزاد

با توجه به اینکه در این تحقیق قصد داریم برای تحلیل ارتعاشات اجباری از روش بسط مودها استفاده کنیم لذا برای دستیابی به مودهای ارتعاشی، ابتدا لازم است ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور نیروی محرک خارجی باید مساوی صفر شود $\tilde{p}_E = 0$. با جایگذاری این مقدار در معادلات (13) تا (15)، سه معادله کوپله برحسب جابجایی‌ها حاصل می‌شود که برای حل تحلیلی آنها لازم است به نحوی غیرکوپله شوند. لذا مولفه‌های جابجایی را برحسب توابع پتانسیل W_1، W_2 و W_3 به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{\psi}_1 = c_1 W_{1,1} + c_2 W_{2,1} - \eta W_{3,2}$$

$$\tilde{\psi}_2 = c_1\eta W_{1,2} + c_2\eta W_{2,2} + W_{3,1}$$

$$\tilde{\psi}_3 = W_1 + W_2 \tag{16}$$

که در آن

$$c_1 = 1 - \frac{\alpha_2^2}{\nu_1\alpha_3^2}\quad,\quad c_2 = 1 - \frac{\alpha_1^2}{\nu_1\alpha_3^2} \tag{17}$$

که α_1^2، α_2^2 و α_3^2 ضرایبی هستند که از معادلات حرکت به دست می‌آیند. پس از انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی به دست می‌آوریم:

$$\alpha_1^2 = \left(\frac{\beta_1^2}{\delta^2} - \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{k^2\nu_1}\right) + \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2}{\delta^2} + \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{k^2\nu_1}\right)^2 - \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{\delta^2}}$$

$$\alpha_2^2 = \left(\frac{\beta_1^2}{\delta^2} - \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{k^2\nu_1}\right) - \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2}{\delta^2} + \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{k^2\nu_1}\right)^2 - \frac{\beta_2^2(1+\gamma)}{\delta^2}}$$

$$\alpha_3^2 = -(1+\gamma)\left(\frac{k^2}{\delta^2} - \frac{\beta_2^2}{k^2\nu_1}\right) \tag{18}$$

جایگذاری معادلات (16) در معادلات (13)تا (15) نتیجه می‌دهد:

$$W_{1,11} + \eta^2 W_{1,22} = -\alpha_1^2 W_1$$

$$W_{2,11} + \eta^2 W_{2,22} = -\alpha_2^2 W_2$$

$$W_{3,11} + \eta^2 W_{3,22} = -\alpha_3^2 W_3 \qquad (19)$$

که شامل سه معادله دیفرانسیل معمولی می‌باشد. مجموعه پاسخ‌های زیر برای معادلات دیفرانسیل (19) پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} W_1 = {} & [A_1 \sin(\lambda_1 X_2) + A_2 \cos(\lambda_1 X_2)] \sin(\mu_1 X_1) \\ & + [A_3 \sin(\lambda_1 X_2) \\ & + A_4 \cos(\lambda_1 X_2)] \sin(\mu_1 X_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 = {} & [A_5 \sinh(\lambda_2 X_2) + A_6 \cosh(\lambda_2 X_2)] \sin(\mu_2 X_1) \\ & + [A_7 \sin(\lambda_2 X_2) \\ & + A_8 \cos(\lambda_2 X_2)] \sin(\mu_2 X_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 = {} & [A_9 \sinh(\lambda_3 X_2) + A_{10} \cosh(\lambda_3 X_2)] \cos(\mu_3 X_1) \\ & + [A_{11} \sin(\lambda_3 X_2) \\ & + A_{12} \cos(\lambda_3 X_2)] \cos(\mu_3 X_1) \end{aligned} \qquad (20)$$

در رابطه (20)، λ_j و μ_j طبق روابط زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$\alpha_1^2 = \mu_1^2 + \eta^2 \lambda_1^2, \qquad \alpha_2^2 = \mu_2^2 - \eta^2 \lambda_2^2, \qquad \alpha_3^2 = \mu_3^2 - \eta^2 \lambda_3^2 \qquad (21)$$

همچنین در رابطه (20)، ثابت‌های A_1 تا A_{12} از طریق اعمال شرایط مرزی تعیین می‌شوند. شرایط مرزی در طول لبه‌های ورق مستطیلی طبق جدول 1 تعریف می‌شود [19]:

پاسخ‌های (20) با در نظر گرفتن تکیه‌گاه ساده در لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_1 = 1$ به صورت زیر در می‌آید:

$$W_1 = [A_1 \sin(\lambda_1 X_2) + A_2 \cos(\lambda_1 X_2)] \sin(\mu_1 X_1)$$

$$W_2 = [A_5 \sinh(\lambda_2 X_2) + A_6 \cosh(\lambda_2 X_2)] \sin(\mu_2 X_1)$$

$$W_3 = [A_9 \sinh(\lambda_3 X_2) + A_{10} \cosh(\lambda_3 X_2)] \cos(\mu_3 X_1) \qquad (22)$$

که در آن $(m = 1,2,\dots)$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = m\pi$.

با جایگذاری پاسخ‌های رابطه (22) در معادلات دیفرانسیل (19) و با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی در لبه‌های $X_2 = 0$ و $X_2 = 1$ شش معادله همگن حاصل می‌شود. برای دستیابی به جواب غیرصفر برای این معادلات، باید دترمینان ماتریس حاصل از این معادلات صفر شود که می‌توانیم با ترکیب شرایط تکیه‌گاهی، پاسخ‌های ارتعاشی مربوط به شش شرط مرزی SSSS, SSSC, SCSC, SSSF, SFSF و SCSF را به دست آوریم.

جدول 1 شرایط مرزی مختلف برای ورق مستطیل

Table 1 Various boundary conditions for rectangular pate

	لبه‌های $X_1 = 0$ و $X_1 = 1$		لبه‌های $X_2 = 0$ و $X_2 = 1$
		آزاد	$\bar{M}_{22} = \bar{M}_{12} = 0, \quad \bar{Q}_2 = 0$
	$\bar{M}_{11} = 0$	مفصلی	
مفصلی	$\tilde{\psi}_2 = 0$	گیردار	$\bar{M}_{22} = 0, \quad \tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_3 = 0$
	$\tilde{\psi}_3 = 0$		
			$\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}_3 = 0$

2-3- تحلیل ارتعاشات اجباری

در این بخش به بررسی ارتعاش اجباری ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال تحت بار متحرک پرداخته می‌شود. ابتدا نیروی تحریک ورق را به شکل بی‌بعد $\tilde{p}(X_1, X_2, \tilde{t}) = p_{\mathrm{E}}(x_1, x_2) F(t)/Ak^2 v_1$ در نظر می‌گیریم. در این رابطه برای حل معادلات حرکت (13) تا (15) از بسط مودهای ارتعاشی که ترکیبی از شکل مودهای ارتعاشی تحریک شده ورق در اثر اعمال نیروی $\tilde{p}(X_1, X_2, \tilde{t})$ است استفاده شده است.

$$\tilde{\psi}_1(X_1, X_2, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_1^{mn}(X_1, X_2) T^{mn}(\tilde{t}) \qquad (23)$$

$$\tilde{\psi}_2(X_1, X_2, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_2^{mn}(X_1, X_2) T^{mn}(\tilde{t}) \qquad (24)$$

$$\tilde{\psi}_3(X_1, X_2, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(X_1, X_2) T^{mn}(\tilde{t}) \qquad (25)$$

که در روابط (23) تا (25)، $\tilde{\tilde{\psi}}_1^{mn}(X_1, X_2)$، $\tilde{\tilde{\psi}}_2^{mn}(X_1, X_2)$ ، $\tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(X_1, X_2)$ توابع شکل مود ارتعاشی، m و n شماره نیم موجها به ترتیب در راستاهای X_1 و X_2 و $T^{mn}(\tilde{t})$ توابع زمانی متناسب با توابع شکل مود می‌باشد. با جایگذاری این روابط در معادلات حرکت (13) تا (15) و با توجه به اینکه توابع شکل مود ارتعاشی در معادلات ارتعاش آزاد ورق صدق می‌کنند. می‌توان با ساده سازی معادلات مشابه بخش قبل به معادلات زیر رسید:

$$-\frac{I_3 a^2}{D v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\omega^{mn})^2 \tilde{\tilde{\psi}}_1^{mn}\right] T^{mn}(\tilde{t}) = -\frac{I_3 a^2}{D v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_1^{mn} \ddot{T}^{mn}(\tilde{t}) \qquad (26)$$

$$-\frac{I_3 a^2}{D v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\omega^{mn})^2 \tilde{\tilde{\psi}}_2^{mn}\right] T^{mn}(\tilde{t}) = -\frac{I_3 a^2}{D v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_2^{mn} \ddot{T}^{mn}(\tilde{t}) \qquad (27)$$

$$(1+\gamma) \frac{a^2 I_1}{Ak^2 v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\omega^{mn})^2 \tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}\right] T^{mn}(\tilde{t}) + \tilde{p} = (1+\gamma) \frac{a^2 I_1}{Ak^2 v_1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn} \ddot{T}^{mn}(\tilde{t}) \qquad (28)$$

اگر معادله (26) را در $v_1 \tilde{\tilde{\psi}}_1^{m'n'} dX_1 dX_2$، معادله (27) را در $v_1 \tilde{\tilde{\psi}}_2^{m'n'} dX_1 dX_2$ و معادله (28) را در $Ak^2 v_1 / a^2 I_1 \, \tilde{\tilde{\psi}}_3^{m'n'} dX_1 dX_2$ ضرب کرده و پس از جمع کردن سه معادله حاصل روی سطح ورق انتگرال بگیریم، رابطه‌ی (29) به دست می‌آید:

$$\ddot{T}^{mn}(\tilde{t})\int_0^1\int_0^1\left[-\frac{I_3a^2}{D}\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_1^{m'n'}+\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_2^{m'n'}\right)+I_1\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right]dX_1dX_2+(\omega^{mn})^2T^{mn}(\tilde{t})\int_0^1\int_0^1\left[-a^2\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_1^{m'n'}+\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_2^{m'n'}\right)+I_1\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right]dX_1dX_2=\int_0^1\int_0^1\left(\frac{Ak^2v_1}{a^2(1+\gamma)}\tilde{p}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right)dX_1dX_2 \quad (29)$$

با فرض $(Ak^2v_1/a^2)\tilde{p}=\tilde{F}(\tilde{t})g(X_1,X_2)$ که با توجه به نوع بارگذاری تعیین می‌شود، رابطه (29) به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$\ddot{T}^{mn}(\tilde{t})\int_0^1\int_0^1\left[-\frac{I_3a^2}{D}\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_1^{m'n'}+\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_2^{m'n'}\right)+I_1\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right]dX_1dX_2+(\omega^{mn})^2T^{mn}(\tilde{t})\int_0^1\int_0^1\left[-a^2\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_1^{m'n'}+\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_2^{m'n'}\right)+I_1\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right]dX_1dX_2=\frac{1}{(1+\gamma)}\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{F}(\tilde{t})g(X_1,X_2)\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right)dX_1dX_2 \quad (30)$$

با توجه به رابطه (30) رابطه تعامد شکل مودهای ارتعاشی را برای ورق‌های مستطیل شکل به صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

$$\int_0^1\int_0^1\left[-\frac{I_3a^2}{D}\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_1^{m'n'}+\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_2^{m'n'}\right)+I_1\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right]dX_1dX_2=\begin{cases}0 & m,n\neq m',n'\\ \neq 0 & m,n\neq m',n'\end{cases} \quad (31)$$

با فرض:

$$K^{mn}=\int_0^1\int_0^1\left[-\frac{I_3a^2}{D}\left[\left(\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}\right)^2+\left(\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}\right)^2\right]+I_1\left(\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}\right)^2\right]dX_1dX_2 \quad (32)$$

$$Q^{mn}(\tilde{t})=\frac{1}{(1+\gamma)}\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{F}(\tilde{t})g(X_1,X_2)\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right)dX_1dX_2 \quad (33)$$

معادله (30) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\ddot{T}^{mn}(\tilde{t})+(\omega^{mn})^2T^{mn}(\tilde{t})=\frac{Q^{mn}(\tilde{t})}{K^{mn}} \quad (34)$$

حل معادله (34) منجر به تعیین تابع زمانی $T^{mn}(\tilde{t})$ به فرم زیر می‌شود:

$$T^{mn}(\tilde{t})=\frac{1}{K^{mn}\omega^{mn}}\int_0^{\tilde{t}}Q^{mn}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه (35) در رابطه (23) تا (25) می‌توان نوشت:

$$\tilde{\psi}_1(X_1,X_2,\tilde{t})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^{mn}\omega^{mn}}\tilde{\bar{\psi}}_1^{mn}(x_1,x_2)\int_0^{\tilde{t}}Q^{mn}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (36)$$

$$\tilde{\psi}_2(X_1,X_2,\tilde{t})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^{mn}\omega^{mn}}\tilde{\bar{\psi}}_2^{mn}(x_1,x_2)\int_0^{\tilde{t}}Q^{mn}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (37)$$

$$\tilde{\psi}_3(X_1,X_2,\tilde{t})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K^{mn}\omega^{mn}}\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}(x_1,x_2)\int_0^{\tilde{t}}Q^{mn}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (38)$$

با توجه به روابط (36) تا (38) و رابطه (2) برای ورق تحت بارگذاری عرضی، مقادیر گشتاورهای خمشی و نیروی برشی را می‌توان برای هر نوع بارگذاری بدست آورد که در این تحقیق، پاسخ دینامیکی ورق مستطیل تحت بار نقطه‌ای متمرکز و متحرک ارائه شده است.

2-3-1- پاسخ ورق به بار نقطه‌ای متمرکز و متحرک

برای محاسبه جابجایی عرضی ورق مستطیل ضخیم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال تحت بار نقطه‌ای متمرکز که در حالت کلی در مکان (X_1^*,X_2^*) به آن وارد می‌گردد به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. ابتدا $Q^{mn}(\tilde{t})$ را با استفاده از معادله (33) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Q^{mn}(\tilde{t})=\frac{1}{(1+\gamma)}\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{F}(\tilde{t})g(X_1,X_2)\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right)dX_1dX_2=\frac{1}{(1+\gamma)}\int_0^1\int_0^1\left(\tilde{F}(\tilde{t})\delta(X_1-X_1^*)\delta(X_2-X_2^*)\tilde{\bar{\psi}}_3^{m'n'}\right)dX_1dX_2=\frac{1}{(1+\gamma)}\tilde{F}(\tilde{t})\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}(X_1^*,X_2^*) \quad (39)$$

با توجه به معادله فوق، معادله (38) مربوط به جابجایی عرضی ورق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tilde{\psi}_3(X_1,X_2,\tilde{t})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}(X_1,X_2)\tilde{\bar{\psi}}_3^{mn}(X_1^*,X_2^*)}{(1+\gamma)K^{mn}\omega^{mn}}\int_0^{\tilde{t}}\tilde{F}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (40)$$

ابتدا فرض می‌کنیم:

$$h_{mn}(\tilde{t})=\int_0^{\tilde{t}}\tilde{F}(\tilde{t})sin[\omega^{mn}(\tilde{t}-\tau)]d\tau \quad (41)$$

که در رابطه فوق $\tilde{F}(\tilde{t})$ بار اعمال شده می‌باشد و ω^{mn} پارامتر فرکانسی برای شکل مود (m,n) می‌باشد و τ نیز یک متغیر زمانی است. مقدار انتگرال کونولوشن با توجه به نوع بارگذاری مشخص می‌شود. ورق مستطیل نسبتاً ضخیم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با تکیه‌گاه‌های ساده که تحت تاثیر نیروی متمرکز پایای F_0 قرار دارد و نیرو با سرعت ثابت V روی خط (X_2,X_2^*) بر روی ورق حرکت می‌کند را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه جابجایی عرضی ورق تحت بار نقطه‌ای متحرک به صورت رابطه‌ی (42) عمل می‌کنیم:

$$Q^{mn}(\tilde{t}) = \frac{1}{(1+\gamma)} \int_0^1 \int_0^1 \left(\tilde{F}(\tilde{t})\delta(X_1 - V\tilde{t})\delta(X_2 - X_2^*)\tilde{\tilde{\psi}}_3^{m'n'}\right) dX_1 dX_2 = \frac{1}{(1+\gamma)} \tilde{F}(\tilde{t})\tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(V\tilde{t}, X_2^*) \quad (42)$$

با توجه به معادله فوق، معادله (40) مربوط به جابجایی ورق به صورت رابطه‌ی (43) ساده می‌شود:

$$\tilde{\psi}_3(X_1, X_2, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(X_1, X_2)}{(1+\gamma)K^{mn}\omega^{mn}} \int_0^{\tilde{t}} \tilde{F}(\tilde{t})\tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(V\tilde{t}, X_2^*) sin[\omega^{mn}(\tilde{t} - \tau)]d\tau \quad (43)$$

با جایگذاری شکل مود $\tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(X_1, X_2)$ ورق مستطیل مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS معادله فوق بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\tilde{\psi}_3(X_1, X_2, \tilde{t}) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0 \tilde{\tilde{\psi}}_3^{mn}(X_1, X_2) sin(n\pi X_2^*)}{(1+\gamma)K^{mn}\omega^{mn}} \times \left[\frac{\omega^{mn} sin(n\pi V\tilde{t}) - m\pi V_0 sin(\omega^{mn}\tilde{t})}{(\omega^{mn})^2 - (m\pi V_0)^2}\right] \quad (44)$$

3- بحث بر روی نتایج

به منظور بررسی صحت مدل و نتایج بدست آمده از تحلیل ارتعاش اجباری ورق مستطیل در تماس با سیال تحت بار نقطه‌ای متحرک، نتایج این تحقیق در دو حالت با نتایج سایر تحقیقات مورد مقایسه قرار گرفته است. در حالت اول شش فرکانس طبیعی اول ورق مربعی در حالت خاص ورق همگن در تماس با سیال با نتایج مرجع [13] مطابق جدول 2 مقایسه شده است. در تحقیق مذکور ارتعاشات یک ورق مستطیلی همگن در تماس با سیال مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت دوم نتایج پاسخ دینامیکی ورق مستطیلی در حالت خاص یعنی (ورق همگن) و بدون تماس با سیال با نتایج بدست آمده از مرجع [24] مطابق شکل 2 مورد مقایسه قرار گرفته است. در مرجع مذکور از شرایط مرزی SSSS و ورق مستطیلی بدون تماس با سیال تحت بار متحرک و با مشخصات $a = b = 1m$ و $E = 70GPa$ استفاده شده است. در شکل‌های 2 و 3 نتایج این دو تحقیق در وضعیتی که سرعت بار وارده به ترتیب $V = 1\,m/s$ و $V = 1.5\,m/s$ است مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول 2 مقایسه شش فرکانس اول $\varpi = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho/E}$ ورق مربعی همگن در تماس با سیال با مرجع [13]

Table 2 Comparison of the first six frequency parameters $\varpi = \omega(b^2/h)\sqrt{\rho/E}$ for a homogeneous square plate coupled with cubic volume of fluid with Ref. [13].

B.C	Method	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
SSSS	Ref. [13]	11.620	38.681	38.681	65.477	75.877	78.502
	Present	11.980	40.106	40.106	67.414	80.102	83.254

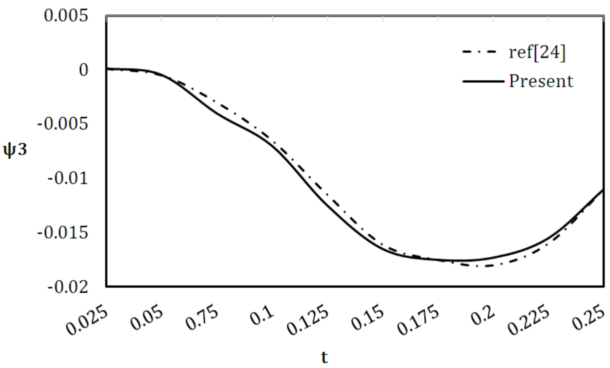

Fig. 2 Comparison of deflection in the FG rectangular plate with boundary condition SSSS and $a = b = 1m$ ، $X_2^* = 1/2$ ، $V = 1\,m/s$ ، $F/D = 1$ and $\rho h/D = 1$.

شکل 2 مقایسه جابجایی عرضی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS تحت بار متحرک با ثوابت: $a = b = 1m$ ، $X_2^* = 1/2$ ، $V = 1\,m/s$ ، $F/D = 1$ و $\rho h/D = 1$

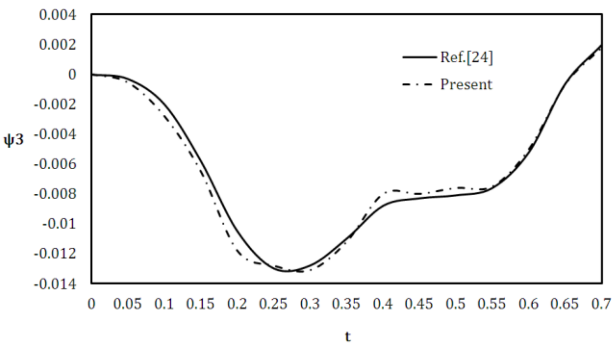

Fig. 3 Comparison of deflection in the FG rectangular plate with boundary condition SSSS and $a = b = 1m$ ، $X_2^* = 1/2$ ، $V = 1.5\,m/s$ ، $F/D = 1$ and $\rho h/D = 1$.

شکل 3 مقایسه جابجایی عرضی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS تحت بار متحرک با ثوابت: $a = b = 1m$ ، $X_2^* = 1/2$ ، $V = 1.5\,m/s$ ، $F/D = 1$ و $\rho h/D = 1$

نتایج نشان می‌دهد جواب‌ها انطباق خوبی با هم دارند. معادلاتی که در این تحقیق بدست آمده می‌تواند برای هر نوع بارگذاری، چه از لحاظ زمانی و چه از لحاظ مکانی بکار گرفته شوند، اما در این بخش بارهای متحرک با مقدار ثابت را در نظر می‌گیریم. در انتهای این بخش تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و بارگذاری از قبیل نسبت طول به عرض ورق، ضخامت به طول ورق، اندازه بارگذاری عرضی، مختصات محل اعمال بارگذاری عرضی، چگالی سیال، ارتفاع سیال و توان کسر حجمی را روی جابجایی عرضی مرکزی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد. خواص ماده تابعی طبق جدول 3 در نظر گرفته شده است [17]:

جدول 3 خواص مکانیکی ماده تابعی

Table 3 Mechanical properties of the FG material

نوع ماده	چگالی	مدول الاستیسیته	ضریب پواسون
آلومینیوم	$2700\,kg/m^3$	$70\,GPa$	0.3
آلومینا	$3800\,kg/m^3$	$380\,GPa$	0.3

شکل 4 پاسخ زمانی ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی تحت بار متحرک در تماس سیال و بدون تماس سیال را نشان می‌دهد. نتایج این شکل نشان می‌دهد همانطور که انتظار می‌رفت وجود سیال باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود. این امر به این دلیل است که حضور سیال باعث افزایش جرم کلی سیستم می‌شود، لذا ماکزیمم جابجایی ورق شناور کمتر از ورق خشک اتفاق می‌افتد. همچنین این شکل نشان می‌دهد وجود سیال باعث به تاخیر افتادن ماکزیمم جابجایی پاسخ ورق نیز می‌شود.

در شکل 5 جابجایی عرضی مرکزی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای ارتفاع‌های مختلف سیال نشان داده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود با افزایش ارتفاع سیال در ورق شناور سرعت پاسخ ورق به بار متحرک و ماکزیمم مقدار جابجایی به مقدار ناچیز افزایش می‌یابد و با افزایش ارتفاع سیال سرعت پاسخ ورق و ماکزیمم جابجایی آن کمتر می‌شود.

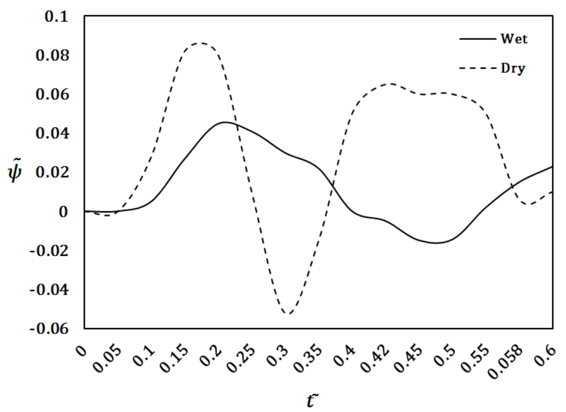

Fig. 4 Dynamic response of the FG dry and wet rectangular plate in contact with stationary fluid with $\delta = 0.05$ ،$\eta = 1$ ، $V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ and $\frac{h_1}{a} = 1$.

شکل 4 جابجایی عرضی مرکزی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS تحت بار متحرک در دو حالت خشک و شناور با ثوابت، $\delta = 0.05$، $\eta = 1$ ، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 1$.

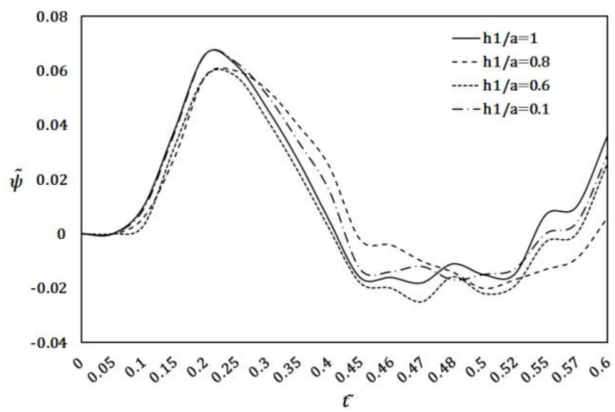

Fig. 5 Effect of the fluid height on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\delta = 0.05$ ،$\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 5 اثر ارتفاع سیال بر پاسخ زمانی ورق مستطیل موادتابعی با شرایط مرزی SSSS تحت بار متحرک با ثوابت، $\delta = 0.05$، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

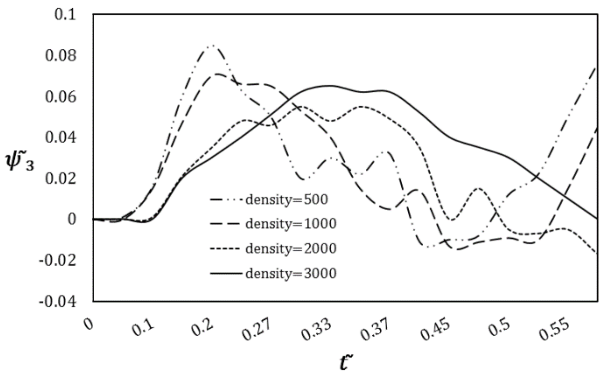

Fig. 6 Effect of the fluid density on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\delta = 0.05$ ،$\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 6 اثر چگالی سیال بر پاسخ زمانی ورق مستطیل مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS تحت بار متحرک با ثوابت، $\delta = 0.05$، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$

شکل 6 جابجایی عرضی مرکزی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای چگالی‌های مختلف سیال را نشان می‌دهد. نمودارهای این شکل بیانگر آن است که با افزایش چگالی سیال ماکزیمم مقدار جابجایی ورق کاهش می‌یابد و ماکزیمم جابجایی دیرتر اتفاق می‌افتد. دلیل این امر می‌تواند افزایش جرم کلی به واسطه افزایش چگالی سیال باشد.

در شکل‌های 7 و 8 جابجایی عرضی مرکزی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی به ترتیب برای دو حالت بدون تماس با سیال و با تماس با سیال برای نسبتهای مختلف طول به عرض ورق را به نمایش در آمده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش نسبت طول به عرض ورق مقدار جابجایی عرضی کاهش می‌یابد و نیز نوسانات جابجایی عرضی زیاد شده و ماکزیمم جابجایی مرکزی ورق دیرتر اتفاق می‌افتد.

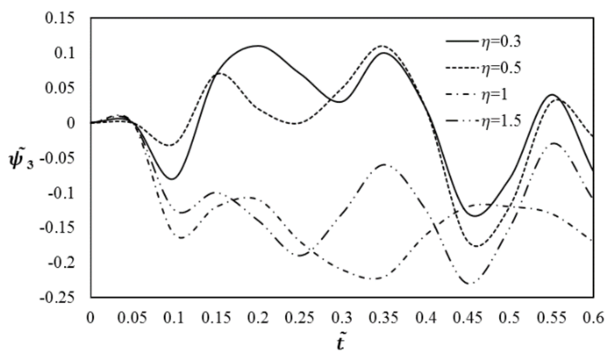

Fig. 7 Effect of the ratio length/width of the plate on the dynamic response of the FG rectangular dry plate with $\delta = 0.05$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 7 اثر نسبت طول به عرضی ورق بر پاسخ زمانی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS بدون تماس سیال و ثوابت، $\delta = 0.1$، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

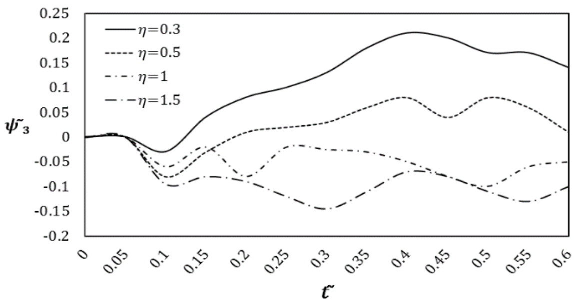

Fig. 8 Effect of the ratio length/width of the plate on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\delta = 0.05$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$, $\frac{h_1}{a} = 0.8$.

شکل 8 اثر نسبت طول به عرض ورق بر پاسخ زمانی ورق مستطیل از جنس مواد تابعی با شرایط مرزی SSSS با تماس سیال و ثوابت، $\delta = 0.1$ ،$V = 10\,m/s$، $\frac{h_1}{a} = 0.8$ و $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

شکلهای 9 و 10 تاثیر پارامتر نسبت ضخامت به طول ورق روی جابجایی عرضی مرکزی ورق مستطیل نسبتاً ضخیم از جنس مواد تابعی به ترتیب بدون تماس با سیال و با تماس با سیال و شرایط مرزی SSSS را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق جابجایی عرضی ورق افزایش می‌یابد و همچنین جابجایی عرضی ورق درتماس با سیال کمتر از جابجایی عرضی ورق بدون تماس سیال می‌باشد.

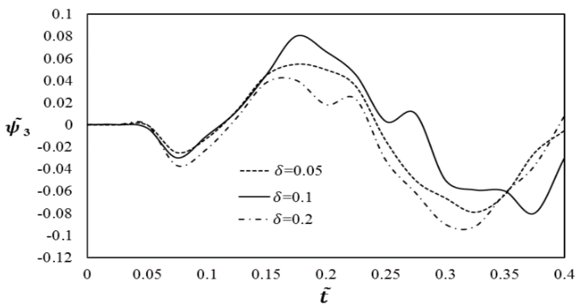

Fig. 9 Effect of the ratio thickness/lenth of the plate on the dynamic response of the FG rectangular dry plate with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 9 اثر نسبت ضخامت به طول ورق مواد تابعی بر پاسخ زمانی آن با شرایط مرزی SSSS بدون تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

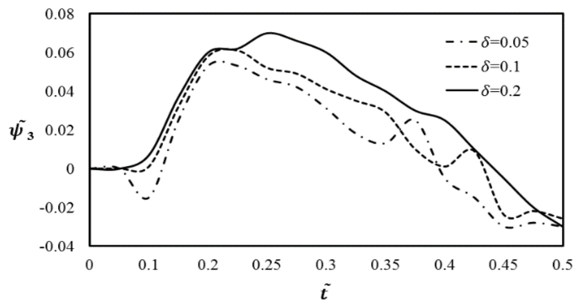

Fig. 10 Effect of the ratio thickness/lenth of the plate on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$, $\frac{h_1}{a} = 0.8$.

شکل 10 اثر نسبت ضخامت به طول ورق مواد تابعی بر پاسخ زمانی آن با شرایط مرزی SSSS در تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$

شکلهای 11 و 12 تأثیر مقدار ماکزیمم بار اعمال شده بر جابجایی عرضی ورق مستطیل ضخیم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و بدون تماس با سیال و شرایط مرزی SSSS را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد بعلت ثابت بودن فرکانس طبیعی ارتعاش، با افزایش مقدار نیرو فقط دامنه ارتعاش تغییر می‌کند و تأثیری بر شکل ارتعاش ندارد. همچنین اندازه دامنه ارتعاش بوجود آمده رابطه مستقیم و خطی با مقدار بار دارد.

شکل‌های 13 و 14 تأثیر مختصات محل اعمال بار بر جابجایی عرضی ورق مستطیل ضخیم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و بدون تماس با سیال و شرایط مرزی SSSS را نشان می‌دهند. این شکل‌ها نشان می‌دهند مانند مقدار ماکزیمم بار اعمالی با تغییر محل اعمال بار، شکل نمودار جابجایی عرضی تغییر نکرده و فقط دامنه آن تغییر می‌کند و این دامنه رابطه مستقیم با محل اعمال بار دارد.

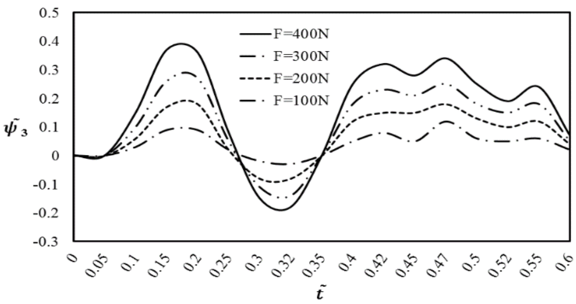

Fig. 11 Effect of moving load magnitnde on the dynamic response of the FG rectangular dry plate with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$.

شکل 11 اثر مقدار بار متحرک بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS بدون تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\frac{m}{s}$ و $\delta = 0.05$

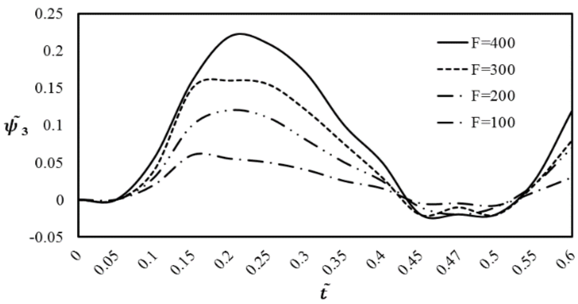

Fig. 12 Effect of moving load magnitude on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\eta = 1$ ، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$.

شکل 12 اثر مقدار بار متحرک بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS در تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$، $\delta = 0.05$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$.

شکل‌های 15 و 16 تأثیر سرعت بار متحرک بر جابجایی عرضی ورق مستطیل ضخیم از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و بدون تماس با سیال و شرایط مرزی SSSS را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهد با تغییر در مقدار سرعت بار اعمال شده، سرعت پاسخ ورق و ماکزیمم مقدار جابجایی تغییر کرده به گونه‌ای که با افزایش سرعت بار متحرک مقدار جابجایی عرضی ورق کاهش یافته و ماکزیمم خیز ورق سریعتر اتفاق می‌افتد.

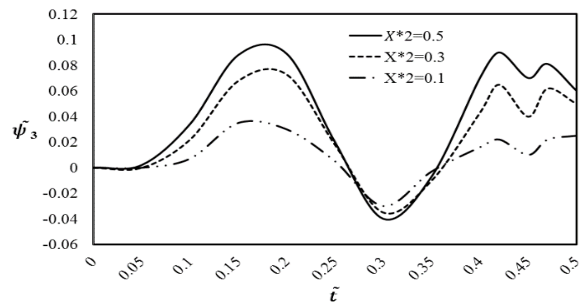

Fig. 13 Effect of load coordinates on the dynamic response of the FG rectangular dry plate with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$, $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 13 اثر مختصات محل اعمال بار متحرک بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS بدون تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$ و $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

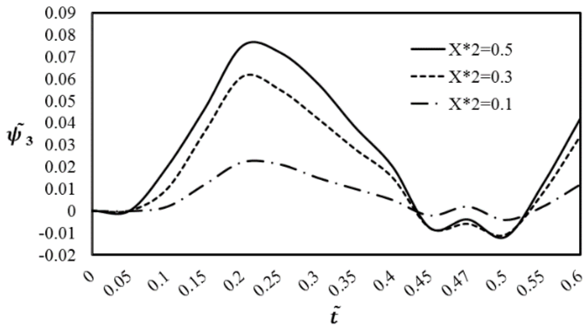

Fig. 14 Effect of load coordinates on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$, $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$, $\frac{h_1}{a} = 0.8$.

شکل 14 اثر مختصات محل اعمال بار متحرک بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS در تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$

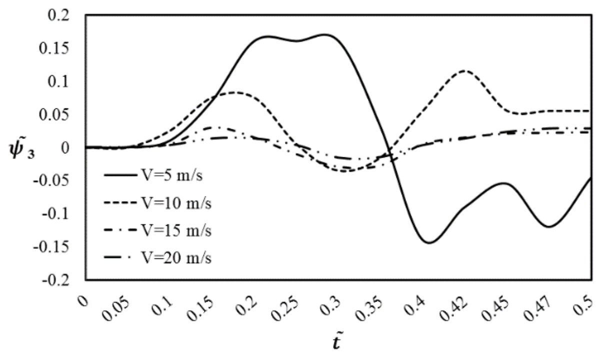

Fig. 15 Effect of moving load velocity on the dynamic response of the FG rectangular dry plate with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$, $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 15 اثر سرعت بار متحرک بر جابجایی عرضـی مرکزی با شرایط مرزی SSSS بدون تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$ و $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$

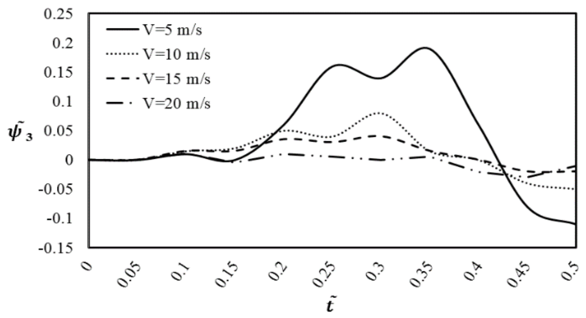

Fig. 16 Effect of load coordinates on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with stationary fluid with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$, $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$, $\frac{h_1}{a} = 0.8$.

شکل 16 اثر سرعت بار متحرک بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS در تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$ ، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$

به منظور بررسی تأثیر توان کسر حجمی مواد تابعی بر جابجایی عرضی ورق مستطیل ضخیم از جنس مواد تابعی و شرایط مرزی SSSS نمودارهای شکل 17 ارائه شده است. نتایج این شکل نشان می‌دهد با افزایش توان کسر حجمی، جابجایی عرضی مرکزی کاهش می‌یابد به عبارت دیگر، با افزایش درصد سرامیک ورق، جابجایی آن کاهش می‌یابد. در نتیجه ورق از جنس فلز خالص دارای بیشترین و سرامیک خالص دارای کمترین جابجایی عرضی می‌باشند.

4- نتیجه گیری

در این تحقیق، ارتعاشات اجباری ورق مستطیل از جنس مواد تابعی نسبتاً ضخیم با ضخامت ثابت در تماس با سیال تحت بار نقطه‌ای متحرک مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل ورق مواد تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ریزنر- میندلین با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و تنش‌های برشی عرضی می‌باشد و از توابع پتانسیل سرعت و معادله برنولی برای بدست آوردن فشار اعمال شده سیال بر روی سطح آزاد ورق استفاده شد. برای ورق‌های مستطیلی با دو لبه‌ی موازی برروی تکیه گاه ساده، معادله مشخصه

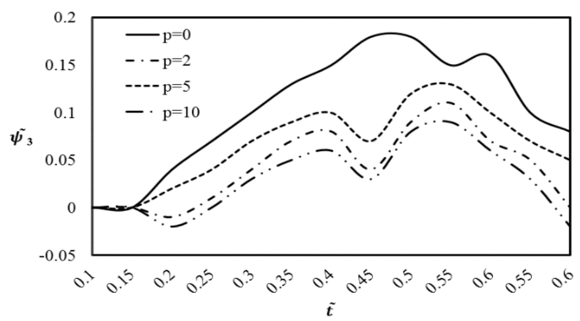

Fig. 17 Effect of power index on the dynamic response of the FG rectangular plate in contact with fluid with $\eta = 1$ ،$V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$, $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$.

شکل 17 اثر توان کسر حجمی بر جابجایی عرضی مرکزی با شرایط مرزی SSSS در تماس با سیال و ثوابت، $\eta = 1$، $V = 10\,m/s$ ، $\delta = 0.05$، $F(\tilde{t}) = 100U(\tilde{t})$ و $\frac{h_1}{a} = 0.8$

ارتعاشی برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی، با استفاده از حل دقیق بدست آمده و سپس به تحلیل نتایج عددی ارتعاش آزاد و تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت طول به عرض ورق، ضخامت به طول ورق، چگالی سیال، ارتفاع سیال و غیره روی پاسخ دینامیکی ورق پرداخته شد. با توجه به نتایج بدست آمده در این پژوهش، نکات زیر قابل توجه است:

- از آنجا که حضور سیال باعث افزایش جرم کلی سیستم می‌شود و باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود، لذا ماکزیمم جابجایی ورق شناور کمتر از ورق خشک است. همچنین وجود سیال باعث به تاخیر افتادن ماکزیمم جابجایی پاسخ ورق نیز می‌شود.
- با افزایش ارتفاع سیال در تماس با ورق، سرعت پاسخ ورق به بار متحرک و ماکزیمم مقدار جابجایی به مقدار ناچیز افزایش می‌یابد و با افزایش ارتفاع سیال سرعت پاسخ ورق و ماکزیمم جابجایی آن کمتر می‌شود.
- چون افزایش چگالی سیال باعث افزایش جرم کلی سیستم می‌شود لذا با افزایش چگالی سیال ماکزیمم مقدار جابجایی ورق کاهش می‌یابد و ماکزیمم جابجایی دیرتر اتفاق می‌افتد.
- با افزایش نسبت طول به عرض ورق مقدار جابجایی عرضی کاهش می‌یابد و نیز نوسانات جابجایی عرضی زیاد شده و ماکزیمم جابجایی مرکزی ورق زودتر اتفاق می‌افتد.
- با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق جابجایی عرضی ورق افزایش می‌یابد و همچنین جابجایی عرضی ورق در تماس با سیال کمتر از جابجایی عرضی ورق بدون تماس سیال می‌باشد.
- به علت ثابت بودن فرکانس طبیعی ارتعاش، با افزایش دامنه نیروی تحریک فقط دامنه ارتعاش افزایش می‌یابد و افزایش آن تاثیری بر شکل ارتعاش ندارد. همچنین اندازه دامنه ارتعاش بوجود آمده رابطه مستقیم و خطی با مقدار بار دارد.
- مانند دامنه نیروی تحریک، با تغییر محل اعمال بار، شکل نمودار جابجایی عرضی تغییر نکرده و فقط دامنه آن تغییر می‌کند و این دامنه رابطه مستقیم با محل اعمال بار دارد.
- با تغییر در مقدار سرعت بار اعمال شده، سرعت پاسخ ورق و ماکزیمم مقدار جابجایی تغییر کرده به گونه‌ای که با افزایش سرعت بار متحرک مقدار جابجایی عرضی و تاخیر زمان کاهش می‌یابند.
- با افزایش کسر حجمی ماده تابعی جابجایی عرضی مرکزی کاهش می‌یابد به عبارت دیگر، با افزایش درصد سرامیک در ماده تابعی، مقدار جابجایی عرضی ورق کاهش می‌یابد.

5- مراجع

[1] Amiri, J. V., Nikkhoo, A., Davoodi, M. R., Hassanabadi, M. E., “Vibration analysis of a Mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method” Thin-Walled Structures, No. 62, pp. 53-64, 2013.

[2] Hejripour, F., Saidi, A. R., “Nonlinear free vibration analysis of annular sector plates using differential quadrature method” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, No. 226, Vol. 2, pp. 485-497, 2012.

[3] Hasheminejad, S. M., Khaani, H. A., Shakeri, R., “Free vibration and dynamic response of a fluid-coupled double elliptical plate system using Mathieu functions” International Journal of Mechanical Sciences, No.75, pp. 66-79, 2013.

[4] Kerboua, Y., Lakis, A. A., Thomas, M., Marcouiller, L., “Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid” Applied Mathematical Modelling, Vol. 32, No.12, pp. 2570-2586, 2008.

[5] Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R., “Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid” Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, 2013.

[6] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., Bahrami, M. N., “Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates” Journal of Sound and Vibration, Vol. 310, No. 4, pp. 966-984, 20010.

[7] Esmailzadeh, M., Lakis, A. A., Thomas, M., Marcouiller, L., “Three-dimensional modeling of curved structures containing and/or submerged in fluid” Finite Elements in Analysis and Design, 44(6), pp. 334-345, 2008.

[8] Uğurlu, B., Kutlu, A., Ergin, A., Omurtag, M. H. “Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid”. Journal of Sound and Vibration, Vol. 317, No.1, pp. 308-328, 2008.

[9] Jeong, K. H., “Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. Journal of Sound and Vibration”, Vol. 260, No. 4, pp. 653-670, 2003.

[10] Dong, C. Y., “Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev–Ritz method” Materials & Design, Vol. 29, No. 8, pp. 1518-1525, 2008.

[11] Kutlu, A., Uğurlu, B., Omurtag, M. H., Ergin, A., “Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid” Ocean Engineering, No. 42, pp. 112-125, 2012.

[12] Kwak, M. K., “Hydroelastic vibration of circular plates” Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, No. 3, pp. 293-303, 1997.

[13] Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., Rokni, H., “Natural frequencies of rectangular Mindlin plates coupled with stationary fluid” Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, No. 2, pp. 764-778, 2012.

[14] Jeong, K. H., Lee, G. M., Kim, T. W., “Free vibration analysis of a circular plate partially in contact with a liquid” Journal of Sound and Vibration, Vol. 324, No. 1, pp. 194-208, 2009.

[15] Myung, J. J., Young, H. C., “Fluid bounding effect on natural frequencies of fluid-coupled circular plates” KSME International Journal, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, 2003.

[16] Askari, E., Jeong, K. H., Amabili, M. “ Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface” Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, 2013.

[17] Jomehzadeh, E., Saidi, A. R., Atashipour, S. R. “ An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates” Materials & Design, Vol. 30, No. 9, pp. 3679-3685, 2009.

[18] Mehrabadi, S. J., Kargarnovin, M. H., & Najafizadeh, M. M. “Free vibration analysis of functionally graded coupled circular plate with piezoelectric layers”. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 23, No. 8, pp. 2008-2021, 2009.

[19] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., Omidi, M. “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory” Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, No. 5, pp. 1276-1291, 2010.

[20] Khorshidi, K., Bakhsheshy, A., “Free Natural Frequency Analysis of an FG Composite Rectangular Plate Coupled with Fluid using Rayleigh–Ritz Method”. Mechanics of Advanced Composite Structures, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, 2014.

[21] Rezvani, H., Fazeli, H., Saeid Kiasat, M., Hajihashemi G., “Evaluation of added mass effect on natural frequencies of a structure using analytical, nuemerical and experimental methods” Amirkabir Mechanical Engineering Journal, Vol. 47, No. 2, pp. 60-70, 2014. (in Persian فارسی)

[22] Khorshidi, K., Akbari, F., & Ghadirian, H., “Experimental and analytical modal studies of vibrating rectangular plates in contact

with a bounded fluid". Ocean Engineering, Vol. 140, pp.146-154, 2017.

[23] Canales, F. G., Mantari, J. L., "Laminated composite plates in contact with a bounded fluid. Free vibration analysis via unified formulation" Composite Structures, Vol. 162, pp. 374-387, 2017.

[24] Eftekhari, S. A., Jafari, A. A., "A mixed method for free and forced vibration of rectangular plates" Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, No. 6, pp. 2814-2831, 2012.