



حل مسأله خمش و کمانش ورق نیمه ضخیم کامپوزیت ویسکوالاستیک با استفاده از روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

آرش پالیزوان¹، فرشید مسیبی^{2*}، حسین عموشاهی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان، اصفهان

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان، اصفهان

* اصفهان، 81744-73441، mossaiby@eng.ui.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

دریافت: 96/12/20

پذیرش: 97/02/12

کلیدواژگان:

ورق ویسکوالاستیک

روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

خمش ورق

کمانش ورق

تقریب ایلوشین

در این پژوهش با استفاده از معادلات حاکم بر ورق نیمه ضخیم کامپوزیت ویسکوالاستیک بر مبنای نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، تحت بار درون و خارج صفحه تغییر شکل حداکثر و بار بحرانی کمانشی در طول زمان محاسبه شده است. ویژگی های مکانیکی ماده ویسکوالاستیک با استفاده از بیان مدول آسودگی در فرم سری پرونی، به صورت خطی در نظر گرفته شده است. روابط متشکله به فرم چندجمله ای در حوزه لاپلاس-کارسون بیان شده اند. همچنین از تقریب ایلوشین و تبدیل معکوس لاپلاس-کارسون برای بازگرداندن پاسخ این معادلات به حوزه زمان کمک گرفته شده است. نهایتاً برای حل معادلات حاکم به ازای مقادیر مختلف زمان از روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته استفاده شده و نمودار تاریخچه زمانی خمش حداکثر و بار کمانشی بحرانی برای ورق ویسکوالاستیک به ازای شرایط مرزی مختلف رسم شده است و نتایج خمش و کمانش ورق مفصلی با منابع ارائه شده در پیشینه مقایسه شده اند. همچنین با بررسی ورق های دارای شرایط مرزی دو طرف مفصل-دو طرف گیردار و چهار طرف گیردار تحت بارگذاری عرضی و نیز درون صفحه، اثر تغییر شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین برای نمایش توانایی روش در حل شرایط مرزی متنوع، چند نوع شرط مرزی دیگر که روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی قادر به حل آن ها نیستند نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در تمامی موارد، روش پیشنهادی کارایی بهتری نسبت به سایر روش ها نشان می دهد.

Bending and buckling solution of composite viscoelastic plate using the generalized exponential basis function method

Arash Palizvan, Farshid Mossaiby*, Hossein Amoushahi

Civil Engineering Department, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

* P.O.B. 81744-73441, Isfahan, Iran, mossaiby@eng.ui.ac.ir

Keywords

Viscoelastic plate
Generalized exponential basis functions
Plate bending,
Plate buckling
Illyushin's approximation method

Abstract

In this study, we employ first-order shear deformation theory to calculate maximum deformation and critical buckling load of moderately thick viscoelastic composite plates. These quantities are calculated over time under in-plane and out of plane loadings. The mechanical properties of the viscoelastic material are assumed linearly by expressing the modulus of relaxation in the form of the Prony series. Constitutive equations are expressed as polynomials in the Laplace-Carson domain. Also, the Illyushin's approximation and inverse Laplace-Carson methods have been used for calculating the response of these relations in the time domain. Finally, the method of generalized exponential basis functions is used to solve the governing equations for different values of time. Finally, the method of generalized exponential basis functions is used to solve the governing equations for different time values. The time-history of maximum deflection and critical buckling load are presented for the plates with different boundary conditions. The results of bending and buckling of the simply-supported plates are compared with the existing literature. Plates with two edges simply-supported and other edges fixed as well as those with all edges fixed are considered under transverse and in-plane loading, to investigate the effect of changing boundary conditions. Several problems with different boundary conditions are considered which many other analytical and semi analytical methods are unable to handle. In all cases the proposed method has been able to outperform the other methods.

Please cite this article using:

Palizvan, A., Mossaiby, F., Amoushahi, H., "Bending and buckling solution of composite viscoelastic plate using the generalized exponential basis function method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 2, pp. 190-199, 2019.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

1- مقدمه

در سالهای اخیر با افزایش استفاده از مواد پلیمری و کامپوزیت‌های پیشرفته در صنایعی مانند هوافضا، خودروسازی، نظامی و پزشکی کاربرد مواد ویسکوالاستیک بیشتر شده است. در این مواد وضعیت کرنش علاوه بر وضعیت فعلی تنش به تاریخچه تنش نیز وابسته است، به طوری که این مواد از خود ویژگی‌های وابسته به زمان نمایش می‌دهند.

رفتارهای مکانیکی مواد دارای خاصیت ویسکوالاستیک با نظریه‌های الاستیسیته و ویسکوزیته قابل توصیف نیست، زیرا نظریه الاستیسیته برای موادی به کار می‌رود، که ظرفیت ذخیره انرژی مکانیکی بدون اتلاف آن را دارا هستند. نظریه ویسکوزیته نیز برای موادی به کار می‌رود که ظرفیت اتلاف انرژی را بدون ذخیره کردن آن دارند. مواد ویسکوالاستیک دو خاصیت ویسکوزیته و الاستیسیته را همزمان دارا هستند؛ به عبارت دیگر، این مواد ظرفیت ذخیره و اتلاف انرژی را توأم دارند.

یکی از موضوعات مورد توجه محققان در این زمینه بررسی رفتار ورق‌های ساخته شده از مواد دارای خاصیت ویسکوالاستیک است. روابط حاکم بر این ورق‌ها به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای-انتگرالی است. دو رویکرد کلی برای یافتن پاسخ این معادلات وجود دارد. در رویکرد اول سعی بر انتگرال‌گیری مستقیم در حوزه زمان بوده و رویکرد دوم نیز از تبدیل لاپلاس برای حل این معادلات وابسته به زمان کمک می‌گیرد. عموشاهی و ازهری با استفاده از رویکرد اول رفتار خمشی و کمانشی ورق ویسکوالاستیک را با استفاده از روش نوار محدود غیرخطی برای شرایط مرزی مختلف بررسی نمودند [1]. آنها تاریخچه تغییر شکل حداکثر و بار بحرانی کمانشی را با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم بدست آوردند. محققان مختلفی نیز از رویکرد دوم استفاده کرده‌اند. علام و همکاران به بررسی حل تحلیلی خمش ورق ساندویچی ویسکوالاستیک تحت بار خارج صفحه با استفاده از نظریه برشی مرتبه اول پرداختند [2]. آن‌ها برای حل معادلات خمش و محاسبه تاریخچه تنش و تغییر شکل حداکثر ورق با شرایط مرزی ساده از روش مدول مؤثر و تقریب ایلوشین استفاده نمودند. زنگور نیز با استفاده از همین روش تاریخچه بار بحرانی کمانشی ورق کامپوزیت مستطیلی ویسکوالاستیک را برای شرایط مرزی ساده محاسبه نمود [3]. جعفری و همکاران نیز برای محاسبه بار بحرانی کمانشی ورق‌های مستطیلی نازک و نیمه ضخیم کامپوزیت ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر از روش نوار محدود استفاده نمودند [4، 5]. ایشان با محاسبه ماتریس سختی ورق در حوزه لاپلاس و حل یک مسئله مقدار ویژه، بار بحرانی کمانش را در حوزه لاپلاس محاسبه نمودند. سپس با کمک گرفتن از تقریب ایلوشین و استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس بار بحرانی را در حوزه زمان ارزیابی کردند. فلاحتگر مسئله کمانش خزشی ورق ضخیم ویسکوالاستیک را حل نمود [6]. وی برای حل معادلات از روش‌هایی پویا با جداسازی المان محدود استفاده نمود و نتایج خیز وسط و کاهش طول ورق با شرایط مرزی ساده و گیردار در طول زمان بارگذاری را ارائه نمود. علاوه بر موضوعات ذکر شده، در زمینه ورق‌های ویسکوالاستیک پژوهش‌های متنوع دیگری نیز انجام شده است [7، 8].

برای حل معادلات دیفرانسیل مسائل مهندسی مختلف، روش‌های عددی مبتنی بر شبکه مانند اجزاء محدود، تفاضل محدود و نوار محدود توسط محققان زیادی به کار گرفته شده است. در این روش‌ها دامنه مسئله توسط شبکه‌بندی گسسته سازی می‌شود. اگرچه این روشها به خوبی جوابگوی دسته‌های وسیع از مسائل بوده‌اند ولی تلاش‌های محققان برای ارائه روش‌های

سریع‌تر و ساده‌تر در سال‌های اخیر منجر به ابداع روش‌های بدون شبکه شده است. مزیت اصلی این روش‌ها تخمین جواب به وسیله سیستمی از معادلات جبری برای کل دامنه بر اساس نقاط پخش شده درون دامنه (و نه شبکه) است که همین عدم نیاز به شبکه‌بندی در فرآیند حل مسئله منجر به سهولت و سرعت بیشتر روش می‌شود.

روش‌های بدون شبکه را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم بندی کرد. تعدادی زیادی از آن‌ها مبتنی بر استفاده از فرم ضعیف معادلات استخراج شده است. به عنوان نمونه می‌توان به روش بدون شبکه محلی گالری اشاره نمود [9]. دسته دوم از فرم قوی معادلات استخراج شده استفاده می‌کنند. مزیت این گروه نسبت به گروه قبلی این است که انتگرال‌گیری از روال حل معادله حذف می‌شود. در این دسته می‌توان از روش نقاط محدود یاد کرد [10]. دسته آخر نیز از هردو فرم قوی و ضعیف استفاده می‌کنند. روش بدون شبکه فرم ضعیف-قوی در این دسته قرار دارد [11].

یکی از روش‌های جدید ارائه شده بر مبنای استفاده از فرم قوی معادلات، روش توابع پایه نمایی است که توسط برومند و همکارانش ارائه شده است [12]. ایده اصلی این روش استفاده از توابع پایه نمایی و انتخاب مناسب مؤلفه‌های آن برای ارضای فرم همگن معادله دیفرانسیل است. اگرچه این روش توانسته به خوبی دسته‌ای گسترده از مسائل خطی با ضرایب ثابت را حل کند ولی قادر به حل مسائل غیرخطی و یا خطی دارای ضرایب متغیر نیست. همچنین این روش از توابع نمایی به عنوان پایه و نیز اعداد مختلط برای مودها استفاده می‌کند. برطرف نمودن این محدودیت‌ها مسیبه و همکاران روش مذکور را برای حل مسائل غیرخطی و خطی با ضرایب متغیر توسعه دادند [13]. از مزیت‌های این روش نسبت به روش توابع پایه نمایی می‌توان به عدم نیاز به پیدا کردن معادله مشخصه برای هر مسئله، محدود نبودن به استفاده از توابع نمایی به عنوان پایه و اعداد مختلط برای مودها و نیز عدم وجود هیچ گونه انتگرال‌گیری در فرآیند حل اشاره نمود.

همانگونه که اشاره شد محققان مختلفی برای حل مسائل انواع ورق‌های مختلف از روش‌های تحلیلی همانند لوی و نیمه تحلیلی همانند نوار محدود و عددی همانند اجزاء محدود استفاده کرده‌اند، اما روش توابع پایه نمایی نسبت به روش‌های مذکور دارای مزایای خاص خود است. روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی به دلیل لزوم استفاده از توابع شکل مختلف برای هر نوع شرط مرزی به سادگی قادر به حل شرایط مرزی مختلف نیستند، به عبارت بهتر تغییر شرایط مرزی می‌تواند منجر به سهولت یا دشواری فرآیند حل شود [1-5]. اما برای حل شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته نیاز به تغییر توابع پایه نیست، علاوه بر این که در انتخاب خود توابع پایه نیز محدودیتی وجود ندارد. همچنین در مقایسه با روش‌های پرکاربرد نوار محدود و اجزاء محدود، عدم نیاز به استفاده از شبکه‌بندی، باعث صرفه‌جویی در زمان و نیروی انسانی می‌شود به گونه‌ای که روش مورد استفاده در این مقاله از الگوریتمی ساده‌تر و سریعتر برخوردار است و این موضوع برای مسائلی که نیازمند به شبکه‌بندی خاص برای رسیدن به دقت مطلوب هستند بیشتر احساس خواهد شد [13]. از دیگر مزایای روش مورد استفاده در این تحقیق، دقت بالای روش در مقایسه با سایر روش‌های عددی به خصوص روش‌های مبتنی بر شبکه است، به گونه‌ای که نتایج ارائه شده در این مقاله حاکی از دقت بالاتر روش در مقایسه با یکی از روش‌های مبتنی بر شبکه پرکاربرد است.

با استفاده از تبدیل لاپلاس-کارسون می توان $\omega(t)$ را در این حوزه ارزیابی نمود [3]:

$$\omega^*(s) = s \int_0^{\infty} \omega(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

با جایگذاری $\omega(t)$ از (1) در (3)، رابطه (4) حاصل می شود:

$$\omega^*(s) = c_1 + c_2 \frac{s}{s + \frac{1}{t_s}} = \bar{\omega} \quad (4)$$

بنابراین مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون در حوزه لاپلاس-کارسون به صورت رابطه (5) در می آیند:

$$\bar{\nu}_f = \frac{1-\bar{\omega}}{2+\bar{\omega}}, \quad \bar{E}_f = \frac{9K\bar{\omega}}{2+\bar{\omega}}, \quad \bar{G}_f = \frac{3}{2}K\bar{\omega} \quad (5)$$

با تعیین مشخصات مکانیکی ماده ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس و نیز دانستن مشخصات قسمت الاستیک ورق، معادلات حاکم بر آن، شبیه به معادلات ورق کامپوزیت ساخته شده از دو ماده الاستیک با ویژگی های متفاوت می شود.

2-1- میدان جابجایی

بر اساس نظریه میندین که بر پایه نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول استوار است، میدان های جابجایی ورق نیمه ضخیم بر اساس رابطه (6) بیان می شود [3]:

$$u_x = z\varphi_y, \quad u_y = z\varphi_x, \quad u_z = w \quad (6)$$

که $\{u_x, u_y, u_z\}$ جابجایی میان صفحه در راستای محورهای مختصات، w جابجایی در راستای محور Z و φ_x و φ_y نیز چرخش خط عمود بر محور میانی مقطع (نرمال عرضی) حول محورهای x و y هستند.

2-2- روابط کرنش-جابجایی

با توجه به میدان های جابجایی ارائه شده، مؤلفه های کرنش سازگار با آنها به صورت رابطه (7) در می آیند [3]:

$$\epsilon_x = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}, \quad \epsilon_y = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

2-3- روابط تنش-کرنش در حوزه لاپلاس-کارسون

معادلات متشکله به فرم رابطه (8) بیان می شوند [3]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

به ماتریس حاوی ضرایب \bar{c}_{ij} برای مسئله ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس، ماتریس مدول مؤثر اطلاق می شود که این ضرایب توسط رابطه (9) محاسبه می شوند [3]:

$$\bar{c}_{11} = \frac{\bar{E}_x}{1 - \bar{\nu}_{yx}\bar{\nu}_{xy}}, \quad \bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} = \frac{\bar{E}_y \bar{\nu}_{xy}}{1 - \bar{\nu}_{yx}\bar{\nu}_{xy}} \quad (9)$$

$$\bar{c}_{22} = \frac{\bar{E}_y}{1 - \bar{\nu}_{yx}\bar{\nu}_{xy}}, \quad \bar{c}_{33} = \bar{G}_{xy}$$

$$\bar{c}_{44} = \bar{G}_{xz}, \quad \bar{c}_{55} = \bar{G}_{yz}$$

که در آن:

در قسمت بعد ابتدا روابط اساسی ورق نیمه ضخیم کامپوزیت بیان خواهد شد، سپس فرمول بندی روش توابع پایه نمایی در قسمت 3 ارائه خواهد شد. در قسمت 4 روش توابع پایه نمایی برای حل مسائل خمش و کمانش ورق ویسکوالاستیک توسعه داده خواهد شد. صحت سنجی نتایج و مثال های عددی و مقایسه و تحلیل نتایج در قسمت 5 ارائه شده و در نهایت قسمت 6 به جمع بندی و نتیجه گیری مقاله می پردازد.

2- استخراج روابط ورق نیمه ضخیم کامپوزیت ویسکوالاستیک

در علم مهندسی مواد، کامپوزیت معمولاً به موادی اطلاق می شود که از یک فاز زمینه (ماتریس) و یک فاز تقویت کننده (پرکننده) تشکیل شده باشد. فاز ماتریس تشکیل دهنده قسمت اعظم ماده است و از فاز تقویت کننده نیز برای بهبود خواص ماده استفاده می شود. اگرچه نحوه و جهت قرارگیری الیاف (فاز تقویت کننده) کنار هم بر روی بار بحرانی کمانشی مؤثر است [14]، ولی در تحقیق پیش رو این الیاف در ساده ترین حالت ممکن مطابق شکل 1 در نظر گرفته شده اند. از ماده الاستیک به عنوان فاز تقویت کننده با مدول الاستیسیته E_r و ضریب پواسون ν_r و از ماده ویسکوالاستیک به عنوان فاز زمینه با مدول الاستیسیته E_f و ضریب پواسون ν_f استفاده شده است.

با توجه به این که مشخصات مکانیکی ماده زمینه (ویسکوالاستیک) در حوزه زمان است، ابتدا سعی بر آن می رود که با کمک گرفتن از تبدیل لاپلاس آن ها را در حوزه لاپلاس بیان نمود. بدین منظور برای بیان مدول برشی در حوزه زمان از سری پرونوی مطابق رابطه (1) کمک گرفته می شود [16]:

$$\omega(t) = c_1 + c_2 e^{-t/\tau}, \quad K(t) = K \quad (1)$$

$$G(t) = \frac{3}{2}K\omega(t), \quad \tau = \frac{t}{t_s}$$

که $\omega(t)$ تابع آسودگی و t_s نیز زمان آسودگی است. مدول بالک ثابت فرض شده و c_1 و c_2 نیز ثابت هایی هستند که به صورت تجربی تعیین می شوند. در تحقیق پیش رو این مقادیر به ترتیب برابر 0.1 و 0.9 اتخاذ می شوند [3].

با توجه به روابط میان مدول بالک، مدول برشی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در علم جامدات، رابطه مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در حوزه زمان به صورت رابطه (2) در می آیند:

$$\nu(t) = \frac{1-\omega(t)}{2+\omega(t)}, \quad E(t) = \frac{9K\omega(t)}{2+\omega(t)} = \frac{9\xi E_r \omega(t)}{2+\omega(t)} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{K}{E_r}$$

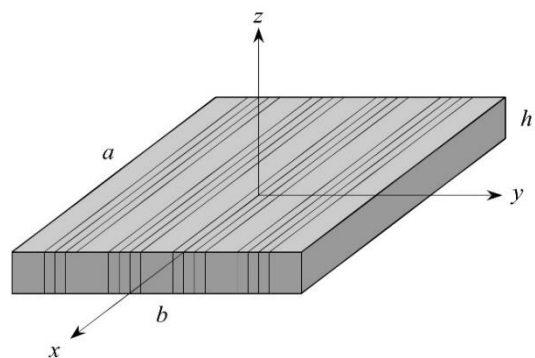


Fig. 1 Composite viscoelastic plate

شکل 1 ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \quad (19)$$

که در آن:

$$\{q_x, q_y\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k^2 \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\} dz \quad (20)$$

$$\{m_x, m_y, m_{xy}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} dz$$

که h برابر ضخامت ورق، p_z بارگذاری خارج صفحه، n_x و n_y بارگذاری‌های درون صفحه در واحد طول، $\{q_x, q_y\}$ نیروهای برشی داخلی در واحد طول و $\{m_x, m_y, m_{xy}\}$ نیز لنگرهای داخلی در واحد طول هستند. در این رابطه k^2 ضریب اصلاح برشی است که مقدار مناسب آن برای نظریه برشی مرتبه اول، برابر $\frac{5}{6}$ است.

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (20) نیروها و لنگرها به صورت رابطه (21) در می‌آیند:

$$\{q_x, q_y\} = \{-k^2 hc_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), -k^2 hc_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\} \quad (21)$$

$$m_x = \frac{h^3}{12} \left(c_{12} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + c_{11} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$m_y = \frac{h^3}{12} \left(c_{22} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + c_{21} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$m_{xy} = \frac{h^3}{12} c_{33} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)$$

با جایگذاری روابط (21) در معادلات (17) تا (19)، معادلات تعادل در فرم نهایی به صورت روابط (22) تا (24) در می‌آیند:

$$k^2 hc_{55} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k^2 hc_{44} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p_z = 0 \quad (22)$$

$$\frac{h^3}{12} \left[(c_{21} + c_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} + c_{11} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right] - k^2 hc_{44} \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{h^3}{12} \left[c_{33} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + (c_{21} + c_{33}) \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right] - k^2 hc_{55} \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (24)$$

در قسمت‌های بعدی پس از معرفی روش توابع پایه نمایی توسعه داده شده، چگونگی حل معادلات (22) تا (24) توسط این روش ارائه خواهد شد.

3- معرفی روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته تاکنون برای حل مسائل وابسته به زمان توسعه داده شده است [15]. در پژوهش پیش‌رو این روش برای حل مسائل ورق‌های ویسکوالاستیک توسعه داده شده است. بدین جهت ابتدا فرمول‌بندی مسائل خطی ارائه خواهد شد. سپس در قسمت‌های بعد چگونگی حل مسائل خمش و کمانش با استفاده از این روش توضیح داده خواهد شد.

یک مسئله معادله دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی و دارای دامنه دوبعدی و یا سه‌بعدی Ω با مرز $\Gamma = \partial\Omega$ به صورت رابطه (25) مدنظر است:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \gamma E_r + (1 - \gamma) \bar{E}_f, & \bar{E}_y &= \frac{E_r \bar{E}_f}{\gamma \bar{E}_f + (1 - \gamma) E_r} \\ \bar{G}_{xy} &= \bar{G}_{yz} = \frac{G_r \bar{G}_f}{\gamma \bar{G}_f + (1 - \gamma) G_r} \\ \bar{G}_{xz} &= \gamma G_r + (1 - \gamma) \bar{G}_f \end{aligned} \quad (10)$$

که γ نسبت مساحت ماده تقویت کننده به مساحت کل ورق است.

2-4 روابط تنش-کرنش در حوزه زمان

با دانستن روابط تنش-کرنش در حوزه لاپلاس و با کمک گرفتن از تقریب مناسب و تبدیل معکوس لاپلاس می‌توان روابط را به حوزه زمان بازگرداند. بدین منظور می‌توان هریک از درایه‌های تانسور مدول مؤثر را توسط روش ایلوشین با مجموع چند تابع شناخته شده در فضای لاپلاس-کارسون تقریب زد [3]:

$$c(\bar{\omega}) = \sum_{j=1}^4 f_j \Phi_j(\bar{\omega}) \quad (11)$$

که ضرایب ماتریس مدول مؤثر در فضای لاپلاس هستند و توسط رابطه (9) محاسبه می‌شوند. ضرایب $\Phi_j(\bar{\omega})$ را نیز می‌توان به صورت رابطه (12) انتخاب کرد [3]:

$$\Phi_1 = 1, \quad \Phi_2 = \bar{\omega}, \quad \Phi_3 = \frac{1}{\bar{\omega}}, \quad \Phi_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\bar{\omega}} \quad (12)$$

ضرایب f_j را می‌توان با استفاده از حل دستگاه معادلات جبری ارائه شده در رابطه (13) بدست آورد [3].

$$\sum_{j=1}^6 \Phi_{ij} f_j = \Gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

که در آن:

$$\Phi_{ij} = \int_{a1}^1 \Phi_i(\bar{\omega}) \Phi_j(\bar{\omega}) d(\bar{\omega}), \quad \Gamma_i = \int_{a1}^1 \Phi_i(\bar{\omega}) c(\bar{\omega}) d(\bar{\omega}) \quad (14)$$

برای حد پایین انتگرال‌های ذکر شده در رابطه (14) در مرجع [2] مقدار صفر در نظر گرفته شده ولی با توجه به این که در نظر گرفتن این مقدار باعث می‌شود که در محاسبه Φ_{13} انتگرال همگرا نشود، می‌توان $a1$ را در دو طرف معادله برابر کمی بزرگتر از صفر مثلاً 10^{-6} در نظر گرفت.

پس از استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس، هریک از درایه‌های ماتریس مدول مؤثر در فرم نهایی خود در حوزه زمان به صورت رابطه (15) در می‌آیند [3]:

$$c(t) = \sum_{j=1}^4 f_j \theta_j(t) \quad (15)$$

که ضرایب $\theta_j(t)$ توسط رابطه (16) ارائه شده اند:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= 1, & \theta_2(t) &= c_1 + c_2 e^{-\tau}, \\ \theta_3(t) &= \frac{1}{c_1} \left[1 - \frac{c_2}{c_1 + c_2} e^{-\frac{c_1 \tau}{c_1 + c_2}} \right], \\ \theta_4(t) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} c_1} \left[1 - \frac{c_2}{2 + c_1 + c_2} e^{-\frac{2 + c_1 \tau}{2 + c_1 + c_2}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (16)، می‌توان تانسور مدول مؤثر را به ازای مقادیر مختلف τ در حوزه زمان بدست آورد.

3-5 معادلات تعادل

معادلات تعادل نظریه برشی مرتبه اول بر مبنای تغییر شکل‌های کوچک به صورت روابط (17) تا (19) در می‌آیند [3]:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_z = 0 \quad (17)$$

با دانستن ضرایب c^p و استفاده از رابطه (32) جواب خصوصی معادله قابل محاسبه است:

$$\hat{u}^p = \Psi c^p = \Psi Q^+ h \quad (38)$$

پس از محاسبه پاسخ خصوصی به نحوه یافتن جواب همگن مسئله پرداخته می‌شود. بدین جهت قسمت دوم رابطه (28) روی مجموعه نقاط پخش شده روی دامنه اعمال می‌شود:

$$L_{\Omega} \hat{u}^h = L_{\Omega} \Psi c^h = 0 \quad (39)$$

و یا در فرم ماتریسی:

$$Q c^h = 0 \quad (40)$$

مجموعه‌ای از تمام بردارهایی که معادله (40) را برآورده می‌کنند تشکیل یک زیرفضا می‌دهند که این زیرفضا، فضای پوچ ماتریس Q نامیده می‌شود. در صورتی که بردارهای t_i پایه‌های تشکیل دهنده فضای پوچ ماتریس Q باشند، هر ترکیب خطی از بردارهای t_i نیز جواب این معادله است. بنابراین رابطه (41) حاصل می‌شود:

$$c^h = \sum_{i=1}^b t_i d_i = T d \quad (41)$$

که b برابر تعداد بردارهای پایه تشکیل دهنده فضای پوچ T ماتریسی است که ستون‌های آن متشکل از t_i ها و d_i نیز ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند.

با جایگذاری رابطه (41) در رابطه (31) رابطه (42) حاصل می‌شود:

$$\hat{u}^h = \Psi c^h = \Psi T d \quad (42)$$

برای محاسبه بردار d از اعمال شرایط مرزی کمک گرفته می‌شود. بدین جهت که از یک مجموعه از نقاط پخش شده روی مرز به صورت $\{x_{\Gamma,j} | j = 1, \dots, n_{\Gamma}\}$ استفاده می‌شود. با اعمال معادله (29) روی نقاط مرزی حاصل می‌شود:

$$L_{\Gamma} \hat{u}|_{x_{\Gamma,j}} = L_{\Gamma} \hat{u}^h|_{x_{\Gamma,j}} + L_{\Gamma} \hat{u}^p|_{x_{\Gamma,j}} = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (43)$$

که در آن با استفاده از روابط (42) و (32):

$$L_{\Gamma} \hat{u}^h|_{x_{\Gamma,j}} = L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} T d \quad (44)$$

$$L_{\Gamma} \hat{u}^p|_{x_{\Gamma,j}} = L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} c^p \quad (45)$$

بنابراین رابطه (43) به صورت رابطه (46) بازنویسی می‌شود:

$$L_{\Gamma} \hat{u}|_{x_{\Gamma,j}} = L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} T d + L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} c^p = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (46)$$

با توجه به رابطه (46) سطر z ام از معادلات مدنظر برای محاسبه بردار مجهول d از رابطه (47) بدست می‌آید:

$$d = (L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} T)^+ (f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} - L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}} c^p) \quad (47)$$

که در فرم ماتریسی منجر به رابطه (48) می‌شود:

$$d = (PT)^+ (g - Pc^p) \quad (48)$$

که در آن سطر z ام از ماتریس‌های P و g برابر است با:

$$(P)_j = L_{\Gamma} \Psi|_{x_{\Gamma,j}}, \quad (g)_j = f_{\Gamma}|_{x_{\Gamma,j}} \quad (49)$$

با توجه به این که در فرمول بندی روش، محدودیت خاصی برای توابع پایه درنظر گرفته نشده، برای حل مسائل مختلف می‌توان از توابع مختلفی استفاده نمود. هرچند که انتخاب توابع می‌تواند بر دقت حل تأثیرگذار باشد. در تحقیق پیش‌رو از توابع نمایی استفاده شده است.

$$L_{\Omega} u = f_{\Omega} \quad \Omega \text{ در}, \quad L_{\Gamma} u = f_{\Gamma} \quad \Gamma \text{ روی} \quad (25)$$

که u بردار متغیرهای میدان و L_{Ω} و L_{Γ} به ترتیب عملگرهای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی هستند. f_{Ω} و f_{Γ} نیز توابع سمت راست معادله درون دامنه و روی مرز هستند. شرایط مرزی را می‌توان به صورت رابطه (26) بیان نمود:

$$L_{\Gamma} = \begin{cases} L_D & \Gamma_D \text{ روی} \\ L_N & \Gamma_N \text{ روی} \end{cases}, \quad f_{\Gamma} = \begin{cases} f_D & \Gamma_D \text{ روی} \\ f_N & \Gamma_N \text{ روی} \end{cases} \quad (26)$$

که L_D و L_N اپراتورهای شرایط مرزی ضروری و طبیعی و Γ_D و Γ_N نیز توابع سمت راست شرایط مرزی ضروری و طبیعی هستند. در حالت کلی، مسئله ممکن است یکی از این دو شرط و یا ترکیبی از این دو را دارا باشد. پاسخ معادله (25) را می‌توان به صورت رابطه (27) درنظر گرفت:

$$u = u^h + u^p \quad (27)$$

که u^h و u^p به ترتیب جواب‌های همگن و خصوصی معادله هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت روابط (28) بیان نمود:

$$L_{\Omega} u^h = 0, \quad L_{\Omega} u^p = f_{\Omega} \quad (28)$$

با جایگذاری (27) در معادله دوم از رابطه (25) و با توجه به این که عملگر مرزی نیز خطی است، رابطه (29) حاصل می‌شود:

$$L_{\Gamma} u = L_{\Gamma} u^h + L_{\Gamma} u^p = f_{\Gamma} \quad (29)$$

برای یافتن پاسخ تقریبی معادله (25) ابتدا لازم است که این پاسخ با استفاده از تابع مناسب تخمین زده شود:

$$u \approx \hat{u} = u^h + u^p \quad (30)$$

برای نیل به این هدف در صورتی که یک ترکیب خطی از بردار توابع پایه درنظر گرفته شود روابط (31) و (32) حاصل می‌شوند:

$$\hat{u}^h = \sum_{i=1}^m \psi_i c_i^h = \Psi c^h \quad (31)$$

$$\hat{u}^p = \sum_{i=1}^m \psi_i c_i^p = \Psi c^p \quad (32)$$

که m نشان دهنده تعداد توابع پایه، Ψ ماتریسی است که ستون‌های آن از بردار توابع پایه تشکیل شده و نحوه بدست آوردن آن در قسمت‌های بعد توضیح داده خواهد شد. c^h و c^p نیز به ترتیب بردار ضرایب مجهول جواب همگن و خصوصی هستند. پاسخ تقریبی معادله برابر مجموع پاسخ همگن و خصوصی است:

$$\hat{u} = \Psi (c^h + c^p) = \Psi c \quad (33)$$

برای یافتن جواب خصوصی معادله، مجموعه‌ای از نقاط $\{x_{\Omega,j} | j = 1, \dots, n_{\Omega}\}$ در نظر گرفته می‌شود. n_{Ω} برابر تعداد کل نقاط پخش شده روی دامنه است. اعمال قسمت دوم رابطه (28) روی این مجموعه نقاط منجر به رابطه (34) می‌شود:

$$L_{\Omega} \hat{u}^p|_{x_{\Omega,j}} = L_{\Omega} \Psi|_{x_{\Omega,j}} c^p = f_{\Omega}|_{x_{\Omega,j}} \quad (34)$$

که در فرم ماتریسی به صورت رابطه (35) در می‌آید:

$$Q c^p = h \quad (35)$$

سطر z ام از ماتریس Q و بردار h به صورت رابطه (36) بیان می‌شوند:

$$(Q)_j = L_{\Omega} \Psi|_{x_{\Omega,j}}, \quad (h)_j = f_{\Omega}|_{x_{\Omega,j}} \quad (36)$$

با استفاده از معادله (35) و با کمک گرفتن از معکوس تعمیم یافته مور-پنروز [3] ضرایب c^p بدست می‌آیند:

$$c^p = Q^+ h \quad (37)$$

جدول 1 شرایط مرزی

Table 1 Boundary conditions

شرط مرزی	رابطه
ساده	$w = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad m_x = 0$
گیردار	$w = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad \varphi_y = 0$

با جایگذاری معادلات ارائه شده در جدول 1 در قسمت دوم معادله (25)

روابط (57) و (58) حاصل می‌شوند:

$$(\mathbf{L}_{\Gamma c})_{x=a} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} lc_{11} & lc_{12} & lc_{13} \\ lc_{21} & lc_{22} & lc_{23} \\ lc_{31} & lc_{32} & lc_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

$$(\mathbf{L}_{\Gamma s})_{x=0} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} ls_{11} & ls_{12} & ls_{13} \\ ls_{21} & ls_{22} & ls_{23} \\ ls_{31} & ls_{32} & ls_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

که $\mathbf{L}_{\Gamma c}$ عملگر مرز گیردار و $\mathbf{L}_{\Gamma s}$ نیز عملگر مرز مفصلی است. درایه‌های

ماتریس عملگرهای مرزی توسط رابطه (59) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} l_{c,11} = l_{c,22} = l_{c,33} = 1 \\ l_{c,12} = l_{c,13} = l_{c,21} = l_{c,23} = l_{c,31} = l_{c,32} = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

$$l_{s,11} = l_{s,22} = 1, \quad l_{s,32} = \frac{h^3}{12} c_{11} \frac{\partial}{\partial x}, \quad l_{s,33} = \frac{h^3}{12} c_{12} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$l_{s,12} = l_{s,13} = l_{s,21} = l_{s,23} = l_{s,31} = 0$$

بنابراین سطر z ام از ماتریس‌های \mathbf{P} و \mathbf{g} برابر خواهد بود با:

$$(\mathbf{P})_j = \begin{Bmatrix} (\mathbf{L}_{\Gamma s})_{x=0} \\ (\mathbf{L}_{\Gamma s})_{x=a} \\ (\mathbf{L}_{\Gamma s})_{y=0} \\ (\mathbf{L}_{\Gamma s})_{y=b} \end{Bmatrix} \Psi|_{x_{\Gamma j}}, \quad (\mathbf{g})_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1 \times 12} \quad (60)$$

با محاسبه \mathbf{P} و \mathbf{g} از رابطه (38) و در نتیجه \mathbf{c}^h از رابطه (41) بدست

می‌آید. نهایتاً پاسخ تقریبی تغییر شکل حداکثر ورق از رابطه (33) قابل

ارزیابی است. می‌توان پاسخ حداکثر را به صورت رابطه (61) بی‌بعد نمود:

$$w_d = \frac{w_m}{h} \quad (61)$$

که w_d تغییر مکان بی‌بعد و w_m نیز تغییر مکان حداکثر محاسبه شده است.

به منظور ساده‌سازی روند حل و عدم نیاز به ارائه فرمول‌بندی برای حل مسئله مقدار ویژه، برای محاسبه بار بحرانی کمانش از ارزیابی تغییر مکان حداکثر استفاده خواهد شد. بدین جهت لازم است ابتدا یک مقدار اندک برای بار عرضی در نظر گرفته شود که این کار به منزله ایجاد تغییر مکان کوچک اولیه است. سپس با لحاظ کردن یک مقدار اولیه برای بار درون صفحه و افزایش آن تغییر مکان حداکثر ورق را به ازای این مقادیر بار درون صفحه رسم کرده و باری که به ازای آن تغییر مکان به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، همان بار بحرانی کمانش است. به جای رسم نمودار می‌توان از روش نصف کردن استفاده نمود. بار بحرانی کمانشی را می‌توان از طریق رابطه (62) بی‌بعد نمود:

$$\zeta = \frac{b^2 12 (1 - \nu_r^2)}{\pi^2 E_r h^3} \sigma_{cr} \quad (62)$$

که σ_{cr} بار بحرانی محاسبه شده و ζ نیز ضریب کمانش است.

برای محاسبه تاریخچه تغییر شکل و یا بار بحرانی کمانش لازم است در هر مرحله ماتریس مدول مؤثر به ازای مقدار τ انتخاب شده، محاسبه شود و سپس تغییر شکل حداکثر و یا بار کمانشی در هر مرحله تعیین شود، بنابراین

4- پیاده‌سازی برای حل مسائل خمش و کمانش ورق ویسکوالاستیک

در این قسمت روش ارائه شده در قسمت قبل، برای حل مسائل بدست‌آوردن تاریخچه تغییر شکل حداکثر ورق مستطیلی کامپوزیت ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و درون صفحه، توسعه داده خواهد شد. سپس نحوه محاسبه بار بحرانی کمانش با استفاده از محاسبه تغییر شکل حداکثر توضیح داده خواهد شد. با در نظر گرفتن w و φ_x و φ_y به عنوان درجات آزادی، (33) به صورت رابطه (50) در خواهد آمد:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{w}^h + \hat{w}^p \\ \hat{\varphi}_x^h + \hat{\varphi}_x^p \\ \hat{\varphi}_y^h + \hat{\varphi}_y^p \end{Bmatrix} = \Psi (\mathbf{c}^h + \mathbf{c}^p) \quad (50)$$

که در آن:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & 0 & 0 & \dots & \psi_{1,m} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{2,1} & 0 & \dots & 0 & \psi_{2,m} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{3,1} & \dots & 0 & 0 & \psi_{3,m} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{c}^h = \{c_{1,1}^h, c_{2,1}^h, c_{3,1}^h, c_{1,2}^h, c_{2,2}^h, c_{3,2}^h, \dots, c_{1,m}^h, c_{2,m}^h, c_{3,m}^h\}^T \quad (52)$$

$$\mathbf{c}^p = \{c_{1,1}^p, c_{2,1}^p, c_{3,1}^p, c_{1,2}^p, c_{2,2}^p, c_{3,2}^p, \dots, c_{1,m}^p, c_{2,m}^p, c_{3,m}^p\}^T$$

که توابع پایه مورد استفاده در ماتریس Ψ به صورت رابطه (53) خواهند

بود:

$$\psi_{1,i} = \psi_{2,i} = \psi_{3,i} = \exp(\alpha_i x + \beta_i y) \quad (53)$$

برای بدست آوردن ماتریس عملگر معادله از جایگذاری معادلات (22) تا

(24) در قسمت اول معادله (25) استفاده می‌شود:

$$\mathbf{L}_{\Omega} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w} \\ \hat{\varphi}_x \\ \hat{\varphi}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

که درایه‌های \mathbf{L}_{Ω} از رابطه (55) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} L_{11} &= k^2 h c_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 h c_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{12} &= k^2 h c_{44} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{13} = n_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 h c_{55} \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{21} &= -k^2 h c_{44} \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{22} &= \frac{h^3}{12} \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - k^2 h c_{44} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} L_{23} &= (c_{21} + c_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ L_{31} &= -k^2 h c_{55} \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{32} = (c_{21} + c_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$L_{33} = \frac{h^3}{12} \left(c_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - k^2 h c_{55}$$

بنابراین سطر z ام از ماتریس \mathbf{Q} و بردار \mathbf{h} قابل محاسبه خواهند بود:

$$(\mathbf{Q})_j = \mathbf{L}_{\Omega} \Psi|_{x_{\Omega j}}, \quad (\mathbf{h})_j = \begin{Bmatrix} (p_z)_j \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (56)$$

که \mathbf{L}_{Ω} و Ψ به ترتیب از روابط (54) و (51) بدست می‌آیند. $(p_z)_j$ نیز

برابر مقدار بار عرضی در نقطه z ام است که در صورتی که بارگذاری عرضی از نوع گسترده با شدت یکنواخت باشد، مقدار آن در تمام نقطه‌ها یکسان و برابر شدت بار گسترده است. بنابراین با داشتن \mathbf{Q} و \mathbf{h} از رابطه (37) قابل محاسبه است.

برای بدست آوردن ماتریس عملگر مرزی از جدول 1 استفاده می‌شود:

مناسب خواهد شد. سایر فرضیات مشترک مسائل خمش و کمانش در رابطه (63) ارائه شده است:

$$a = b = 2, \quad c_1 = 0.1, \quad c_2 = 0.9, \\ E_r = 3 \text{MPa}, \quad \xi = 10 \quad (63)$$

نسبت‌های γ و $\frac{a}{h}$ و نیز شرایط مرزی برای هر مسئله به صورت جداگانه مشخص می‌شوند.

ابتدا برای اعتبار سنجی روش ارائه شده نتایج حاصل از تحلیل کمانش ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک مربعی چهار طرف مفصل به ازای مقادیر مختلف عرض به ضخامت و برای نسبت‌های مختلف γ و با در نظر گرفتن مقدار ثابت 0.5 برای تابع آسودگی (\bar{w}) در جداول 2 تا 4 ارائه شده است.

جدول 1 نمایش دهنده نتایج ضریب بار بحرانی کمانشی تک محوره است و جدول‌های 2 و 3 نتایج را برای بار درون صفحه دومحوره نشان می‌دهند که در آنها α برابر نسبت بار محوری طولی به عرضی است. مقایسه نتایج حاصل از روش مورد استفاده در این پژوهش با نتایج حاصل از حل تحلیلی [3] و نیمه تحلیلی نوار محدود [4] بیانگر دقت مناسب روش پیشنهادی در مقایسه با حل دقیق و نیز دقت بالاتر در مقایسه با روش نوار محدود است، به گونه‌ای که همانطور که مشاهده می‌شود نتایج این روش با نتایج حاصل از حل دقیق تقریباً منطبق هستند. همچنین با توجه به جداول فوق می‌توان بیان نمود که ضریب بار بحرانی کمانشی با افزایش نسبت عرض به ضخامت افزایش می‌یابد و نیز مقدار حداکثر ضریب بار بحرانی کمانشی برای ورق ویسکوالاستیک کامل اتفاق می‌افتد. همچنین با افزایش α مقدار ضریب مذکور کاهش می‌یابد.

می‌توان نمودار تغییر شکل حداکثر و یا بار بحرانی کمانشی را به ازای مقادیر مختلف τ رسم نمود.

5- نتایج عددی

در این بخش نتایج حاصل از حل چند مسئله کمانش و خمش ارائه خواهد شد. تمامی مسائل دارای یک سری فرضیات مشترک هستند به گونه‌ای که نقاط در بازه $[-1, 1]$ به صورت منظم و با فاصله $1/10$ (جمعاً 441 نقطه) و (α_i, β_i) نیز همانند نقاط در $[-1, 1]$ و با فاصله $1/10$ (جمعاً 441 مود) در نظر گرفته شده‌اند، البته ذکر این نکته قابل توجه است که هیچ الزامی به برابر گرفتن تعداد نقاط و مودها نیست. برای مسائل خمش و کمانش بارگذاری عرضی به صورت گسترده با شدت یکنواخت است. لازم به ذکر است بارهای اعمالی در مدت زمان کوتاه ($t = 0$) به صفحه اعمال می‌شوند و در این مدت با توجه به این که خواص وابسته به زمان صفحه بروز نکرده‌اند، پاسخ ورق همانند پاسخ ورق الاستیک کامل است. با گذشت زمان خواص ویسکوالاستیک ورق بروز نموده ولی بارهای اعمالی همچنان به صورت ثابت و غیر وابسته به زمان اعمال می‌شوند. در این پژوهش مقدار این بار در مسئله خمش برابر 100kPa و برای مسئله کمانش برابر یک مقدار اندک دلخواه اختیار شده است. ذکر این نکته قابل توجه است که علت در نظر گرفتن بار گسترده عرضی در مسئله کمانش ایجاد تغییر مکان اولیه است. می‌توان برای تعیین محدوده بار کمانشی ابتدا تعداد نقاط و مودهای کمتری در نظر گرفت، سپس برای تعیین مقدار بار کمانشی به صورت دقیق‌تر از نقاط و مودهای ذکر شده در این بخش استفاده نمود، بدین ترتیب سرعت حل افزایش خواهد یافت. لازم به ذکر است که در فرایند حل مشاهده می‌شود که انتخاب تعداد مودها و نقاط کمتر نیز خصوصاً برای مسئله کمانش منجر به نتایج با دقت

جدول 2 ضریب بار بحرانی کمانشی ورق مربعی تحت فشار یکطرفه ($\alpha = 0$)

Table 2 Critical buckling load of square plate under uniaxial loading ($\alpha = 0$)

α	$\frac{a}{h}$	$\gamma = 1$			$\gamma = 0.5$			$\gamma = 0$		
		روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]
0	4	2.9575	2.9575	2.809	11.551	11.551	10.8301	52.1613	52.1619	49.3605
	5	3.2637	3.2637	3.1314	12.333	12.333	11.7579	56.998	56.9989	54.6309
	10	3.7864	3.7865	3.7344	13.5660	13.5660	13.3662	65.0399	65.0404	64.1313
	20	3.9444	3.9444	3.9296	13.9157	13.9157	13.8634	67.4178	67.4183	67.1639
	50	3.9910	3.9910	3.9887	14.017	14.017	14.0117	68.1152	68.1115	68.0771

جدول 3 ضریب بار بحرانی کمانشی ورق مربعی تحت فشار دوطرفه ($\alpha = 0.5$)

Table 3 Critical buckling load of square plate under biaxial loading ($\alpha = 0.5$)

α	$\frac{a}{h}$	$\gamma = 1$			$\gamma = 0.5$			$\gamma = 0$		
		روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]
0.5	4	1.9717	1.9717	1.8686	7.7006	7.7006	7.2201	34.7746	34.7746	32.8327
	5	2.1758	2.1758	2.0863	8.2220	8.2220	7.8395	37.9992	37.9992	36.3606
	10	2.5243	2.5243	2.4884	9.044	9.044	8.9131	43.3602	43.3603	42.7342
	20	2.6296	2.6296	2.6194	9.2771	9.2771	9.2429	44.9455	44.9455	44.7699
	50	2.6607	2.6607	2.6591	9.3447	9.3447	9.3412	45.4104	45.4104	45.3838

جدول 4 ضریب بار بحرانی کمانشی ورق مربعی تحت فشار دوطرفه ($\alpha = 1$)Table 4 Critical buckling load of square plate under biaxial loading ($\alpha = 1$)

α	$\frac{a}{h}$	$\gamma = 1$			$\gamma = 0.5$			$\gamma = 0$		
		روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]	روش پیشنهادی	حل دقیق [3]	نوار محدود [4]
1	4	1.4788	1.4788	1.4804	5.7755	5.7755	5.4155	26.081	26.081	24.5965
	5	1.6319	1.6319	1.6327	6.1665	6.1665	5.7889	28.4994	28.4994	27.2480
	10	1.8932	1.8932	1.8933	6.783	6.783	6.6831	32.5202	32.5202	32.0426
	20	1.9722	1.9722	1.9722	6.9578	6.9578	6.9317	33.7091	33.7098	33.5753
	50	1.9955	1.9955	1.9943	7.0085	7.0085	7.0058	34.0578	34.0579	34.0375

5-1- خمش

ازای تمام مقادیر α نتایج استخراج شده مقدار یکسانی دارند و به عبارتی در این حالت همانگونه که انتظار می‌رود به دلیل آن‌که ورق خواص ویسکوالاستیک از خود نشان نمی‌دهد مقادیر پاسخها مستقل از تابع آسودگی است. همچنین کمترین میزان تغییر مکان برای ورق کاملاً ویسکوالاستیک $\gamma = 0$ رخ خواهد داد و با افزایش میزان ماده الاستیک در ورق کامپوزیت تغییر مکان حداکثر افزایش می‌یابد، که همین موضوع نشان‌دهنده ارجحیت استفاده از مواد دارای خاصیت ویسکوالاستیک نسبت به مواد الاستیک است. علاوه بر آن با توجه به نمودار افزایش میزان ثابت تابع آسودگی باعث افزایش پاسخ حداکثر می‌شود.

شکل‌های 5 و 6 به بررسی اثر تغییر ضرایب سری پرونی بر روی نتایج می‌پردازد. نمودار شکل 5 اثر تغییر ضریب c_1 بر روی تاریخچه تغییر شکل حداکثر ورق ویسکوالاستیک ساده ($\gamma = 0$) و نمودار شکل 6 نیز همین نتایج را به ازای تغییر ضریب c_2 نشان می‌دهد. نمودار تغییر مکان حداکثر به ازای کاهش 10 درصد و 30 درصد و نیز افزایش 10 و 50 درصد مقدار این ضرایب نسبت به مقدار اتخاذ شده برای حل سایر مسائل ویسکوالاستیک (0.1) برای c_1 و 0.9 برای c_2 رسم شده است. همچنین برای مقایسه بهتر، تاریخچه خیز حداکثر به ازای چهار برابر شدن این ضرایب نیز رسم شده است. با توجه با این نمودارها مشاهده می‌شود که کاهش ضرایب c_1 و c_2 باعث افزایش پاسخها به میزان فراتر از حد مورد انتظار می‌شود. عکس این اتفاق نیز به ازای کاهش این ضرایب اتفاق خواهد افتاد. همچنین با مقایسه نمودار 5 و 6 مشاهده می‌شود که حساسیت پاسخها به ضریب c_1 بیشتر از ضریب c_2 است. به عنوان نمونه با توجه به این دو نمودار واضح است که تاثیر ناشی از چهار برابر کردن ضریب c_2 بسیار کمتر از خطای ناشی از چهار برابر کردن ضریب c_1 است.

5-2- کمانش

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل بار بحرانی کمانشی چند مسئله با شرایط مرزی مختلف آورده شده است. شکل 7 نشان‌دهنده تاریخچه زمانی ضریب بار بحرانی کمانشی ورق‌های ویسکوالاستیک به ازای شرایط مرزی مختلف شامل چهار طرف مفصل (SSSS)، دو لبه موازی مفصل و دو لبه دیگر گیردار (CCSS) و نیز چهارطرف گیردار (CCCC) تحت فشار تک‌محوره برای ورق ویسکوالاستیک کامل است. شکل 8 نیز همین مقادیر را برای ورق کامپوزیت با نسبت $\gamma = 0.1$ تحت فشار دوطرفه ($\alpha = 1$) بیان می‌کند. مقایسه نتیجه حاصل از ورق ساده با مرجع [3] حاکی از انطباق کامل این دو نمودار است. با توجه به شکل‌های 7 و 8 همانگونه که انتظار می‌رود در زمان اعمال بار همانند ورق الاستیک با افزایش صلبیت لبه‌ها بار کمانشی نیز

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل تغییر مکان چند مسئله با شرایط مرزی مختلف آورده شده است. شکل 2 نشان‌دهنده تاریخچه زمانی تغییر مکان حداکثر ورق‌های مربعی ویسکوالاستیک کامل ($\gamma = 0$) به ازای شرایط مرزی مختلف شامل چهار طرف مفصل (SSSS) دو لبه موازی مفصل و دو لبه دیگر گیردار (CCSS) و نیز چهارطرف گیردار (CCCC) است. با توجه به شکل 2 مشاهده می‌شود که در ابتدای زمان بارگذاری ($\tau = 0$) با توجه با این‌که خواص ویسکوالاستیک بروز نکرده‌اند، همانند آن‌چه که برای ورق الاستیک قابل انتظار است با افزایش صلبیت لبه‌ها تغییر مکان حداکثر اولیه کاهش می‌یابد و سپس با گذشت زمان و با فعال شدن خواص ویسکوالاستیک تغییر مکان حداکثر به ازای شرایط مرزی مختلف افزایش یافته و در نهایت در یک زمان حدی (زمان آسودگی) به یک مقدار مشخص میل می‌کند و پس از آن تقریباً ثابت می‌شود.

همچنین با توجه به این نمودار مشاهده می‌شود که نسبت میزان افزایش خیز حداکثر برای شرایط مرزی مختلف تقریباً یکسان است. به عنوان نمونه نسبت خیز حداکثر ورق چهارطرف مفصل به ورق چهارطرف گیردار در زمان ($\tau = 0$) حدوداً برابر 3 است و این نسبت در زمان ($\tau = 100$) حدوداً برابر 2.9 است که نشان می‌دهد هردو تقریباً به یک نسبت افزایش خیز را تجربه کرده‌اند.

برای نمایش توانایی روش در حل انواع شرایط مرزی نتایج حاصل از تحلیل تاریخچه زمانی تغییر مکان مرکز ورق مربعی کامپوزیت با نسبت $\gamma = 0.1$ و به ازای شرایط مرزی به صورت یک لبه گیردار و لبه روبه‌روی آن مفصلی (CSCS)، سه لبه گیردار و یک لبه مفصل (CCCS) و سه لبه مفصل و یک لبه گیردار (SSSC) در شکل 3 ارائه شده است. باید توجه نمود که مرجع [3] هیچ یک از شرایط مرزی فوق را بررسی ننموده است. همچنین مراجع [1، 4، 5] نیز شرایط مرزی (CSCS - CCCS) را حل نکرده‌اند.

به عبارتی روش نوار محدود که در مراجع ذکر شده استفاده شده است، قادر به حل شرایط مرزی که حداقل دو لبه روبه‌روی آن مفصلی نباشد، نیست. با توجه به این نمودار مشاهده می‌شود که همانگونه که انتظار می‌رود همانند آن‌چه که در نمودار شکل 2 مشاهده شد ورق‌های دارای لبه‌های سخت‌تر تغییر مکان حداکثر کمتری در ابتدای زمان بارگذاری و نیز پس از گذشت زمان از خود نشان می‌دهند. همچنین برای تمامی موارد پاسخها پس از رسیدن به زمان آسودگی به مقدار ثابتی میل می‌کند.

شکل 4 نمایش‌دهنده تغییرات تغییر مکان حداکثر ورق ویسکوالاستیک مربعی ساده در برابر نسبت γ به ازای مقادیر مختلف تابع آسودگی است. با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که برای ورق کاملاً الاستیک ($\gamma = 1$) به

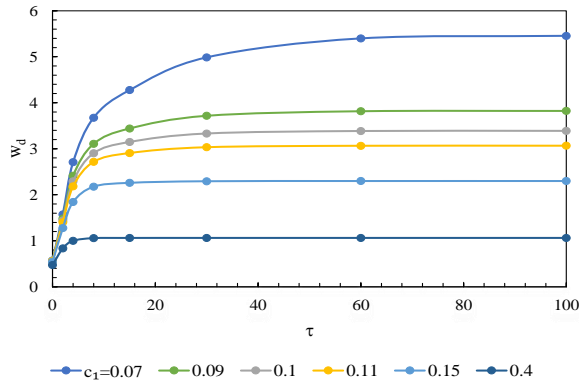


Fig. 5 Effect of change of coefficient c_1 on the deflection history of center of simple viscoelastic square plate ($\gamma = 0$) under uniform load

شکل 5 اثر تغییر ضریب c_1 بر تاریخچه تغییر شکل مرکز ورق مربعی ویسکوالاستیک ساده ($\gamma = 0$) تحت بار گسترده یکنواخت

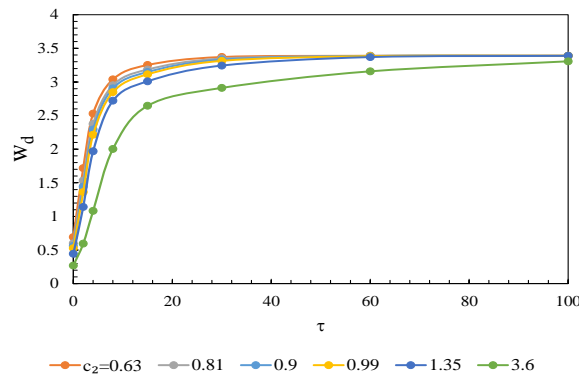


Fig. 6 Effect of change of coefficient c_2 on the deflection history of center of simple viscoelastic square plate ($\gamma = 0$) under uniform load

شکل 6 اثر تغییر ضریب c_2 بر تاریخچه تغییر شکل مرکز ورق مربعی ویسکوالاستیک ساده ($\gamma = 0$) تحت بار گسترده یکنواخت

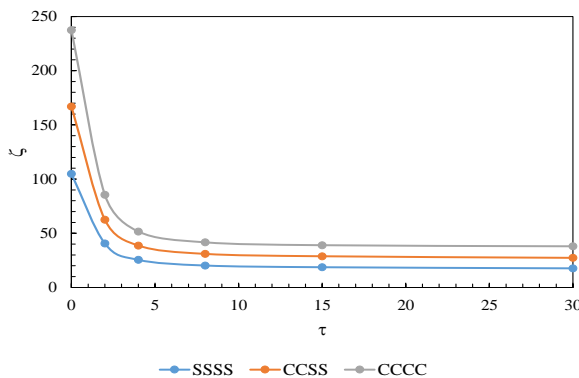


Fig. 7 Critical buckling coefficient history of viscoelastic square plate ($\gamma = 0$) under uniaxial load for different boundary conditions

شکل 7 تاریخچه ضریب کمانش بحرانی ورق مربعی ویسکوالاستیک تحت بار تک محوره برای شرایط مرزی مختلف

شکل 9 تشریح کننده ضریب کمانشی بحرانی ورق ویسکوالاستیک کامپوزیت ($\gamma = 0.1$) مستطیلی تحت بار دومحوره ($\alpha = 1$) در برابر تغییرات نسبت طول به عرض $\frac{a}{b}$ به ازای مقدار ثابت تابع آسودگی $\bar{\omega} = 0.1$ و برای شرایط مرزی مختلف است. در این حالت طول لبه موازی محور x متغیر فرض شده است. با توجه به نمودار مشاهده می شود که نتایج ورق ساده مستطیلی نیز همانند ورق مربعی کاملاً منطبق بر حل تحلیلی است. همچنین

افزایش می یابد. پس از رسیدن به زمان آسودگی بار کمانشی به مقدار ثابتی میل می کند که در این قسمت نیز بیشترین بار کمانشی مربوط به ورق دارای بیشترین صلبیت لبه ها (چهار طرف گیردار) است.

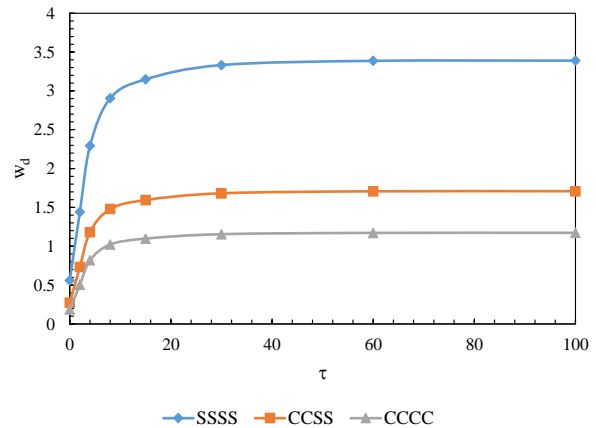


Fig. 2 Maximum deflection history of viscoelastic square plate ($\gamma = 0$) under uniform load for different boundary conditions

شکل 2 تاریخچه تغییر شکل حداکثر ورق ویسکوالاستیک ($\gamma = 0$) تحت بار گسترده یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف

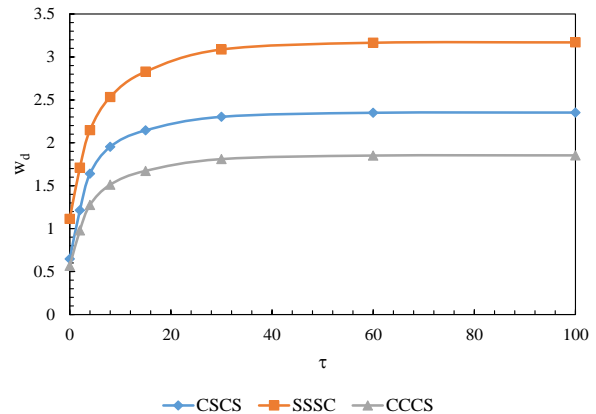


Fig. 3 deflection history of center of viscoelastic composite square plate ($\gamma = 0.1$) under uniform load for different boundary conditions

شکل 3 تاریخچه تغییر شکل مرکز ورق مربعی کامپوزیت ویسکوالاستیک تحت بار گسترده یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف

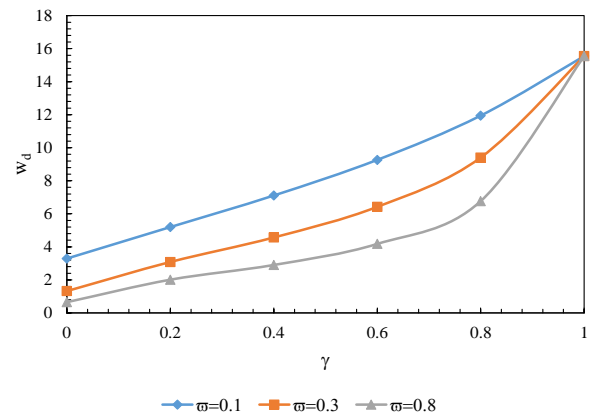


Fig. 4 Effect of parameter γ on the maximum deflection of viscoelastic square plate for different values of relaxation function $\bar{\omega}$

شکل 4 تأثیر پارامتر γ بر تغییر مکان حداکثر ورق مربعی ویسکوالاستیک ساده به ازای مقادیر مختلف تابع آسودگی $\bar{\omega}$

کمانش از یک روش ساده استفاده شد و مقایسه نتایج ورق ساده با حل دقیق مسئله مقدار ویژه حاکی از دقت مناسب این روش است. همچنین در مقایسه با روش‌های تحلیلی و نیز نیمه تحلیلی طیف گسترده تری از شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده شد ضریب کمانش بحرانی حداکثر و نیز تغییر مکان حداقل به ازای ورق کاملاً ویسکوالاستیک رخ می‌دهد. همچنین افزایش صلبیت لبه‌ها باعث افزایش ضریب کمانش و نیز کاهش تغییر مکان حداکثر می‌شود. با توسعه این روش برای حل ورق نیمه ضخیم ویسکوالاستیک، ورق‌های نازک و نیمه ضخیم الاستیک و ویسکوالاستیک نیز قابل حل با روش فوق هستند. همچنین می‌توان در پژوهش‌های آینده امکان حل مسائل ورق ضخیم را نیز مورد بررسی قرار داد. علاوه بر آن، تحلیل دینامیکی ورق‌های ویسکوالاستیک با استفاده از روش بدون شبکه ارائه شده نیز می‌تواند موضوعی مورد توجه باشد.

7- مراجع

- [1] Amoushahi, H., and Azhari, M., "Static Analysis and Buckling of Viscoelastic Plates by a Fully Discretized Nonlinear Finite Strip Method Using Bubble Functions", Composite Structures, Vol. 100, pp. 205-217, 2013.
- [2] Allam, M. N. M., Zenkour, A. M. and El-Mekawy, H. F., "Bending Response of Inhomogeneous Fiber-Reinforced Viscoelastic Sandwich Plates", Acta Mechanica, Vol. 209, pp. 231-248, 2010.
- [3] Zenkour, A. M., "Buckling of Fiber-Reinforced Viscoelastic Composite Plates Using Various Plate Theories", Journal of Engineering Mathematics, Vol. 50, pp. 75-93, 2004.
- [4] Jafari, N., Azhari, M. and Heidarpoor, A., "Local Buckling of Thin and Moderately Thick Variable Thickness Viscoelastic Composite Plates", Journal of Structural Engineering, Vol. 40, pp. 783-800, 2011.
- [5] Jafari, N., Azhari, M. and Heidarpoor, A., "Local Buckling of Rectangular Viscoelastic Composite Plates", Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 21, pp. 263-272, 2014.
- [6] Falahatgar, S. R., "Creep Buckling Analysis of Rectangular Viscoelastic Thick Plate by Pseudo-Transient Finite Element Method", Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, pp. 132-142, 2014. (in Persian)
- [7] Eshmatov, B. K. h., "Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 300, pp. 709-726, 2007.
- [8] Safari, M., and Biglari, H., "Frequency dependent damped vibration of composite sandwich beam with viscoelastic and transverse flexible core based on GHM method", Journal of science and technology of composites, Vol. 3, pp. 397-408, 2017. (in Persian)
- [9] Atluri, S. N., and Zhu, T., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLpg) Approach in Computational Mechanics", Computational Mechanics, Vol. 22, pp. 117-127, 1998.
- [10] Onate, E., Perazzo, F., and Miquel, J., "A Finite Point Method for Elasticity Problems", Computers & Structures Vol. 79, pp. 2151-2163, 2001.
- [11] Lu, G., Wu, YL., and Ding, H., "Meshfree Weak-Strong (Mws) Form Method and Its Application to Incompressible Flow Problems", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 46, pp. 1025-1047, 2004.
- [12] Boroomand, B., Soghrati, S., and Movahedian, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Static and Time Harmonic Elastic Problems in a Meshless Style", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 81, pp. 971-1018, 2010.
- [13] Mossaiby, F., Ghaderian, M., and Rossi, R., "Implementation of a Generalized Exponential Basis Functions Method for Linear and Non-Linear Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 105, pp. 221-240, 2015.
- [14] Nopour, H., Ataabadi, A. K., and Shokrieh, M. M., "Buckling of composite plate made of curvilinear fiber with linear and nonlinear fiber orientation variation", Journal of science and technology of composites, Vol. 4, pp. 405-417, 2018. (in Persian)
- [15] Mossaiby, F., Bahonar, M.J., and Asadi, A., "Solving Time-Dependent Problems Using the Generalized Exponential Basis Functions Method", Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, pp. 271-280, 2017. (in Persian)
- [16] Jafari, N., and Azhari, M., "Stability analysis of arbitrarily shaped moderately thick viscoelastic plates using Laplace-Carson transformation and a simple hp cloud method", Mechanics of Time-Dependent Materials, Vol. 21, pp. 365-381, 2017.

مشاهده می‌شود که ضریب کمانش با افزایش نسبت طول به عرض، کاهش می‌یابد. در مورد این نمودار نکته قابل توجه آن است که همانگونه که مشاهده می‌شود به ازای مقادیر کوچک نسبت طول به عرض ($\frac{a}{b}$) پاسخ ورق چهارطرف گیردار با ورق دولبه موازی گیردار (لبه α) و دو لبه دیگر مفصلی و برای مقادیر بزرگ نسبت طول به عرض ($\frac{a}{b}$) پاسخ ورق ساده با ورق دولبه موازی گیردار و دو لبه دیگر مفصلی منطبق می‌شود. علاوه بر موارد ذکر شده همانطور که انتظار می‌رود با افزایش صلبیت لبه‌ها ضریب کمانش بحرانی نیز افزایش می‌یابد.

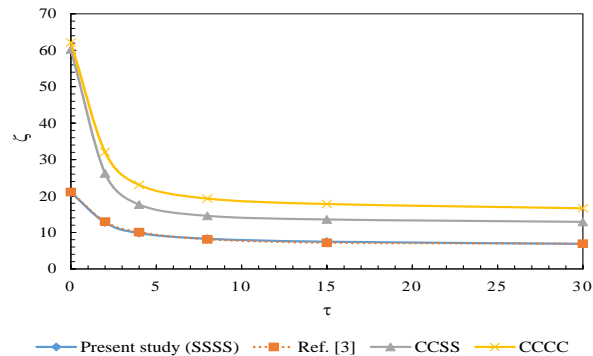


Fig. 8 Critical buckling coefficient history of composite viscoelastic square plate ($\gamma = 0.1$) under biaxial load ($\alpha = 1$) for different boundary conditions

شکل 8 تاریخچه ضریب کمانش بحرانی ورق مربعی کامپوزیت ویسکوالاستیک تحت بار دومیحوره ($\gamma = 0.1$) برای شرایط مرزی مختلف

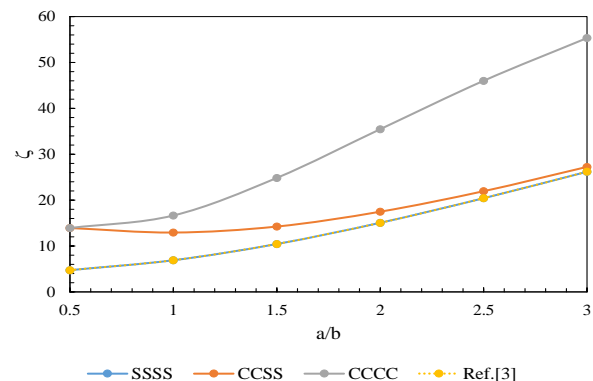


Fig. 9 Effect of ratio $\frac{a}{b}$ on the critical buckling load of composite viscoelastic square plate ($\gamma = 0.1$) for constant value of relaxation function $\bar{\omega} = 0.1$ under uniaxial loading ($\alpha = 1$) for different boundary conditions

شکل 9 تأثیر نسبت $\frac{a}{b}$ بر ضریب بار بحرانی کمانشی ورق مربعی کامپوزیت ویسکوالاستیک ($\gamma = 0.1$) به ازای مقدار ثابت تابع آسودگی $\bar{\omega} = 0.1$ تحت بار دومیحوره ($\alpha = 1$) برای شرایط مرزی مختلف

6- نتیجه گیری

در این پژوهش روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای حل مسئله خمش و کمانش ورق نیمه ضخیم ویسکوالاستیک توسعه داده شد. سپس با حل معادلات حاکم بر ورق نیمه ضخیم بر مبنای نظریه برشی مرتبه اول و نیز کمک گرفتن از تبدیل لاپلاس-کارسون تاریخچه تغییر مکان حداکثر و نیز ضریب بار بحرانی کمانشی برای انواع شرایط مرزی ورق ویسکوالاستیک حل شد. همچنین چند مورد مطالعه پارامتری نیز بر روی تأثیر پارامترهایی نظیر γ (نسبت مساحت ماده تقویت کننده به مساحت کل ورق) و نیز نسبت طول به عرض ($\frac{a}{b}$) بر روی پاسخ ورق مورد بررسی قرار گرفت. برای حل مسئله