



تحلیل ارتعاشات نانوکامپوزیت تقویت شده با نیترید بور واقع بر بسترالاستیک با در نظر گرفتن اثرات سطحی و میدان الکتریکی با استفاده از تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده

احمد قاسمی قلعه بهمن^{1*}، الهام چلویان²

1- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان
* سمنان، صندوق پستی، 35131-19111، ghasemi@semnan.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات میکروپنل کامپوزیتی پلیمری هوشمند پلی وینیلیدن فلوراید تقویت شده با نانولوله نیترید بور تحت تاثیر میدان الکتریکی واقع بر بستر الاستیک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پرداخته شده است. نحوه توزیع نانولوله‌ها در بستر پلیمری به صورت یکنواخت فرض می‌شود. برای مدل‌سازی بستر الاستیک از فنرهای وینکلر و لایه‌ی برشی پاسترناک و برای بررسی اثرات اندازه از تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده استفاده شده است. در ابتدا با استفاده از روش مدل‌سازی میکرومکانیک، معادلات ساختاری نانوکامپوزیت برای یک المان حجمی نمونه استخراج شده و سپس روابط تنش-کرنش بر حسب ترم‌های مکانیکی و الکتریکی به دست آمده است. همچنین معادلات حرکت به کمک اصل همپلتون به دست آمده و در نهایت با استفاده از روش حساب تغییرات و با استخراج ماتریس‌های جرم و سختی، فرکانس طبیعی میکروپنل به دست می‌آید. نتایج به دست آمده در این مقاله نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ابعادی و کاهش درصد حجمی نانولوله‌ها، سختی پنل کاهش یافته و فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. در ادامه پارامترهای مختلفی از قبیل سفتی بستر الاستیک، میزان تاثیر میدان الکتریکی، مدهای مختلف ارتعاشی، نسبت ابعادی و سایر عوامل بررسی شده است. همچنین مقایسه‌ای بین تئوری‌های کلاسیک، تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده انجام شده است.

اطلاعات مقاله

دریافت: 96/11/23
پذیرش: 97/1/26

کلیدواژگان:

ارتعاشات آزاد
نانوکامپوزیت پلیمری هوشمند
تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش
اصلاح شده
نانولوله نیترید بور
میدان الکتریکی

Vibration analysis of boron nitride-reinforced nanocomposites embedded in elastic medium considering surface and electric field effects by using higher-order modified strain gradient theory

Ahmad Ghasemi-Ghalebahman*, Elham Cheloeian

Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran
* P.O.B. 35131-19111 Semnan, Iran, ghasemi@semnan.ac.ir

Keywords

Free vibration
Smart polymeric nanocomposite
Higher-order modified strain gradient theory
Boron nitride nanotube
Electric field

Abstract

This paper investigates free vibration of a smart sandwich composite polymeric micro-panel blend of polyvinylidene fluoride reinforced with boron nitride nanotubes under an electric field resting on an elastic substrate using first order shear deformation theory. The distribution of nanotubes in the polymeric matrix is assumed uniformly. The Winkler springs and Pasternak shear layer are used for modeling the elastomeric substrate and the higher-order modified strain gradient theory is implemented to investigate the effects of size. First, using the microstructural modeling technique, the constitutive equations of the nanocomposite are extracted for a representative volume element, and then the stress-strain relations are obtained in terms of mechanical and electrical terms. Also, the equations of motion are derived using the Hamilton principle, and finally using the method of variational calculus and extracting the mass and stiffness matrices, the natural frequency of the micro-panel is obtained. The results of this paper show that by increasing the aspect ratio and reducing the volume fraction of nanotubes, the panel's hardness decreases and the natural frequency decreases. Further, various parameters such as the stiffness of elastic medium, the effect of electric field, different modes, aspect ratio and other factors are investigated. A comparison is also made between the classical, modified coupled stress, and higher-order modified strain gradient theories.

1- مقدمه

اتصال بین زمینه و تقویت کننده تاثیر قابل توجهی بر استحکام مکانیکی مواد مرکب دارد [1]. نانولوله‌های کربنی یکی از تقویت کننده‌هایی هستند که مطالعات بنیادی بر روی آن‌ها انجام شده است. نتایج این تحقیقات نشان می‌دهد

از گذشته تا کنون تحقیقات بسیاری در زمینه بهبود خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها با استفاده از تقویت کننده‌ها صورت گرفته است. این تحقیقات نشان داد

Please cite this article using:

Ghasemi-Ghalebahman, A. and Cheloeian, E., "Vibration analysis of boron nitride-reinforced nanocomposites embedded in elastic medium considering surface and electric field effects by using higher-order modified strain gradient theory", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 6, No. 1, pp. 31-42, 2019

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

چادوری^{۱۳} [12] مقاله‌ای جهت تحلیل ارتعاشات خطی و شکست متقارن نانولوله‌های نیتريدبور در اثر امتداد ارتعاشات منتشر نمود. وی در این پژوهش ابتدا ارتعاشات عرضی و سپس ارتعاشات طولی و ارتعاشات پیچشی را به صورت جداگانه و بدون در نظر گرفتن اثر برهمکنش آن‌ها بر هم بررسی نمود. نتایج مهمی که در این مقاله اشاره شده این است که در نانولوله با قطر زیاد در زمان ارتعاش، در طول مشخصی از آن‌ها شکستگی رخ می‌دهد که این اتفاق به عنوان شکست متقارن مطرح می‌شود.

انصاری و رمضان نژاد [13] فعالیتی را جهت بررسی ارتعاشات نانولوله‌های کربنی چند جداره با دامنه ارتعاشی بالا ارائه نمودند. در این مطالعه فرض شده است که نانولوله‌ها در یک محیط حرارتی پیوسته و ثابت نسبت به زمان قرار دارند. همچنین مدل‌سازی آن‌ها بر اساس مدل تیموشنکو غیرموضعی واقع بر بستر الاستیک بوده است. انصاری و همکاران [14] مقاله‌ای جهت تحلیل رفتار ارتعاشی نانولوله‌های تک جداره کربن با استفاده از تئوری گرادیان کرنش انتشار نمودند. در این پژوهش بر روی مدل‌های تیر اوپلر برنولی و تیر تیموشنکو مطالعه شده است. نتایج به دست آمده از این مقاله نشان داد که با کاهش نسبت ابعادی (طول به شعاع) نانولوله‌ها، ارتعاش آن‌ها نیز کاهش می‌یابد و تفاوت میان تئوری‌های مختلف گرادیبانی افزایش خواهد یافت.

خورشیدی و همکاران [15] در مقاله‌ای به تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق کامپوزیت مستطیلی هدفمند در محیط حرارتی پرداختند. آن‌ها در این مقاله جهت استخراج فرکانس طبیعی نانو ورق کامپوزیت از تئوری الاستیسیته غیرموضعی استفاده کردند. همچنین آن‌ها در مقاله‌ای دیگر [16] به بررسی ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک تحت بار الکترومکانیکی پرداختند. در این مقاله بار الکترومکانیکی شامل نیروی محوری و ولتاژ خارجی بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده نمای و مثلثاتی به همراه تئوری الاستیسیته غیرموضعی و شرایط مرزی چهار طرف تکیه ساده می‌باشند. در سال‌های اخیر قربان پور آرانی و همکاران تحقیقات متعددی در زمینه ارتعاشات نانولوله‌ها انجام دادند. آن‌ها مقاله‌ای [17] جهت بررسی ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های دوجداره نیتريدبور به کمک تئوری برشی انتشار نمودند که در آن از تئوری پوسته‌های جدار نازک استفاده شده و با فرض عبور سیال از داخل نانولوله و همچنین تاثیر سیال ویسکوز به تحلیل پایداری فرکانس‌های ارتعاشی پرداختند. در کار دیگر [18] به بررسی ارتعاشات غیرموضعی الکتروترمال^{۱۴} نانولوله دوجداره نیتريدبور^{۱۵} پرداختند. در این مطالعه رفتار ارتعاشات عرضی الکتروترمال نانولوله‌های دوجداره نیتريدبور تحت اثر بستر الاستیک با استفاده از تئوری پوسته استوانه‌ای پیزوالاستیسیته غیرموضعی بررسی شده است. از دیگر فعالیت‌های آن‌ها [19] ارائه تحقیقی در خصوص تحلیل ارتعاشات میکروصفحه کامپوزیت ساندویچی تحت بارگذاری ترکیبی الکترومگنتومکانیک^{۱۶} می‌باشد. در این تحقیق ارتعاشات یک میکروصفحه کامپوزیت ساندویچی متشکل از پنج لایه هوشمند، بررسی شده است.

دهد که خواص مکانیکی نانو کامپوزیت‌ها با افزودن نانولوله‌های کربنی به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد [2].

نانولوله‌های نیتريدبور همانند نانولوله‌های کربنی دارای ویژگی‌های مکانیکی فوق العاده‌ای هستند و حتی در برخی موارد کارایی آن‌ها بهتر بوده و انرژی پیوند قویتری با بستر پلیمری برقرار می‌کنند [3]. برای مثال بیشتر نانولوله‌های کربنی تولید شده شامل هر دو نانولوله رسانا و نارسانا می‌باشند که جداسازی کامل آن‌ها امری مشکل است در حالی که تمامی نانولوله‌های نیتريد بور رفتار عایق یا نیمه رسانا از خود نشان می‌دهند. به علاوه نانولوله‌های نیتريدبور دارای ویژگی‌های شیمیایی پایدارتری هستند، همچنین در برابر اکسیداسیون مقاومت بالایی دارند که این ویژگی سبب استفاده از این نانولوله‌ها در تولید مواد کامپوزیتی شده است [4-5]. از این رو کامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های نیتريدبور در مقایسه با کامپوزیت‌های معمولی دارای استحکام مکانیکی، پایداری حرارتی، مقاومت شیمیایی، هدایت حرارتی قابل توجهی بوده، در عین حال ضریب انبساط حرارتی پایینی دارند [6-7].

یکی دیگر از ویژگی‌های مهم نانولوله‌های نیتريدبور خاصیت پیزوالکتریک^۱ آن‌ها است. بدان معنی که این نانولوله‌ها زمانی که در محدوده میدان الکتریکی واقع می‌شوند، از خود کرنش نشان می‌دهند [8].

تئوری‌های استفاده شده در مطالعات قبلی را می‌توان به دو دسته مکانیک محیط پیوسته کلاسیک^۲ و غیرکلاسیک تقسیم نمود. در تئوری کلاسیک اثرات اندازه کوچک لحاظ نمی‌شود، از این رو این تئوری را تئوری موضعی^۳ نیز می‌گویند. به این معنی که تنش در هر نقطه به کرنش در همان نقطه بستگی دارد. از آن جایی که رفتار مواد در مقیاس‌های کوچک متفاوت می‌باشد، لذا ضرورت استفاده از تئوری‌های غیرموضعی^۴ جهت تحلیل دقیق مواد در مقیاس‌های کوچک احساس می‌شود. تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده^۵ از جمله این تئوری‌ها می‌باشد که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است.

با توجه به اهمیت نانولوله‌ها تا کنون مطالعات فراوانی بر روی آن‌ها صورت گرفته است. تان^۶ و تونگ^۷ [9] فعالیتی را در خصوص بررسی مدل‌های میکروالکترومکانیک^۸ برای مواد کامپوزیت تقویت شده با فیبر پیزوالکتریک^۹ ارائه نمودند. آن‌ها در این مطالعه دو مدل میکروالکترومکانیک یعنی مدل مستطیل و مدل سیلندر- مستطیل را جهت پیش‌بینی ثوابت الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک برای مواد کامپوزیت تقویت شده با فیبر پیزوالکتریک تحت هر دو نوع بارگذاری تکی و ترکیبی پیشنهاد کردند. واکرانی^{۱۰} و همکاران [10] مقاله‌ای جهت بررسی خواص مکانیکی و الکتریکی نانولوله‌های نیتريد بور و کربن ارائه نمودند که در قسمتی از آن تاثیر ارتعاشات نانولوله‌های تک جداره نیتريدبور^{۱۱} را بر روی خواص مکانیکی مورد بررسی قرار دادند. ژیانگ^{۱۲} و همکاران [11] تحقیقی جهت بررسی ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های دوجداره کربنی انجام دادند. در این تحقیق تئوری تیموشنکو غیرموضعی برای مدل‌سازی به کار گرفته شده و فرض شده که نانولوله‌ها در بستر الاستیک قرار گرفته‌اند.

¹⁰ Vaccarini

¹¹ Single Walled Boron Nitride Nano Tube

¹² Xiang

¹³ Chowdhury

¹⁴ Electro Thermal

¹⁵ Double Walled Boron Nitride Nano Tube

¹⁶ Electro Magneto Mechanics

¹ Piezoelectric

² Classic Continuum Theory

³ Local Theory

⁴ Nonlocal Theory

⁵ Higher-order Modified Strain Gradient Theory

⁶ Tan

⁷ Tong

⁸ Micro Electro Mechanics

⁹ Piezoelectric Fiber Reinforced Composite

2- شرح مساله

در کار حاضر به بررسی ارتعاشات یک میکرو پنل¹ کامپوزیتی پلیمری هوشمند با ماده زمینه پلی وینیلدن فلوراید تقویت شده با نانولوله های نیتريد بور واقع بر یک بستر الاستیک تحت اثر میدان الکتریکی² پرداخته شده است.

برای مدل سازی بستر الاستیک از مدل فنری وینکلر و برشی پاسترناک و برای در نظر گرفتن شاخص طولی³ (اثرات مقیاس کوچک) از تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده استفاده شده است. بدین منظور در ابتدا با استفاده از مدل سازی با روش میکرو مکانیک⁴، معادلات ساختاری نانو کامپوزیت برای یک المان حجمی نمونه استخراج می شود.

برای بیان رابطه کرنش-جابجایی از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده و معادلات حرکت نیز به کمک اصل همیلتون استخراج می شود. در نهایت با استفاده از روش حساب تغییرات و با استخراج ماتریس های جرم و سختی، فرکانس طبیعی میکرو پنل به روش تحلیلی به دست می آید.

"شکل 1" یک پنل کامپوزیت استوانه ای تقویت شده با نانولوله های نیتريد بور تحت اثر میدان الکتریکی و بستر الاستیک را نشان می دهد. در این شکل L طول میکرو پنل، زاویه ϕ قطاع میکرو پنل، h ضخامت میکرو پنل و R شعاع میکرو لوله می باشد.

معادلات ساختاری حاکم بر رفتار الکترو الاستیک⁵ مواد کامپوزیت تقویت

شده با فیبر پیزوالکتریک⁶ تحت اثر میدان الکتریکی به صورت روابط (1) و (2) بیان شده است [21].

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta - e_{\alpha n} E_n \quad (1)$$

$$D_m = e_{m\beta} \varepsilon_\beta + \epsilon_{mn} E_n \quad (2)$$

که در رابطه فوق E و D به ترتیب معرف میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی⁷ بوده و σ ، ε نیز به ترتیب بیان گر میدان تنش و کرنش می باشند.

میدان های تنش و کرنش به شکل روابط (3) و (4) تعریف می شوند.

$$\sigma = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{x\theta} \quad \sigma_{\theta z} \quad \sigma_{xz})^T \quad (3)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{x\theta} \quad \varepsilon_{\theta z} \quad \varepsilon_{xz})^T \quad (4)$$

میدان الکتریکی نیز به صورت رابطه (5) بیان می شود [21].

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{R \partial \theta} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

که در آن ϕ نمایانگر تابع پتانسیل الکتریکی⁸ می باشد.

معادلات ساختاری پنل کامپوزیت استوانه ای تقویت شده با نانولوله های نیتريد بور به صورت رابطه (6) استخراج می شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \\ D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ -e_{31} & -e_{32} & -e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \\ E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

که در آن ثوابت الاستیک، پیزوالکتریک و دی الکتریک با استفاده از قانون اختلاط بدست آمده که به ترتیب در روابط (7)، (8) و (9) ارائه می شود [9]. ثوابت الاستیک:

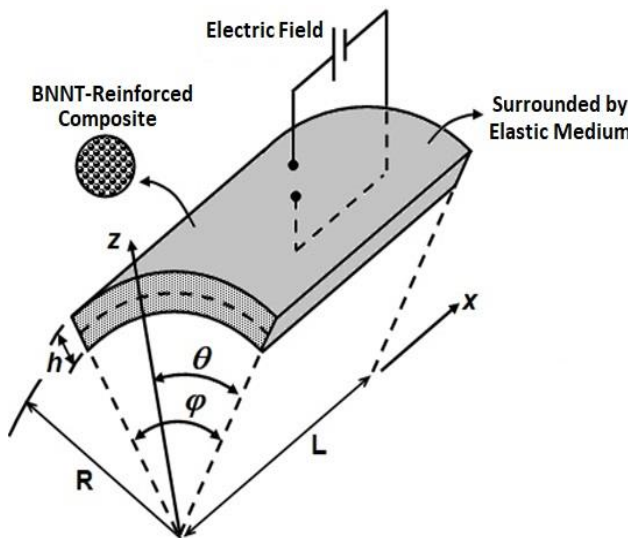


Fig.1 The schematic of cylindrical composite panel reinforced by BNNTs under electric field and elastic foundation

شکل 1 شماتیک پنل کامپوزیت استوانه ای تقویت شده با نانولوله نیتريد بور تحت اثر میدان الکتریکی و بستر الاستیک

3- ارائه مدل میکرو مکانیک برای کامپوزیت تقویت شده با الیاف

پیزوالکتریک

مدل میکرو مکانیک یک روش مناسب برای استخراج خواص مواد کامپوزیت هوشمند می باشد [20].

⁵ Electro Elastic

⁶ Piezoelectric Fiber Reinforced Composites

⁷ Electric Displacement

⁸ Electric Potential

¹ Micro Panel

² Electric Field

³ Length Scale Parameter

⁴ Micro Mechanics

ارائه نمودند. در حقیقت تئوری گرادیان کرنش حالت کلی تئوری تنش کوپل^۴ می‌باشد [23].

تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده از دقیق‌ترین تئوری‌های غیر کلاسیک مکانیک محیط پیوسته می‌باشد که در این تئوری تنش در هر نقطه نه تنها به کرنش در همان نقطه بستگی داشته، بلکه به گرادیان کرنش نیز بستگی دارد. در این تئوری سه پارامتر اثر اندازه در مقیاس‌های کوچک معرفی می‌شود که در حقیقت این پارامترها بیان‌گر رفتار ماده بوده که در مقیاس میکرو به ابعاد ماده بستگی دارند.

بر طبق این تئوری انرژی کرنشی به شکل رابطه (10) بیان می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + m_{ij} \chi_{ij} + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)}) dv \quad (10)$$

با مشاهده رابطه فوق درمی‌یابیم که جملاتی نسبت به تئوری موضعی کلاسیک افزوده شده که این جملات ناشی از تنش‌های مرتبه بالاتر و اثرات گرادیان کرنش‌های اعمالی می‌باشند. همچنین در این رابطه σ_{ij} تانسور تنش^۵، ε_{ij} تانسور کرنش^۶، γ_i بردار گرادیان اتساع^۷ (انبساط برشی)، χ_{ij} تانسور گرادیان چرخش متقارن^۸، $\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور گرادیان انحراف کشیدگی^۹، و p_i ، m_{ij} ، $\tau_{ijk}^{(1)}$ تنش‌های مرتبه بالا می‌باشند.

5- معادلات حاکم

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی پل کامپوزیت استوانه‌ای به شکل رابطه (11) ارائه می‌شود [24].

$$\begin{aligned} \bar{U}(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) + z\varphi_x(x, \theta, t) \\ \bar{V}(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) + z\varphi_\theta(x, \theta, t) \\ \bar{W}(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (11)$$

که در رابطه فوق \bar{U} ، \bar{V} و \bar{W} مولفه‌های جابجایی برای پل استوانه‌ای در راستای x ، θ و z می‌باشد. همچنین u ، v و w مولفه‌های جابجایی سطح میانی پوسته می‌باشند. زاویه چرخش سطح مقطع نسبت به محورهای x و θ نیز به ترتیب با φ_x و φ_θ نشان داده شده است.

مولفه‌های کرنش پوسته استوانه‌ای به شکل رابطه (12) بیان می‌شوند [19]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + z\kappa_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta}^0 + z\kappa_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ 2\gamma_{x\theta} &= 2\gamma_{x\theta}^0 + z\kappa_{x\theta} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه فوق ε_{xx} ، $\varepsilon_{\theta\theta}$ ، ε_{zz} ، $\gamma_{x\theta}$ ، γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$ کرنش‌های سطح میانی پوسته هستند که به صورت روابط (13) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{c_{11}^p c_{11}^m}{\rho c_{11}^p + (1-\rho) c_{11}^m} \\ C_{12} &= C_{11} \left(\frac{\rho c_{12}^p}{c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) c_{12}^m}{c_{11}^m} \right) \\ C_{13} &= C_{11} \left(\frac{\rho c_{13}^p}{c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) c_{13}^m}{c_{11}^m} \right) \\ C_{22} &= \rho c_{22}^p + (1-\rho) c_{22}^m + \frac{(C_{12})^2}{C_{11}} - \frac{\rho (c_{12}^p)^2}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (c_{12}^m)^2}{c_{11}^m} \\ C_{23} &= \rho c_{23}^p + (1-\rho) c_{23}^m + \frac{(C_{12} C_{13})}{C_{11}} - \frac{\rho (c_{12}^p c_{13}^p)}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (c_{12}^m c_{13}^m)}{c_{11}^m} \\ C_{33} &= \rho c_{33}^p + (1-\rho) c_{33}^m + \frac{(C_{13})^2}{C_{11}} - \frac{\rho (c_{13}^p)^2}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (c_{13}^m)^2}{c_{11}^m} \\ C_{44} &= \rho c_{44}^p + (1-\rho) c_{44}^m \\ C_{55} &= \frac{A}{B^2 + AC} \\ C_{66} &= \frac{c_{66}^p + c_{66}^m}{\rho c_{66}^p + (1-\rho) c_{66}^m} \end{aligned} \quad (7)$$

ثوابت پیزوالکتریک:

$$\begin{aligned} e_{31} &= C_{11} \left(\frac{\rho e_{31}^p}{c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) e_{31}^m}{c_{11}^m} \right) \\ e_{32} &= \rho e_{32}^p + (1-\rho) e_{32}^m + \frac{(C_{12} e_{31})}{C_{11}} - \frac{\rho (c_{12}^p e_{31}^p)}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (c_{12}^m e_{31}^m)}{c_{11}^m} \\ e_{33} &= \rho e_{33}^p + (1-\rho) e_{33}^m + \frac{(C_{13} e_{31})}{C_{11}} - \frac{\rho (c_{13}^p e_{31}^p)}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (c_{13}^m e_{31}^m)}{c_{11}^m} \\ e_{24} &= \rho e_{24}^p + (1-\rho) e_{24}^m \\ e_{15} &= \frac{B}{B^2 + AC} \end{aligned} \quad (8)$$

ثوابت دی الکتریک:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{C}{B^2 + AC} \\ \epsilon_{22} &= \rho \epsilon_{22}^p + (1-\rho) \epsilon_{22}^m \\ \epsilon_{33} &= \rho \epsilon_{33}^p + (1-\rho) \epsilon_{33}^m + \frac{(e_{31})^2}{C_{11}} - \frac{\rho (e_{31}^p)^2}{c_{11}^p} - \frac{(1-\rho) (e_{31}^m)^2}{c_{11}^m} \end{aligned} \quad (9)$$

که در روابط فوق پارامترهای A ، B و C عبارتند از:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho c_{55}^p}{(e_{15}^p)^2 + c_{55}^p c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) c_{55}^m}{(e_{15}^m)^2 + c_{55}^m c_{11}^m} \\ B &= \frac{\rho e_{15}^p}{(e_{15}^p)^2 + c_{55}^p c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) e_{15}^m}{(e_{15}^m)^2 + c_{55}^m c_{11}^m} \\ C &= \frac{\rho c_{11}^p}{(e_{15}^p)^2 + c_{55}^p c_{11}^p} + \frac{(1-\rho) c_{11}^m}{(e_{15}^m)^2 + c_{55}^m c_{11}^m} \end{aligned}$$

4- تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده

تئوری کرنش‌های مرتبه بالا برای اولین بار توسط میندیلین^۱ بیان شد [22]. این تئوری را فلک^۲ و هاچینسون^۳ توسعه دادند و به شکل تئوری گرادیان کرنش

⁶ Strain tensor

⁷ Dilatation Gradient Tensor

⁸ Rotation Gradient Tensor

⁹ Deviatoric Stretch Gradient Tensor

¹ Mindlin

² Fleck

³ Hachinson

⁴ Couple Stress Theory

⁵ Stress tensor

$$\Pi = U - (K + W) \quad (20)$$

در این رابطه Π ، U ، K و W به ترتیب بیان گر انرژی پتانسیل کل، انرژی کرنشی، انرژی جنبشی^۲ و انرژی ذخیره شده در بستر می باشند.

1-6- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی کل سازه برای یک میکرولوله^۳ با توجه به موارد ذکر شده در بخش های قبلی بر اساس تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده به صورت رابطه (21) استخراج می شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\theta \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + 2\tau_{x\theta}\gamma_{x\theta} + 2\tau_{xz}\gamma_{xz} + 2\tau_{\theta z}\gamma_{\theta z} + p_x\gamma_x + p_\theta\gamma_\theta + p_z\gamma_z + m_{xx}\chi_{xx} + m_{\theta\theta}\chi_{\theta\theta} + 2m_{x\theta}\chi_{x\theta} + 2m_{\theta z}\chi_{\theta z} + 2m_{xz}\chi_{xz} + \tau_{xxx}\eta_{xxx} + \tau_{\theta\theta\theta}\eta_{\theta\theta\theta} + \tau_{zzz}\eta_{zzz} + 6\tau_{x\theta z}\eta_{x\theta z} + 3\tau_{x\theta\theta}\eta_{x\theta\theta} + 3\tau_{\theta\theta x}\eta_{\theta\theta x} + 3\tau_{\theta\theta z}\eta_{\theta\theta z} + 3\tau_{x\theta z}\eta_{x\theta z} + 3\tau_{x\theta\theta}\eta_{x\theta\theta} + 3\tau_{\theta\theta z}\eta_{\theta\theta z} + 3\tau_{zz\theta}\eta_{zz\theta} + D_x E_x + D_\theta E_\theta + D_z E_z) dz dx R d\theta \quad (21)$$

لازم به ذکر است ترم های معادله بالا در بخش های قبلی معرفی شده اند.

2-6- انرژی جنبشی

برای مسأله مورد بحث، انرژی جنبشی کل سازه به صورت رابطه (22) بیان خواهد شد.

$$K = \frac{1}{2} \rho_t \int \int \int_V \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \frac{1}{2} \rho_t \int_0^\theta \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(\frac{d\bar{U}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{V}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\bar{W}}{dt} \right)^2 \right] dz dx R d\theta \quad (22)$$

3-6- انرژی ذخیره شده در بستر الاستیک

در این پژوهش فرض بر این است که نانولوله مورد بحث بر یک بستر الاستیک شامل بستر فنری وینکلر^۴ و بستر برشی پاسترناک^۵ قرار دارد. رابطه (23) بیان گر انرژی ذخیره شده در بستر الاستیک می باشد که در آن از وزن بستر صرف نظر شده است.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\theta \int_0^L (k_w w - k_G \nabla^2 w) w dx R d\theta \quad (23)$$

که در آن k_w ضریب الاستیک لایه وینکلر، k_G ضریب الاستیک لایه برشی پاسترناک، ∇^2 عملگر لاپلاس و w تابع تغییر مکان در راستای z می باشد.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^0 &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \varphi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned}$$

همچنین κ_{xx} ، $\kappa_{\theta\theta}$ و $\kappa_{x\theta}$ مولفه های انحناي خمش و پیچش در سطح میانی می باشند که به صورت رابطه (14) ارائه می شوند.

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (14)$$

برای به دست آوردن تابع پتانسیل الکتریکی از معادله ماکسول^۱ که در رابطه (15) ارائه شده است، استفاده می شود [25].

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

با قرار دادن روابط (2) در معادله ماکسول رابطه (16) به دست می آید.

$$\epsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = e_{31} \kappa_{xx} + e_{32} \kappa_{\theta\theta} \quad (16)$$

با حل معادله دیفرانسیل، ϕ به صورت رابطه (17) استخراج می شود.

$$\phi = \left(\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \kappa_{xx} + \frac{e_{32}}{\epsilon_{33}} \kappa_{\theta\theta} \right) \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \quad (17)$$

که در آن ثوابت انتگرال گیری از اعمال شرایط مرزی به دست می آیند. شرایط مرزی برای یک مدار بسته الکتریکی در سطوح بالا و پایین پیل به صورت رابطه (18) در نظر گرفته می شوند [26].

$$\phi(z = \pm h/2) = 0 \quad (18)$$

با اعمال شرایط مرزی، ثوابت انتگرال گیری به صورت رابطه (19) به دست می آیند.

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= - \left(\frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \kappa_{xx} + \frac{e_{32}}{\epsilon_{33}} \kappa_{\theta\theta} \right) \frac{h^2}{8} \end{aligned} \quad (19)$$

6- محاسبه انرژی پتانسیل کل

انرژی پتانسیل کل یک سازه شامل انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و انرژی ذخیره شده در بستر می باشد. انرژی پتانسیل کل به صورت رابطه (20) بیان می شود.

⁴ Winkler Spring

⁵ Pasternak Shear

¹ Maxwell's Equation

² Kinetic Energy

³ Micro Tube

7- استخراج معادلات حرکت

در پژوهش حاضر جهت استخراج معادلات حرکت برای سیستم مورد تحلیل از اصل همیلتون استفاده شده است. بنابراین طبق اصل همیلتون و حساب تغییرات رابطه (24) ارائه می‌شود.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \Pi dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta [U - (K + W)] dt = 0 \quad (24)$$

که در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_0^L \int_0^\theta [I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \delta \varphi_x + I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v \\ & + I_1 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \delta \varphi_\theta + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta \varphi_x + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \delta \varphi_x \\ & + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta \varphi_\theta + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2} \delta \varphi_\theta + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w] dx R d\theta \\ (I_0, I_1, I_2) = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L \int_0^\theta [-K_w w \delta w + K_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w \\ & + \frac{1}{R^2} K_G \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \delta w] dx R d\theta \end{aligned}$$

به دلیل حجم بالای روابط δU ، از بیان آن در این قسمت صرف نظر شده است. این روابط در پیوست آورده شده‌اند.

در ادامه برای به دست آوردن معادلات تعادل، از ضرایب δu ، δv ، $\delta \varphi_x$ و $\delta \varphi_\theta$ در روابط (25) و رابطه مربوط به δU که در پیوست آمده فاکتورگیری نموده که با این کار پنج معادله حرکت حاکم بر مساله به صورت روابط (26) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \text{equation1: } & \text{factor}(\delta u)_{\delta U} - \text{factor}(\delta u)_{\delta K} - \text{factor}(\delta u)_{\delta W} = 0 \\ \text{equation2: } & \text{factor}(\delta v)_{\delta U} - \text{factor}(\delta v)_{\delta K} - \text{factor}(\delta v)_{\delta W} = 0 \\ \text{equation3: } & \text{factor}(\delta w)_{\delta U} - \text{factor}(\delta w)_{\delta K} - \text{factor}(\delta w)_{\delta W} = 0 \\ \text{equation4: } & \text{factor}(\delta \varphi_x)_{\delta U} - \text{factor}(\delta \varphi_x)_{\delta K} - \text{factor}(\delta \varphi_x)_{\delta W} = 0 \\ \text{equation5: } & \text{factor}(\delta \varphi_\theta)_{\delta U} - \text{factor}(\delta \varphi_\theta)_{\delta K} - \text{factor}(\delta \varphi_\theta)_{\delta W} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

سپس از حل ناوبر استفاده می‌شود به گونه‌ای که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را ارضاء نماید. این روابط به صورت روابط (27) منظور می‌شوند.

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) = & u_0 \sin(\alpha_m \theta) \cos(\beta_n x) e^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) = & v_0 \cos(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x) e^{i\omega t} \\ w(x, \theta, t) = & w_0 \sin(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x) e^{i\omega t} \\ \varphi_x(x, \theta, t) = & \varphi_{x_0} \sin(\alpha_m \theta) \cos(\beta_n x) e^{i\omega t} \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) = & \varphi_{\theta_0} \cos(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (27)$$

که در روابط بالا داریم:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{\phi}$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L}$$

سپس روابط (27) را در پنج معادله حاکم (26) جایگذاری می‌کنیم. در ادامه برای ساده‌سازی معادلات تعادل ثوابتی به صورت زیر تعریف شده که آن‌ها را در روابط (29) جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} k_1 = & \int_0^L \int_0^\theta [(\cos(\beta_n x) \sin(\alpha_m \theta)) \times \\ & (\sin(\alpha_m \theta) \cos(\beta_n x))] dx R d\theta \\ k_2 = & \int_0^L \int_0^\theta [(\cos(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x)) \times \\ & (\cos(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x))] dx R d\theta \\ k_3 = & \int_0^L \int_0^\theta [(\sin(\beta_n x) \sin(\alpha_m \theta)) \times \\ & (\sin(\alpha_m \theta) \sin(\beta_n x))] dx R d\theta \end{aligned} \quad (28)$$

پس از انجام ساده‌سازی‌های ریاضی، از ثوابت u_0 ، v_0 ، w_0 ، φ_{x_0} و φ_{θ_0} در پنج معادله حرکت فاکتورگیری نموده و در رابطه ماتریسی زیر جایگذاری می‌کنیم. لازم به ذکر است به علت طولانی بودن روابط از ذکر تفصیلی این رابطه خودداری می‌شود.

$$\begin{pmatrix} \text{factor}(u_0)_{\text{equation1}} & \text{factor}(v_0)_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(u_0)_{\text{equation2}} & \text{factor}(v_0)_{\text{equation2}} \\ \text{factor}(u_0)_{\text{equation3}} & \text{factor}(v_0)_{\text{equation3}} \\ \text{factor}(u_0)_{\text{equation4}} & \text{factor}(v_0)_{\text{equation4}} \\ \text{factor}(u_0)_{\text{equation5}} & \text{factor}(v_0)_{\text{equation5}} \\ \text{factor}(w_0)_{\text{equation1}} & \text{factor}(\varphi_{x_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(w_0)_{\text{equation2}} & \text{factor}(\varphi_{x_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(w_0)_{\text{equation3}} & \text{factor}(\varphi_{x_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(w_0)_{\text{equation4}} & \text{factor}(\varphi_{x_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(w_0)_{\text{equation5}} & \text{factor}(\varphi_{x_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(\varphi_{\theta_0})_{\text{equation1}} \\ \text{factor}(\varphi_{\theta_0})_{\text{equation2}} \\ \text{factor}(\varphi_{\theta_0})_{\text{equation3}} \\ \text{factor}(\varphi_{\theta_0})_{\text{equation4}} \\ \text{factor}(\varphi_{\theta_0})_{\text{equation5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_{x_0} \\ \varphi_{\theta_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

برای حصول یک حل قابل قبول غیرصفر، با دترمینان‌گیری از ماتریس ضرایب فوق و قرار دادن دترمینان حاصل برابر صفر، معادله‌ای به دست آمده که از حل آن فرکانس طبیعی پندل به دست می‌آید. لازم به ذکر است می‌توان این معادلات را از هم تفکیک نمود به گونه‌ای که درایه‌های ماتریس که شامل متغیر ω^2 بوده ماتریس جرم (M) را تشکیل داده و درایه‌های دیگر آن ماتریس سفتی (K) را تشکیل می‌دهند:

$$[K] - \omega^2 [M] = [0] \quad (30)$$

8- اعتبار سنجی

برای اعتبارسنجی نتایج و بررسی صحت فرمولاسیون حل تحلیلی ارائه شده، مقایسه‌ای با نتایج به دست آمده در مرجع [27] صورت گرفته است.

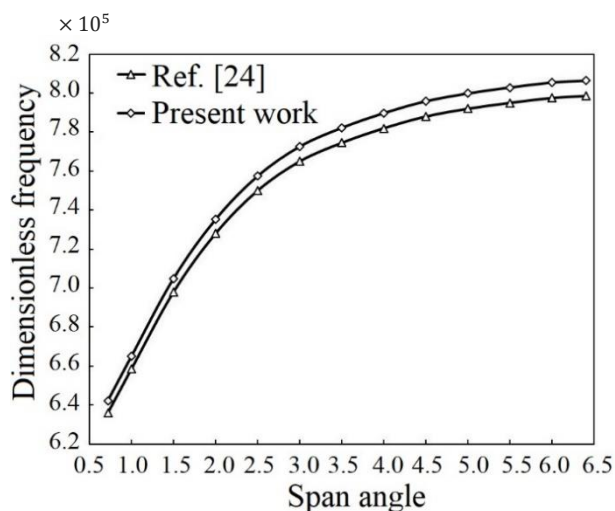


Fig. 2 The effect of the angle of the panel on the frequency

شکل 2 تاثیر زاویه قطاع پنل بر فرکانس طبیعی

با توجه به جدول 2 و " شکل 2" انطباق خوبی که بین نتایج به دست آمده از این مقاله و نتایج به دست آمده از مرجع [27] مشاهده می‌شود، می‌توان به صحت فرمولاسیون و روش حل ارائه شده در این مقاله اطمینان حاصل کرد. علت اختلاف اندک بین نتایج را می‌توان به تئوری گرادیان کرنش که در تحلیل حاضر استفاده شده، نسبت داد. بیشترین درصد خطای به وجود آمده تقریباً برابر 1.08 درصد می‌باشد.

9- بحث و بررسی نتایج

در این قسمت پس از صحت سنجی فرمولاسیون و روش حل ارائه شده در مقاله ارتعاشات خطی پنل کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های نیتريدبور واقع بر بستر الاستیک و تحت اثر میدان الکتریکی با استفاده از تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. پارامتر بی بعد مورد استفاده برای ترسیم نمودارها به صورت زیر می‌باشد.

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_{BNNT}}{C_{11BNNT}}}$$

که ω و Ω به ترتیب فرکانس‌های با بعد و بدون بعد و h ضخامت پنل و ρ_{BNNT} چگالی نیتريدبور می‌باشد. در این مقاله تاثیر پارامترهای نسبت ابعادی، درصد حجمی، زاویه قطاع و همچنین تاثیر بستر، میدان الکتریکی، مودهای ارتعاشی و اثر اندازه‌های مقیاس کوچک بررسی شده است. با توجه به این نکته که برای بیان رابطه کرنش- جابجایی از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده، فرمولاسیون ارائه شده در این مقاله قابلیت تحلیل صفحات نسبتاً ضخیم را دارا می‌باشد. مشخصات پنل کامپوزیتی نمونه به صورت زیر می‌باشد:

$$R = 0.00002m, \quad L = 0.00004m, \quad \phi = 2\pi \text{ rad}$$

$$K_w = 10^{17} N/m^3, \quad K_g = 10^4 N/m,$$

$$m = 1, \quad n = 1$$

برای انجام مقایسه بین تئوری‌های مختلف کلاسیک، تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده، به پارامترهای l_0, l_1, l_2 مقادیر زیر تخصیص داده می‌شود.

تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده:

مشخصات ساختاری CNT و PVDF در جدول 1 ارائه شده است [27].

جدول 1 خواص ماده زمینه (PVDF) و تقویت کننده (CNT)

Table 1 The properties of matrix (PVDF) and reinforcement fiber (CNT)

Properties	SWCNT	PVDF
$C_{11}(Gpa)$	5825	2.815
$C_{12} = C_{21}(Gpa)$	1019	1.081
$C_{22}(Gpa)$	7304	2.815
$C_{44} = C_{55} = C_{66}(Gpa)$	1945	0.8671
$e_{31}(c/m)$	0	-0.13
$q_{31}(N/Am)$	22	0
$d_{33}(m/V)$	0	-46×10^{-12}
$\eta_{33}(c/Vm)$	0	0.106×10^{-9}
$\mu_{33}(Ns^2/c^2)$	0.25	$4\pi \times 10^{-7}$
$\rho_m(kg/m^3)$	1400	1780

نتایج این بررسی در جدول 2 و " شکل 2" ارائه شده است. در جدول 2 به بررسی فرکانس طبیعی به ازای درصد حجمی‌های مختلف پرداخته شده است. همچنین در " شکل 2" به بررسی تاثیر زاویه قطاع پنل بر فرکانس طبیعی پرداخته شده است. لازم به ذکر است که این بررسی برای حالتی انجام شده که در آن نانولوله بدون با در نظر گرفتن اثرات بستر الاستیک و بدون در نظر گرفتن اثر میدان الکتریکی منظور شده است. مشخصات ابعادی در نظر گرفته شده به صورت زیر می‌باشد:

$$a = 0.0384m, \quad L = 0.0192m, \quad \theta = \pi \text{ rad}$$

$$K_w = 10^9 N/m^3, \quad K_g = 10 N/m,$$

$$m = 1, \quad n = 1$$

جدول 2 مقایسه فرکانس طبیعی در درصد حجمی‌های مختلف

Table 2 comparison of natural frequency in different volume fraction

فرکانس طبیعی (کار حاضر)	فرکانس طبیعی [18]	درصد حجمی
7.7542	7.6766	0.12
9.2243	9.1827	0.17
11.9428	11.9250	0.28

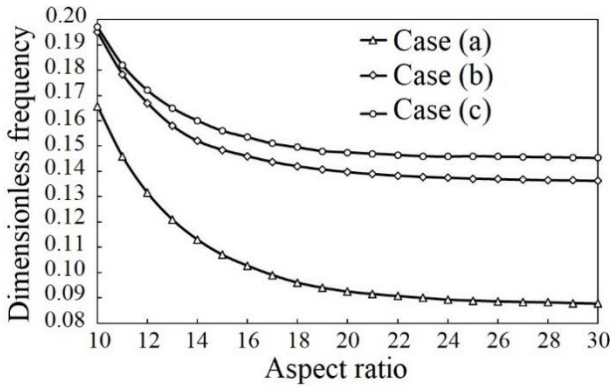


Fig. 3 The effect of aspect ratio changes on dimensionless frequency in presence and absence of elastic medium and electric field

شکل 3 تاثیر تغییرات نسبت ابعادی بر فرکانس بی بعد در حضور و غیاب میدان الکتریکی و بستر الاستیک

همان طور کہ در "شکل 3" مشاہدہ می شود با افزایش نسبت ابعادی میزان فرکانس بی بعد شدہ کاهش می یابد. بہ عبارت دیگر با افزایش این نسبت از سختی پنل کاستہ می شود.

همچنین مشاہدہ می شود کہ کمترین فرکانس در سہ حالت فرض شدہ در یک نسبت ابعادی ثابت مربوط بہ حالت اول بودہ کہ از اثر بستر و میدان الکتریکی صرف نظر شدہ است. در حالت دوم با اضافہ شدن اثر بستر الاستیک فرکانس طبیعی بی بعد شدہ افزایش می یابد. بیشترین فرکانس مربوط بہ حالت سوم بودہ کہ ہر دو اثر بستر الاستیک و میدان الکتریکی در نظر گرفتہ شدہ است کہ در حقیقت می توان گفت کہ ہر دو اثر بستر الاستیک و میدان الکتریکی بہ نوعی باعث افزایش سختی پنل نمونہ می شوند. در جدول 4 تاثیر پارامتر درصد حجمی بر فرکانس بی بعد در سہ حالت مختلف بررسی شدہ است.

با بررسی جدول 4 درمی یابیم کہ با افزایش درصد حجمی، فرکانس بی بعد افزایش یافته بدین معنی کہ با افزایش درصد حجمی، سختی پنل افزایش می یابد. در یک درصد حجمی ثابت رفتار سہ حالت فرض شدہ مشابہ "شکل 3" می باشد.

جدول 4 تاثیر تغییرات درصد حجمی بر فرکانس بی بعد در حضور و غیاب میدان الکتریکی و بستر الاستیک

Table 4 The effects of changes volume fraction on dimensionless frequency in presence and absence elastic medium and electric field

درصد حجمی	فرکانس بی بعد حالت سوم	فرکانس بی بعد حالت دوم	فرکانس بی بعد حالت یک
0.01	0.682	0.675	0.6558
0.05	1.11	1.105	1.089
0.1	1.473	1.47	1.459
0.15	1.762	1.76	1.753
0.2	2.002	2.001	2.004
0.25	2.234	2.232	2.227
0.3	2.443	2.44	2.431
0.35	2.621	2.62	2.618
0.4	2.801	2.798	2.793
0.45	2.9635	2.962	2.958
0.5	3.11	3.117	3.12

$$(l_0, l_1, l_2) = (176 \times 10^{-10}, 176 \times 10^{-10}, 176 \times 10^{-10})$$

تئوری تنش کوپل اصلاح شدہ:

$$(l_0, l_1, l_2) = (0.0, 176 \times 10^{-10})$$

تئوری کلاسیک:

$$(l_0, l_1, l_2) = (0.0, 0.0)$$

خواص ساختاری پلی وینیلیدن فلوراید¹ بہ عنوان مادہ زمینہ و نانولولہ های نیتریدبور بہ عنوان تقویت کنندہ کامپوزیت پلیمری² نمونہ در جدول 3 ارائه شدہ است [29,28].

جدول 3 مشخصات ساختاری PVDF و BNNT

Table 3 BNNT and PVDF structural specifications

خواص مکانیکی و الکتریکی	نیتریدبور	پلی وینیلیدن فلوراید
$C_{11}(Gpa)$	2035	238.24
$C_{22}(Gpa)$	2035	23.6
$C_{33}(Gpa)$	2035	10.64
$C_{12}(Gpa)$	692	3.98
$C_{13}(Gpa)$	692	2.19
$C_{23}(Gpa)$	692	1.92
$C_{44}(Gpa)$	672	2.15
$C_{55}(Gpa)$	672	4.4
$C_{66}(Gpa)$	672	6.43
$e_{31}(C/m^2)$	0	-0.13
$e_{32}(C/m^2)$	0	-0.145
$e_{33}(C/m^2)$	0.95	-0.276
$e_{24}(C/m^2)$	0	-0.009
$e_{15}(C/m^2)$	0	-0.135
ϵ_{11}/ϵ_0	1250	12.5
ϵ_{22}/ϵ_0	1250	11.98
ϵ_{33}/ϵ_0	1250	11.98

در "شکل 3" تاثیر پارامتر نسبت ابعادی بر فرکانس بی بعد در سہ حالت مختلف بررسی شدہ است. در حالت اول فرض شدہ کہ از اثر میدان الکتریکی و بستر الاستیک صرف نظر شود. در حالت دوم تنها از میدان الکتریکی صرف نظر شدہ و اثر بستر الاستیک لحاظ شدہ است. در حالت سوم اثر همزمان میدان الکتریکی و بستر الاستیک بررسی شدہ است. مشخصات بستر اعمالی بہ صورت زیر می باشد.

$$K_w = 10^{17} N/m^3, \quad K_g = 10^4 N/m$$

² Polymer Composite

¹ Poly Vinylidene Fluoride

افزایش نسبت ابعادی در یک زاویہ قطاع مشخص، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

جدول 6 به بررسی تاثیر بستر الاستیک بر فرکانس طبیعی می‌پردازد. این بررسی مربوط به حالت‌های مختلف حضور و عدم حضور بستر وینکلر و پاسترناک به ترتیب در درصد حجمی‌های مختلف می‌باشد.

جدول 6 تاثیر بستر الاستیک بر فرکانس بی‌بعد در درصد حجمی‌های مختلف
Table 6 The effects of elastic medium on dimensionless frequency in different volume fraction

درصد حجمی	فرکانس بی بعد بدون بستر	فرکانس بی بعد در حضور بستر برشی	فرکانس بی بعد در حضور بستر فتری
0.05	1.09	1.092	1.15
0.1	1.46	1.463	1.484
0.15	1.75	1.752	1.772
0.2	2.05	2.06	2.034
0.25	2.23	2.236	2.255
0.3	2.43	2.433	2.46
0.35	2.62	2.623	2.67
0.4	2.79	2.794	2.821
0.45	2.96	2.965	3.012
0.5	3.11	3.117	3.15

با بررسی جدول 6 در می‌یابیم کہ در یک درصد حجمی ثابت، بیشترین فرکانس مربوط به زمانی است کہ پنل کامپوزیتی در یک محیط الاستیک واقع شده است. به عبارت دیگر اگر بستر الاستیک اطراف پنل وجود نداشته باشد، سختی پنل کاهش یافته و به تبع آن فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت کہ تاثیر بستر فتری به مراتب بیشتر از بستر برشی می‌باشد.

" شکل 5 " تاثیر همزمان تغییرات نسبت ابعادی (نسبت طول به شعاع) و درصد حجمی نانولوله‌های نیتریدبور بر فرکانس طبیعی بی‌بعد را نشان می‌دهد.

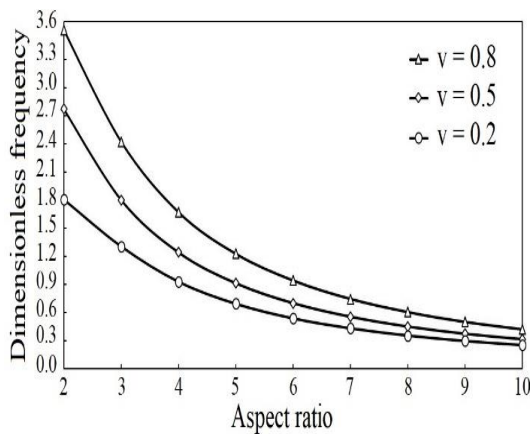


Fig. 5 The effect of changes in aspect ratio and volume fraction on dimensionless frequency

شکل 5 تاثیر تغییرات نسبت ابعادی و درصد حجمی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد

با توجه به " شکل 5 " سختی پنل با افزایش نسبت ابعادی و کاهش درصد حجمی، کاهش یافته و فرکانس طبیعی بی بعد نیز کاهش می‌یابد. همچنین درصد حجمی در نسبت ابعادی‌های کمتر، نرخ تغییرات کاهشی بیشتری را در فرکانس طبیعی بی بعد پنل نشان می‌دهد. نسبت ابعادی در درصد حجمی

در جدول 5 تاثیر زاویہ قطاع به ازای درصد حجمی‌های مختلف بررسی می‌شود. بدین ترتیب کہ در سه درصد حجمی متفاوت تاثیر افزایش زاویہ قطاع بر روی فرکانس طبیعی بررسی شده است.

جدول 5 تاثیر تغییرات زاویہ قطاع بر فرکانس طبیعی بی‌بعد به ازای درصد حجمی‌های مختلف
Table 5 The effects of changes angle of the panels on dimensionless frequency in the different volume fraction

درصد حجمی	زاویہ قطاع (درجہ)	فرکانس بی بعد
0.3	30	0.3833
	45	0.8436
	90	1.822
	180	2.307
	270	2.402
	360	2.44
0.5	30	0.675
	45	1.12
	90	2.312
	180	2.97
	270	3.087
	360	3.124
0.8	30	0.715
	45	1.22
	90	3.002
	180	3.771
	270	3.893
	360	3.93

همان‌طور کہ در جدول 5 مشاهده شد در یک زاویہ ثابت، افزایش درصد حجمی باعث افزایش فرکانس طبیعی شده و بالعکس. همچنین در یک درصد حجمی ثابت، مانند " شکل 4 " افزایش زاویہ باعث افزایش فرکانس می‌شود. در " شکل 4 " تاثیر زاویہ قطاع پنل در نسبت ابعادی‌های مختلف بررسی شده است. پنل نمونه برای حالت سوم کہ اثر میدان الکتریکی و بستر الاستیک همزمان در نظر گرفته شده اند، بررسی شده است.

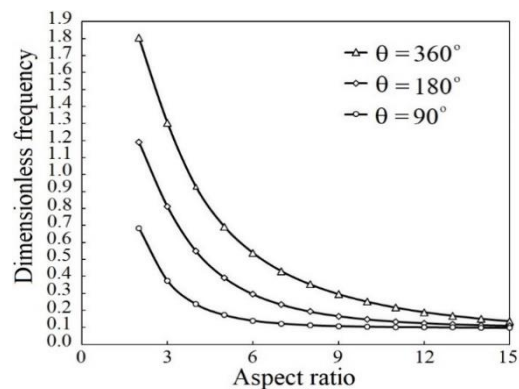


Fig. 4 The effects of changes aspect ratio on dimensionless frequency in the different angle of the panels

شکل 4 تاثیر تغییرات نسبت ابعادی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد در زوایای قطاع مختلف

با بررسی شکل در می‌یابیم کہ با افزایش زاویہ قطاع پنل، سختی پنل افزایش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی پنل افزایش می‌یابد. همان‌طور کہ مشاهده می‌شود بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به یک قطاع کامل است. با

10- نتیجه گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد میکروپنل کامپوزیت پلیمری هوشمند بررسی شده است که در آن از ماده پلیمری پیزوالکتریک پلی وینیلیدن فلوراید به عنوان ماده زمینه و از نانولوله‌های نیتريد بور که آن‌ها نیز از مواد هوشمند و دارای خاصیت پیزوالکتریک می‌باشند، به عنوان تقویت کننده استفاده شده است. همچنین در این پژوهش از تئوری‌های مختلفی مانند تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده، تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک استفاده شده است. نتایج به دست آمده از این مطالعه به شرح زیر می‌باشد:

- در پنل نمونه، با افزایش نسبت ابعادی (نسبت طول به شعاع) سختی پنل کاهش یافته و فرکانس طبیعی بی‌بعد کم می‌شود. همچنین با افزایش این نسبت، نرخ کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد کاسته می‌شود.
- افزایش درصدحجمی نانولوله‌های تقویت کننده باعث افزایش سختی پنل نمونه شده و فرکانس طبیعی بی‌بعد را افزایش می‌دهد. با افزایش این پارامتر نرخ افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.
- تاثیر بستر الاستیک در یک درصدحجمی و نسبت ابعادی ثابت باعث افزایش سختی پنل شده و فرکانس طبیعی بی‌بعد را افزایش می‌دهد. به عبارت دیگر میکرولوله در غیاب بستر الاستیک، فرکانس طبیعی بی‌بعد کمتری نسبت به زمان حضور بستر الاستیک از خود نشان می‌دهد. همچنین حضور میدان الکتریکی نیز باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل نمونه می‌گردد.
- افزایش زاویه قطاع پنل باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل شده و کاهش آن باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس طبیعی پنل ارتباط مستقیمی با زاویه قطاع پنل دارد؛ به طوری که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی مربوط به قطاع کامل می‌باشد.
- افزایش همزمان مقدار پارامترهای m و n ، باعث افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. همچنین با افزایش نسبت ابعادی شدت این افزایش، کاهش می‌یابد.
- تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده، اثر اندازه در مقیاس میکرو و نانو را با در نظر گرفتن سه پارامتر طولی بررسی می‌کند. در واقع این تئوری تعمیم یافته تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. نتایج حاکی از دقت بالای این تئوری در مقایسه با تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک می‌باشد. همچنین فرکانس طبیعی بی‌بعد محاسبه شده با کمک این تئوری کمی بیشتر از فرکانس طبیعی بی‌بعد به دست آمده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک می‌باشد.

بیشتر نیز، نرخ تغییرات کاهشی بیشتری در فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل ایجاد می‌کند.

در جدول 7 تاثیر مودهای مختلف بر فرکانس طبیعی بی‌بعد مورد بررسی قرار گرفته شده است. این تحلیل با مقداردهی به پارامترهای m و n انجام شده است.

جدول 7 تاثیر مودهای مختلف بر فرکانس بی‌بعد در نسبت ابعادی‌های مختلف

Table 7 The effects of different modes on dimensionless frequency in different aspect ratio

نسبت ابعادی	$m=n=1$	$m=n=2$	$m=n=3$
5	4.98	6.77	7.73
10	1.85	2.98	4.05
15	1.42	2.55	3.67
20	1.33	2.47	3.6
25	1.3	2.44	3.58
30	1.29	2.43	3.57

با بررسی جدول 7 مشاهده می‌شود که با افزایش همزمان مقدار پارامترهای m و n ، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد. همچنین شایان ذکر است که با افزایش نسبت ابعادی شدت این افزایش، کاهش می‌یابد.

در "شکل 6" به بررسی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد در درصد حجمی‌های مختلف در تئوری‌های مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده و تنش کوپل اصلاح شده و تئوری موضعی کلاسیک پرداخته شده است.

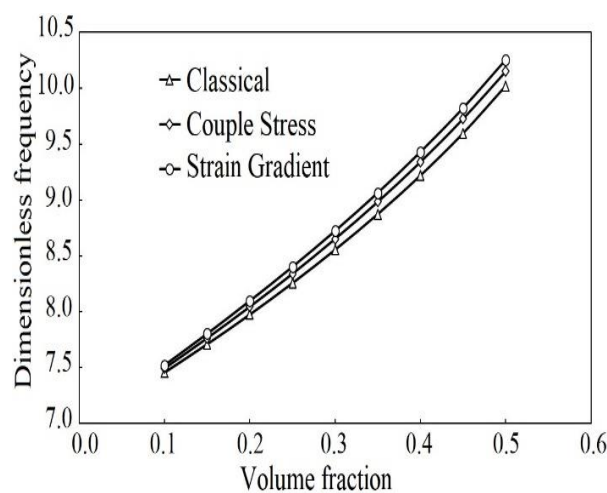


Fig. 6 The effect of volume fraction changes on the dimensionless frequency for different theories

شکل 6 تاثیر تغییرات درصد حجمی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد در تئوری‌های مختلف

با مشاهده "شکل 6" درمی‌یابیم که در یک درصد حجمی ثابت کمترین فرکانس طبیعی بی‌بعد مربوط به تئوری موضعی کلاسیک بوده و بیشترین مقدار مربوط به تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش اصلاح شده می‌باشد. البته لازم به ذکر است که اختلاف عددی بین سه تئوری مذکور اندک بوده که این اختلاف ناشی از در نظر گرفتن اثر اندازه‌های کوچک در تئوری‌های غیرموضعی می‌باشد. همچنین درمی‌یابیم که با افزایش درصدحجمی، فرکانس طبیعی بی‌بعد در هر سه تئوری افزایش می‌یابد.

11- پیوست

ورایشن گیری ترم‌های انرژی کرنشی بیان شده در بخش 6 در این بخش آورده شده است.

$$\begin{aligned} & + \frac{3(\partial_{\theta} T_{xx\theta}^{(1)})\delta w}{5R^2} - \frac{3(\partial_{\theta, \theta} T_{xx\theta}^{(1)})\delta v}{5R^2} - \frac{3(\partial_{\theta, \theta} T_{xx\theta}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R^2} \\ & + \frac{12(\partial_{x, \theta} T_{xx\theta}^{(1)})\delta u}{5R} + \frac{24(\partial_{x, x} T_{xx\theta}^{(1)})\delta v}{15} + \frac{24(\partial_{x, x} T_{xx\theta}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{15} \\ & + \frac{24(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta\theta x}^{(1)})\delta u}{15R^2} + \frac{24(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta\theta x}^{(2)})\delta \varphi_x}{15R^2} - \frac{12(\partial_x T_{\theta\theta x}^{(1)})\delta w}{15R} \\ & + \frac{12(\partial_{x, \theta} T_{\theta\theta x}^{(1)})\delta v}{5R} + \frac{12(\partial_{x, \theta} T_{\theta\theta x}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} - \frac{3(\partial_{x, x} T_{\theta\theta x}^{(1)})\delta u}{5} \\ & - \frac{3(\partial_{x, x} T_{\theta\theta x}^{(2)})\delta \varphi_x}{5} + \frac{3(\partial_{\theta} T_{zzz}^{(1)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} - \frac{2(\partial_{\theta, \theta} T_{zzz}^{(1)})\delta w}{5R^2} \\ & + \frac{3(\partial_x T_{zzz}^{(1)})\delta \varphi_x}{5} - \frac{2(\partial_{x, x} T_{zzz}^{(1)})\delta w}{5} - \frac{12(\partial_{\theta} T_{\theta z\theta}^{(1)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} \\ & + \frac{24(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta z\theta}^{(1)})\delta w}{15R^2} + \frac{3(\partial_x T_{\theta z\theta}^{(1)})\delta \varphi_x}{5} - \frac{6(\partial_{x, x} T_{\theta z\theta}^{(1)})\delta w}{15} \\ & + \frac{3(\partial_{\theta} T_{xxx}^{(1)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} - \frac{6(\partial_{\theta, \theta} T_{xxx}^{(1)})\delta w}{15R^2} - \frac{12(\partial_x T_{xxx}^{(1)})\delta \varphi_x}{5} \\ & + \frac{24(\partial_{x, x} T_{xxx}^{(1)})\delta w}{15} - \frac{6(\partial_{\theta, \theta} T_{xxx}^{(1)})\delta u}{15R^2} - \frac{6(\partial_{\theta, \theta} T_{xxx}^{(2)})\delta \varphi_x}{15R^2} \\ & + \frac{3(\partial_x T_{xzz}^{(1)})\delta w}{15R} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{xzz}^{(1)})\delta v}{5R} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{xzz}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} \\ & - \frac{3(\partial_{x, x} T_{xzz}^{(1)})\delta u}{5} - \frac{3(\partial_{x, x} T_{xzz}^{(2)})\delta \varphi_x}{5} + \frac{3(\partial_{\theta} T_{\theta zz}^{(1)})\delta w}{5R^2} \\ & + \frac{3(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta zz}^{(1)})\delta v}{5R^2} - \frac{3(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta zz}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R^2} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{\theta zz}^{(1)})\delta u}{5R} \\ & - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{\theta zz}^{(2)})\delta \varphi_x}{5R} - \frac{6(\partial_{x, x} T_{\theta zz}^{(1)})\delta v}{15} - \frac{6(\partial_{x, x} T_{\theta zz}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{15} \\ & - A(\partial_x F_z)\delta \varphi_x - \frac{A}{R}(\partial_{\theta} F_z)\delta \varphi_{\theta}] dx Rd\theta \end{aligned}$$

منتجه‌های تنش، ممان، نیروی برشی و منتجه‌های تنش‌ها، ممان‌ها و نیروهای برشی نظیر تنش‌های مرتبه بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz, \quad \{F_z\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{D_z\} dz$$

$$\begin{Bmatrix} P_x^{(1)} \\ P_{\theta}^{(1)} \\ P_z^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_{\theta} \\ p_z \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} P_x^{(2)} \\ P_{\theta}^{(2)} \\ P_z^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_{\theta} \\ p_z \end{Bmatrix} z dz$$

$$\{F_z\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{D_z\} dz$$

$$\begin{aligned} \delta U = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L [-(\partial_x N_{xx})\delta u - (\partial_x M_{xx})\delta \varphi_x + \frac{N_{\theta\theta}\delta w}{R} \\ & - \frac{(\partial_{\theta} N_{\theta\theta})\delta v}{R} - \frac{(\partial_{\theta} M_{\theta\theta})\delta \varphi_{\theta}}{R} - \frac{2(\partial_{\theta} N_{x\theta})\delta u}{R} \\ & - \frac{2(\partial_{\theta} M_{x\theta})\delta \varphi_x}{R} + 2(-\partial_x N_{x\theta})\delta v - 2(\partial_x M_{x\theta})\delta \varphi_{\theta} \\ & + 2Q_{xz}\delta \varphi_x - 2(\partial_x Q_{xz})\delta w + 2Q_{z\theta}\delta \varphi_{\theta} - 2k \frac{(\partial_{\theta} Q_{z\theta})\delta w}{R} \\ & - \frac{(\partial_x P_x^{(1)})\delta w}{R} + \frac{(\partial_{x, \theta} P_x^{(1)})\delta v}{R} + \frac{(\partial_{x, \theta} P_x^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{R} \\ & + (\partial_{x, x} P_x^{(1)})\delta u + (\partial_{x, \theta} P_x^{(2)})\delta \varphi_x - \frac{(\partial_{\theta} P_z^{(1)})\delta \varphi_{\theta}}{R} \\ & - (\partial_x P_z^{(1)})\delta \varphi_x - \frac{(\partial_{\theta} P_{\theta}^{(1)})\delta w}{R^2} + \frac{(\partial_{\theta, \theta} P_{\theta}^{(1)})\delta v}{R^2} \\ & + \frac{(\partial_{\theta, \theta} P_{\theta}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{R^2} + \frac{(\partial_{x, \theta} P_{\theta}^{(1)})\delta u}{R} + \frac{(\partial_{x, \theta} P_{\theta}^{(2)})\delta \varphi_x}{R} \\ & + \frac{(\partial_{\theta, \theta} Y_{x\theta}^{(1)})\delta w}{R^2} - (\partial_{x, x} Y_{x\theta}^{(1)})\delta w + (\partial_x Y_{xx}^{(1)})\delta \varphi_{\theta} \\ & + \frac{(\partial_{x, \theta} Y_{xx}^{(1)})\delta w}{R} - \frac{(\partial_{\theta} Y_{\theta\theta}^{(1)})\delta \varphi_x}{R} - \frac{(\partial_{x, \theta} Y_{\theta\theta}^{(1)})\delta w}{R} \\ & + \frac{(\partial_{\theta} Y_{zz}^{(1)})\delta \varphi_x}{R} + (\partial_x Y_{zz}^{(1)})\delta \varphi_{\theta} - \frac{(\partial_x Y_{\theta z}^{(1)})\delta w}{R} \\ & + \frac{(\partial_{x, \theta} Y_{\theta z}^{(1)})\delta v}{R} + \frac{(\partial_{x, \theta} Y_{\theta z}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{R} - (\partial_{x, x} Y_{zz}^{(1)})\delta v \\ & - (\partial_{x, x} Y_{zz}^{(2)})\delta \varphi_{\theta} - \frac{4(\partial_{\theta} T_{x\theta z}^{(1)})\delta \varphi_x}{R} - 4(\partial_x T_{x\theta z}^{(1)})\delta \varphi_{\theta} \\ & + \frac{4(\partial_{x, \theta} T_{x\theta z}^{(1)})\delta w}{R} - \frac{2(\partial_{\theta, \theta} T_{xxx}^{(1)})\delta u}{5R^2} - \frac{2(\partial_{\theta, \theta} T_{xxx}^{(2)})\delta \varphi_x}{5R^2} \\ & + \frac{(\partial_x T_{xxx}^{(1)})\delta w}{5R} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{xxx}^{(1)})\delta v}{5R} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{xxx}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R} \\ & + \frac{2(\partial_{x, x} T_{xxx}^{(1)})\delta u}{5} + \frac{2(\partial_{x, x} T_{xxx}^{(2)})\delta \varphi_x}{5} - \frac{2(\partial_{\theta} T_{\theta\theta\theta}^{(1)})\delta w}{5R^2} \\ & + \frac{2(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta\theta\theta}^{(1)})\delta v}{5R^2} + \frac{2(\partial_{\theta, \theta} T_{\theta\theta\theta}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5R^2} - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{\theta\theta\theta}^{(1)})\delta u}{5R} \\ & - \frac{3(\partial_{x, \theta} T_{\theta\theta\theta}^{(2)})\delta \varphi_x}{5R} - \frac{2(\partial_{x, x} T_{\theta\theta\theta}^{(1)})\delta v}{5} - \frac{2(\partial_{x, x} T_{\theta\theta\theta}^{(2)})\delta \varphi_{\theta}}{5} \end{aligned}$$

Nonlocal Timoshenko Beam Theory" Computational Materials Science, Vol. 47, pp. 409-417, 2009.

[12] Chowdhury. R, Adhikari. S, Wang. CY, and Scarpa. F., "A Molecular Mechanics Approach for the Vibration of Single-Walled Carbon Nanotubes" Vol. 48, pp. 730-735, 2010

[13] Ansari, R. and Ramezannezhad, H., "Nonlocal Timoshenko Beam Model for The Large-Amplitude Vibrations of Embedded Multi Walled Carbon Nanotubes Including Thermal Effects" Physica E: Low-Dimensional Systems and Nano structures, Vol. 43, No. 6, pp. 1171-1178, 2011.

[14] Ansari, R. Ramezannezhad, H. and Gholami, R., "Nonlocal Beam Theory for Nonlinear Vibrations of Embedded Multi Walled Carbon Nanotubes in Thermal Environment" Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 3, pp. 2241-2254, 2012.

[15] Khorshidi, K. Fallah, A. and Siahpush, A., "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Composite Rectangular Nano-Plate Based on Local Exponential Shear Deformation Theory in Thermal Environment" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 109-120, 2017. (In Persian)

[16] Khorshidi, K. Siahpush, A. and Fallah, A., " Electro-Mechanical Free Vibration Analysis of Composite Rectangular Piezoelectric Nano-Plate Using Modified Shear Deformation Theories " Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 2, pp. 151-160, 2017. (In Persian)

[17] Ghorbanpour Arani, A. Kolahchi, R. and Khoddami Maraghi, Z., "Nonlinear Vibration and Instability of Embedded Double-Walled Boron Nitride Nanotubes Based on Nonlocal Cylindrical Shell Theory" Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, No. 14-15, pp. 7685-7707, 2013.

[18] Ghorbanpour Arani, A. Atabakhshian, V., "Nonlinear Vibration of Embedded SWBNNTs Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory Using DQ Method" Physica B: Condensed Matter, Vol. 407, No. 13, pp. 2549-2555, 2012.

[19] Ghorbanpour Arani, A. Khani Arani, H. and Khoddami Maraghi, Z., "A Vibration Analysis of Sandwich Composite Micro-Plate Under Electro-Magneto-Mechanical Loadings" Applied Mathematical Modelling, Vol. 40, pp. 10596-10615, 2016.

[20] Bisegna, P. and Luciano, R., "Variational Bounds for the Overall Properties of Piezoelectric Composites" J Mech Phys Solids, Vol. 44, pp. 583-602, 1996.

[21] Xin, L. and Hu, Z., "Free Vibration of Simply Supported and Multi Layered Magneto-Electro-Elastic Plates" Composite, Vol. 121, pp. 344-350, 2016.

[22] Mindlin, RD., "Second Gradient of Strain and Surface Tension in Linear Elasticity" Int. J. Solids Struct , No. 1, pp. 417-438 , 1965.

[23] Fleck, NA. Muller, GM. Ashby, MF. and Hutchinson, JW. "Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment" Acta Metallurgy and Materials, Vol. 42, pp. 475-487, 1994.

[24] Zhang, LW. Lei, ZX. and Liew, KM., "Buckling Analysis of FG-CNT Reinforced Composite Thick Skew Plates Using an Element-Free Approach" Composites Part B, Vol. 75, pp. 36-46, 2015.

[25] Shooshtari, A. and Razavi, S., "Linear and Nonlinear Free Vibration of A Multilayered Magneto-Electro-Elastic Doubly Curved Shell on Elastic Foundation" Composites Part B., Vol. 78, pp. 95-108, 2015.

[26] Shooshtari, A. and Razavi, S., "Nonlinear Vibration Analysis of Rectangular Magneto-Electro-Elastic Thin Plates "International Journal of Engineering, Vol. 28, pp. 136-144, 2015.

[27] Mohammadimehr, M. Okhravi, SV. and Akhavan Alavi, SM., "Free Vibration Analysis of Magneto-Electro-Elastic Cylindrical Composite Panel Reinforced by Various Distributions of CNTs with Considering Open and Closed Circuits Boundary Conditions Based on FSDT " Journal of Vibration and Control, 2016.

[28] Salehi-Khojin, A. and Jalili, N., " Buckling of Boron Nitride Nanotube Reinforced Piezoelectric Polymeric Composites Subject to Combined Electro-Thermo-Mechanical Loadings" Compos Sci Technol, Vol. 68, pp. 1489-501, 2008.

[29] Cheng, ZQ. Lim, CW. and Kitipornchai, S., "Three-Dimensional Asymptotic Approach to Inhomogeneous and Laminated Piezoelectric Plates", Int J Solids Struct, Vol. 37, pp. 3153-75, 2000.

$$\begin{Bmatrix} Y_{xx}^{(1)} \\ Y_{\theta\theta}^{(1)} \\ Y_{zz}^{(1)} \\ Y_{x\theta}^{(1)} \\ Y_{\theta z}^{(1)} \\ Y_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} m_{\theta z} \\ m_{xz} \end{Bmatrix} z \, dz$$

$$\begin{Bmatrix} T_{xxx}^{(1)} \\ T_{\theta\theta\theta}^{(1)} \\ T_{zzz}^{(1)} \\ T_{xx\theta}^{(1)} \\ T_{xxz}^{(1)} \\ T_{x\theta\theta}^{(1)} \\ T_{\theta\theta z}^{(1)} \\ T_{xzz}^{(1)} \\ T_{zz\theta}^{(1)} \\ T_{x\theta z}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xxx} \\ \tau_{\theta\theta\theta} \\ \tau_{zzz} \\ \tau_{xx\theta} \\ \tau_{xxz} \\ \tau_{x\theta\theta} \\ \tau_{\theta\theta z} \\ \tau_{xzz} \\ \tau_{zz\theta} \\ \tau_{x\theta z} \end{Bmatrix} z \, dz$$

$$\begin{Bmatrix} Y_{xx}^{(2)} \\ Y_{\theta\theta}^{(2)} \\ Y_{zz}^{(2)} \\ Y_{x\theta}^{(2)} \\ Y_{\theta z}^{(2)} \\ Y_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{\theta\theta} \\ m_{zz} \\ m_{x\theta} \\ m_{\theta z} \\ m_{xz} \end{Bmatrix} z \, dz$$

$$\begin{Bmatrix} T_{xxx}^{(2)} \\ T_{\theta\theta\theta}^{(2)} \\ T_{zzz}^{(2)} \\ T_{xx\theta}^{(2)} \\ T_{xxz}^{(2)} \\ T_{x\theta\theta}^{(2)} \\ T_{\theta\theta z}^{(2)} \\ T_{xzz}^{(2)} \\ T_{zz\theta}^{(2)} \\ T_{x\theta z}^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xxx} \\ \tau_{\theta\theta\theta} \\ \tau_{zzz} \\ \tau_{xx\theta} \\ \tau_{xxz} \\ \tau_{x\theta\theta} \\ \tau_{\theta\theta z} \\ \tau_{xzz} \\ \tau_{zz\theta} \\ \tau_{x\theta z} \end{Bmatrix} z \, dz$$

12- مراجع

[1] Tahaye Abadi, M., "Micromechanical Fracture Modeling of Unidirectional Composite Material under Transverse Loading" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 93-106, 2016. (In Persian)

[3] Eslami-Farsani, R. Shahrab-Farahani, A. Khosravi, H. and Zamani, M.R., "A Study on the Flexural Response of Grid Composites Containing Multi-Walled Carbon Nanotubes" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 101-108, 2017. (In Persian)

[3] Abdolahi, I. and Yas, M.H., "Vibration Analysis of Timoshenko Beam Reinforced With Boron-Nitride Nanotube on Elastic Bed" Journal of Science Mechanical Engineers, Vol. 7, No. 3, pp. 1-12, 2015. (In Persian)

[4] Lin, Y. Bunker, CE. Fernando, KS. And Connell, J. W., "Aqueously Dispersed Silver Nanoparticle-Decorated Boron Nitride Nano Sheets for Reusable, Thermal Oxidation-Resistant Surface Enhanced Raman Spectroscopy (SERS) devices" ACS Applied Materials & Interfaces, Vol. 4, No. 2, pp. 1110-1117, 2012.

[5] Griebel, M. and Hamaekers, J., "Molecular Dynamics Simulations of Boron-Nitride Nanotubes Embedded in Amorphous Si-BN" Computational Materials Science, Vol. 39, No. 3, pp. 502-517, 2007.

[6] Zhi, C. Bando, Y. Tang, C. and Golberg, D., "Boron Nitride Nanotubes" Materials Science and Engineering, Vol. 70, pp. 92-111, 2010.

[7] Terrones, M. and Romo-Herrera., "Pure and Doped Boron and Nitride Nanotubes" Materials Today, Vol. 10, No. 5, pp. 30-38, 2007

[8] Ghorbanpour Arani, A. Abdolalian, M. and Kolachi, R., "Buckling of and Embedded Piezoelectric Nanobeam Based on Strain Gradient and Reddy Beam Theories" J. S. F. M., Vol. 4, No. 3, pp. 23-33, 2015. (In Persian)

[9] Tan, P. and Tong, L., "Micro-Electro-Mechanics Models for Piezoelectric-Fiber-Reinforced Composite Materials" Compos Sci Technol, Vol. 61, pp. 759-769, 2001.

[10] Vaccarini, L. Goze, CH. Henrard, L. Hernandez, E. Bernier, P. and Rubio, P., "Mechanical and Electronic Properties of Carbon and Boron-Nitride Nanotubes" Carbon, Vol. 38, pp. 1681-1690, 2000.

[11] Xiang, Y. Ke, LL. Yang, J. Kitipornchai, S., "Nonlinear Free Vibration of Embedded Double-Walled Carbon Nanotubes Based on