



بررسی ارتعاشات هیدروالاستیک ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود با استفاده از روش ریتز

شهرزاد یوسفزاده¹، علی اصغر جعفری^{2*}، علیرضا محمدزاده³

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران

* تهران، صندوق پستی 16765-3381، ajafari@kntu.ac.ir

چکیده

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود و غیرقابل تراکم پرداخته شده است. ابتدا معادلات حاکم بر ورق دایروی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی یا تئوری میندلین با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و نیروهای برشی استخراج شده است. برای تقریب جابجایی‌های ورق از توابع پذیرفتنی هارمونیک چبیشف همراه با توابع مرزی استفاده شده است. سپس معادلات حاکم بر نوسان سیال با بهره‌گیری از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت و ارضای شرایط مرزی حاصل شده است. با استفاده از روش ریتز، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ورق دایروی در تماس با سیال بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استخراج شده‌اند. در ادامه، تأثیر پارامترهای مختلف هندسی از قبیل نسبت ضخامت بر شعاع ورق، شرایط مرزی، چگالی سیال، نسبت کسر حجمی ماده تابعی و ارتفاع سیال روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور حصول اطمینان از نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، فرکانس‌های طبیعی حاصل از ورق دایروی در تماس با سیال در حالت خاص ورق همگن آلومینیومی با نتایج حاصل از آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: 96/1/16

تاریخ پذیرش: 96/3/6

کلیدواژگان:

ورق دایروی

فرکانس طبیعی

ماده مدرج تابعی

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

Hydroelastic vibration analysis of functionally graded circular plate in contact with bounded fluid by Ritz method

Shahrouz Yousefzadeh¹, Aliasghar Jafari^{2*}, Alireza Mohammadzadeh¹

1- Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, K. N. Tossi University, Tehran, Iran

*P.O.B. 16765-3381, Tehran, Iran, ajafari@kntu.ac.ir

Keywords

Circular plate
Natural frequency
Functionally graded material
First order shear deformation plate theory

Abstract

This study investigates the free vibration of a thick FG circular plate in contact with an inviscid and incompressible fluid. Analysis of the plate is based on First-order Shear Deformation Plate Theory (FSDT) with consideration of rotational inertial effects and transverse shear stresses. Dynamic transverse displacements of the plate are approximated by set of admissible Chebyshev functions which is required to satisfy the geometric boundary conditions. Potential theory together Bernoulli's equation are utilized to obtain the fluid pressure on the free surface of the plate. The governing equation of the oscillatory behavior of the fluid is obtained by solving Laplace equation and satisfying its boundary conditions. The natural frequencies and mode shapes of the plate are determined using Rayleigh-Ritz method based on minimizing the Rayleigh quotient. The effects of the geometrical parameters such as plate thickness to its radius ratio, boundary conditions, fluid density, volume fraction index, and height of the fluid on natural frequencies and mode shapes are investigated. Comparison of analytically outcome of this study is made with results of the experimental modal test for homogeneous Aluminum plate.

1- مقدمه

موقعیت‌های حساس دارای اهمیت زیادی می‌باشد. بررسی مشخصات ارتعاشی ورق‌ها در تماس با سیال با توجه به کاربرد آن‌ها در صنایع مختلف از مسائل کاربردی مهندسی بوده و مورد توجه بسیاری از محققان می‌باشد [1]. مطالعه خواص ارتعاش هیدروالاستیک ورق‌ها در صنایع مختلفی از جمله صنایع

ارتعاشات وارد به یک سازه در تماس با سیال پدیده‌ای است که در آن یک سازه با سیال تأثیر متقابل دارد. این پدیده می‌تواند در مواردی موجب از کارافتادگی و خستگی سازه گردد. بنابراین کنترل و حتی تعدیل آن برای

Please cite this article using:

Yousefzadeh, Sh. Jafari, A. and Mohammadzadeh, A., "Hydroelastic vibration analysis of functionally graded circular plate in contact with bounded fluid by Ritz method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, No. 4, pp. 529-538, 2019.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

توابع ویژه مسئله را از روش ریلی-ریتر بدست آورده که برای استخراج شکل مودها و فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال استفاده کردند. نتایج حاصل از این روش با نتایج عددی مورد مقایسه قرار گرفت [12]. در سال 2003 مایونگ مو جانگ⁴ و همکاران، فرکانسهای طبیعی دو ورق دایروی در تماس با سیال محدود را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای معادله حرکت ورق‌های در تماس با سیال از روش بسط سری‌های بسط-فوریه و روش ریلی-ریتر استفاده کردند. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج عددی حاصل از نرم افزار المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت. در نهایت فرکانسهای طبیعی دو ورق در تماس با سیال و بدون تماس با سیال مورد مطالعه قرار گرفته و اثر فاصله دو ورق بر فرکانسهای طبیعی ورقها مورد مطالعه قرار گرفت [13]. در سال 1392 قدیریان و همکاران به بررسی رفتار ارتعاشی ورق مستطیل کامپوزیتی در تماس با سیال پرداختند. آنها در تحقیق خود از کامپوزیت نوع ارتوتروپیک و برای تحلیل ارتعاشات آزاد از روش ریلی-ریتر استفاده کردند. تحقیق آنها نشان داد که تحت تأثیر ارتعاش ورق در سیال حرکتی ایجاد می‌شود که باعث افزایش انرژی جنبشی سیستم می‌شود [14].

احسان عسگری و همکاران در سال 2013 ارتعاش یک ورق دایروی غوطه ور در سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات ورق در دو حالت تکیه گاهی لبه ساده و لبه آزاد استفاده کردند. برای دستیابی به پتانسیل سرعت سیال از هر دو روش حداقل مربعات و گالرکین برای تعیین ضرایب مجهول و برای تعیین فرکانسهای طبیعی ورق از روش ریلی-ریتر استفاده کردند. نتایج حاصل از تحقیق آنها با نتایج آزمایش تجربی مورد مقایسه قرار گرفت [15].

در سال 1394 رضوانی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق تقویت شده در آب پرداختند. آنها مطالعه خود را با سه روش تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی انجام دادند و از تئوری ورق ارتوتروپیک برای استخراج روابط حاکم استفاده کردند. همچنین آنها از روش جرم افزوده برای مدلسازی اثر سیال روی ارتعاشات ورق بهره بردند [16].

مواد هدفمند (FGM⁹) مواد مرکب جدید با ریزساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آن‌ها بطور ملایم و پیوسته و طبق یک تابع معین از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به دست می‌آیند. مزیت اصلی استفاده از این مواد این است که قادر به تحمل درجه حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده و مقاوم در برابر خوردگی و سایش بوده و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارد. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی که در مقابل درجه حرارت بالا باید مقاوم باشند استفاده می‌شود. این نوع از مواد به دلیل ویژگی خاص در سببهای حرارتی موشک‌ها، مخازن شیمیایی و محیط‌های سایشی بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند [17]. با توجه به اهمیت مواد هدفمند در صنایع، محققین زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این نوع از مواد پرداختند. در سال 2009 جعفری مهرآبادی و همکارانش ارتعاش آزاد یک ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه های پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات حرکت را بر پایه تئوری کلاسیک بدست آورده و برای حل معادلات از روش المان محدود استفاده کردند. سپس برای دو نوع شرط مرزی اثر نسبت کسر حجمی و ضخامت لایه های پیزوالکتریک روی فرکانسهای طبیعی را مورد تحلیل قرار دادند [18].

هسته‌ای، مخازن سوخت، اجزای داخلی راکتورها، صفحات خورشیدی و سازه‌های دریایی و هوایی دارای اهمیت زیادی می‌باشد. بنابراین، آگاهی از رفتار سازه و سیال در ترانکس دینامیکی بین آنها ضروری به نظر می‌رسد [2]. واضح است که فرکانسهای طبیعی سازه‌ها از جمله ورق در حالت تماس با سیال متفاوت از فرکانسهای آن در حالت بدون تماس با سیال می‌باشد [3]. محققان مطالعات زیادی در زمینه ارتعاشات ورق در تماس با سیال انجام دادند. الهوردی زاده و همکاران یک روش نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاشات یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی ارائه دادند. آنها معادلات حاکم بر ورق دایروی را با پاسخهای فرضی و روش کانترویچ حل کردند [4]. تاریخچه‌ی لو و همکاران به منظور مطالعه ارتعاشات ورق دایروی در تماس با سیال غیرقابل تراکم، با محاسبه جرم افزوده¹ فرکانسهای طبیعی ورق دایروی را تعیین کردند. آنها از دو روش برای استخراج فرکانسهای طبیعی استفاده کردند [5]. چئونگ² به بررسی ارتعاشات دو ورق دایروی یکسان در تماس با سیال محدود و نامحدود پرداخت. او برای تحلیل خود از روش بسط بسط-فوریه و روش ریلی ریتر کمک گرفت. همچنین اثر فاصله دو ورق روی فرکانسهای طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت [6]. در سال 2010 دونگ³، به بررسی ارتعاش آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد هدفمند در حالت سه بعدی پرداخت. وی در تحقیق خود از روش چبیشف-ریتر با در نظر گرفتن حاصلضرب سریهای چندجمله‌ای چبیشف در توابع مرزی که شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند، برای استخراج فرکانسهای طبیعی استفاده کرد. وی، برای معرفی خواص مادی ورق، تغییرات خواص را در جهت ضخامت به دو صورت در نظر گرفت [7]. کواک⁴ به مطالعه تأثیر جرم مجازی ناشی از تماس آب روی فرکانسهای طبیعی ورق دایروی پرداخت. او با بکارگیری تبدیل فوریه به محاسبه فاکتورهای نمو جرم مجازی افزوده در حالت بی‌بعد پرداخت [8].

در سال 1995 امابیلی⁵ به بررسی تأثیر عمق سیال روی رفتار ارتعاشی ورق‌های دایروی و توخالی در تماس با سیال غیرقابل تراکم و غیرویسکوز پرداخت. وی در تحقیق خود از روش‌های مودال و ریلی-ریتر برای تعیین مقادیر ویژه مساله استفاده کرد و در نهایت اثر پارامترهای مختلف روی جرم افزوده را مورد مطالعه قرار داد [9].

در سال 2000 زو⁶ و چئونگ⁷ اثر فشار هیدرواستاتیک سیال غیرقابل تراکم روی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در تحقیق خود ورق مستطیلی را که به عنوان دیواره مخزن مکعبی حاوی سیال قرار گرفته مدنظر قرار دادند و برای بدست آوردن مساله مقدار ویژه از روش ریتر استفاده کردند [10].

در سال 2012 حسینی هاشمی و همکاران به مطالعه ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی در تماس با سیال پرداختند. آنها برای استخراج روابط حاکم بر ورق از تئوری میندلین و برای استخراج روابط حاکم بر سیال از معادله برنولی استفاده کردند. در این تحقیق، فرکانسهای طبیعی ورق در دو حالت ورق در تماس با سیال از یک وجه و دو وجه استخراج شد [11]. اخیراً چئونگ و همکاران ارتعاش آزاد یک ورق دایروی با تکیه گاه گیردار در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها جابجایی دینامیکی ورق در تماس با سیال را با استفاده از ترکیب توابع مودال ورق خشک تعیین کردند.

¹ Added mass

² Jeong, K. H.

³ Dong, C. Y.

⁴ Kwak, M. K.

⁵ Amabili M.

⁶ Zhou, D.

⁷ Cheung, Y. K.

⁸ Myung, M. J.

⁹ Functionally Graded Material

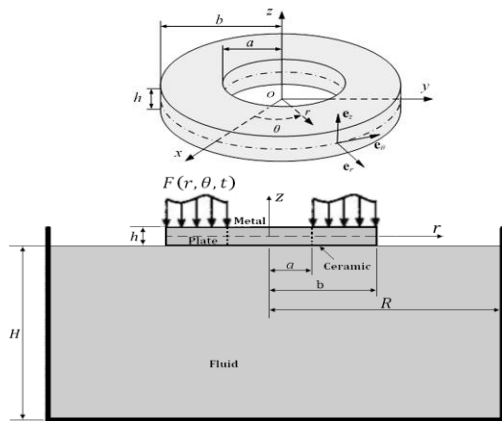


Fig. 1 Geometry of circular plate in contact with fluid and coordinate system.

شکل 1 هندسه ورق دایروی در تماس با سیال و نحوه استقرار محوره‌های مختصات.

مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی یا تئوری میندلین، مولفه‌های جابجایی یک نقطه از ورق طبق رابطه زیر تعیین می‌شود [17]:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r + z\psi_r \\ u_2 &= u_\theta + z\psi_\theta \\ u_3 &= u_z \end{aligned} \quad (1)$$

که z فاصله یک نقطه از لایه میانی و u_1, u_2, u_3 به ترتیب نشان دهنده جابجایی‌های ورق در راستای محورهای r, θ و z است. u_r و u_θ جابجایی‌های صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای r و θ است. همچنین، ψ_r و ψ_θ شیب‌های ورق ناشی از خمش به ترتیب در راستای محورهای r و θ است. با فرض تغییرشکل‌های کوچک و روابط تنش-کرنش خطی، مولفه‌های کرنش ورق دایروی طبق روابط زیر قابل بیان است [17]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_1}{\partial r} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{z}{r} \left(\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ &\quad + z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right), \\ 2\varepsilon_{rz} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) = \left(\psi_r + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) = \left(\psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای برای ورق از جنس مواد تابعی، تنش‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{r\theta}), \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{\theta z}), \\ \sigma_{rz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (2\varepsilon_{rz}) \end{aligned} \quad (3)$$

حسینی هاشمی و همکاران ارتعاشات ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای تحلیل ارتعاشات ورق روی بستر الاستیک از روش تحلیلی استفاده کردند [17]. در سال 2014 علی بخششی و کوروش خورشیدی ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد هدفمند در تماس با سیال محدود را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تقریب جابجایی‌های ورق با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم از توابع سعی هارمونیک مثلثاتی استفاده کردند. برای دستیابی به فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش ریلی-ریتز بر مبنای انرژی پتانسیل کمینه استفاده کردند. در نهایت تأثیر پارامترهای ضریب توانی نسبت حجمی، نسبت طول، نسبت ضخامت ورق، ارتفاع سیال، عرض مخزن و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی قرار گرفت [20].

مرور کارهای انجام شده توسط محققان که بخشی از آنها در بالا اشاره شد نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاش ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود کارهای محدودی انجام شده است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد ورق دایروی ساخته شده از مواد تابعی با ضخامت ثابت در تماس با سیال محدود با بکارگیری تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. برای بررسی رفتار ارتعاشی ورق یک مجموعه توابع پذیرفتنی چبیشف که شرایط مرزی را بطور کامل ارضا می‌کنند در نظر گرفته شده است. برای استخراج روابط انرژی کرنشی و جنبشی حاکم بر رفتار دینامیکی ورق از رابطه‌ی خطی کرنش-جابجایی استفاده شده است. برای دستیابی به فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال و شکل مود ارتعاشی ورق در تماس با سیال از روش انرژی ریتز و بر مبنای کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. معادلات حاکم بر رفتار نوسانی سیال، با حل معادله لاپلاس و ارضای شرایط مرزی سیال به دست آمده است. در تحقیق حاضر، اثر سیال روی نوسانات ورق دایروی بدون استفاده از جرم افزوده که روش تقریبی است بررسی شده است و در فرمولاسیون ارائه شده تراکنش بین سیال و ورق بصورت دائمی بوده و نوسان هر کدام روی دیگری قابل محاسبه است. برای دستیابی به نتایج عددی برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب تهیه شده و در بخش نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب توانی کسر حجمی، نسبت ضخامت به شعاع ورق، شعاع مخزن، ارتفاع سیال و چگالی سیال روی فرکانسهای طبیعی ورق در تماس با سیال مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. برای حصول اطمینان از جواب‌ها، نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده در حالت خاص ورق دایروی همگن (آلومینیوم) در تماس با سیال با نتایج حاصل از آزمایشات تجربی آنالیز مودال مورد مقایسه قرار گرفته است.

2- روابط حاکم

2-1- روابط حاکم بر ورق دایروی

ورق دایروی از جنس مواد تابعی را در نظر بگیرید که مطابق شکل 1 در تماس با سیال محدود درون مخزن استوانه‌ای با دیواره‌های صلب قرار دارد. h و b به ترتیب بیانگر شعاع داخلی، شعاع خارجی و ضخامت ورق و R و H به ترتیب بیانگر شعاع و ارتفاع سیال درون مخزن می‌باشد.

با جایگذاری روابط (6) تا (10) در مولفه‌های کرنش رابطه (2) داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{2}{R} \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} \left[(\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left(-\frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} (n\bar{U}_r + \bar{U}_\theta) + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{U}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \\ &\quad + \bar{z} \frac{h}{2} \left(-\frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} (n\bar{\psi}_r + s\bar{\psi}_\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \left(\bar{\psi}_r + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \left(\bar{\psi}_\theta - \frac{2n}{R(\bar{r} + \delta)} \bar{U}_z \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (12)$$

جایگذاری مولفه‌های کرنش در رابطه (12) در رابطه (3) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[\frac{2}{R} \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2\nu}{R(\bar{r} + \delta)} \left[(\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \left[\frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} \left[(\bar{U}_r + n\bar{U}_\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{z} \frac{h}{2} (\bar{\psi}_r + n\bar{\psi}_\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu}{R} \left(\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial \bar{r}} + \bar{z} \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{\psi}_r}{\partial \bar{r}} \right) \right] \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\left(-\frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} (n\bar{U}_r + \bar{U}_\theta) + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{U}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{z} \frac{h}{2} \left(-\frac{2}{R(\bar{r} + \delta)} (n\bar{\psi}_r + s\bar{\psi}_\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \bar{r}} \right) \right] \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta z} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left(\bar{\psi}_r + \frac{2}{R} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \bar{r}} \right) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t}, \\ \sigma_{rz} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left(\bar{\psi}_\theta - \frac{2n}{R(\bar{r} + \delta)} \bar{U}_z \right) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (13)$$

انرژی کرنش الاستیک ورق U_p از رابطه (14) تعیین می‌شود [23]:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) r dr d\theta dz \quad i, j = r, \theta, z \quad (14)$$

رابطه انرژی کرنشی U_p برحسب پارامترهای بی‌بعد معرفی شده در رابطه (5) بصورت رابطه (15) درمی‌آید:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \left(\frac{\bar{R}}{2} \right)^2 \left(\frac{h}{2} \right) (\bar{r}) + \delta) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} \quad i, j = r, \theta, z \quad (15)$$

که ν بیانگر ضریب پواسون است و در این تحقیق مقدار آن ثابت در نظر گرفته شده است. $E(z)$ مدول الاستیسیته ورق می‌باشد که در راستای z طبق رابطه ساده توانی زیر تغییر می‌کند [18]:

$$E(z) = E_c + (E_m - E_c) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^p \quad (4)$$

که در آن E_c و E_m به ترتیب بیانگر مدول الاستیسیته فلز و سرامیک و p ضریب توانی کسر حجمی است که مقدار آن بزرگتر یا مساوی صفر می‌باشد. واضح است با انتخاب $p = 0$ به ورق همگن از جنس فلز دست می‌یابیم. مقادیر بی‌بعد زیر را در نظر می‌گیریم [7]:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{2r}{R} - \delta, & \bar{\theta} &= \theta, & \bar{z} &= \frac{2z}{h}, \\ \eta &= \frac{a}{b}, & \lambda &= \frac{h}{b} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $\bar{R} = b - a$ و $\delta = (b + a)/(b - a)$ است. برای ارتعاشات آزاد، جابجایی‌های ورق طبق توابع سعی هارمونیک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) &= \bar{U}_r(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ &= F_1^a(\bar{r}) F_1^b(\bar{r}) \sum_{i=1}^I u_{ri} R_i(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_\theta(\bar{r}, \bar{\theta}, t) &= \bar{U}_\theta(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ &= F_2^a(\bar{r}) F_2^b(\bar{r}) \sum_{j=1}^J u_{\theta j} R_j(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_z(\bar{r}, \bar{\theta}, t) &= \bar{U}_z(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ &= F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) \sum_{k=1}^K u_{zk} R_k(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi_r(\bar{r}, \bar{\theta}, t) &= \bar{\psi}_r \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ &= F_r^a(\bar{r}) F_r^b(\bar{r}) \sum_{l=1}^L \psi_{rl} R_l(\bar{r}) \cos n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_\theta(\bar{r}, \bar{\theta}, t) &= \bar{\psi}_\theta \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \\ &= F_\theta^a(\bar{r}) F_\theta^b(\bar{r}) \sum_{q=1}^Q \psi_{\theta q} R_q(\bar{r}) \sin n\bar{\theta} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

در روابط فوق، $\psi_{\theta q}$ و ψ_{rl} ضرایب مجهول هستند که باید تعیین شوند و I, J, K, L, Q تعداد جمله‌های مورد نیاز توابع پذیرفتنی برای تقریب جابجایی ورق می‌باشد. $R_f(\bar{r})$ چندجمله‌ای مرتبه‌ی f ام چبیشف است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_f(\bar{r}) = \cos(f \cos^{-1} \bar{r}) \quad (11)$$

$$\bar{r} \in [-1, 1], \quad f = 0, 1, 2, \dots$$

شرایط مرزی لبه‌های داخلی و خارجی ورق دایروی توخالی را ارضا می‌کنند. توابع مرزی متناسب با شرایط تکیه‌گاهی کلاسیک در جدول 1 ارائه شده است [21]:

جدول 1 توابع مرزی متناسب با شرایط مرزی کلاسیک

توابع مرزی		لبه داخلی ورق									لبه خارجی ورق								
		$F_0^b(\bar{r})$	$F_1^b(\bar{r})$	$F_2^b(\bar{r})$	$F_3^b(\bar{r})$	$F_0^a(\bar{r})$	$F_1^a(\bar{r})$	$F_2^a(\bar{r})$	$F_3^a(\bar{r})$	$F_0^b(\bar{r})$	$F_1^b(\bar{r})$	$F_2^b(\bar{r})$	$F_3^b(\bar{r})$	$F_0^a(\bar{r})$	$F_1^a(\bar{r})$	$F_2^a(\bar{r})$	$F_3^a(\bar{r})$		
F-F		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
C-C		$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$		
F-C		$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	$1-\bar{r}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
C-F		1	1	1	1	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$	$1+\bar{r}$		

3-2- تراکنش بین ورق و سیال

جابجایی دینامیکی سیال در راستای عمود بر سطح ورق باید جابجایی ورق در همان راستا برابر باشد. به عبارت دیگر، در محل تماس ورق و سیال باید شرط پیوستگی یا سازگاری برقرار باشد. این شرط بیان می‌کند که بین ورق و سیال یک تماس دائمی در محل تماس وجود دارد. طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad (24)$$

جایگذاری روابط (8) و (22) در رابطه (24)، رابطه (25) حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) \left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[\sinh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) \right] \cos n\theta \quad (25)$$

$$= \sum_{k=1}^K u_{3k} F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) R_k(\bar{r}) \cos n\theta$$

با استفاده از سری‌های فوریه [21]، ضریب E_{ns} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{ns} = \frac{\int_a^b r \left(\sum_{k=1}^K u_{zk} F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) R_k(\bar{r}) \right) J_n \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) dr}{\left[\sinh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns} \left(\frac{h}{2}\right)}{R}\right) \right]} \times \frac{1}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \int_a^b r J_n^2 \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) dr} \quad (26)$$

طبق این رابطه، پتانسیل سرعت سیال برحسب جملات مجهول u_{zk} به جای ضرایب مجهول E_{ns} بیان می‌شود.

از آنجایی که سیال موردنظر بصورت ایده‌ال، غیرقابل تراکم و غیریویسکوز در نظر گرفته شده است، امواج سطح آزاد سیال به واسطه ارتعاش ورق نادیده گرفته شده است. به عبارت دیگر، از اغتشاش سیال صرفنظر شده است. انرژی جنبشی سیال طبق رابطه (27) بیان می‌شود [26]:

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^{2\pi} \int_a^b \left[\Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \right]_{z=-\frac{h}{2}} r dr d\theta \quad (27)$$

که ρ_f چگالی سیال و محدوده انتگرال‌گیری مساحتی است که ورق در تماس با سیال است. برای محاسبه $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$ از شرط سازگاری در رابطه (24) بهره می‌گیریم:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = i\omega \cdot F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) \sum_{k=1}^K u_{3k} R_k(\bar{r}) \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (28)$$

با جایگذاری روابط (22) و (28) در رابطه (27) و انتگرال‌گیری از رابطه

$$T_f = -\frac{1}{2} \rho_f \Gamma_1 \omega^2 \int_a^b F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) \times \left[\cosh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) \right] \times \left(\sum_{k=1}^K u_{3k} R_k(\bar{r}) e^{2i\omega t} \right) r dr \quad (29)$$

انرژی جنبشی T_p ورق طبق رابطه (16) تعریف می‌شود [23]:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_a^b \rho(z) [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] r dr d\theta dz \quad (16)$$

$i, j = r, \theta, z$

رابطه (16) برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (17) می‌شوند:

$$T_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \rho(z) [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] \left(\frac{\bar{R}}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right) (\bar{r} + \delta) \bar{r} d\bar{r} d\bar{\theta} d\bar{z} \quad (17)$$

در رابطه (17)، $\rho(z)$ چگالی ورق می‌باشد که طبق قانون ساده توانی برای مواد هدفمند مطابق رابطه (18) در جهت ضخامت ورق تغییر می‌کند [23]:

$$\rho(z) = \rho_c + (\rho_m - \rho_c) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^p \quad (18)$$

2-2- معادلات حاکم بر نوسان سیال

شکل 1 شکل شماتیک یک مخزن استوانه‌ای صلب را نشان می‌دهد که حاوی سیال غیریویسکوز و غیرقابل تراکم می‌باشد. از تابع پتانسیل سرعت $\Phi(r, \theta, z, t)$ برای توصیف نوسانات سیال درون مخزن استفاده شده است. حرکت سیال ناشی از ارتعاش ورق دایروی درون مخزن استوانه‌ای از حل معادله لاپلاس برحسب پتانسیل سرعت به شکل زیر قابل تعیین است [24]:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

در دیواره‌ها و کف مخزن که صلب هستند، سرعت سیال مساوی صفر است. در نتیجه:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0. \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-\frac{h}{2}-H} = 0. \quad (21)$$

با استفاده از روش تفکیک متغیرها، پاسخ معادله (19) به شکل $\Phi(r, \theta, z, t) = i\omega \varphi(r, \theta, z) \exp(i\omega t)$ قابل بیان است. جایگذاری این پاسخ در معادله (19) و با اعمال شرایط مرزی (20) و (21)، پاسخ عمومی معادله مذکور به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = i\omega \cdot \cos n\theta \sum_{s=1}^{\infty} E_{ns} J_n \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right) \left[\cosh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns} \left(H + \frac{h}{2}\right)}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns} z}{R}\right) \right] e^{i\omega t} \quad (22)$$

در رابطه (22)، $J_n \left(\frac{\beta_{ns} r}{R}\right)$ تابع بسل نوع اول است. پارامتر فرکانسی β_{ns} با استفاده از شرط مرزی (20) طبق رابطه (23) تعیین شود:

$$J_n(\beta_{ns}) = 0 \quad (23)$$

که در آن ($'$) بیانگر مشتق تابع بسل نسبت به متغیر r است. حل معادله (23) منجر به تعیین پارامتر فرکانسی β_{ns} برای هر مقدار از n و s می‌شود.

حاصل، داریم:

با جایگذاری رابطه (26) در رابطه (29)، رابطه زیر برای انرژی جنبشی سیال حاصل می‌شود:

$$T_f = -\frac{1}{2} \rho_f \Gamma_1 \omega^2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^K A_{ns} B_{ns} u_{zk}^2 e^{2i\omega t} \quad (30)$$

که مقدار ضرایب A_{ns} و B_{ns} در ضمیمه آمده است.

4-2- روش حل:

در حالت ارتعاش آزاد، انرژی کل سیستم از مجموع انرژی کرنشی و انرژی جنبشی ورق و سیال حاصل می‌شود. طبق این تعریف داریم:

$$\Pi = (U_p)_{max} - (T_f + T_p)_{max} \quad (31)$$

روش ریتز ایجاب می‌کند که انرژی کل رابطه (31) باید نسبت به ضرایب مجهول کمینه شود. بنابراین:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{ri}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_{\theta j}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_{zk}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{ri}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{\theta q}} = 0 \quad (32)$$

رابطه (32) منجر به معادله مقدار ویژه زیر می‌شود:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = 0 \quad (33)$$

در رابطه (33)، $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس‌های مربع سختی و جرم هستند که ابعاد آنها برابر مجموع $[I, J, K, L, Q]$ است. همچنین، $\{\Delta\}$ بردار ستونی ضرایب به صورت زیر می‌باشد:

$$\{\Delta\} = \{\{u_{ri}\} \quad \{u_{\theta j}\} \quad \{u_{zi}\} \quad \{\psi_{ri}\} \quad \{\psi_{\theta q}\}\}^T \quad (34)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \{u_{ri}\} &= \{u_{r1} \quad u_{r2} \quad \dots \quad u_{ri}\}^T \\ \{u_{\theta j}\} &= \{u_{\theta 1} \quad u_{\theta 2} \quad \dots \quad u_{\theta j}\}^T \\ \{u_{zi}\} &= \{u_{z1} \quad u_{z2} \quad \dots \quad u_{zk}\}^T \\ \{\psi_{ri}\} &= \{\psi_{r1} \quad \psi_{r2} \quad \dots \quad \psi_{rL}\}^T \\ \{\psi_{\theta q}\} &= \{\psi_{\theta 1} \quad \psi_{\theta 2} \quad \dots \quad \psi_{\theta Q}\}^T \end{aligned} \quad (35)$$

فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال، با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب در رابطه (33) قابل تعیین است. ریشه‌های دترمینان مذکور مربع مقادیر ویژه (فرکانس‌های ویژه) است. توابع ویژه یا همان شکل مودهای متناظر با مقادیر ویژه با جایگذاری مقادیر ویژه در دستگاه معادلات رابطه (33) و حل آنها به دست می‌آید.

3- آزمایش مودال

تعیین فرکانس طبیعی یک سازه از اهداف مهم مهندسان و طراحان در مطالعه دینامیکی سازه‌ها می‌باشد. فرکانسهای طبیعی یک سازه در حین ساخت با روشهای تحلیلی قابل تعیین است اما لازم است فرکانس‌هایی بعد از ساخت و مونتاژ سازه تعیین شود که در این حالت روش تجربی یکی از روش‌های کارآمد به شمار می‌رود. آزمایش مودال¹ کلاسیک یکی از آزمایشات

ارزشمند در تعیین پارامترهای مودال (فرکانس‌ها، نسبت‌های میرایی و شکل مودها) با اندازه‌گیری پاسخ‌های فرکانسی سازه می‌باشد [27]. این آزمایش با اندازه‌گیری داده‌های ورودی و خروجی توابع پاسخ فرکانس (FRF^2) در حوزه فرکانسی یا توابع پاسخ ضربه (IRF^3) در حوزه زمان قابل اجرا می‌باشد [28]. برای انجام آزمایش مودال کلاسیک نیاز به تجهیزاتی همچون چکش ضربه، شتاب سنج، کارت داده‌برداری⁴ و سیستم رایانه می‌باشد که شکل شماتیک و نحوه مونتاژ آنها در انجام این آزمایش در شکل 2 به نمایش در آمده است.

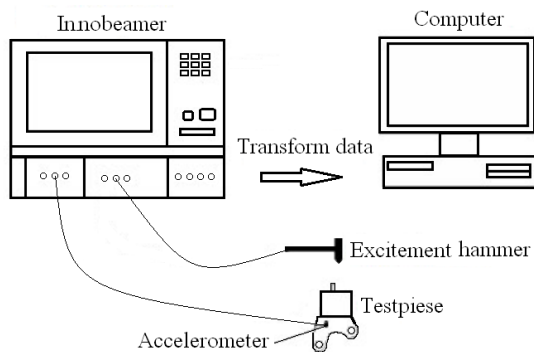


Fig. 2 Schematic of modal test equipment and assembly of them
شکل 2 شکل شماتیک تجهیزات آزمایش مودال و نحوه مونتاژ آنها

برای انجام آزمایش مودال ورق دایروی همگن از جنس آلومینیوم، ابتدا مخزن استوانه‌ای با شعاع 22cm و ارتفاع 70cm مطابق شکل 3-a تهیه شد تا بتوان هم شرایط دیواره‌های صلب برای مخزن و هم شرایط مرزی لبه آزاد برای ورق را فراهم کرد. ورق‌های دایروی از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته $E = 70GPa$ ، با شعاع‌های 10cm و 15cm و هر کدام با ضخامت‌های 1mm و 2mm ساخته شد. با توجه به اینکه برقراری تماس دائمی بین ورق و سیال از اهمیت بسزایی در نتایج این آزمایشات دارد، لذا سطح ورق‌های ساخته شده بطور کامل تمیز شد تا عاری از هرگونه چربی یا هر ماده‌ای که مانع تماس آنها با سیال شود گردد. به منظور حصول اطمینان از نتایج آزمایش، مقرر شد هر تست سه بار انجام شود. لذا جمعاً 12 نمونه ورق ساخته شد و مورد آزمایش قرار گرفت. در شکل 3-b یک نمونه ورق با ضخامت 1mm و شعاع 10cm نمایش داده شده است.

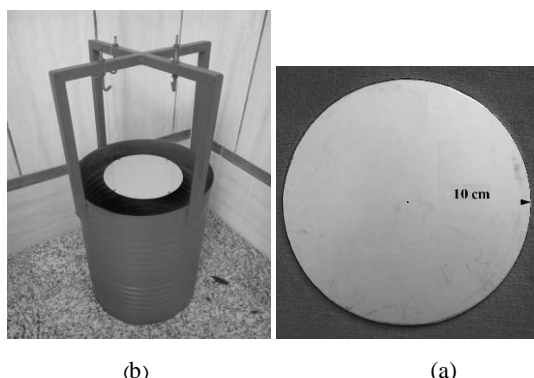


Fig. 3 (a) Tank for modal test (b) Circular plate for modal test
شکل 3 (a) مخزن ساخته شده برای انجام تست مودال (b) ورق دایروی از جنس آلومینیوم خالص

² Frequency response function

³ Impact response function

⁴ Innobeamer

¹ Modal test

آمده در پاسخها می‌تواند ناشی از مدل‌سازی آزمایش مودال باشد که شرایط مرزی لبه آزاد به طور کامل فراهم نشده باشد.

جدول 2 مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیم ی با شعاع 10cm و ضخامت 1mm

Table 2 Comparison of analytical and experimental results for Al. plate with radius 10cm and thickness 1mm

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	
148	313	529	609	955	1052	1195	1288	1351	1473	نتایج آزمایش
2.03	4.5	3.25	2.15	4.02	6.32	2.7	0.9	1.66	2.43	آزمایشها ^۱
142	309	539	625	912	1132	1292	1399	1481	1625	نتایج تحلیلی
4	1.2	1.8	2.2	4.5	7.6	8.1	8.6	9.7	10.5	درصد خطا

* انحراف معیار استاندارد

جدول 3 مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی برای ورق آلومینیم ی با شعاع 10cm و ضخامت 2mm

Table 3 Comparison of analytical and experimental results for Al. plate with radius 10cm and thickness 2mm

فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه)										
اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	
196	483	537	630	977	1064	1195	1302	1380	1502	نتایج آزمایش
2.85	4.56	3.01	4.08	6.36	2.13	5.87	0.45	3.11	4.47	آزمایشها ^۱
193	506	542	654	1054	1184	1292	1395	1415	1607	نتایج تحلیلی
1.5	4.5	0.9	3.8	7.5	11	8.1	6.7	2.47	6.53	درصد خطا

* انحراف معیار استاندارد

برای دستیابی به نتایج عددی، یک ورق دایروی متشکل از آلومینیوم (به عنوان فلز) و آلومینا (به عنوان سرامیک) در تماس با سیال در نظر گرفته شده است. مشخصات ورق و سیال مطابق جدول 4 می‌باشد:

جدول 4 خواص مکانیکی ماده مدرج تابعی و سیال

Table 4 Mechanical properties of FGM and fluid.

نوع ماده	چگالی	مدول یانگ	ضریب پواسون
آلومینیوم	$2700kg/m^3$	$70GPa$	0.3
آلومینا	$4500kg/m^3$	$380GPa$	0.3
سیال	$1000kg/m^3$	-	-

برای دستیابی به نتایج کلی‌تر، پارامتر فرکانسی بی‌بعد به صورت $D_m = E_m h^3 / 12(1 - \nu^2)$ و $\beta = \omega b^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$ تعریف گردیده که در آن [29]. برای بررسی تأثیر سیال بر رفتار ارتعاشی ورق دایروی از جنس مواد تابعی، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در دو حالت در تماس با سیال و بدون تماس با سیال با مقادیر $\eta = 0.5$, $p=2$, $H=R=1m$, $\lambda = 0.2$ و با تکیه‌گاه مفصلی در لبه‌های داخلی و خارجی مطابق شکل 5 ارائه شده است. همانطوری‌که نتایج این شکل نشان می‌دهد با افزایش n اثر کاهش تماس با سیال در فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین طبق این شکل، در مود چهارم ارتعاشی این اختلاف به حداقل مقدار می‌رسد.

به منظور استقرار ورق‌های دایروی روی آب داخل مخزن از چهار نخ الاستیک و چهار گیره کوچک با جرم بسیار ناچیز استفاده شد. ابتدا مخزن تا ارتفاع 60cm پر از آب شد و ورق‌های دایروی با استفاده از نخ‌ها و گیره‌ها طوری داخل مخزن مستقر شدند که سطح زیرین ورق در تماس با آب باشد. سپس تجهیزات آزمایش، طبق شکل 4 مونتاژ شدند. تجهیزات بکار رفته برای انجام آزمایش مودال این پژوهش که در آزمایشگاه دینامیک و ارتعاشات دانشگاه صنعتی اراک موجود است به شرح زیر می‌باشد: شتاب سنج از نوع Ni 87002b100m1، نیروسنج از نوع 9712b50 و کارت داده برداری از نوع USB-4432 ساخت شرکت کیستلر^۱ کشور سوئیس. تجهیزات مطابق شکل 4 مونتاژ و آماده آزمایش شدند.

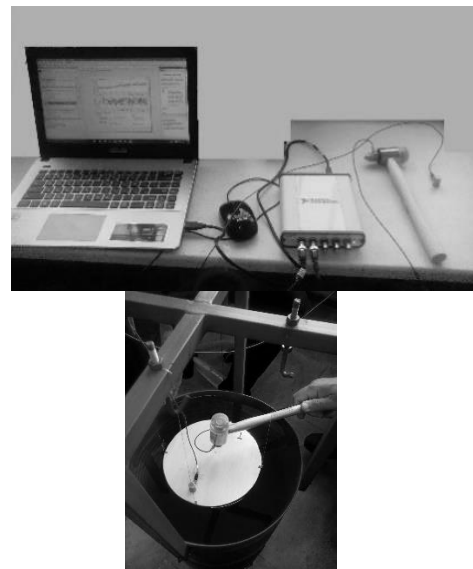


Fig. 4 Modal test on circular plate in contact with fluid
شکل 4 آزمایش مودال ورق دایروی و نحوه نصب تجهیزات

4- بحث بر روی نتایج

در این تحقیق، برای صحت‌گذاری نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده، نتایج به دست آمده از این روش در حالت خاص ورق همگن آلومینیومی در تماس با سیال با نتایج حاصل از آزمایش مودال در حالت لبه آزاد مورد مقایسه قرار گرفته است. سیال مورد استفاده در این تحقیق آب است که چگالی آن در حدود $\rho_f = 1000 kg/m^3$ در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن نتایج تحلیلی، از مشخصات ورق مورد آزمایش با مدول یانگ $70GPa$ و چگالی $2700kg/m^3$ استفاده شده است. برای اطمینان از نتایج آزمایشات، هر آزمایش روی سه نمونه ورق یکسان در تماس با سیال تکرار شد و میانگین فرکانس‌های حاصل به عنوان نتیجه نهایی در نظر گرفته شد. برای تشخیص اینکه فرکانس بدست آمده مربوط به کدام مود ارتعاشی ورق می‌باشد نتایج حاصل با نتایج حاصل از کار تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت و از تطابق پاسخ‌ها مود ارتعاشی متناظر با آن مشخص گردید. در جداول 2 و 3 فرکانس‌های طبیعی حاصل از دو روش تحلیلی و تجربی به ترتیب برای ورق‌های با ضخامت 1mm و 2mm و شعاع 10cm مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تطابق خوبی بین نتایج دو روش وجود دارد. همچنین به منظور درک بهتر اختلاف فرکانس‌های هر آزمایش، انحراف معیار استاندارد برای هر کدام محاسبه شده است. یکی از دلایل اختلاف به وجود

¹ Kistler

جدول 5 پارامتر بی‌بعد فرکانسی $\beta = \omega b^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$ برای ارتعاش آزاد ورق

دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای مقادیر مختلف n و p

Table 5 Non-dimensional frequencies $\beta = \omega b^2 \sqrt{\rho_m h / D_m}$ for free vibration of a FG circular plate in contact with fluid for various values of n and p .

p	n	C-F	C-C	F-F	F-C
0	0	28.37	43.12	21.52	34.09
	1	94.47	117.75	79.35	100.56
	2	195.41	225.5	172.68	201.71
1	0	28.66	43.55	21.74	34.44
	1	95.42	118.95	80.14	101.59
	2	196.78	227.79	174.43	203.76
3	0	28.8	43.75	21.84	34.60
	1	95.86	119.57	80.52	102.05
	2	198.31	228.83	175.23	204.7
5	0	28.97	44.04	21.97	34.82
	1	96.47	120.25	81.02	102.70
	2	199.55	232.27	176.68	205.99
10	0	29.69	45.11	22.51	35.67
	1	98.84	123.19	83.01	105.22
	2	204.42	235.86	180.64	211.00

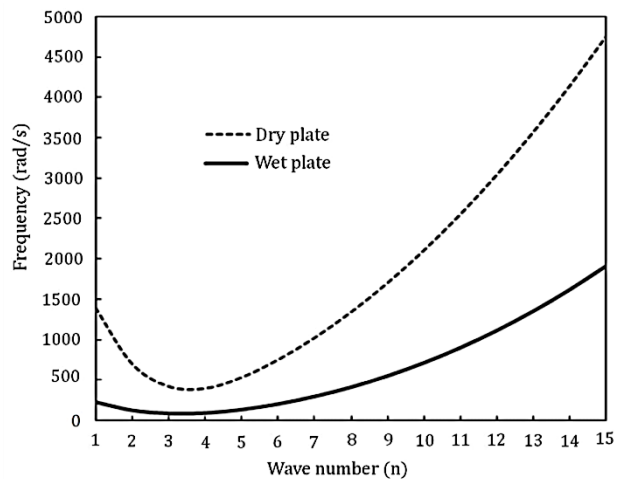


Fig. 5 Comparison of the natural frequencies of FG circular plate in contact with fluid and without contact with fluid.

شکل 5 مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در دو حالت تماس با سیال و بدون تماس با سیال.

در جدول 5 پارامتر بی‌بعد فرکانسی مربوط به ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برای چهار نوع شرط مرزی و مودهای ارتعاشی مختلف برای مقادیر مختلف توان کسر حجمی و $\lambda = 0.2$ و $\eta = 0.5$ ارائه شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش توان کسر حجمی p ماده تابعی، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال افزایش می‌یابد. این موضوع به این دلیل است که با افزایش توان کسر حجمی، درصد سرامیک ورق افزایش یافته و سختی ورق به واسطه افزایش مدول الاستیک نیز افزایش می‌یابد.

همچنین، طبق این جدول، برای هر چهار نوع شرط مرزی، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی در تماس با سیال با افزایش شماره مودها افزایش می‌یابد. علاوه بر این، از نتایج جدول 5 می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس‌های مربوط به تکیه‌گاه C-C بزرگتر از سایر شرایط مرزی است. یعنی با افزایش سختی سیستم به دلیل افزایش قیود هندسی در مرزهای ورق برای شرایط هندسی و فیزیکی یکسان فرکانس طبیعی ورق با شرایط مرزی گیردار بیش از فرکانس طبیعی ورق با شرایط مرزی دیگر است.

در شکل 6 تأثیر تغییرات ضخامت ورق بر فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با شرایط مرزی C-C نمایش داده شده است. در ترسیم این نمودارها از مقادیر $H=R=1m$ ، $\eta = 0.5$ و چگالی سیال $\rho_f = 1000 kg/m^3$ استفاده شده است.

از نمودارهای این شکل نتیجه می‌شود که برای تمام مقادیر توان کسر حجمی p ، با افزایش نسبت ضخامت بر شعاع بیرونی ورق دایروی، پارامتر بی‌بعد فرکانسی افزایش می‌یابد. همچنین این افزایش در محدوده 0.02 تا 0.04 دارای شیب تندتری می‌باشد. این امر را می‌توان به تقابل سختی ورق در برابر جرم آن و اینرسی سیال نسبت داد. به عبارت دیگر در محدوده نسبت ضخامت مذکور نسبت سختی بر جرم کل سیستم دارای بیشترین مقدار می‌باشد. همچنین نتایج این شکل نیز نشان می‌دهد که با افزایش توان کسر حجمی p مقادیر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.

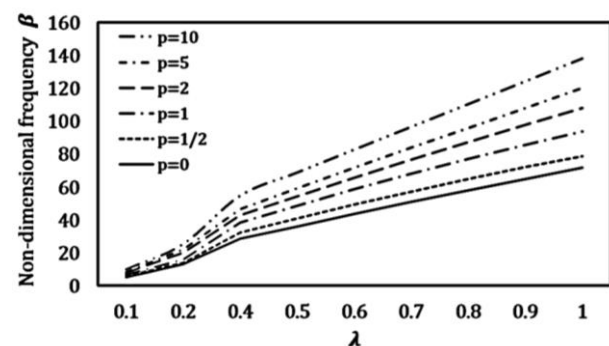


Fig. 6 Variation of the non-dimensional frequency parameter (β) versus the ratio of thickness to external radius of the circular plate in contact with fluid.

شکل 6 نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال بر حسب تغییرات نسبت ضخامت بر شعاع بیرونی ورق با لبه‌های گیردار.

به منظور بررسی تأثیر شعاع مخزن حاوی سیال روی فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال، نمودارهای شکل 7 با شرایط تکیه‌گاهی C-C ترسیم شده‌اند. در ترسیم این نمودارها از مقادیر $\eta = 0.5$ ، $\rho_f = 1000 kg/m^3$ و $p=2$ ، $H=1m$ استفاده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش شعاع مخزن در ابتدا باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی می‌شود ولی رفته رفته این افزایش ناچیز شده و به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. این موضوع را بدین صورت می‌توان تفسیر کرد که سیالات دوردست تأثیر چندانی روی ارتعاش ورق ندارند. همچنین نمودارهای این شکل نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق، همگرایی فرکانس‌ها به یک مقدار ثابت در شعاع‌های پایین‌تری از مخزن اتفاق می‌افتد.

می‌کند که با افزایش چگالی سیال، فرکانس‌های طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی کاهش می‌یابد. نتیجه دیگری که می‌توان از این شکل گرفت آن است که هر چه نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق دایروی افزایش می‌یابد مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. این موضوع را می‌توان به دلیل افزایش سختی ورق با کاهش پهنای ورق حلقوی دانست.

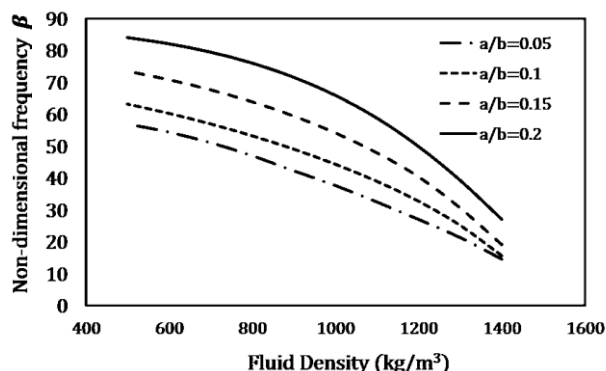


Fig. 9 Variation of the non-dimensional frequency parameter (β) versus the fluid density for various ratio of internal to external radius of circular plate in contact with fluid.

شکل 9 نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال و لبه‌های گیردار برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف نسبت شعاع داخلی بر شعاع خارجی ورق.

5- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر ارتعاشات آزاد یک ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال محدود مورد بررسی قرار گرفت و جهت تحلیل ورق از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده شد. برای تحلیل رفتار نوسانی سیال از حل معادله لاپلاس پتانسیل سرعت استفاده شد. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شدند:

- مقادیر حاصل از حل تحلیلی ارائه شده تطابق خوبی با مقادیر حاصل از آزمایشات تجربی دارد.
- مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در حالت بدون تماس با سیال بیشتر از حالت در تماس با سیال است.
- با افزایش توان کسر حجمی ماده تابعی مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی افزایش می‌یابد.
- اثر کاهش سیال روی فرکانس‌های طبیعی با افزایش ضخامت ورق افزایش می‌یابد.
- با افزایش شعاع مخزن، مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی تا مقدار معینی افزایش یافته سپس به عدد ثابتی همگرا می‌شود.
- با افزایش ارتفاع سیال، مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی تا مقدار معینی افزایش یافته سپس به عدد ثابتی همگرا می‌شود.
- با افزایش نسبت ضخامت بر شعاع بیرونی ورق دایروی در تماس با سیال، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که این افزایش در محدوده 0.02 تا 0.04 با شیب تندتری اتفاق می‌افتد.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی بر شعاع خارجی ورق دایروی توخالی، فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد.

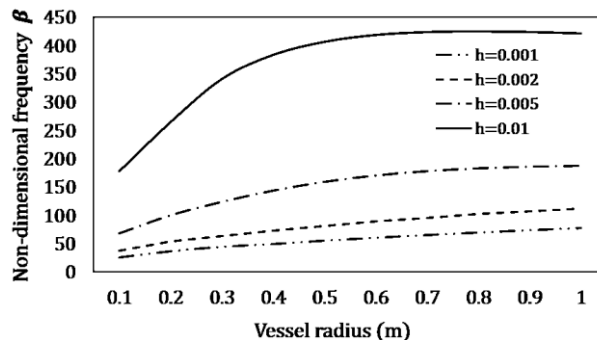


Fig. 7 Variation of the non-dimensional frequency parameter (β) versus the vessel radius for various thickness of the FG circular plate in contact with fluid.

شکل 7 نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برحسب تغییرات شعاع مخزن با لبه‌های گیردار برای مقادیر مختلف ضخامت ورق.

در شکل 8 نمودار تغییرات فرکانس طبیعی ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با لبه‌های گیردار برای مقادیر مختلف ضخامت ورق برحسب ارتفاع سیال نمایش داده شده است. برای ترسیم این نمودار از مقادیر $R=1m$ و $p=2$ ، $\rho_f = 1000 kg/m^3$ ، $\eta = 0.5$ توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش ارتفاع سیال، مقادیر پارامتر فرکانسی بی‌بعد ابتدا با شیب بیشتری افزایش می‌یابد ولی در ادامه شیب نمودار ناچیز شده و به عدد ثابتی همگرا می‌شوند. همانند تأثیر تغییرات شعاع مخزن بر فرکانس‌های طبیعی می‌توان گفت که دلیل این امر این است که سیالات دوردست اثر چندانی روی رفتار ارتعاشی ورق دایروی ندارند. همچنین نتایج این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق، همگرایی فرکانسها به یک عدد ثابت با سرعت و گردایان بیشتری صورت می‌گیرد.

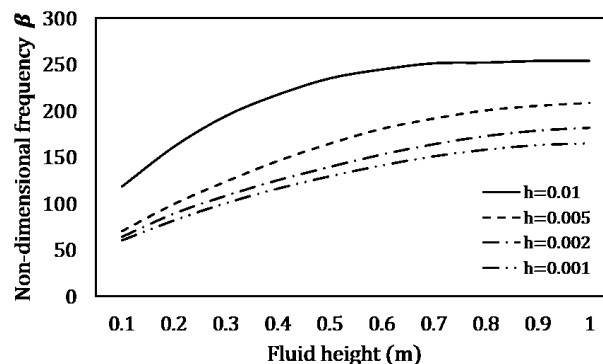


Fig. 8 Variation of the non-dimensional frequency parameter (β) versus the fluid height for various thickness of the FG circular plate in contact with fluid.

شکل 8 نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال برحسب تغییرات ارتفاع سیال با لبه‌های گیردار برای مقادیر مختلف ضخامت ورق.

در شکل 9 نمودار تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد ورق دایروی از جنس مواد تابعی در تماس با سیال با لبه‌های گیردار برحسب تغییرات چگالی سیال برای مقادیر مختلف نسبت شعاع داخلی بر شعاع خارجی ورق دایروی به نمایش درآمده است. در ترسیم این نمودار از مقادیر $H=R=1m$ ، $\lambda = 0.2$ و $p = 2$ استفاده شده است. همانگونه که انتظار می‌رفت، نتایج این شکل بیان

ضمیمه:

ثابت‌های A_{ns} و B_{ns} در رابطه (29) بصورت زیر می‌باشند:

$$A_{ns} = \frac{\left[\cosh\left(\frac{\beta_{ns}z}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}(H+\frac{h}{2})}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns}z}{R}\right) \right]_{z=-\frac{h}{2}}}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[\sinh\left(\frac{\beta_{ns}(\frac{h}{2})}{R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}(H+\frac{h}{2})}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns}(\frac{h}{2})}{R}\right) \right]_{z=\frac{h}{2}}}$$

یا

$$A_{ns} = \frac{\left[\cosh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) - \tanh\left(\frac{\beta_{ns}(H+\frac{h}{2})}{R}\right) \sinh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) \right]}{\left(\frac{\beta_{ns}}{R}\right) \left[\sinh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) + \tanh\left(\frac{\beta_{ns}(H+\frac{h}{2})}{R}\right) \cosh\left(\frac{\beta_{ns}h}{2R}\right) \right]}$$

9

$$B_{ns} = \frac{\int_a^b \int_a^b F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) \cos^2(k \cos^{-1} \bar{r}) J_n\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) r dr}{\int_a^b r J_n^2\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) dr} \times F_3^a(\bar{r}) F_3^b(\bar{r}) J_n\left(\frac{\beta_{ns}r}{R}\right) r dr$$

6- مراجع

- [14] Ghidryan, H., Ghazavi, M.R., Dehghani Firoozabadi R., "Analysis of Free Vibration of Composite Sheets in Contact with Fluid by Ritz Method", Third International Conference on Acoustic and Vibration, Tehran, Iran Acoustic and Vibrational Society, 2013 (In Persian).
- [15] Askari, E. Jeong, K. H. and Amabili, M. "Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-Filled Container with Free Surface" Journal of Sound and Vibration, Vol. 332, No. 12, pp. 3064-3085, 2013.
- [16] Rezvani, H., Fazeli H., Saied Kiaest M., Haji Hashemi Gh., "Calculation of the Influence of the Mass Parameter on the Frequency of Structures in the Fluid by Numerical, Analytical, and Laboratory Results", Amirkabir Scientific and Research Journal, Vol. 47, No. 2, pp. 70-60, 1394 (In Persian).
- [17] Jomehzadeh, E. Saidi, A. R. and Atashipour, S. R. "An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates" Materials & Design, Vol. 30, No. 9, pp. 3679-3685, 2009.
- [18] Mehrabadi, S. J. Kargamovin, M. H. and Najafizadeh M. M. "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Coupled Circular Plate with Piezoelectric Layers" Journal of mechanical science and technology, 23(8), pp. 2008-2021, 2009.
- [19] Hosseini-Hashemi, S. Taher, H. R. D. Akhavan, H. and Omidi M. "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory" Applied Mathematical Modeling, 34(5), pp. 1276-1291, 2010.
- [20] Khorshidi, K. and Bakhsheshy A. "Free Natural Frequency Analysis of an FG Composite Rectangular Plate Coupled with Fluid using Rayleigh-Ritz Method". Mechanics of Advanced Composite Structures, Vol. 1, No. 2, pp. 131-143, 2014.
- [21] Zhou, D. Au, F. T. Cheung, K. Y. K. and Lo S. H. "Three-Dimensional Vibration Analysis of Circular and Annular Plates Via the Chebyshev-Ritz Method". International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, No. 12, pp. 3089-3105, 2003.
- [22] Fox, L. P. "Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis", No. 519.4 F6, 1968.
- [23] Hejripour, F. and Saidi A. R. "Nonlinear Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates Using Differential Quadrature Method" Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 226, No. 2, pp. 485-497, 2012.
- [24] Myung, J. J. and Young H. C. "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-Coupled Circular Plates" KSME International Journal, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, 2003.
- [25] Bracewell, R. "The Fourier Transform and Its Applications", Vol. 84, CRC press, 2017.
- [26] Hosseini-Hashemi, S. Karimi, M. and Taher, H. R. D. "Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates on Elastic Foundations and Vertically in Contact with Stationary Fluid by The Ritz Method" Ocean Engineering, Vol. 37, No. 2, pp.174-185, 2010.
- [27] Rao. S. "Mechanical Vibrations" 4th Edition, 2004.
- [28] Ren, W. X. "Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge" Journal of structural Engineering ASCE, 2004.
- [29] Hosseini-Hashemi, S. Atashipour, S. R. Karimi, M. and Es'haghi M. "Free Vibration of Functionally Graded Elliptical Plates" Iranian journal of Marine Engineering, Vol. 15, No. 8, pp. 43-60, 2012.
- [30] Hosseini-Hashemi, S., Azimzadeh-Monfared, M., & Taher, H. R. D., "A 3-D Ritz solution for free vibration of circular/annular functionally graded plates integrated with piezoelectric layers", International Journal of Engineering Science, Vol. 48, No. 12, pp. 1971-1984, 2010.
- [1] Amiri, J. V. Nikkhoo, A. Davoodi, M. R. and Hassanabadi, M. E., "Vibration Analysis of a Mindlin Elastic Plate Under a Moving Mass Excitation by Eigenfunction Expansion Method" Thin-Walled Structures, Vol. 62, No. 1, pp. 53-64, 2013.
- [2] Hasheminejad, S. M. Khaani, H. A. and Shakeri, R., "Free Vibration and Dynamic Response of a Fluid-Coupled Double Elliptical Plate System Using Mathieu Functions" International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 75, No. 1, pp. 66-79, 2013.
- [3] Kerboua, Y. Lakis, A. A. Thomas, M. and Marcouiller. L., "Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with Fluid" Applied Mathematical Modelling, Vol. 32, No. 12, pp. 2570-2586, 2008.
- [4] Allahverdizadeh, A. Naei, M. H. and Bahrami, M. N., "Nonlinear Free and Forced Vibration Analysis of Thin Circular Functionally Graded Plates" Journal of Sound and Vibration, Vol. 310, No. 4, pp. 966-984, 2008.
- [5] Tariverdilo, S. Shahmardani, M. Mirzapour, J. and Shabani, R. "Asymmetric Free Vibration of Circular Plate in Contact with Incompressible Fluid" Applied Mathematical Modeling, Vol. 37, No. 1, pp. 228-239, 2013.
- [6] Jeong, K. H., "Free Vibration of Two Identical Circular Plates Coupled with Bounded Fluid" Journal of Sound and Vibration, Vol. 260, No. 4, pp. 653-670, 2003.
- [7] Dong, C. Y., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Functionally Graded Annular Plates Using the Chebyshev-Ritz Method" Materials & Design, Vol. 29, No. 8, pp.1518-1525, 2008.
- [8] Kwak, M. K. "Hydroelastic vibration of circular plates". Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, No. 3, pp. 293-303, 1997.
- [9] Amabili, M., "Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 193, No. 4, pp. 909-925, 1996.
- [10] Zhou, D., & Cheung, Y. K., "Vibration of vertical rectangular plate in contact with water on one side", Earthquake engineering & structural dynamics, Vol. 29, No. 5, pp. 693-710, 2000.
- [11] Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M. and Rokni, H. "Natural Frequencies of Rectangular Mindlin Plates Coupled with Stationary Fluid". Applied Mathematical Modeling, Vol. 36, No. 2, pp. 764-778, 2012.
- [12] Jeong, K. H. Lee, G. M. and Kim, T. W. "Free Vibration Analysis of a Circular Plate Partially in Contact with a Liquid". Journal of Sound and Vibration, Vol. 324, No. 1, pp. 194-208, 2009.
- [13] Myung, J. J. and Young, H. C. "Fluid Bounding Effect on Natural Frequencies of Fluid-Coupled Circular Plates" KSME International Journal, Vol. 17, No. 9, pp. 1297-1315, 2003.