



توسعه‌ی یک مدل لایه‌گون در حضور روش انتگرال جی برای پیش‌بینی رشد ترک بین لایه‌ای در ورق‌های چندلایه‌ی مرکب

سیدعلی حسینی کوردخیلی^{1*}، رضا خراسانی²، حسین کاشانی³

1- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
 2- دانشجوی دکترا، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
 3- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران
 * تهران، صندوق پستی 1458889694، ali.hosseini@sharif.edu

چکیده

اطلاعات مقاله

دریافت: 95/12/06
 پذیرش: 96/03/02

کلیدواژگان:

جدایش بین لایه‌ای
 انتگرال جی
 تئوری لایه‌گون
 لبه‌ی آزاد
 نرخ رهایی انرژی کرنشی

در این مقاله یک روش عددی به منظور پیش‌بینی رشد ترک در ورق‌های چند لایه مرکب توسعه داده شده است. برای محاسبه‌ی دقیق تنش‌های بین لایه‌ای، تئوری لایه‌گون ردی به کار گرفته شده و صحت نتایج بدست آمده به کمک نرم افزار اجزاء محدود آباکوس تأیید گردیده است. سپس قابلیت حل مسائل در حضور جدایش بین لایه‌ای، به عنوان مهم‌ترین عامل خرابی مواد مرکب، به مدل اضافه شده است. در ادامه روش عددی انتگرال جی، به عنوان یک انتگرال مستقل از مسیر، برای ترک‌های صفحه‌ای بین لایه‌ای در چند لایه‌های مرکب معرفی شده و با استفاده از آن مدل لایه‌گون ابتدایی تکمیل گردیده است. همچنین رشد آسیب در سازه با نرخ رهایی انرژی کرنشی کنترل می‌گردد؛ به این صورت که در ابتدا روش محاسبه ماتریس سختی کل سازه به وسیله‌ی المان لایه‌گون بیان گشته و جابجایی‌های گره‌ای و میدان تنش-کرنش در المان‌ها استخراج می‌گردد. سپس با محاسبه‌ی انتگرال جی سه بُعدی، امکان پیش‌بینی رشد ترک به کمک معیار نرخ رهایی انرژی کرنشی لبه‌ی ترک، به دست می‌آید. در انتها به منظور اعتبارسنجی مدل ارائه شده، نتایج بدست آمده با نتایج مدل‌های موجود مقایسه گردید و مشاهده شد که در عین منحصر به فرد بودن، با برخی از مدل‌های تحلیلی قرابت بیشتری دارد.

Development of a layer-wise model together with J-integral method for prediction of interlaminar crack growth in laminated composites plates

Seyed Ali Hosseini Kordkheili^{1*}, Reza Khorasani¹, Hossein Kashani¹

1- Aerospace department, Sharif University of technology, Tehran, Iran.
 * P.O.B. 1458889694, Tehran, Iran, ali.hosseini@sharif.edu

Abstract

Keywords

Delamination
 J-Integral
 Layer-wise theory
 Free edge
 Strain energy release rate

In this paper, a numerical method is developed in order to predict the crack growth in multi-layered composites. Reddy's layerwise theory is employed to truly calculate the interlaminar stresses and afterward the accuracy of results are satisfied by Abaqus finite element software. Then the capability of solving problems in the presence of delamination, as the most important cause of composites failure, is added to the elaborated model. In follows, the J-integral method, which the integral is independent of the path around a crack, is introduced and by using the this method, the initially layerwise model is improved. Also, failure in structure is controlled by strain energy release rate; This means that firstly the process of computing total stiffness matrix of structure using layerwise element is described and nodal displacements and stress-strain fields in elements are extracted. Subsequently the possibility of predicting the crack growth is achieved by calculating the 3D J-integral using the criterion of strain energy release rate at crack front. Finally, the developed numerical model is validated by comparing the its results with the results of available analytical models and it is perceived that the model, despite being unique, is more similar to some of the analytical solutions.

Please cite this article using:

Hosseini Kordkheili, S. A. Khorasani, R. Kashani, H. , "Development of a layer-wise model together with J-integral method for prediction of interlaminar crack growth in laminated composites plates", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 05, No. 02, pp. 218-226, 2018.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

1- مقدمه

پایدار در آن توسط محققان زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. مولون و همکارانش [14] چقرمگی شکست نمونه‌های تیر یکسر گیردار دولبه نامتقارن را به روش تحلیلی و تجربی تعیین کردند. گانگ و همکارانش [15] آزمایش‌هایی را بر روی نمونه‌های تیر یکسر گیردار دولبه چند جهتی تحت مود I خالص انجام دادند. همچنین شکریه و زین الدینی [16]، برای نانو مرکب‌های پایه اپوکسی یک روش تحلیلی به منظور پیش‌بینی مود اول نرخ رهایی انرژی کرنشی ارائه نمودند.

شون و همکارانش [17] خواص مکانیک شکست نمونه‌های تیر یکسر گیردار دولبه را برای مواد مختلف با ترک بین دولایه با زوایای متفاوت با استفاده از روش عددی و آزمایش‌های تجربی مطالعه کردند. نقی پور و همکارانش [18] به بررسی اثر چیدمان لایه‌ها بر گسترش تورق در چندلایه‌های کامپوزیتی با استفاده از آزمایش‌های تجربی و روش المان محدود پرداختند. دیویدسون و قریبیان [19] روش‌های مبتنی بر انرژی برای پیش‌بینی گسترش تورق در چندلایه‌های کامپوزیتی را مطالعه کردند.

پریرا و همکاران [20] مود I چقرمگی شکست چندلایه‌ی چند جهتی با تورق 0/0/0 شیشه/ اپوکسی را با مدل‌سازی و همچنین به صورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. محمد رهان و همکاران [21] اثر تغییر چیدمان بر مود تورق گسترش‌یافته در چندلایه‌های چند جهتی را مورد مطالعه قرار داده و دریافتند اثر تغییر زوایای مجاور ترک بر نرخ رهایی انرژی کرنشی از سایر لایه‌ها بیشتر بوده و اهمیت این اثر در حالت گسترش ترک نمود بیشتری نسبت به حالت شروع رشد تورق دارد.

در این مقاله پس از بیان مختصر تئوری راجع به المان لایه‌گون و انتگرال جی، الگوریتم توسعه‌ی یک مدل عددی برای پیش‌بینی خرابی سازه در اثر جدایی بین لایه‌ای شرح داده شده و پس از صحت سنجی آن، به مقایسه‌ی نتایج این مدل با مدل‌های تحلیلی موجود پرداخته می‌شود.

2- تئوری

2-1- المان لایه‌گون

در تئوری‌های لایه‌گون و برخلاف تئوری‌های تک لایه‌ی معادل، در هر لایه بسط میدان جابجایی جداگانه‌ای فرض می‌گردد و بنابراین این تئوری‌ها نمایش صحیحی از میدان جابجایی و در نتیجه میدان تنش در مواد مرکب چند لایه فراهم می‌آورد. در تئوری لایه‌گون ردی میدان جابجایی در راستای ضخامت با توابع المان محدود لاگرانژی یک‌بعدی مرتبه دوم نمایش داده شده و در نتیجه دارای شرط پیوستگی مرتبه‌ی اول می‌باشند.

المان‌های چندلایه (مانند شکل 1) می‌توانند بر اساس تئوری‌های حاکم بر محیط‌های پیوسته‌ی سه‌بعدی تعریف شوند. در مدل لایه‌گون فرض می‌شود که می‌توان جابجایی‌ها، خواص مواد و هندسه‌ی المان را توسط مجموعه‌ای از توابع درون‌یاب مجزای رایج تخمین زد که در آن هر تابع درون‌یاب سه‌بعدی حاصل ضرب توابع درون‌یاب یک‌بعدی و دوبعدی می‌باشد.

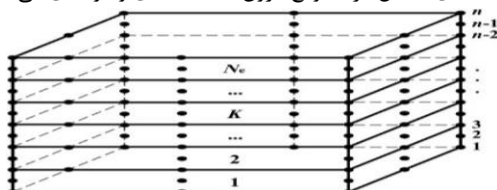


Fig. 1 Layer-wise element with second order approximation in each layer

شکل 1 المان لایه‌گون با تقریب مرتبه دو در راستای هر لایه

جدایش بین لایه‌ای از مهم‌ترین و رایج‌ترین مکانیزم‌های خرابی در مواد مرکب است که باعث گسیختگی بین ماتریس و تقویت‌کننده‌ها می‌گردد. معمولاً این خرابی به دلیل چقرمگی شکست کم و تنش‌های بین لایه‌ای ایجاد شده و موجب کاهش سفتی، استحکام و عمر مورد انتظار ماده می‌گردد. کاربرد مستقیم روش اجزای محدود برای مسائل ترک به علت تکینگی موجود در نوک ترک توأم با خطای غیرقابل اغماض خواهد بود. تلفیق حل عددی انتگرال مستقل از مسیر جی (که بر اساس قانون بقای انرژی در میدان‌های پایستار استوار است) و روش اجزای محدود لایه‌گون، امکان حل مسائل پیچیده ترک از نظر بارگذاری، هندسه‌ی قطعه و ترک را فراهم می‌آورد.

تنش‌های بین لایه‌ای در صفحات مرکب برای اولین بار توسط پاپو و اونسن [1] مطرح گردید. آن‌ها نشان دادند که برای نمونه‌های تحت کشش یکنواخت، تنش‌های برشی بین لایه‌ای بیشینه مقادیر خود را در لبه‌های آزاد پیدا می‌کنند. این تنش‌ها با توجه به منفرد بودن در لبه‌های آزاد، از اصلی‌ترین عوامل در ایجاد جدایش در لبه‌ها هستند. لذا پژوهشگران متعددی به روش‌های گوناگون به بررسی و تحلیل این تنش‌ها پرداخته‌اند. یکی از روش‌های رایج در این زمینه، روش تحلیل همگرا می‌باشد که توسط بکر [2] مورد استفاده قرار گرفته است. راه حل المان محدود برای اولین بار توسط وانگ و کراسمن [3] مورد استفاده قرار گرفت که بعدها توسط لسارد و همکاران [4] و چانگ [5] ادامه داده شد. مدل‌های ریاضی بیان‌کننده توزیع تنش‌ها نیز یکی دیگر از روش‌هایی بودند که مورد توجه قرار گرفته‌اند؛ از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به روش ارائه شده توسط دیاژ [6] و لوریوت [7] و اشاره کرد. در اکثر موارد فوق به علت محدودیت‌های موجود در قدرت و سرعت پردازش اطلاعات در سامانه‌های محاسباتی محدودیت‌های فراوانی در نظر گرفته شده است. رایس [8] با ایده آل سازی رفتار پلاستیک به کمک رفتار الاستیک غیرخطی توانست رابطه‌ای برای نرخ آزادسازی انرژی در مواد غیرخطی به دست آورد. وی نشان داد که این مقدار را می‌توان به صورت انتگرال خط مستقل از مسیر عنوان کرد و آن را "انتگرال جی" نامید.

بعد از معرفی انتگرال جی، هاتچینسون [9] و رایس و روزنگرن [10] انتگرال جی را به میدان تنش نوک ترک در مواد غیرخطی مرتبط کردند. این تحلیل‌ها نشان داد که می‌توان به "جی" به عنوان یک میدان تنش غیرخطی نیز نگاه کرد. شیه و هاتچینسون [11] نشان دادند که بین انتگرال جی و پارامتر باز شونده‌ی نوک ترک رابطه‌ای موجود است و استفاده از هر دوی این پارامترها برای سنجش وضعیت شکست در اجسام مفید می‌باشد. البته در سال‌های اخیر استفاده از روش بازشدگی دهانه ترک کاهش یافته و شیوه انتگرال جی مستقل از مسیر تا حد زیادی جایگزین آن شده است.

در ادامه، آمستوی و همکاران [12] انتگرال جی سه‌بعدی را معرفی کردند. انتگرال در این حالت از مجموع دو انتگرال تشکیل شده که یکی از این انتگرال‌ها انتگرال خط و دیگری انتگرال سطح می‌باشد. هر کدام از این اجزا وابسته به مسیر بوده ولی مجموع آن‌ها مستقل از مسیر می‌باشد. حکیم الهی و همکاران [13] با استفاده از مجموع انتگرال روی کانتور و مقادیر انتگرال روی سطح محصور شده توسط آن، انتگرال جی سه‌بعدی را برای مواد همگن محاسبه نمودند.

مقاومت به رشد تورق یا چقرمگی شکست در مواد مرکب لایه‌ای، توسط نرخ رهایی انرژی کرنشی (G1) بیان می‌گردد. برای بررسی مود I تورق در مواد مرکب لایه‌ای، تیر یک سر گیردار دو لبه به دلیل سادگی و رشد ترک

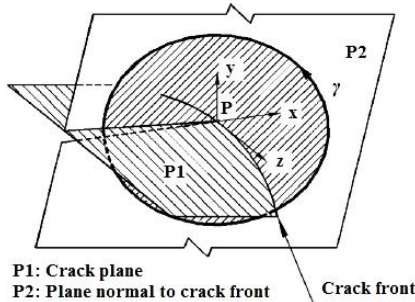


Fig. 3 Definition of the local co-ordinate system and the integration path for a crack front point. [14]

شکل 3 تعریف سیستم مختصات محلی و مسیر انتگرال‌گیری برای نقاط لبه‌ی ترک [14]

درجه اول جابجایی هستند، بستگی دارد. (که به‌طور مستقیم از روش اجزای محدود به دست می‌آید) ولی انتگرال روی سطح به مشتقات دوم جابجایی بستگی دارد. این موضوع توسط فرمول‌بندی الگوریتمی که در آن عبارت $(J_A)_k$ به طور صریح به صورت توابع ایزو پارامتریک مختصات داده شده‌اند، حل می‌گردد. در شکل 3 سیستم مختصات محلی مسیر انتگرال‌گیری برای نقاط لبه‌ی ترک نشان داده شده که در آن صفحه‌ی ترک و P2 صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی ترک می‌باشد. ترک صفحه‌ی P2 دارای مختصه‌ی $x_3 = 0$ است.

با توجه به سیستم مختصات محلی شکل فوق، انتگرال جی خطی و سطحی در جهت 1 به صورت زیر به دست می‌آید [14].

$$(J_L)_1(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{zy} \gamma_{zy} + \sigma_{zx} \gamma_{zx} \right) dy - \int_{\gamma} (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) \frac{\partial u}{\partial x} ds - \int_{\gamma} (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z) \frac{\partial v}{\partial x} ds - \int_{\gamma} (\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z) \frac{\partial w}{\partial x} ds \quad (3)$$

$$(J_A)_1(\gamma) = \int_A \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) dA \quad (4)$$

البته در روابط بالا n_z برابر صفر می‌باشد. در گام اول باید تنش‌ها و کرنش‌ها را از جابجایی گره‌ای به دست آورد. به‌طور مثال روش محاسبه σ_{xy} از مقادیر جابجایی‌های گره‌ای در بخش 2-2-1 شرح داده شده است.

2-2-1- محاسبه مشتقات اول جابجایی

می‌دانیم σ_{xy} به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma_{xy} = \bar{C}_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{C}_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \bar{C}_{36} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \bar{C}_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5)$$

که \bar{C}_{ij} ها مؤلفه‌های ماتریس سفتی انتقال یافته هستند. در این‌جا به عنوان نمونه به بررسی جمله‌ی اول از عبارت $\frac{\partial u}{\partial y}$ پرداخته شده است که در آن مشتقات جابجایی نسبت به مختصات کارترین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (6)$$

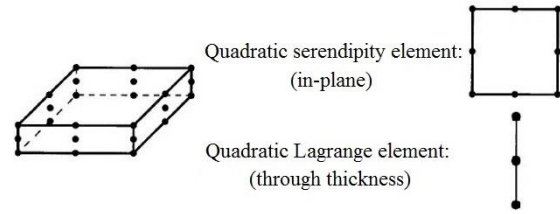


Fig. 2 The employed layerwise element [22]

شکل 2 المان لایه‌گون استفاده شده [22]

در این حالت می‌توان تغییر مکان‌ها را به صورت زیر نوشت:

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^m U_j(x, y) H_j(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^8 U_{ij} N_i(\xi, \eta) H_j(\zeta) \\ v(x, y, z) = \sum_{j=1}^m V_j(x, y) H_j(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^8 V_{ij} N_i(\xi, \eta) H_j(\zeta) \\ w(x, y, z) = \sum_{j=1}^m W_j(x, y) H_j(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^8 W_{ij} N_i(\xi, \eta) H_j(\zeta) \quad (1)$$

که در آن توابع شکل و H_j توابع درون یاب غیر محلی برای جابجایی‌های تقسیم‌شده در راستای ضخامت می‌باشد. المان مرتبه دو در راستای هر لایه عددی در شکل 1 آورده شده است.

به لحاظ هندسی المان لایه‌گون به کار گرفته شده مشابه المان آجری است که دارای 24 گره می‌باشد که در شکل 2 نشان داده شده است. برای مدل‌سازی لایه‌های مختلف، در هر لایه یکی از این المان‌ها قرار می‌گیرد. المان صفحه‌ای آن المان مربعی هشت گره‌ای و المان در راستای ضخامت آن المان مرتبه‌ی دو لاگرانژی می‌باشد.

2-2- روش عددی انتگرال جی برای بررسی جدایش بین لایه‌ای

مفهوم انتگرال جی به منظور توسعه مفاهیم مکانیک شکست الاستیک خطی به حالت غیرخطی به وجود آمد. انتگرال جی انتگرال مستقل از مسیر است که قابل اعمال به مسائل خطی و غیرخطی در تغییرهای کوچک می‌باشد. این انتگرال ابزاری است برای محاسبه نرخ آزاد شدن انرژی در حالتی که آثار پلاستیسیته قابل صرف نظر کردن نیست.

انتگرال جی برای ترک‌های صفحه‌ای از مجموع دو جز اصلی تشکیل شده است که عبارت‌اند از یک انتگرال خط در مسیر Γ $(J_L)_k$ و یک انتگرال سطح بر روی سطحی که توسط مسیر Γ در بر گرفته شده است $(J_A)_k$. هرکدام از این اجزا وابسته به مسیر بوده اما مجموع آن‌ها مستقل از مسیر است [18].

$$J_k = (J_L)_k + (J_A)_k = \int_{\Gamma} (\omega n_k - T_i u_{i,k}) d - \int_A \left(\omega \delta_{k3} - \sigma_{i3} u_{i,k} \right)_{i,3} dA \\ k = 1, 2, 3 \quad (2)$$

در این‌جا Γ کانتور نوک ترک، A سطح محصور شده به وسیله‌ی کانتور و n_k بردار واحد عمود بر کانتور یا مسیر انتگرال‌گیری می‌باشد. همچنین ω چگالی انرژی کرنشی بر واحد حجم، T نیروی سطحی و u جابجایی می‌باشند. رابطه‌ی 2 نشان می‌دهد که انتگرال کانتور به جابجایی و تنش‌ها که مشتقات

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \quad (12)$$

مشتقات b و c نیز به طریق مشابه محاسبه می‌شوند. در ادامه می‌بایست مشتقات درمیان ماتریس ژاکوبی نسبت به مختصات ایزو پارامتریک محاسبه شود. برای مثال برای $\frac{\partial |J|}{\partial \xi}$ داریم:

$$\frac{\partial |J|}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} a + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} b + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial b}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \xi} c + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial c}{\partial \xi} \quad (13)$$

لذا با جایگذاری روابط حاصل شده، $(J_A)_1$ توسط رابطه‌ی 14 به فضای ایزو پارامتریک منتقل می‌شود:

$$\int_A f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \quad (14)$$

انتگرال در فضای ایزو پارامتریک توسط انتگرال عددی گاوسی محاسبه می‌شود. صفحه‌ی (x,y) بر خط مماس بر جلوی ترک در نقطه‌ی p عمود بوده و شامل 9 نقطه‌ی گاوس در هر المان داخل مسیر Γ می‌باشد. از آنجایی که نتایج تحلیل المان محدود در ارتباط با شبکه‌بندی سه‌بعدی است، 9 نقطه‌ی گاوس باید از میان 27 نقطه‌ی گاوس موجود در المان سه‌بعدی 24 گره‌ای انتخاب شوند.

3- مدل‌سازی جدایی بین لایه‌ای

شما تیک مدل‌سازی جدایش بین لایه‌ای در شکل 5 نشان داده شده است. چنانچه گره‌های مشترک بین دولایه، مختصات یکسان، دارای شماره‌ی متفاوتی در لایه پایینی نسبت به لایه بالایی باشند، بدان معناست که سختی هر گره از لایه پایینی با سختی هر گره در لایه بالایی در ماتریس سختی کل المان لایه‌گون جمع نشده و لذا در مختصات یکسان دو گره متفاوت داریم. بنابراین بدین طریق می‌توان به مدل‌سازی جدایش بین لایه‌ای پرداخت [23]. با متمایز فرض کردن هر گره در فصل مشترک لایه‌ها، سه درجه آزادی به درجات آزادی کل سازه اضافه می‌شود که به آن درجات آزادی جدایی گفته می‌شود.

3-1- پیش‌بینی رشد ترک به کمک انتگرال جی

ورودی‌های مسئله برای پیش‌بینی رشد ترک در مدل ارائه شده شامل موارد زیر می‌باشد:

- میدان جابجایی بدست آمده برای تمامی گره‌ها
- مسیر انتگرال‌گیری در جهت المان‌ها برای محاسبه انتگرال جی خطی و سطحی
- مختصات تمامی گره‌های سازه سه بعدی شامل گره‌های جدایی همان‌طور که اشاره شد، در این مدل ترک به صورت ترک بین لایه‌ای در نظر گرفته شده است (شکل 6). همچنین انتگرال جی سه‌بعدی در مسیرهای مختلف حول نوک ترک بین لایه‌ای محاسبه گشته و میانگین این مقادیر نزدیک به هم به عنوان مقدار عددی انتگرال جی معرفی می‌شود. با توجه به اینکه مقدار این انتگرال در حالت الاستیک خطی با مقدار نرخ آزاد شدن انرژی الاستیک G برابر می‌باشد، درواقع با محاسبه انتگرال جی می‌توان نرخ رهایی انرژی کرنشی را محاسبه نمود.

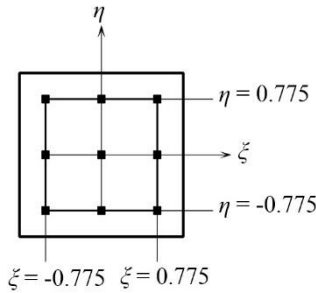


Fig. 4 Gauss points of an element in the path of integration

شکل 4 نقاط گاوس یک المان داخل مسیر انتگرال‌گیری

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \left[\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} H_j u_i \right] \quad (7)$$

همچنین یکی از اجزای ماتریس معکوس ژاکوبی است. برای محاسبه سایر جملات نیز باید به همین ترتیب عمل کرد. تابع $(J_L)_1$ برای تمام نقاط گاوسی که توسط مسیر انتگرال‌گیری Γ قطع می‌شوند، تعریف شده است. Γ از مجموعه‌ای از اجزاء که هر کدام دارای سه نقطه گاوس می‌باشند تشکیل شده است. برای انتگرال‌گیری در طول مسیر از تکنیک گاوس سه نقطه مطابق شکل 4 استفاده می‌شود.

2-2- محاسبه مشتقات دوم جابجایی

تمام اجزای انتگرال سطح $(J_A)_1$ را می‌توان به صورت تابعی از مختصات ایزو پارامتریک ξ, η, ζ نوشت. در این جا و به عنوان نمونه، عبارت $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x}$ در نظر گرفته شده است. روش محاسبه مشتق $\frac{\partial u}{\partial x}$ پیش‌تر توضیح داده شد. در زیر به نحوه محاسبه $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$ پرداخته شده که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \bar{c}_{55} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \quad (8)$$

در معادله‌ی فوق مشتقات دوم جابجایی به شکل مشابهی بدست می‌آید؛ برای عبارت $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$ داریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \quad (9)$$

مشتقات $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ و $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ اجزای ماتریس J^{-1} می‌باشند. سایر مقادیر را می‌توان با دیفرانسیل‌گیری از توابع شکل برحسب ξ, η, ζ نوشت. به عنوان مثال روش محاسبه‌ی $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}$ بدین صورت است که ابتدا مقادیر a, b, c به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta}; \quad b = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta}$$

$$c = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (10)$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} = \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) |J| - a \left(\frac{\partial |J|}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial |J|}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial |J|}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] \quad (11)$$

برای محاسبه عبارت فوق باید مقادیر مشتقات a, b, c را بدست آورد. مشتقات a بر حسب مختصات محلی با روند رابطه (12) به دست می‌آید:

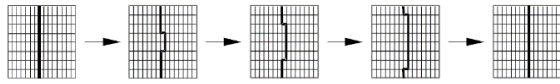


Fig. 7 Movement of the delamination front in DCB [24]

شکل 7 حرکت لبه‌ی جدایی در نمونه تیر یکسر گیردار [24]

جدول 1 خواص مکانیکی ماده‌ی مورد نظر مثال اول

Table 1 Mechanical properties of material in example 1

واحد	مقدار	پارامتر
GPa	50	E_1
GPa	15.2	$E_2(=E_3)$
	0.254	$\nu_{12}(=\nu_{13})$
	0.428	ν_{23}
GPa	4.7	$G_1(=G_2)$
GPa	3.28	G_3

برقرار نگردد، با افزایش بارگذاری وارد بر مسئله و محاسبات مجدد برای ماتریس سختی، جابجایی گره‌ای و مقادیر تنش-کرنش، شرط معیار رشد خرابی در انتگرال جی بررسی گردیده و این فرآیند تا برقرار شدن آن معیار ادامه پیدا می‌کند. چنانچه تمامی المان‌های مرز مشترک دو لایه طبق معیار رشد ترک باز شوند، سازه دچار شکست شده و بار وارد بر سازه به‌عنوان بار شکست تلقی می‌گردد. روندنمای کلی مدل عددی لایه‌گون در حضور انتگرال جی برای پیش‌بینی رشد ترک بین لایه‌های در چند لایه‌های مرکب در شکل 8 آورده شده است.

4- نتایج عددی

تیرهای مرکب در مثال‌های زیر (که منظور اعتبارسنجی حل عددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند)، در جهت طولی دارای 50 المان بوده و در جهت ضخامت مطابق با تئوری لایروایی با درون‌یابی لاگرانژی مرتبه‌ی دو در نظر گرفته می‌شوند. در نرم افزار آباکوس نیز از المان آجری سه‌بعدی 20 گره‌ای (C3D20) استفاده و ترک از نوع Contour integral مدل‌سازی شده است.

4-1- مثال اول

در این مثال یک دولایه‌ی [0/90] مرکب یک سر درگیر (مشابه شکل 6) با ترک بین لایه‌ای به طول a تحت بار انتهایی 10 نیوتن در نظر گرفته می‌شود. مسئله‌ی مورد نظر با $L=10\text{mm}$ و $a=b=4h=2\text{mm}$ ابتدا به کمک حل عددی ارائه شده حل و سپس نتایج بدست آمده با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. مشخصات این دولایه در جدول 1 آورده شده است.

در شکل‌های 9 و 10 جابجایی در مسیری در وسط فصل مشترک دولایه و در راستای x از حل عددی و آباکوس برای لایه‌ی 90° مقایسه شده است.

شکل‌های 11 و 12 جابجایی در مسیری در وسط فصل مشترک دولایه و در راستای x از حل عددی و آباکوس برای لایه‌ی 0° را نشان می‌دهند. گفتنی است با توجه به متفاوت بودن زوایای الیاف و نیز وجود جدایش بین لایه‌ای، مقادیر جابجایی در مسیر مذکور در لایه‌های 0° و 90° متفاوت است.

لازم به ذکر است که در شکل‌های 9 تا 12 مقادیر جابجایی در جهت y ناچیز می‌باشد. با توجه به نمودارها می‌توان گفت که نتایج حاصل از حل عددی و نتایج به دست آمده از آباکوس با دقت بسیار خوبی بر هم منطبق می‌باشند که این امر حکایت از مدل‌سازی صحیح جدایش بین لایه‌ای و تحلیل انجام‌شده به کمک تئوری لایه‌گون دارد.

4-2- مثال دوم

یک چندلایه‌ی [0]24 مرکب (مشابه شکل 6) دارای خواص مکانیکی ذکر

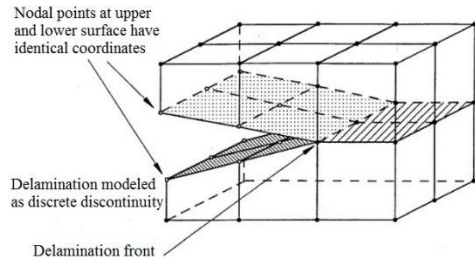


Fig. 5 Scheme of modeling interlaminar delamination [23]

شکل 5 نحوه مدل‌سازی جدایش بین لایه‌ای [23]

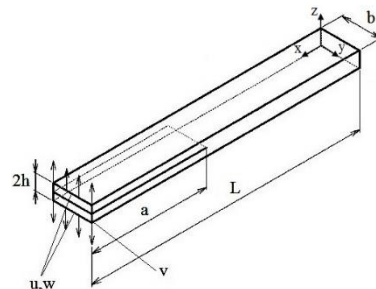


Fig. 6 Interlaminar crack in a multi-layered composite

شکل 6 ترک بین لایه‌ای در نمونه‌ی چندلایه‌ی مرکب

رشد ترک زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار نرخ رهایی انرژی کرنشی محاسبه شده برابر چقرمگی شکست ماده G_c گردد. لذا معیار کلی رشد جدایی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$G \geq G_c \quad (15)$$

رابطه‌ی 15 بیان می‌دارد در صورتی که در نقطه‌ای از پیشانی تورق نرخ رهایی انرژی کرنشی به مقدار بحرانی (چقرمگی شکست) برسد شروع تورق در آن نقطه اتفاق می‌افتد. در حالت کلی برای بارگذاری‌های مختلف و به عنوان مثال بارگذاری مود I، معیار کلی رشد جدایی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} \geq 1 \quad (16)$$

3-2- رشد جدایی بین لایه‌ای و محاسبه‌ی تنش شکست

با توجه به اینکه انتگرال‌گیری برای محاسبه انتگرال جی در صفحه‌ی عمود بر لبه‌ی ترک انجام می‌گیرد، بنا بر مش‌بندی در راستای عرضی لبه‌ی ترک تعداد انتگرال جی متفاوتی به دست خواهد آمد؛ در نتیجه برای هر گره در راستای لبه ترک با استفاده از مقدار انتگرال جی محاسبه شده در مسیر مناسب که برابر با نرخ رهایی انرژی کرنشی می‌باشد، امکان رشد ترک و باز شدن آن المان طبق معیار رشد خرابی ارائه شده بررسی می‌گردد. چنانچه شرایط معیار رشد ترک برقرار گردد، آن المان باز می‌شود. مطابق با شکل 7 رشد ترک ردیف به ردیف صورت می‌گیرد و تا یک ردیف از المان‌های لبه ترک کاملاً باز نشود، ردیف المان‌های پشت المان‌های مذکور باز نخواهد شد. به عبارت دیگر باز شدن ردیف المان‌های بعدی هنگامی صورت می‌پذیرد که برای تمامی المان‌های لبه جدایش معیار رابطه (16) برقرار گردد. همچنین مشاهده می‌شود که جدایش لبه جدایی از المان‌های وسطی لبه آغاز و به المان‌های بیرونی کشیده می‌شود که این نشان دهنده این است که نرخ رهایی انرژی کرنشی بیشینه مقدار خود را در وسط لبه جدایی بدست می‌آورد [24].

طبق معیار رشد خرابی چنانچه یک سری از المان‌ها باز گردد شرایط مرزی مسئله تغییر می‌کند. لذا برای حل مسئله باید مدل جدید با لبه ترک جدید و شرایط مرزی جدید ایجاد گردد. چنانچه شرایط معیار رشد خرابی

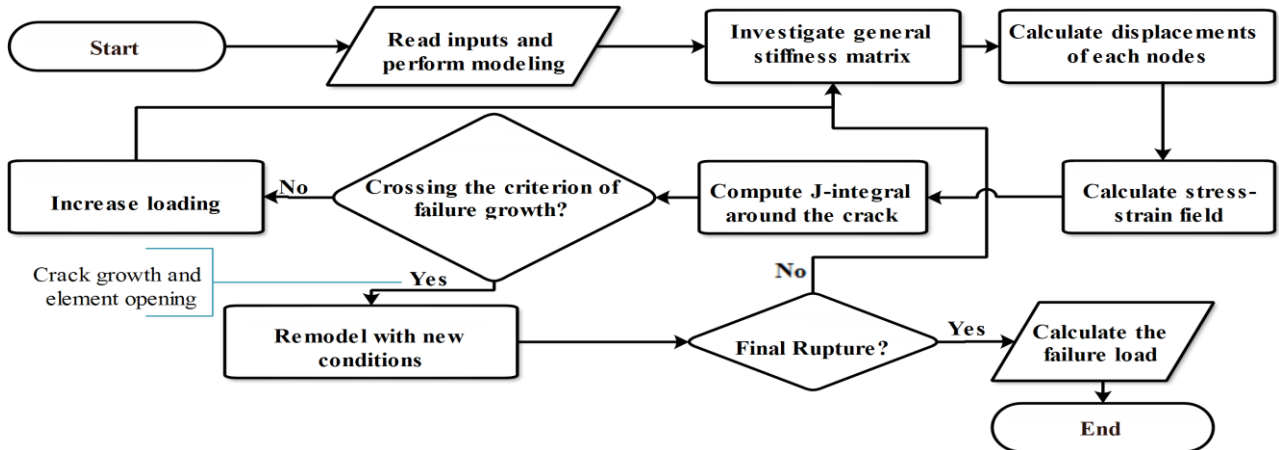


Fig. 8 Functionality flowchart of the numerical layerwise model in the presence of J-Integral for predicting interlaminar crack growth in the multi-layered composites

شکل 8 روندنمای کلی نحوه‌ی عملکرد مدل عددی لایه‌گون در حضور انتگرال جی برای پیش‌بینی رشد ترک بین لایه‌های ورق‌های چندلایه مرکب

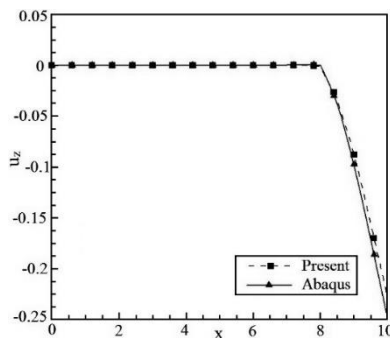


Fig. 10 Comparison of u_z in the 90° layer in example 1

شکل 10 مقایسه‌ی جابجایی در جهت z در لایه‌ی 90° در مثال 1
آباکوس و نتایج مرجع [25] می‌پردازد. مقادیر G_I نسبت به مقدار متوسط نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض چندلایه نرمال شده‌اند.

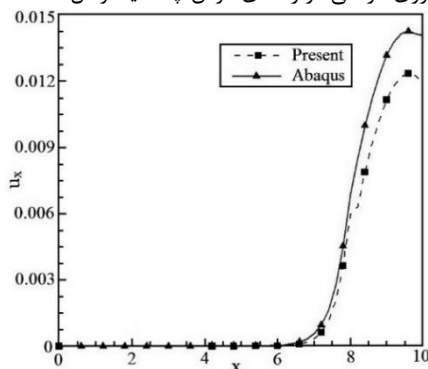


Fig. 11 Comparison of u_x in the 0° layer in example 1

شکل 11 مقایسه‌ی جابجایی در جهت x در لایه‌ی 0° در مثال 1
جدول 2 خواص مکانیکی ماده‌ی مورد نظر مثال دوم

Table 2 Mechanical properties of material in example 2

پارامتر	مقدار	واحد
E_1	150	GPa
$E_2 (=E_3)$	11	GPa
$\nu_{12} (= \nu_{13})$	0.25	
ν_{23}	0.4	
$G_1 (=G_2 = G_3)$	6	GPa

شده در جدول 2، با ترک بین لایه‌های a_0 و مشخصات ابعادی $L=130$ mm، محاسبه‌ی نرخ رهایی انرژی کرنشی مود اول حاصل از حل عددی ارائه شده و مقایسه‌ی آن با مرجع [25] و همچنین نرم‌افزار آباکوس می‌پردازیم.

بدین منظور از روش انتگرال جی برای محاسبه مود I نرخ رهایی انرژی کرنشی چندلایه‌های مرکب استفاده شده و توزیع مود I چقرمگی شکست تورق در راستای عرض نمونه به دست می‌آید. شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

- جابجایی لبه پایینی در جهت x و z صفر است ($u=w=0$).
- جابجایی لبه بالایی در جهت x محدود شده است ($u=0$).
- به منظور عدم حرکت جسم صلب $v=0$ به یکی از نقاط لبه پایینی اعمال گردیده و تکیه گاه به صورت یک سر درگیر فرض می‌شود.

جهت افزایش دقت، در نواحی نوک ترک از مش‌بندی ریزتری استفاده گردیده است. در اکثر مناطق نمونه دو لایه بالایی و پایینی هر بازوی نمونه به به‌وسیله المان آجری 20 گره‌ای (C3D20) با سه نقطه انتگرالی در هر لایه مدل شده است.

شکل 13 به مقایسه توزیع نرخ رهایی انرژی کرنشی مود اول در امتداد عرض نمونه برای تحلیل عددی انجام‌گرفته، تحلیل اجزاء محدود در نرم‌افزار

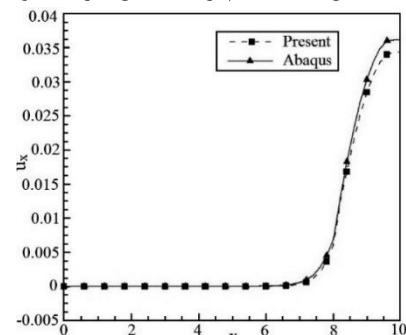


Fig. 9 Comparison of u_x in the 90° layer in example 1

شکل 9 مقایسه‌ی جابجایی در جهت x در لایه‌ی 90° در مثال 1

جدول 3 لایه چینی نمونه‌های مختلف در مثال سوم

Table 3 Lay-up of several samples in example 3

مقدار	نمونه
[0] ₂₄	1
[0 ₂ /15//15/0 ₂]	2
[0 ₂ /30//30/0 ₂]	3
[0 ₂ /45//45/0 ₂]	4
[0 ₂ /60//60/0 ₂]	5
[0 ₂ /75//75/0 ₂]	6
[0 ₂ /90//90/0 ₂]	7

جدول 4 خواص مکانیکی ماده‌ی مورد نظر مثال سوم

Table 4 Mechanical properties of material in example 3

پارامتر	مقدار	واحد
E ₁	33.5	GPa
E ₂ (=E ₃)	102.3	GPa
v ₁₂ (=v ₁₃ =v ₂₃)	0.27	
G ₁ (=G ₂ =G ₃)	4.26	GPa

برابر با G_{1c} گردد، لذا G_{1max} در تعیین نقطه شروع تورق نقش اساسی دارد. مقادیر G_{1max} برحسب جهت‌گیری الیاف مجاور ترک بر اساس تئوری لایه‌گون به کمک حل عددی انتگرال جی در شکل 14 آمده است.

با توجه به نمودار مشخص است که بیشینه مقدار نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض نمونه در جهت‌گیری الیاف با زاویه 45^o مجاور ترک اتفاق می‌افتد. لذا احتمال رشد تورق در نقطه با حداکثر نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض در چیدمان الیاف با زاویه‌ی 45^o مجاور ترک بیشتر است و این چیدمان به‌عنوان بحرانی‌ترین چیدمان موردنظر شناخته می‌شود. مقادیر G_{1c}-average در راستای عرض نمونه برای چندین حل تحلیلی که در منابع مختلف ارائه شده‌اند، با تئوری لایه‌گون با حل عددی انتگرال جی در جدول 5 مقایسه شده است.

شکل 15 به مقایسه‌ی G_{1c}-average در راستای عرض نمونه برحسب زاویه جهت‌گیری الیاف مجاور ترک و رفتار مود اول چقرمگی شکست نمونه در مدل‌های تئوری تیر یکسر گیردار [26]، کندو [27]، اوزدیل [28]، شکریه [29] و مدل لایه‌گون با حل عددی انتگرال جی می‌پردازد. علت اختلاف موجود بین نمودارها، روش‌های مختلف مورد استفاده در محاسبه‌ی نرخ رهایی انرژی کرنشی در مراجع مذکور بوده که در هر یک از این مدل‌ها فرضیات و ساده‌سازی‌هایی برای دستیابی به حل صورت گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تحلیل حاضر تطابق بیشتری با مدل تحلیلی اوزدیل و مدل تئوری تیر یکسر گیردار دارد.

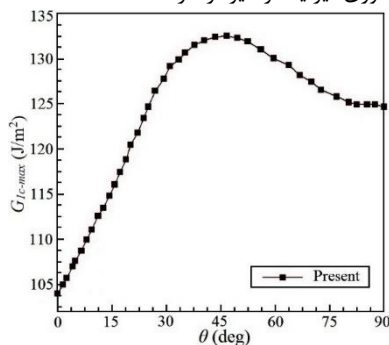


Fig. 14 The variation of G_{1max} in the direction of sample width according to fibers orientation

شکل 14 تغییرات G_{1max} در راستای عرض نمونه بر حسب جهت‌گیری الیاف مجاور ترک

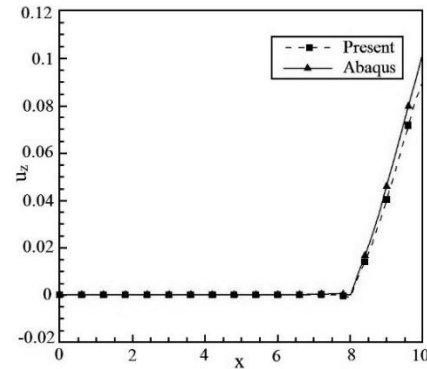


Fig. 12 Comparison of uz in the 0_o layer in example 1

شکل 12 مقایسه‌ی جابجایی در جهت z در لایه‌ی 0_o در مثال

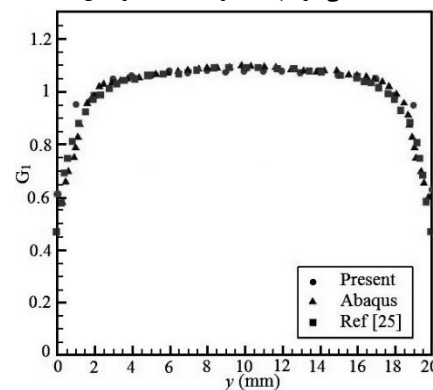


Fig. 13 Distribution of strain energy release rate (mode I) in the direction of sample width

شکل 13 توزیع نرخ رهایی انرژی کرنشی مود اول را در امتداد عرض نمونه با توجه به شکل 13 مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض چندلایه دارای تقارن هستند. مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی مود اول با تنش بین لایه‌ای σ_z ارتباط مستقیم دارند و با توجه به اینکه تنش بین لایه‌ای σ_z با نزدیک شدن به لبه‌های آزاد کاهش می‌یابد، لذا نرخ رهایی انرژی کرنشی با نزدیک شدن به لبه‌های آزاد کاهش یافته است. در ضمن با توجه به این نمودار نتایج حاصل از تئوری لایه‌گون و تحلیل اجزاء محدود آباکوس مطابقت بسیار خوبی با نتایج مرجع [25] دارد.

3-4- مثال سوم

در مثال سوم یک چندلایه‌ی مرکب (مشابه شکل 6) دارای جدایش بین لایه‌ای، با لایه‌چینی مندرج در جدول 3 و مشخصات ابعادی $L=150$ mm، $2h=8.2$ mm و $a=1.4b=35$ mm الیاف مجاور ترک بر مود I نرخ رهایی انرژی کرنشی آن می‌پردازیم. روش‌های تحلیلی زیادی برای پیش‌بینی مود I نرخ رهایی انرژی کرنشی برای تیر یکسر گیردار دو لبه ارائه شده است. از جمله‌ی این موارد می‌توان به مدل‌های تحلیلی تئوری تیر یکسر درگیر [26]، کندو [27]، اوزدیل [28] و البته شکریه [29] اشاره کرد که وی نشان داد برای نمونه‌ی مذکور بار استاتیکی لازم برای به دست آوردن نرخ رهایی انرژی کرنشی بحرانی (G_c) در حدود 32.2 N می‌باشد.

خصوصیات مکانیکی این چندلایه مرکب در جدول 4 آمده است. همچنین شرایط مرزی به این صورت تعریف می‌شود که:

- جابجایی لبه‌ی پایینی و بالایی در جهت x محدود شده است ($u=0$).
- $v=0$ به یکی از نقاط لبه‌ی پایینی اعمال می‌گردد (عدم حرکت صلب).
- از آنجا که شروع تورق در بارگذاری مود اول هنگامی اتفاق می‌افتد که G₁

جدول 5 مقایسه‌ی نرخ رهایی انرژی کرنشی میانگین (J/m^2) مدل‌های تحلیلی با مدل عددی ارائه شده

Table 5 Comparison of average strain energy release rate (J/m^2) between analytical models and developed numerical method

مدل عددی ارائه شده	Shokrieh [29]	Ozdil [28]	Kondo [27]	CBT [26]	لایه چینی
83	96.4	86.3	98	84.5	[0] ₂₄
84.6	97.3	87.1	98.8	85.3	[0 ₂ /15//15/0 ₂]
88.6	99.3	89	100.9	87.1	[0 ₂ /30//30/0 ₂]
92.2	101.2	90.8	102.8	88.9	[0 ₂ /45//45/0 ₂]
96.1	101.8	91.6	103.5	89.7	[0 ₂ /60//60/0 ₂]
95.3	101.7	91.5	103.3	89.6	[0 ₂ /75//75/0 ₂]
95	101.5	91.3	103.1	89.5	[0 ₂ /90//90/0 ₂]

رفتاری مستقل نسبت مدل‌های تحلیلی، نتایجی در مجاورت این مدل‌ها داشته و با مدل‌های تحلیلی اوزدیل و مدل تئوری تیر یکسر گیردار قرابت بیشتری دارد.

6- مراجع

- [1] Puppo, AH. and Evensen, HA., "Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress" Journal of Composite Materials, Vol. 4, pp. 204-220, 1970.
- [2] Becker, W., "Closed-Form Solution for the Free-Edge Effect in Cross-Ply Laminates" Composite Structures, Vol. 26, pp. 39-45, 1993.
- [3] Wang, ASD. and Crossman, FW., "Calculation of Edge Stresses in Multi-Layer Laminates by Sub-Structuring" Journal of Composite Materials, Vol. 12, pp. 76-83, 1978.
- [4] Lessard, LB., Schmidt, AS. and Shokrieh, MM., "Three-Dimensional Stress Analysis of Free-Edge Effects in a Simple Composite Cross-Ply Laminate" International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, pp. 2243-2259, 1996.
- [5] Chung, S., "Effects of Interlaminar Stress Gradients on Free Edge Delamination in Composite Laminates," Ph.D Thesis, Drexel University, USA, 2003.
- [6] Diaz, AD., Caron, JF. and Carreira, RP., "Software Application for Evaluating Interfacial Stresses in Inelastic Symmetrical Laminates With Free Edges" Composite Structures, Vol. 58, pp. 195-208, 2002.
- [7] Lorriot, T., Marion, G., Harry, R. and Wagnier, H., "Onset of Free-Edge Delamination in Composite Laminates Under Tensile Loading" Composites Part B: Engineering, Vol. 34, pp. 459-471, 2003.
- [8] Rice, JR., "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Crack" Journal of Applied Mechanics, Vol 35, pp. 379-386, 1968.
- [9] Hutchinson, J., "Singular Behaviour at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material" Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 13-31, 1968.
- [10] Rice, JR. and Rosengren, GF., "Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material" Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 1-12, 1968.
- [11] Shih, C. and Hutchinson, J., "Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems" Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 98, pp. 289-295, 1976.
- [12] Amestoy, M., Bui, H. and Labbens, R., "On the Definition of Local Path Independent Integrals in Three-Dimensional Crack Problems" Mechanics Research Communications, Vol. 8, pp. 231-236, 1981.
- [13] Hakimelahi, B. and Soltani, N., "3D J- Integral Evaluation Using the Computation of Line and Surface Integrals" Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, Vol. 33, pp. 661-672, 2010.
- [14] Mollón, V., Bonhomme, J., Viña, J. and Argüelles, A., "Theoretical and Experimental Analysis of Carbon Epoxy Asymmetric DCB Specimens to Characterize Mixed Mode Fracture Toughness" Polymer Testing, Vol. 29, pp. 766-770, 2010.

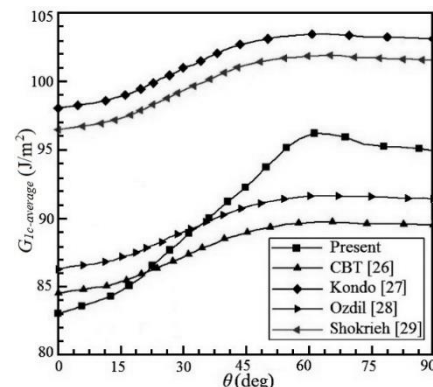


Fig. 15 Comparison of G_{1c} -average in the direction of the sample width and according to the angle of fibers orientation adjacent to crack, between analytical models and the developed numerical method

شکل 15 مقایسه G_{1c} -average در راستای عرض نمونه و برحسب زاویه جهت‌گیری الیاف مجاور ترک در مدل‌های تحلیلی و مدل عددی ارائه شده

5- نتیجه‌گیری

آنچه در این پژوهش صورت پذیرفته است، شامل توسعه‌ی یک روش عددی بر اساس تئوری لایه‌گون ردی و روش عددی انتگرال جی به منظور پیش‌بینی رشد ترک‌های صفحه‌ای بین لایه‌ای در چند لایه‌های مرکب و همچنین اعتبارسنجی روش مذکور با مقایسه نتایج آن با مدل نرم‌افزاری و کارهای تحلیلی موجود می‌باشد. به منظور استخراج تنش‌های بین لایه‌ای از تئوری لایه‌گون ردی استفاده گردید.

علت استفاده از المان لایه‌گون نسبت به المان‌های سه‌بعدی رایج در مدل ارائه شده، مزیت‌هایی نظیر کاهش حجم داده‌های ورودی و مستقل بودن شبکه دو بعدی داخل صفحه و شبکه‌بندی عرضی یک بعدی از یکدیگر می‌باشد.

همان‌طور که مشاهده شد مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض لایه‌ها تقارن داشته و بیشینه‌ی این مقدار در وسط عرض چندلایه اتفاق می‌افتد که منجر به شروع جدایش در این ناحیه می‌گردد. بعلاوه به دلیل کاهش تنش بین لایه‌ای σ_z ، مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنش در لبه‌های آزاد کاهش می‌یابد. همچنین اثر زوایای مجاور ترک بین لایه‌ای بر آغاز رشد تورق مود اول مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده گردید بیشینه‌ی مقدار نرخ رهایی انرژی کرنشی در راستای عرض نمونه در جهت‌گیری الیاف با زاویه 45 در مجاور ترک اتفاق می‌افتد که این چیدمان به عنوان بحرانی‌ترین چیدمان در احتمال رشد تورق شناسایی گردید.

در انتها نرخ انرژی رهایی انرژی کرنشی میانگین برحسب زاویه‌ی جهت‌گیری الیاف مجاور ترک برای یک چندلایه‌ی مرکب استخراج گردید و می‌توان این مطلب را استنباط کرد که مدل عددی ارائه شده ضمن بروز

- [15] Gong, X., Hurez, A. and Verchery, G., "On the Determination of Delamination Toughness by Using Multidirectional DCB Specimens" *Polymer Testing*, Vol. 29, pp. 658-666, 2010.
- [16] Shokrieh, MM. and Zeinedini, A., "Analytical prediction of mode I strain energy release rate at crack growth initiation of polymeric nanocomposites" *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-10, 2016. (in Persian فارسی)
- [17] Schön, J., Nyman, T., Blom, A. and Ansell, H. "A Numerical and Experimental Investigation of Delamination Behaviour in the DCB Specimen" *Composites Science and Technology*, Vol. 60, pp. 173-184, 2000.
- [18] Naghipour, P., Bartsch, M., Chernova, L., Hausmann, J. and Voggenreiter, H., "Effect of Fiber Angle Orientation and Stacking Sequence on Mixed Mode Fracture Toughness of Carbon Fiber Reinforced Plastics: Numerical and Experimental Investigations" *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 527, pp. 509-517, 2010.
- [19] Avidson, BD. and Gharibian SJ., "Evaluation of Energy Release Rate-Based Approaches for Predicting Delamination Growth in Laminated Composites" *International Journal of Fracture*, Vol. 105, pp. 343-365, 2000.
- [20] Pereira, A., Morais, AD., Moura, MD. and Magalhães, A., "Mode I Interlaminar Fracture of Woven Glass/Epoxy Multidirectional Laminates" *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 36, pp. 1119-1127, 2005.
- [21] Rehan, MM., Rousseau, J., Gong, X., Guillaumat, L. and Ali, J., "Effects of Fiber Orientation of Adjacent Plies on the Mode I Crack Propagation in a Carbon-Epoxy Laminates" *Procedia Engineering*, Vol. 10, pp. 3179-3184, 2011.
- [22] Reddy, JN., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis" Second ed., CRC Press, Florida, pp. 740-742, 2004.
- [23] Krueger, R., "Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications" *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 57, pp. 109-143, 2004.
- [24] Zou, Z., Reid, S., Li, S. and Soden, P., "Application of a Delamination Model to Laminated Composite Structures" *Composite Structures*, Vol. 56, pp. 375-389, 2002.
- [25] Morais, AD., Moura, MD., Gonçalves, J. and Camanho, P., "Analysis of Crack Propagation in Double Cantilever Beam Tests of Multidirectional Laminates" *Mechanics of Materials*, Vol. 35, pp. 641-652, 2003.
- [26] Kanninen, M., "A Dynamic Analysis of Unstable Crack Propagation and Arrest in The DCB Test Specimen" *International Journal of Fracture*, Vol. 10, pp. 415-430, 1974.
- [27] Kondo, K., "Analysis of Double Cantilever Beam Specimen" *Advanced Composite Materials*, Vol. 4, pp. 355-366, 1995.
- [28] Ozdil, F. and Carlsson, L., "Beam Analysis of Angle-Ply Laminate DCB Specimens" *Composites Science and Technology*, Vol. 59, pp. 305-315, 1999.
- [29] Shokrieh, MM., Rarani, MH. and Ayatollahi, M., "Calculation of GI for a Multidirectional Composite Double Cantilever Beam on Two-Parametric Elastic Foundation" *Aerospace Science and Technology*, Vol. 15, pp. 534-543, 2011.