



بررسی کمانش ورق‌های مرکب لایه‌ای متعامد تحت شرایط حرارتی و رطوبتی با اعمال آسیب جداشدگی لایه‌ها به روش نوار محدود فرشاد گودرزیان¹، حسین اموشاهی^{2*}

1- کارشناسی ارشد، مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، اصفهان
2- استادیار، مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان، اصفهان
* اصفهان، صندوق پستی 73441-81746، h.amoushahi@eng.ui.ac.ir

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله تأثیر تغییرات شرایط محیطی از جمله درجه حرارت و رطوبت محیط بر بار کمانشی ورق‌های لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور با در نظر گرفتن اثرات تغییر مشخصات مصالح تشکیل دهنده ورق در اثر دما و رطوبت بر ظرفیت کمانش ورق در شرایط تکیه گاهی مختلف و بارگذاری دو محوره ارزیابی شده است. همچنین تأثیر آسیب جدا شدگی لایه‌ها بر ظرفیت کمانش ورق در حالت‌های مختلف بررسی شده است. روش مورد استفاده جهت محاسبه بار بحرانی ورق‌ها روش نوار محدود بوده که تئوری برشی مرتبه اول بر آن اعمال شده است. در روش نوار محدود از توابع شکل مثلثاتی در جهت طولی نوار و توابع شکل هرمیتی در جهت عرضی برای جابجایی‌های برون صفحه و توابع شکل خطی برای جابجایی‌های درون صفحه استفاده شده است. برای مدل سازی جدا شدگی لایه‌ها، محل و ابعاد جداشدگی با جدا سازی المان‌ها و بازایی مجدد ماتریس‌های سختی استاندارد، هندسی، نیرویی و جرمی تعیین شده و اثر آن‌ها بر میزان بار بحرانی ورق لایه‌ای در حالت‌های گوناگون ارزیابی شده است. نتایج حاصله بیانگر میزان تغییرات بار بحرانی در دما و رطوبت‌های مختلف و همچنین میزان تأثیر جدا شدگی لایه‌ها می‌باشد</p>	<p>دریافت: 96/8/3 پذیرش: 96/10/13</p> <p>کلیدواژگان: کمانش ورق لایه‌ای روش نوار محدود تغییرات دما و رطوبت جداشدگی</p>

Buckling analysis of composite cross-ply laminated plates under hygrothermal loads with delaminations using the finite strip method

Farshad Goodarzian, Hossein Amoushahi*
Department of civil and transportation engineering, University of Isfahan. Isfahan, Iran.
* P.O.B. 81746-73441, Isfahan, Iran, h.amoushahi@eng.ui.ac.ir

Keywords	Abstract
<p>Buckling Composite plates Finite strip method Hygrothermal loads Delamination</p>	<p>In this paper the effect of hygrothermal conditions such as temperature and moisture on buckling of composite laminated plates is investigated. For this purpose, the effect of changing in material characteristics with changing in temperature and moisture on buckling capacity of plates with different end conditions and biaxial loading is evaluated. In addition, the effect of delamination of layers on buckling load of plate is studied in different situations. The finite strip method is used in present paper to calculate the critical load of plate considering first shear order deformation theory. In finite strip formulation for evaluating the displacement field of each strip, the trigonometric shape functions is used in longitudinal direction and the Hermitian and linear shape function is used for out of plate and in plane transverse direction, respectively. The place and dimension of delaminating layers is modeled by separating the adjacent elements and reconstructing the standard, geometric, force and mass matrices, so, the critical load of laminated plates is calculated in different situation. The results show that the amount of changing in critical load of laminated plate for different temperatures, moistures and delamination of layers.</p>

می‌توانند بصورت زوایای 0 و 90 درجه روی یکدیگر قرار گیرند که ورق‌های مرکب حاصله در هر حالت رفتار متفاوتی را از خود بروز می‌دهد. کمانش ورق‌های مرکب یکی از موضوعات مهم در طراحی سازه‌های متشکل از مواد مرکب می‌باشد. عموشاهی و ازهری در سال 2009 میلادی، روش نوار محدود را برای پیش بینی کمانش‌های موضعی، تغییر شکلی و جانبی ورق‌های کامپوزیت FRP، معرفی نمودند. هر ورق تحت تأثیر ترکیبات بار محوری، خمشی و برشی قرار می‌گرفت. توابع شکل در راستای طولی برای تحلیل کمانش در تمامی مودها به صورت سینوسی در نظر گرفته شد و توابع چند جمله‌ای برای جهات عرضی مورد استفاده قرار گرفت. تنش و لنگر بحرانی برای کلیه مقاطع I- شکل، قوطی و ناودانی تحت بارهای محوری و

1-مقدمه
ماده مرکب مخلوط فیزیکی از دو یا چند ماده مختلف است که این مواد خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده و مرز مشخصی را با یکدیگر تشکیل می‌دهند. این مخلوط در مجموع و با توجه به برخی معیارها، خواص بهتری از هریک از اجزای تشکیل دهنده خود را دارا می‌باشد. ورق مرکب مجموعه‌ای از لایه‌های روی هم انباشته شده بوده که در جهت بدست آمدن سختی و ضخامت مورد نظر طراحی می‌گردند. به عنوان مثال لایه‌های تک جهته می‌توانند طوری قرار گیرند که تماماً در یک جهت باشند. همچنین

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:
Goodarzian, F. and Amoushahi, H., "Buckling analysis of composite cross-ply laminated plates under hygrothermal loads with delaminations using the finite strip method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 5, No. 3, pp. 437-450, 2018.

سه مود اول فرکانس ورق مرکب در حالت‌های مختلف مورد بحث قرار گرفت [14]. النفاى روش اجزاء محدود سه بعدی را برای تحلیل دینامیکی ورق‌های مرکب تقویت شده با فیبر مورد استفاده قرار داد. ورق‌های تقویت شده با فیبر تحت اثر آسیب جدایشی ورق‌ها نیز قرار داشتند. او طی این مقاله فرکانس طبیعی و تغییر مکان‌های ورق مرکب را محاسبه کرده و موارد مختلفی از بابت نسبت ابعادی و خصوصیات آسیبی متفاوت را مورد بررسی قرار داد. مدل او دارای نتایجی مطابق با نتایج آزمایشگاهی بود و این موضوع نشان دهنده دقت بالای مدل مورد بررسی وی بود. مدل او دارای المان‌های مستطیلی هشت گره‌ای بود و ورق مورد بررسی او از نوع ورق نازک بود [15]. پارهی و همکاران طی مطالعه‌ای ورق چندلایه را با نظر گرفتن آسیب جدایش لایه‌ها بصورت تصادفی مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. در این مدل تغییر مکان هر زیر لایه‌ای بر اساس تغییر مکان میان صفحه‌ای لیمینیت اصلی برای محاسبه سختی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. پارهی و همکاران در مطالعه محل قرارگیری جدایش زیر لایه‌ها بدین نتیجه رسیدند که کمترین فرکانس ورق مرکب در حالتی رخ می‌دهد که جدایش در میان صفحه قرار داشته باشد و بیشترین میزان فرکانس ارتعاشی زمانی بدست می‌آید که آسیب جدایشی در سطح ورق مرکب قرار گرفته باشد. نسبت بعد به ضخامت ورق مرکب نیز در حالات مختلف جدایشی مورد بحث قرار گرفته شد. در بین مدل‌های بررسی شده این محققان، ورق با نسبت بعد به ضخامت 10 دارای بیشترین فرکانس و ورق با نسبت بعد به ضخامت 100 به کمترین میزان فرکانس رسید [16].

استفاده از روش نوار محدود برای تحلیل استاتیکی، پایداری و دینامیکی ورق‌ها، علی‌الخصوص ورق‌های مستطیلی، به عنوان یک روش سریع و دقیق مد نظر محققان قرار گرفته است. گودرزیان و عموشاهی فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای با و بدون اثر جدایشی لایه‌ها را بررسی کردند [17]. همچنین تغییر شکل و بار کمانشی وابسته به زمان صفحات مستطیلی و یسکو الاستیک توسط عموشاهی به روش نوار محدود ارزیابی شده و نتایج برای مواد پلیمری به صورت نمودارهایی ارائه شدند [18,19]. ورزندیان و ضیایی، پاسخ تحلیلی ارتعاش آزاد غیرخطی نانو ورق مستطیلی با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داده و خورشیدی و همکاران تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی را مورد مطالعه قرار دادند و اثر عواملی از قبیل نسبت ابعاد و دما را روی ارتعاش ورق تجزیه و تحلیل نمودند [20,21].

در بخش بعدی به استخراج روابط برای حل مسئله، تئوری حاکم بر مسئله و نهایتاً روابط نوار محدود بدست آمده پرداخته می‌شود و سپس صحت سنجی به همراه نتایج بدست آمده ارائه می‌گردد.

2- استخراج روابط

در این بخش ابتدا با بررسی تئوری حاکم بر مسئله به بررسی چگونگی تغییر مکان‌ها و کرنش‌های مدل پرداخته می‌شود و سپس کرنش‌ها بر اساس تغییر مکان‌ها بیان می‌گردند و در آخر روابط نیرو- تغییر مکان مورد نیاز بررسی می‌گردد.

2-1- تئوری حاکم بر مسئله

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول خطوط نرمال عرضی پس از تغییر شکل عمود بر صفحات میانی قرار نمی‌گیرند. این موضوع منجر به منظور نمودن تغییرات کرنش‌های برشی در ضخامت ورق می‌گردد. در این تئوری

خمشی، با استفاده از حل مقادیر ویژه، محاسبه گردید. آن‌ها در نهایت تنش بحرانی را برای نسبت‌های مختلف E_x/E_y با استفاده از منحنی‌های طراحی، بدست آوردند [1]. لی ضریب کمانش را به عنوان تابعی از نسبت بال به جان، با حل دقیق و روش تقریبی انرژی معرفی نمود [2]. او حل خود را برای مقاطع ارتوتروپیک با تکیه گاه ساده و گیردار توسعه داد [3]. هر دو نوع کمانش محلی و کلی برای ستون‌های اف آر پی ضخیم، با شرایط تکیه گاهی مختلف، توسط لی و هوسن مورد مطالعه قرار گرفت [4].

بنکس و رودز رفتار کمانشی و پس کمانشی ورق مرکب را برای مقاطع I- شکل و قوطی، با این فرض که هر مقطع، از ورق‌های متصل شده به وسیله تکیه گاه‌های مقید در چرخش ساخته شده، مورد مطالعه قرار دادند [5,6]. لپاتین و مرزو، ورق مرکب را در حالی مورد تحلیل قرار دادند که در دو جهت موازی دارای تکیه گاه مفصلی، در یک جهت تکیه گاه گیردار و در جهت دیگر آزاد بود. آن‌ها کمانش ورق مستطیلی را در این شرایط تکیه گاهی مورد بررسی قرار داده و معادلات تغییرات کمانش را با استفاده از اصل لاگرانژ و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول نوشتند. مدل این تحقیق شامل تیری بصورت طره‌ای از جنس ورق لایه‌ای، که تحت بار گسترده قرار داشت، مورد بررسی قرار گرفت. تیر آن‌ها متشکل از هسته مرکزی و جداره‌های خارجی با مشخصات مکانیکی متفاوت از یکدیگر بود. آن‌ها تیر مورد مطالعه را در حالات مختلف ضخامت هسته مرکزی مورد تحلیل قرار دادند و بار بحرانی کمانش را برای تیر در هر حالت بدست آورده و با نتایج تئوری مقایسه نمودند. طبق نتایج بدست آمده آن‌ها بار بحرانی کمانش تیر با افزایش ضخامت هسته مرکزی افزایش پیدا می‌کند. آن‌ها ورق مورد مطالعه خود را در حالت SSCF بهینه سازی کرده و برای هر بار بحرانی کمانش، ضخامت هسته مرکزی، ضخامت جداره‌های خارجی و وزن حداقل مواد مورد استفاده در این شرایط را محاسبه نمودند و نسبت بهره‌وری به هر حالت اختصاص دادند [7].

جدایشی لایه‌های ورق مرکب یکی از آسیب‌هایی بوده که ممکن است در حین ساخت و یا هنگام بهره برداری از ورق مرکب طی شرایط محیطی خاص و یا بارگذاری ناگهانی ایجاد شود. در سال‌های اخیر بسیاری از مطالعات ورق معطوف به آسیب جدایشی بین لایه‌های ورق گردیده، از اولین مطالعات در این خصوص، می‌توان به مطالعه دلا و شو در خصوص ارتعاش ورق اشاره نمود [8]. تنک، مطالعه این آسیب را در رنج گسترده‌ای از فرکانس‌ها، بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی برای ورق مرکب، به انجام رساند [9]. جو با استفاده از روش اجزاء محدود که بر اساس تئوری میندیلین رابطه بندی گردیده بود، به مطالعه تأثیر این آسیب بر رفتار دینامیکی ورق، پرداخت [10]. چمپنلی و همکاران، سه نوع مختلف کامپوزیت با زمینه گرافیت را با جایگذاری جدایش ورق‌ها در گوشه‌ها و لبه‌های مدل خود بررسی کردند [11]. هو و جرومینیدیس در سال 1999، این مطالعه را بر روی ورق‌های ضخیم انجام داده و تست‌های آزمایشگاهی مختلف در خصوص ارتعاش آزاد ورق به انجام رساندند [12]. شیاو و ژنگ تأثیر عامل جدایشی لایه‌های ورق را بر ارتعاش آزاد ورق مرکب به شکل مستطیل در شرایط تکیه گاهی ساده مورد تحقیق قرار دادند. مدل آن‌ها توسط روش نوار محدود با در نظر گرفتن سختی‌های داخل صفحه‌ای و خمشی در حالت ارتعاش مورد تحلیل قرار گرفت [13]. کومار و همکاران ورق‌های مرکب تحت اثر آسیب جدایشی لایه‌ها را مورد بررسی قرار دادند. روش تحلیلی آن‌ها روش اجزاء محدود با المان چهارگوش 9 گره‌ای بود و ورق دچار جدایش در موده‌های مختلف ارتعاشی توسط آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. در مطالعه این محققان انواع آسیب‌های جدایشی با مساحت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت و

در مدل ارائه شده مطابق شکل 2، رابطه‌ای بین نیروها، ماتریس صلبیت و کرنش‌ها نوشته می‌شود. رابطه کلی نیرو-کرنش برای این ورق مرکب که تحت اثر شرایط افزایش حرارت و رطوبت محیط قرار دارد، بصورت رابطه (3) می‌باشد.

$$\{F\} = [D]\{\varepsilon\} - \{F^N\} \quad (3)$$

در رابطه (3)، D ماتریس صلبیت و ε کرنش هر نقطه از ورق می‌باشد. بردار نیروهای داخلی F و بردار نیروهای حرارتی و رطوبتی تحت عنوان F^N طی روابط (4) و (5) در نظر گرفته می‌شود.

$$\{F\} = \{N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T \quad (4)$$

$$\{F^N\} = \{N_x^N, N_y^N, N_{xy}^N, M_x^N, M_y^N, M_{xy}^N, 0, 0\}^T \quad (5)$$

در روابط (4) و (5)، مقادیر ماتریس F شامل N_x, N_y, N_{xy} که نیروهای داخل صفحه‌ای در واحد عرض M_x, M_y, M_{xy} که لنگرهای در واحد عرض هستند، می‌باشد. پارامترهای Q_x و Q_y نیز نیروهای برشی ورق مرکب در واحد عرض می‌باشند. همچنین پارامترهایی که با بالانویس (N) مشخص گردیده‌اند، مقادیر نیروهای داخلی حاصل از تغییر درجه حرارت و درصد رطوبت محیط می‌باشند که هر کدام در ادامه تعریف می‌گردند.

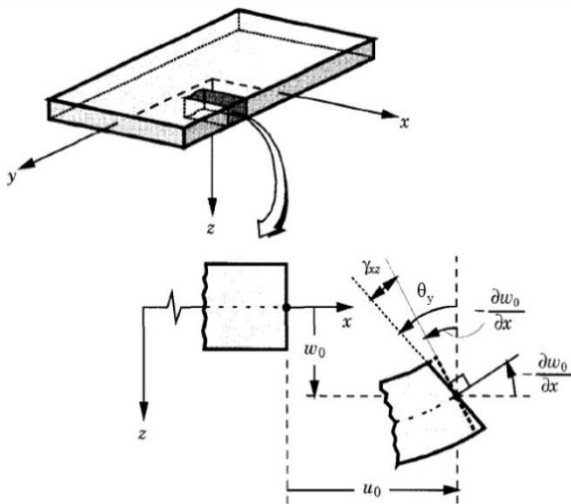


Fig. 1 Deformation of plate edge according to FSDT [17]

شکل 1 لبه ورق بعد از تغییرشکل طبق تئوری تغییرشکل مرتبه اول [17]

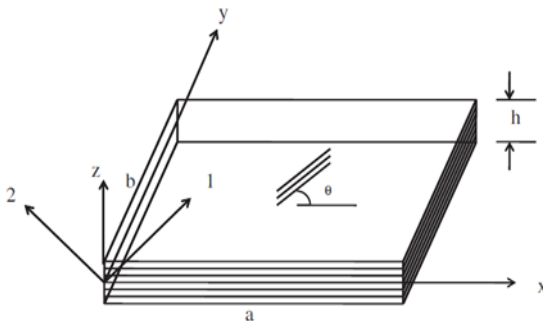


Fig. 2 Coordinate system of laminated plate [22]

شکل 2 سیستم مختصات ورق مرکب [22]

کرنش‌های در نظر گرفته شده شامل کرنش‌های اصلی، انحناء و چرخش‌های هر نقطه بوده که به کمک رابطه (6) بیان می‌شوند.

مؤلفه w مستقل از ضخامت بوده و براین اساس پارامترهای جابجایی به مطابق رابطه (1) می‌باشند.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که u_0, v_0 و w_0 به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی نقطه‌ای روی میان صفحه ورق در امتداد محورهای x, y و z و θ_x و θ_y به ترتیب چرخش صفحات عمود بر میان صفحه، حول محورهای x و y هستند. شکل 1 تغییرات وضعیت لبه ورق را قبل و بعد از تغییرشکل بر اساس تئوری تغییرشکل مرتبه اول به نمایش می‌گذارد. بدین ترتیب رابطه کرنش‌ها با جابجایی‌ها بصورت رابطه (2) تعریف می‌گردند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

با توجه به رابطه (2)، کرنش‌های در راستای محورهای x و y در امتداد ضخامت ورق لایه‌ای بصورت خطی تغییر می‌کنند، در حالی که کرنش‌های برشی γ_{yz} و γ_{xz} در امتداد ضخامت ورق توزیع ثابتی دارند و در نتیجه تنش‌های برشی نظیر آن‌ها نیز ثابت می‌باشند. بر طبق تئوری تیرهای همگن، توزیع تنش‌های برشی σ_{zx} و σ_{yz} در امتداد ضخامت تیر به صورت سهمی می‌باشد. بنابراین در تیرها و ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای، این تنش‌های برشی باید حداقل توابع درجه دو از مختصه z باشند. این مغایرت بین حالت تنش واقعی و حالت تنش ثابت در نظر گرفته شده در تئوری مرتبه اول، اغلب توسط یک ضریب اصلاح برش برطرف می‌شود. این ضریب به گونه‌ای محاسبه می‌شود که انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی بدست آمده در این تئوری با انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی پیش بینی شده از تئوری الاستیسیته سه بعدی برابر شود. ضریب اصلاح برش، برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای به خواص و مشخصات هندسی ورق و نیز شرایط مرزی بستگی دارد.

2-2- روابط نیرو-تغییر مکان

شکل 2، ورق مرکب در نظر گرفته شده را در مختصات کلی قرارگیری مدل و همچنین مختصات محلی در نظر گرفته شده هر لایه به نمایش می‌گذارد. ابعاد ورق و ضخامت ورق در شکل 2 قابل مشاهده هستند.

محیط بوده T_0 و T به ترتیب درجه حرارت اولیه و ثانویه محیط بر حسب درجه کلوین هستند.

3-2- روابط کرنش خطی و غیر خطی بر حسب تغییر مکان

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، کرنش‌ها به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌گردند. کرنش‌های خطی بصورت کرنش‌های طولی، عرضی، چرخش‌ها و انحناء‌های مدل، بصورت رابطه (14) ارائه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x}^0 \\ v_{,y}^0 \\ u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \\ \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ \theta_y + w_{,x} \\ -\theta_x + w_{,y} \end{bmatrix} \quad (14)$$

مقادیر u_x^0 و v_y^0 مشتقات تغییر مکان‌ها نسبت به اندیس‌های x و y بوده و u ، v و w تغییر مکان‌ها در راستاهای x ، y و z می‌باشد. همچنین θ_x و θ_y چرخش‌های ورق در جهات عمود بر محورهای y و x هستند. با این فرض که پارامتر w در جهت z تغییر نمی‌کند، روابط کرنش غیر خطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، بصورت رابطه (15) تعریف می‌گردند.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xnl} \\ \varepsilon_{ynl} \\ \gamma_{xynl} \\ \gamma_{xznl} \\ \gamma_{yznl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \\ (u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z}) \\ (u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

4-2- روش نوار محدود

برای هر خط از نوار تحلیلی روش نوار محدود در هر مود، پنج درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود که در شکل 3 نشان داده شده است. با در نظر گرفتن توابع هارمونیک در جهت طولی نوار و توابع شکل خطی در جهت عرض نوار، روابط (16)، برای تغییر مکان هر نوار بدست می‌آید.

$$\begin{cases} u_s = \sum_{n=1}^r [N_1 \quad N_2] N_3 \begin{Bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \end{Bmatrix} \\ v_s = \sum_{n=1}^r [N_1 \quad N_2] N_4 \begin{Bmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \end{Bmatrix} \\ w_s = \sum_{n=1}^r [N_1 \quad N_2] N_3 \begin{Bmatrix} w_{1n} \\ w_{2n} \end{Bmatrix} \\ \theta_{x_s} = \sum_{n=1}^r [N_1 \quad N_2] N_4 \begin{Bmatrix} \theta_{x1n} \\ \theta_{x2n} \end{Bmatrix} \\ \theta_{y_s} = \sum_{n=1}^r [N_1 \quad N_2] N_3 \begin{Bmatrix} \theta_{y1n} \\ \theta_{y2n} \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

بر اساس رابطه بین ε_s و δ_s ، ماتریس B_s برای هر نوار در مود n ام از مدل تحلیلی مطابق رابطه (17) بدست می‌آید.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T \quad (6)$$

مقادیر ε_x^0 ، ε_y^0 و γ_{xy}^0 کرنش‌های داخل صفحه‌ای میان ضخامت κ_x ، κ_y و κ_{xy} انحناء‌های ورق و همچنین γ_{xz} و γ_{yz} کرنش‌های برشی ورق هستند. در ادامه رابطه (7)، فرم کلی ماتریس صلبیت D را به نمایش می‌گذارد.

$$[D] = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & d & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (7)$$

درایه‌های ماتریس D شامل ماتریس‌های صلبیت محوری (A) ، صلبیت محوری-خمشی (B) ، صلبیت خمشی (d) و صلبیت برشی (S) بوده که هر کدام طبق رابطه‌های (8) و (9) تعریف می‌گردند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, d_{ij}) = \sum_{k=1}^m \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad (8)$$

$$i, j = 1, 2, 6 \quad (S_{ij}) = \sum_{k=1}^m \alpha (\overline{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (9)$$

در روابط (8) و (9)، m تعداد لایه‌ها و ضریب تصحیح برشی α به علت توزیع کرنش برشی در ضخامت اعمال می‌گردد. ماتریس \overline{Q}_{ij} مربوط به صلبیت در جهت مختصات کلی مدل بوده و ماتریس Q_{ij} مربوط به صلبیت مدل در جهت مختصات محلی می‌باشد که بر اساس مشخصات مکانیکی مدل از جمله مدول الاستیسیته و مدول پواسون و با در نظر گرفتن زاویه قرارگیری لایه‌ها محاسبه می‌شوند [17].

از سوی دیگر درایه‌های ماتریس F^N شامل نیروها و لنگرهای غیر مکانیکی حاصل از شرایط رطوبتی و حرارتی بر اساس روابط (10) و (11) محاسبه می‌گردند.

$$\{N_x^N, N_y^N, N_{xy}^N\} = \sum_{k=1}^m \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (e)_k dz \quad (10)$$

$$\{M_x^N, M_y^N, M_{xy}^N\} = \sum_{k=1}^m \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (e)_k z dz \quad (11)$$

در روابط (10) و (11)، بردار e به عنوان کرنش غیر مکانیکی ورق مرکب بوده و برای هر لایه با زاویه $\bar{\theta}_k$ به فرم رابطه (12) تعریف می‌گردد.

$$\{e\}_k = [T] \{\beta_1, \beta_2\}_k^T (C - C_0) + [T] \{\alpha_1, \alpha_2\}_k^T (T - T_0) \quad (12)$$

$$\{e\}_k = \{e_x, e_y, e_{xy}\}_k^T$$

در رابطه (12)، ماتریس T بر اساس زاویه هر لایه بصورت جداگانه محاسبه گردیده و در محاسبه بردار e ، مطابق با رابطه فوق، برای هر لایه در نظر گرفته می‌شود. ماتریس T به فرم رابطه (13) تعریف می‌گردد.

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \\ -2mn & 2mn \end{bmatrix}, m = \cos \bar{\theta}_k, n = \sin \bar{\theta}_k \quad (13)$$

در رابطه (13) پارامترهای β_1 و β_2 ضرایب رطوبتی در جهت‌های طولی و جانبی و پارامترهای α_1 و α_2 ضرایب حرارتی در جهت‌های طولی و جانبی هستند که جهت محاسبه ماتریس کرنش غیر مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. C_0 و C در رابطه (13) به ترتیب رطوبت اولیه و رطوبت ثانویه

با در نظر گرفتن $N_4 = \sin \frac{n\pi y}{a}$ و $N_3 = \frac{x}{b}$ ، $N_2 = 1 - \frac{x}{b}$ ، $N_1 = 1 - \frac{x}{b}$ ، $\cos \frac{n\pi y}{a}$ ماتریس \mathbf{B}_s^n و متعاقب آن ماتریس سختی استاندارد به صورت نشان داده شده در روابط (18) تا (20) قابل نگارش هستند [17].

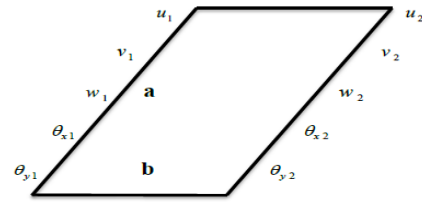


Fig. 3 Degrees of freedom of each strip in each mode

شکل 3 درجه های آزادی هر نوار در روش نوار محدود برای هر مود

$$\mathbf{K} = \iint \mathbf{B}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s dx dy \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_s = [\mathbf{B}_s^1 \quad \mathbf{B}_s^2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_s^r] \quad (19)$$

در ادامه رابطه سختی هندسی نوشته محاسبه می‌شود. که در آن ماتریس‌های \mathbf{G}_s و \mathbf{S} برحسب نیروهای داخلی و میدان جابجایی به صورت نشان داده شده در روابط (23) و (24) قابل محاسبه هستند [17].

$$\mathbf{K}_g^n = \iint \mathbf{G}_s \mathbf{S} \mathbf{G}_s dx dy \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g^1 & & & \\ & \mathbf{K}_g^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{K}_g^r \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s^n \boldsymbol{\delta}_s \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \hat{\varepsilon}_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \mathbf{B}_s^{n \times 8 \times 5} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{y1} \\ \theta_{x1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}_{10 \times 1} \quad (17)$$

$$\mathbf{B}_s^n = \begin{bmatrix} N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1N_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2N_4' & 0 & 0 & 0 \\ N_1N_3' & N_1'N_4 & 0 & 0 & 0 & N_2N_3' & N_2'N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1N_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2N_4' \\ 0 & 0 & 0 & N_1N_3' & N_1'N_4 & 0 & 0 & 0 & N_2N_3' & N_2'N_4 \\ 0 & 0 & N_1'N_3 & N_1N_3 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_3 & N_2N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1N_3' & 0 & N_1N_4 & 0 & 0 & N_2N_3' & 0 & N_2N_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_x & M_{xy} & 0 & Q_x \\ N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xy} & M_y & 0 & Q_y \\ 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & -M_x & -M_{xy} & 0 & 0 & 0 & -Q_x \\ 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & -M_{xy} & -M_y & 0 & 0 & 0 & -Q_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_x & -M_{xy} & 0 & 0 & \frac{N_x h^2}{12} & \frac{N_{xy} h^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{xy} & -M_y & 0 & 0 & \frac{N_{xy} h^2}{12} & \frac{N_y h^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1N_3' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2N_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1'N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1N_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2N_4' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1N_3' & 0 & 0 & 0 & N_2N_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1'N_3 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1N_3' & 0 & 0 & 0 & N_2N_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1'N_4 & 0 & 0 & 0 & N_2'N_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1N_4' & 0 & 0 & 0 & N_2N_4' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

6-2- روند تحلیل ورق مرکب

در این مقاله، تحلیل ورق مرکب تحت بارهای ناشی از حرارت و رطوبت در دو مرحله انجام می‌گیرد. در مرحله اول با استفاده از روابط (5) و (10) تا (12) بردار F^N محاسبه شده و سپس بردار P^N بر مبنای رابطه (25) تعیین می‌گردد. پس از آن بر اساس رابطه (18) ماتریس سختی استاندارد محاسبه شده و با روی هم‌گذاری ماتریس‌های بار و سختی هر نوار ماتریس‌های مذکور برای کل ورق حاصل می‌شود. سپس با اعمال شرایط مرزی در لبه‌های ورق بردار تغییر مکان اولیه (δ) در هر نوار به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta = K^{-1}P^N \quad (28)$$

در ادامه با استفاده از تغییر مکان‌های بدست آمده و به کمک توابع شکل در رابطه (16)، کرنش‌های هر نقطه از ورق به کمک رابطه (17) محاسبه می‌شود. در مرحله دوم تحلیل، با استفاده از کرنش‌های محاسبه شده در مرحله اول و بکارگیری رابطه (1)، بردار نیروهای داخلی ایجاد شده تحت تأثیر تغییرات درجه حرارت و رطوبت در هر نقطه بر اساس مختصات آن تعیین می‌شود. سپس ماتریس S به کمک رابطه (23) و ماتریس سختی هندسی به وسیله رابطه (22) برای هر نوار محاسبه می‌شوند. با انجام مراحل مذکور و تشکیل ماتریس سختی هندسی برای کل ورق عملیات قیود مربوط به شرایط مرزی بار بحرانی کمانش ورق مرکب بر اساس حل مقادیر ویژه زیر حاصل خواهد شد:

$$\det |K - K_g| = 0 \quad (29)$$

شایان ذکر است که انجام دو مرحله‌ای تحلیل ورق مرکب باعث خواهد شد تا نیروهای داخلی ایجاد شده ناشی از اثر حرارت و رطوبت به طور دقیق در تمام نقاط ورق محاسبه شود که این امر در محاسبه بار بحرانی ورق جدا شده به حصول نتایج دقیق‌تری منجر خواهد شد [17].

3-صحت سنجی

در این مطالعه جنس ورق‌های مرکب از نوع الیاف شیشه بافته شده در زمینه اپوکسی می‌باشد. این ورق لایه‌ای در حالت کلی شامل 16 لایه، که ضخامت هر لایه 0.375 میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. این لایه‌ها مجموعاً، ورق مرکبی به ضخامت 6 میلی‌متر تشکیل می‌دهند. ورق مرکب اولیه بصورت مربعی در نظر گرفته شده و بعد از آن 0.235 میلی‌متر می‌باشد. در اولین مدل بررسی شده، فیبرهای تمامی لایه‌های ورق دارای زوایای یکسان و به زاویه صفر درجه هستند. با افزایش درجه حرارت محیط از 300 کلوین به 375 کلوین، مدول الاستیسیته و مدول برشی ورق مرکب از جنس شیشه و اپوکسی مطابق با جدول 1 تغییر می‌نماید و همچنین با تغییرات درصد رطوبت محیط نیز، ورق فوق‌الذکر دارای تغییراتی در مدول الاستیسیته و برشی به شرح جدول 2 می‌باشد.

جداول 3 و 4 مربوط به محاسبات فرکانس طبیعی، بر اساس دو روش نوار محدود و اجزاء محدود و مقایسه این اعداد با نتایج حاصله از عملیات آزمایشگاهی و تئوری پندا و همکاران می‌باشد.

در ادامه ورق مرکبی متشکل از چهار لایه با زوایای 0، 90، 90 و 0 درجه برای صحت سنجی نتایج بدست آمده با نتایج سایر محققان، ارزیابی می‌گردد. نسبت طول به عرض ورق مورد نظر 1 و نسبت بعد به ضخامت آن 100 می‌باشد. ویتنی و همکاران [24]، سای رم و سینها [25] و پارهی و همکاران [22] این مدل را که از جنس کربن-اپوکسی می‌باشد، مورد تحلیل

بردار نیروهای ناشی از حرارت و رطوبت در هر نوار نیز مطابق رابطه (25)، برای هر نوار محاسبه می‌گردد.

$$P^N = \iint B_s^T F^N dx dy \quad (25)$$

2-5- اثر جداسدگی لایه‌های ورق مرکب

جدایش لایه‌های ورق مرکب یکی از آسیب‌های محتمل بر ورق مرکب می‌باشد که ممکن است در فرآیند تولید یا بر اثر ضربه یا بارگذاری خاصی حاصل گردد. در این وضعیت ورق در قسمتی از سطح مقطع دچار تفکیک شده که ورق مرکب را به دو یا چند زیر لایه تبدیل می‌کند. برای نمونه یک نمونه از جداسدگی لایه‌ها در شکل 4 نشان داده شده است که در آن Z_{0dl} بیانگر مختصات مرکز زیر لایه‌ای است که از پس از جدا شدگی ایجاد می‌شود. به عبارتی ورق در بالا و پایین ناحیه جدا شده به تعدادی زیرلایه تقسیم می‌شود که لازم است ماتریس D که $[D]_t$ نشان داده می‌شود برای هریک مجدداً بازنویسی شود.

برای این منظور با برقراری همسازي در مرزهای اتصال ورق به زیر لایه‌ها و یکسان کردن مقادیر جابجایی نقاط در آن‌ها، بردار نیروهای داخلی نشان داده شده در رابطه (4) برای هر زیرلایه بر حسب درجات آزادی مربوط به آن زیر لایه مجدداً نوشته شده و ماتریس‌های $[A]_t$ ، $[B]_t$ ، $[d]_t$ و $[S]_t$ برای هر زیر لایه محاسبه می‌شود. بدین ترتیب می‌توان گفت که برای ورق مرکب در مرز جدایش و برای هر زیر لایه یک ماتریس $[D]_t$ جداگانه و برای نواحی سالم ماتریس D مشابه با حالت قبل یعنی رابطه (7) در نظر گرفته می‌شود. ماتریس $[D]_t$ برای هر زیرلایه جدا شده طبق رابطه (26) بدست می‌آید [16,22].

$$[D]_t = \begin{bmatrix} A_{ij} & z_t^0 A_{ij} + B_{ij} & 0 \\ B_{ij} & z_t^0 B_{ij} + d_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & S_{ij} \end{bmatrix} \quad (26)$$

دریافته‌های ماتریس $[D]_t$ بر اساس مشخصات هر زیر لایه و با در نظر گرفتن انتگرال روی تمام ضخامت زیر لایه محاسبه گردیده و طبق ماتریس فوق‌جانمایی می‌گردد.

$$\begin{aligned} [A]_{ij,t} &= \int_{-\frac{h_t+z_t^0}{2}}^{\frac{h_t+z_t^0}{2}} [Q]_{ij} dz \\ [B]_{ij,t} &= \int_{-\frac{h_t+z_t^0}{2}}^{\frac{h_t+z_t^0}{2}} [Q]_{ij} (z - z_t^0) dz \\ [d]_{ij,t} &= \int_{-\frac{h_t+z_t^0}{2}}^{\frac{h_t+z_t^0}{2}} [Q]_{ij} (z - z_t^0)^2 dz \\ [S]_{ij,t} &= \int_{-\frac{h_t+z_t^0}{2}}^{\frac{h_t+z_t^0}{2}} [Q]_{ij} dz \end{aligned} \quad (27)$$

شایان ذکر است که منظور از زیر لایه مجموعه‌ای از چند لایه بوده که بین مرزهای جدا شده قرار می‌گیرند. بر این اساس Z_t^0 مختصات مرکز زیر لایه و h_t ضخامت زیر لایه نام آن می‌باشد.

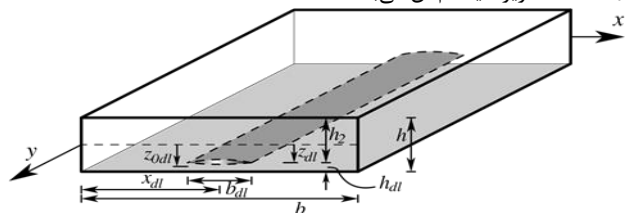


Fig. 4 Delamination model

شکل 4 مدل جداسدگی

جدول 5 مقایسه ضریب بدون بعد فرکانس حاصله از تحلیل ورق لایه‌ای با زوایای 0/90/90/0 درجه در حرارت 325 کلوین و درصد رطوبت 10% با نتایج سایر محققین

Table 5. Comparing the non-dimensional frequency of laminated 0/90/90/0 plates under $T=325^{\circ}\text{K}$ and $C=10\%$

مرجع [22]	مرجع [25]	مرجع [24]	تحقیق حاضر
8.068	8.046	8.088	8.08
9.411	9.393	9.429	9.43

جدول 6 مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) حاصله از تحلیل ورق مرکب چهار طرف مفصل همراه با درصد جدایشی لایه‌ای 6.25% در درجه حرارت‌های مختلف

Table 6. Comparing the natural frequency of composite laminated plates with SSSS boundary conditions and 6.25% delamination in different temperatures

حرارت (کلوین)	350	325	300
روش آزمایشگاهی در مرجع [21]	244	261	281
روش عددی در مرجع [21]	242	265	277
تحقیق حاضر	240	275	304

در ادامه به بررسی بار بحرانی کمانش تحت شرایط مختلف محیطی (حرارتی و رطوبتی) پرداخته می‌شود و با در نظر گرفتن هفت نوع بارگذاری مختلف (نسبت‌های متفاوت بار بحرانی کمانش در راستای محور y به بار بحرانی کمانش در راستای x) نتایج مقایسه می‌گردند.

4- بررسی بار بحرانی کمانش

در این بخش به بررسی تغییرات بار بحرانی کمانش در اثر تغییرات شرایط مختلف رطوبتی و حرارتی پرداخته می‌شود. مدل اولیه، یک ورق لایه‌ای با مشخصات $b = 235\text{mm}$ و $a = 235\text{mm}$ ، $m = 16$ ، $h = 6\text{mm}$ در هفت وضعیت بارگذاری مختلف شامل $N_x = N_x = 0.33N_y$ ، $N_y = 0$ ، $N_x = 3N_y$ ، $N_x = N_y$ ، $N_x = 2N_y$ ، $0.5N_y$ در تمامی حالات دمای اولیه $T_0 = 300^{\circ}\text{K}$ و رطوبت اولیه برابر با $C_0 = 0\%$ فرض شده است. در نمودارهای رسم شده در این بخش از ضرایب بدون بعد کمانش ورق در جهات x و y مطابق با روابط (31) و (32) استفاده گردیده است:

$$K_1 = \frac{N_{xcr} b^2 \times 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\pi^2 E_2 h^3} \quad (31)$$

$$K_2 = \frac{N_{ycr} b^2 \times 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\pi^2 E_2 h^3} \quad (32)$$

مطابق با شکل 5، با افزایش بار N_y از صفر به $0.33N_x$ ، بار بحرانی کمانش N_x برای حالت 300 درجه کلوین، به میزان 24.79 درصد کاهش می‌یابد. به همین ترتیب با افزایش بار N_y به نسبت 0.5، 1، 2 و 3 برابری N_x ، بار بحرانی کمانش N_{xcr} به ترتیب به میزان 33.47 درصد، 50 درصد، 66.69 درصد و 75.04 درصد کاهش می‌یابد. درصد کاهش بار بحرانی کمانش بر اثر افزایش درجه حرارت از 300 کلوین تا 375 کلوین، برای حالت $N_y = 0$ برابر 28.7 درصد و برای نسبت‌های 0.33، 0.5، 1، 2 و 3 از N_y به N_x به میزان 28.42 درصد می‌باشد.

در جدول 7 نیز تغییرات بار بحرانی کمانش در بارگذاری‌های مختلف و تحت اثر افزایش درصد رطوبت از 0 تا 75 درصد برای یک ورق لایه‌ای چهار طرف مفصل ارائه شده است.

دینامیکی قرار دادند. این محققان ورق مرکب را در مرحله اول، در درجه حرارت 325 درجه کلوین و در مرحله دوم در درصد رطوبت 10% مورد بررسی کردند که نتایج آن در جدول 5، ارائه شده و با نتایج حاصل از تحقیق حاضر مقایسه شده است. در این جدول مقادیر بدون بعد فرکانس طبیعی $\bar{\omega}$ بر اساس رابطه (30) محاسبه شده است.

$$\bar{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}} \quad (30)$$

که در آن، b عرض ورق، h ضخامت آن، E_2 مدول الاستیسیته در راستای عرضی و ω فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق است. نتایج حاصل در جداول 3 تا 5 بیان‌گر صحت نتایج حاصله است.

همچنین جهت صحت سنجی نتایج بدست آمده برای ورق دارای جدا شدگی لایه‌ها، جدول 6 برای مقایسه نتایج ورق دچار جداشدگی با نتایج حاصله از تحقیق پندا و همکاران برای ورق دارای جداشدگی 6.25 درصد ارائه می‌گردد.

جدول 1 تغییرات مدول الاستیسیته و برشی با افزایش درجه حرارت محیط در ورق شیشه- اپوکسی [22]

Table 1. Changing in elasticity and shear modulus of glass/epoxy composite plate with temperature [22]

دما (کلوین)	375	350	325	300
E_1 (GPa)	13.21	14.93	15.39	15.4
G_{12} (GPa)	3.48	3.51	3.54	3.56

جدول 2 تغییرات مدول الاستیسیته و برشی با افزایش درصد رطوبت محیط در ورق شیشه- اپوکسی [22]

Table 2. Changing in elasticity and shear modulus of glass/epoxy composite plate with moisture [22]

رطوبت (%)	75	50	25	0
E_1 (GPa)	13.17	14.69	15.38	15.4
G_{12} (GPa)	3.47	3.49	3.53	3.56

جدول 3 مقایسه نتایج فرکانس طبیعی (Hz) در اثر افزایش درجه حرارت محیط در حالت چهار طرف مفصل، با نتایج آزمایشگاهی و عددی سایر محققین

Table 3. Comparing the natural frequency (Hz) of SSSS plates under temperature changing

دما (کلوین)	375	350	325	300
روش آزمایشگاهی در مرجع [23]	269	291	304	318
روش عددی در مرجع [23]	270	291	306	320
تحقیق حاضر	261	293	314	331

جدول 4 مقایسه نتایج فرکانس طبیعی (Hz) در اثر افزایش درصد رطوبت محیط در حالت چهار طرف مفصل، با نتایج آزمایشگاهی و عددی سایر محققین

Table 4. Comparing the natural frequency (Hz) of SSSS plates under moisture changing

رطوبت (%)	75	50	25	0
روش آزمایشگاهی در مرجع [23]	280	279	292	321
روش عددی در مرجع [23]	260	291	300	322
تحقیق حاضر	225	268	304	331

تغییر شرایط بارگذاری از نسبت صفر به سه N_y/N_x به ترتیب به میزان 19.78 درصد، 27.34 درصد، 43.22 درصد، 60.6 درصد و 70.58 درصد از تحلیل بدست آورده شده است.

جدول 8 مربوط به تغییرات بار بحرانی کمانش بر اثر افزایش درصد رطوبت در شش بارگذاری مذکور می‌باشد. درصد تغییرات بار بحرانی در اثر تغییرات رطوبتی از 0 تا 75 درصد در بارگذاری‌ها به ترتیب 26.7 درصد، 29.9 درصد، 29.9 درصد، 30 درصد و 28.2 درصد می‌باشد.

در شکل‌های 9 و 10 تغییرات بار بحرانی N_x و N_y برای شش بارگذاری مختلف، بر حسب یکدیگر ترسیم شده است. شکل 8 مربوط به درجه حرارت‌های 300 کلوین تا 375 کلوین و شکل 9 مربوط به درصد رطوبت‌های 0 تا 75 درصد برای حالت تکیه گاهی دو طرف مفصل و دو طرف گیردار می‌باشد.

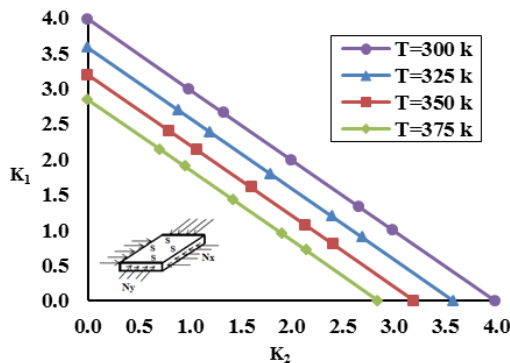


Fig. 6 Interaction curves of N_x and N_y for different temperatures (SSSS) شکل 6 تغییرات بار بحرانی کمانش N_x ورق مرکب بر حسب بار بحرانی کمانش N_y و در اثر افزایش درجه حرارت برای ورق چهار طرف مفصل

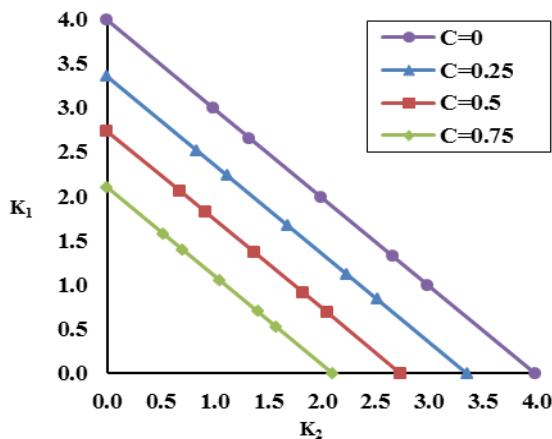


Fig. 7 Interaction curves of N_x and N_y for different temperatures (SSSS) شکل 7 تغییرات بار بحرانی کمانش N_x ورق مرکب بر حسب بار بحرانی کمانش N_y و در اثر افزایش درصد رطوبت محیط برای ورق چهار طرف مفصل

جدول 8 مقادیر بار بحرانی کمانش (K_1) ورق مرکب در بارگذاری‌های مختلف و تحت درصد رطوبت‌های متفاوت، برای ورق دو طرف مفصل و دو طرف گیردار

Table 8. Buckling factor of SCSC composite plates under different loads and moistures

رطوبت (%)	0	25	50	75
$N_y=0$	7.81	7.27	6.80	6.42
$N_y=0.33 N_x$	6.26	5.82	5.44	5.13
$N_y=0.5 N_x$	5.67	5.27	5.00	4.65
$N_y=N_x$	4.43	4.12	3.85	3.63
$N_y=2 N_x$	3.08	2.86	2.67	2.52
$N_y=3 N_x$	2.03	2.17	2.04	1.93

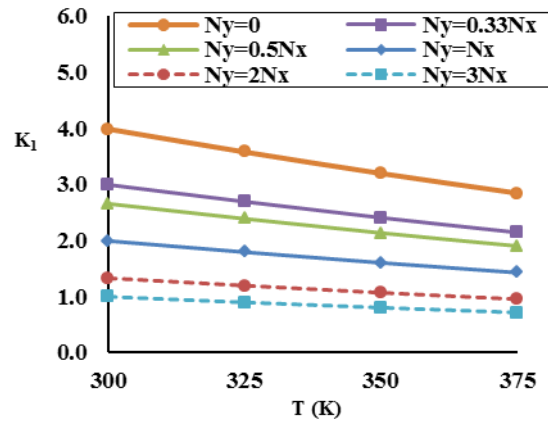


Fig. 5 Changing in critical load of SSSS with temperature

شکل 5 بررسی تغییرات بار بحرانی کمانش ورق مرکب در بارگذاری‌های مختلف و در اثر افزایش درجه حرارت برای ورق چهار طرف مفصل

جدول 8 مقادیر بار بحرانی کمانش (K_1) ورق مرکب در بارگذاری‌های مختلف و تحت درصد رطوبت‌های متفاوت، در وضعیت تکیه گاهی چهار طرف مفصل

Table 7. Buckling factor of composite SSSS plates under different loads and moistures

رطوبت (%)	0	25	50	75
$N_y=0$	3.99	3.35	2.73	2.10
$N_y=0.33 N_x$	2.99	2.52	2.06	1.58
$N_y=0.5 N_x$	2.65	2.23	1.83	1.40
$N_y=N_x$	1.99	1.68	1.37	1.05
$N_y=2 N_x$	1.33	1.12	0.91	0.70
$N_y=3 N_x$	1.00	0.84	0.69	0.53

براساس جدول 7، میزان تغییرات بار بحرانی کمانش بر اثر افزایش درصد رطوبت از 0 تا 75 درصد به طور متوسط برای تمام بارگذاری‌ها به میزان 47.3 درصد می‌باشد. درصد تغییرات در سه مرحله کاهش درصد رطوبت از 0 تا 25 درصد، از 0.25 درصد تا 0.5 درصد و از 0.5 درصد تا 0.75 درصد به ترتیب برای بارگذاری اول 16.12 درصد، 22.17 درصد و 31.01 درصد است. در نمودارهای شکل‌های 5 و 6، تغییرات بار بحرانی کمانش N_x و N_y در درجه حرارت‌های 300 کلوین، 325 کلوین، 350 کلوین و 375 کلوین و رطوبت‌های 0، 25، 50 و 75 درصد به نمایش در آمده است. وضعیت تکیه گاهی بررسی شده دوم حالت دو طرف مفصل، دو طرف گیردار می‌باشد. در این حالت با بستن درجات آزادی $u_L, v_L, w_L, \theta_{xL}, \theta_{yL}$ در سمت چپ لبه مدل و بستن درجات آزادی $u_R, v_R, w_R, \theta_{xR}, \theta_{yR}$ در لبه سمت راست مدل وضعیت دو طرف مفصل و دو طرف گیردار اعمال می‌گردد. در این تحلیل، مدل از لایه‌های مربعی شکل با طول و عرض 0.235 متر، به تعداد 16 لایه تشکیل می‌گردد.

در شکل 8 تغییرات بار بحرانی کمانش N_x بر حسب افزایش درجه حرارت محیط به نمایش گذاشته شده است. تحلیل مقادیر این نمودار در شش بارگذاری مختلف در ضخامت یکسان و ابعاد یکسان تمامی مدل‌ها به روش نوار محدود مورد بررسی قرار گرفته است.

همانطور که انتظار می‌رود با افزایش درجه حرارت محیط بار بحرانی کمانش در هر وضعیت بارگذاری دچار کاهش می‌گردد. بطور متوسط در شش بارگذاری به نمایش گذاشته شده در نمودار شکل 7، میزان کاهش بار بحرانی کمانش به میزان 9.5 درصد می‌باشد. همچنین میزان کاهش این بار بحرانی با

5- بررسی تأثیر مساحت جداشدگی لایه‌های ورق مرکب بر بار بحرانی کمانش

در این قسمت به بررسی اثر جداشدگی لایه‌های ورق مرکب که ممکن است بر اثر بار ناگهانی یا مونتاژ نامناسب بوجود آید، پرداخته می‌شود. در مدل بندی نوار محدود، ورق مرکب در محل دچار جداشدگی لایه‌ها، از یک ورق مرکب اصلی به دو یا چند زیر لایه تقسیم می‌گردد. برای مثال در حالت جداشدگی 6.25 درصد، دو نوار از 32 نوار مدل ورق مرکب در محل خود به دو زیر لایه با مشخصات مختلف تقسیم می‌گردند. در حالت جداشدگی 6.25 درصد و در وضعیتی که جدایش در مرکز سطح رخ داده است، دو نوارهای 16 و 17 به دو زیر لایه تقسیم گردیده و مجموعاً تعداد نوارها به 34 نوار تحلیلی تبدیل می‌گردد. در این قسمت با مدل کردن جداشدگی‌های 6.25 درصد و 12.5 درصد در روش نوار محدود و محاسبه ماتریس‌های سختی مربوطه، با حل مقادیر ویژه اقدام به محاسبه بار بحرانی کمانش در وضعیت‌های بدون جداشدگی و همچنین وضعیت‌های دارای جداشدگی می‌شود. در بررسی اولیه با مدل کردن ورق مرکب مربعی با بعد 235 میلی‌متر و تعداد 16 لایه و ضخامت کلی 6 میلی‌متر، جداشدگی 6.25 درصدی در لایه میانی ورق مرکب ایجاد می‌گردد و ماتریس‌های سختی مربوطه محاسبه می‌گردد (شکل 11).

در این بررسی شش بارگذاری متفاوت $N_x = 0.33 N_y, N_y = 0, N_x = 0.5 N_y, N_x = N_y, N_x = 2 N_y, N_x = 3 N_y$ در نظر گرفته می‌شود. شکل 12، مربوط به تغییرات بار بحرانی کمانش با افزایش درجه حرارت برای شش بارگذاری متفاوت، برای مدل‌های بدون جداشدگی و با جداشدگی 6.25 درصد در حالت چهار طرف مفصل می‌باشد. بر اساس این نمودار و داده‌های محاسبه شده بر اساس تحقیق حاضر، بار بحرانی کمانش از مدل بدون جداشدگی تا مدل جداشدگی 6.25 درصد بطور میانگین به میزان 16 درصد برای درجه حرارت 300 کلوین، 23.44 درصد برای درجه حرارت 325 کلوین، 32.6 درصد برای درجه حرارت 350 کلوین و 43.88 درصد برای درجه حرارت 375 کلوین کاهش دارد. همچنین در هر مرحله از افزایش بار N_y ، تغییرات بار بحرانی کمانش بر اثر اعمال جداشدگی به میزان کمتری نسبت به حالت قبل کاهش داشته است. بر اثر اعمال جداشدگی، تغییرات بار بحرانی کمانش نیز افزایش داشته است، بطوریکه برای مثال برای بارگذاری اول، با افزایش درجه حرارت از 300 کلوین تا 375 کلوین، در حالت بدون جداشدگی، 28.82 درصد و برای حالت جداشدگی 6.25 درصد، 52.09 درصد کاهش داشته است.

شکل 13 نیز مربوط به تغییرات بار بحرانی کمانش دو مدل جداشدگی بر اثر افزایش درصد رطوبت می‌باشد. در این حالت نیز بطور میانگین با تغییر مدل از حالت بدون جداشدگی به حالت دارای جداشدگی، برای درصد رطوبت 25، 28.77 درصد کاهش، برای درصد رطوبت 50، 46.9 درصد کاهش و برای درصد رطوبت 75، 77.1 درصد کاهش را مدل تجربه می‌نماید.

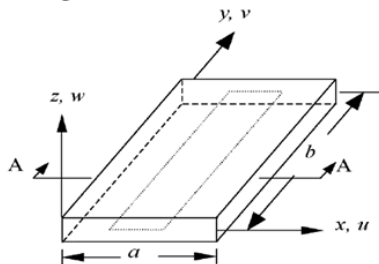


Fig. 11 Delamination of laminated plate

شکل 11 مدل جداشدگی ورق مرکب

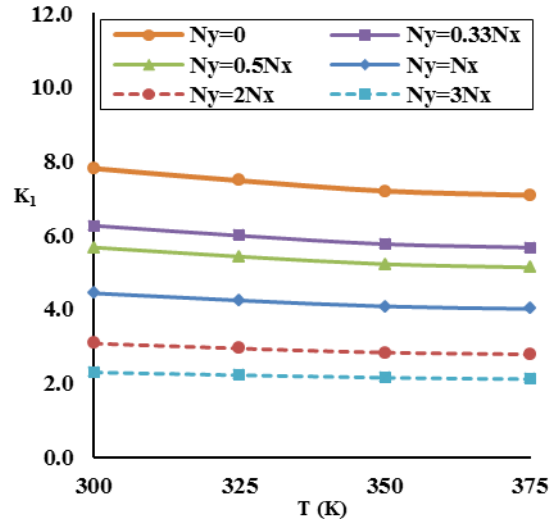


Fig. 8 Changing in critical load of SCSC with temperature

شکل 8 بررسی تغییرات بار بحرانی کمانش ورق مرکب در بارگذاری‌های مختلف و در اثر افزایش درجه حرارت برای ورق دو طرف مفصل و دو طرف گیردار

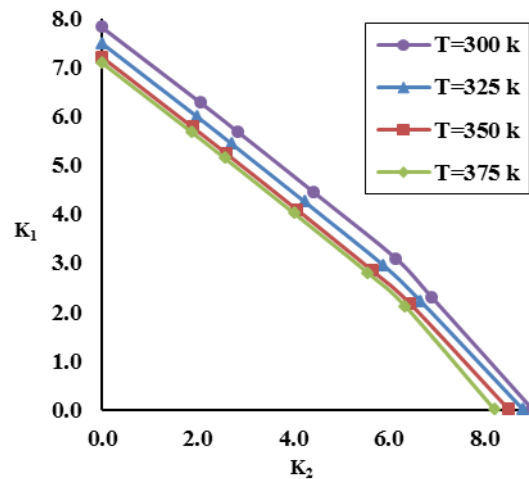


Fig. 9 Interaction curves of N_x and N_y for different temperatures (SCSC)

شکل 9 تغییرات بار بحرانی کمانش N_x ورق مرکب بر حسب بار بحرانی کمانش N_y و در اثر افزایش درجه حرارت برای ورق دو طرف مفصل و دو طرف گیردار

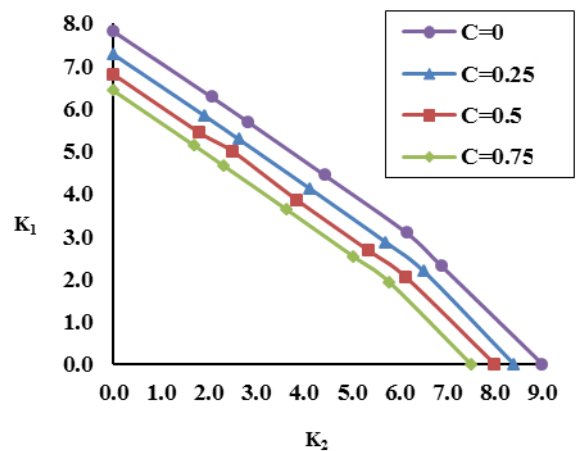


Fig. 10 Interaction curves of N_x and N_y for different moistures (SCSC)

شکل 10 تغییرات بار بحرانی کمانش N_x ورق مرکب بر حسب بار بحرانی کمانش N_y و در اثر افزایش درصد رطوبت برای ورق دو طرف مفصل و دو طرف گیردار

جداشدگی در راستای ضخامت همزمان با تغییر شرایط محیطی مطابق شکل‌های 14 و 15 به نمایش گذاشته می‌شود. نتایج حاصله نشان می‌دهد که حداقل فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌ها در حالتی بدست می‌آید که جدا شدگی در لایه میانی رخ دهد و با فاصله گرفتن جداشدگی از وسط ضخامت میزان فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد.

در این وضعیت یعنی حالت افزایش درصد رطوبت از 0 درصد تا 75 درصد نیز با اعمال مدل جداشدگی 6.25 درصد، ورق مرکب حساسیت بیشتری از خود بروز می‌دهد. بطوریکه در بارگذاری اول برای حالت بدون جداشدگی 47.36 درصد و برای حالت با جداشدگی 85.63 درصد کاهش را بر اثر افزایش درصد رطوبت از 0 تا 75 درصد تجربه می‌نماید. با در نظر گرفتن h به عنوان ضخامت کل ورق و h_2 به عنوان فاصله محل جداشدگی از لبه (مطابق شکل 4)، تاثیر تغییر محل قرارگیری

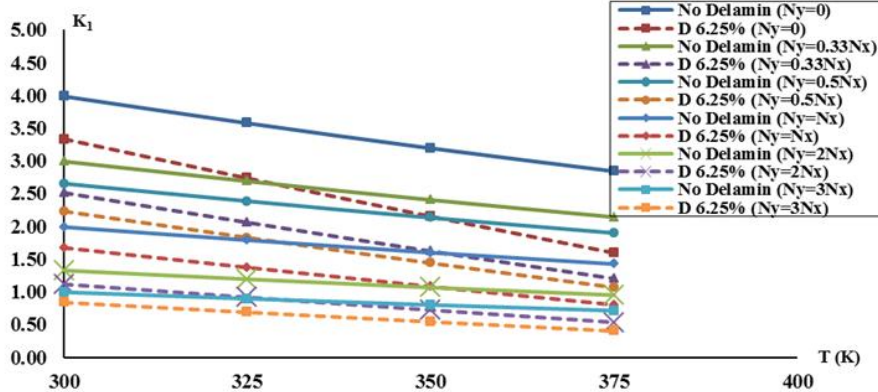


Fig. 12 Changing in critical load of SSSS laminated plates with temperature for no delamination and 6.25% delamination

شکل 12 بررسی تغییرات بار بحرانی کمانش دو مدل بدون جداشدگی و جداشدگی 6.25 درصد، بر اثر افزایش درجه حرارت در وضعیت چهار طرف مفصل

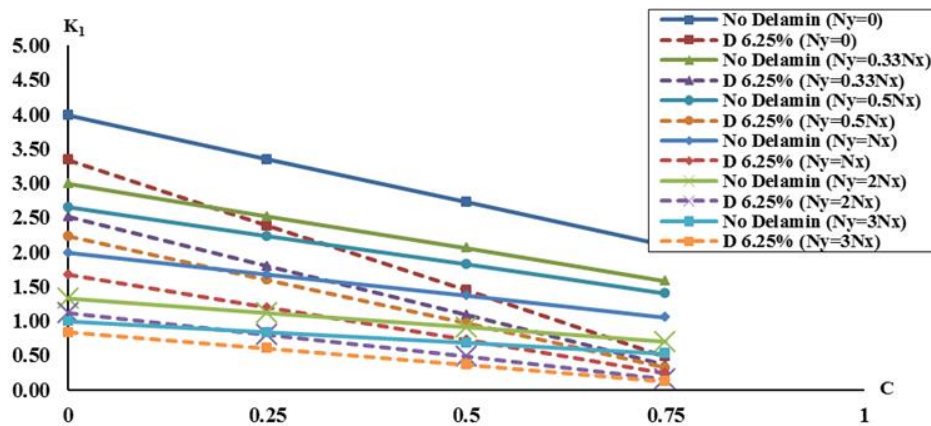


Fig. 13 Changing in critical load of SSSS laminated plates with moisture for no delamination and 6.25% delamination

شکل 13 بررسی تغییرات بار بحرانی کمانش دو مدل بدون جداشدگی و جداشدگی 6.25 درصد، بر اثر افزایش درصد رطوبت در وضعیت چهار طرف مفصل

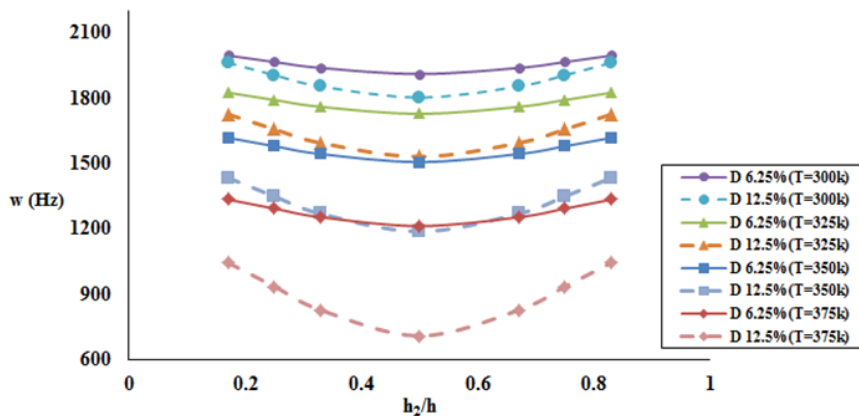


Fig. 14 Effect of vertical location of delamination in frequency of composite plate for 6,25% and 12,5% delamination in different temperatures (SSSS)

شکل 14 بررسی تأثیر محل عمودی قرارگیری جداشدگی بر فرکانس ورق مرکب برای جداشدگی‌های 6.25 درصد و 12.5 درصد در درجه حرارت‌های مختلف و در وضعیت تکیه گاهی چهار طرف مفصل

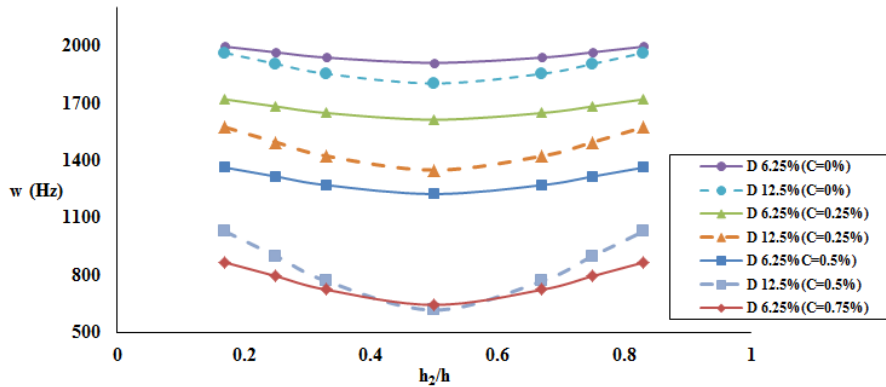


Fig. 15 Effect of vertical location of delamination in frequency of composite plate for 6,25% and 12,5% delamination in different moistures (SSSS)

شکل 15 بررسی تأثیر محل عمودی قرارگیری جداشدگی بر فرکانس ورق مرکب برای جداشدگی‌های 6,25 درصد و 12,5 درصد در رطوبت‌های مختلف و در وضعیت تکیه گاهی چهار طرف مفصل

می‌باشد. همچنین میزان کاهش این بار بحرانی با تغییر شرایط بارگذاری از نسبت صفر به سه برابر N_y/N_x به ترتیب به میزان 20 درصد، 27 درصد، 43 درصد، 61 درصد و 71 درصد از تحلیل بدست آورده شد.

درصد تغییرات بار بحرانی کمانش در اثر تغییرات رطوبتی از 0 تا 75 درصد در وضعیت CSCS در شش بارگذاری مختلف بطور میانگین 30 درصد می‌باشد.

تغییرات در وضعیت تکیه گاهی دو طرف مفصل و دو طرف گیردار به میزان 17 درصد برای تغییرات حرارتی و به میزان 26 درصد برای تغییرات رطوبتی، نسبت به وضعیت تکیه گاهی چهار طرف مفصل کمتر می‌باشد.

با بررسی محل رخ دادن جدا شدگی در راستای ضخامت مشاهده می‌شود که حداقل فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌ها در حالتی بدست می‌آید که جدا شدگی در لایه میانی رخ دهد و با فاصله گرفتن جداشدگی از وسط ضخامت میزان فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد.

6-نتیجه گیری

با توجه به تعدد اجرای سازه‌های متشکل از ورق‌های مرکب و تأثیرپذیری رفتار دینامیکی و پایداری آن‌ها از شرایط مختلف رطوبتی و حرارتی و همچنین رفتار دراز مدت این نوع سازه‌ها تحت آسیب‌های ناشی از مشکلات مونتاژ و بارگذاری، در این پژوهش، هدف بر بررسی پایداری ورق‌های مرکب تحت شرایط حرارتی و رطوبتی، همراه با احتمالات وجود آسیب‌های درونی ورق، نهاد گردید. در ادامه با اعمال بارهای حرارتی و رطوبتی در مدل و در انواع بارگذاری‌های مختلف طولی و عرضی، بار بحرانی کمانش ورق مرکب در شرایط تکیه گاهی مختلف مورد محاسبه قرار گرفت. سپس با اعمال جدا شدگی‌های مختلف در ورق مرکب و همچنین اعمال همزمان شرایط حرارتی و رطوبتی در حین این آسیب، مقادیر بار بحرانی کمانش ورق مرکب دارای جداشدگی با ورق مرکب بدون آسیب مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج حاصل از این پژوهش با تحلیل نوار محدود بطور جمع بندی مطابق با بندهای ذیل ارائه می‌گردد.

- با افزایش بار N_y از صفر به $0.33N_x$ در حالت ورق مرکب چهار طرف مفصل، بار بحرانی کمانش N_x برای حالت 300 درجه کلوبن، به میزان 25 درصد کاهش می‌یابد. به همین ترتیب با افزایش بار N_y به نسبت 0.5، 1، 2 و 3 برابر N_x ، بار بحرانی کمانش N_{xcr} به ترتیب به میزان 33 درصد، 50 درصد، 67 درصد و 75 درصد کاهش می‌یابد. درصد کاهش بار بحرانی کمانش بر اثر افزایش درجه حرارت از 300 کلوبن تا 375 کلوبن، برای حالت $N_y = 0$ برابر 39 درصد و برای نسبت‌های 0.5، 1، 2 و 3 از N_y به N_x بطور میانگین به میزان 39 درصد می‌باشد.

- میزان تغییرات بار بحرانی کمانش بر اثر افزایش درصد رطوبت از 0 تا 75 درصد برای حالت چهار طرف مفصل، بطور میانگین برای تمام بارگذاری‌ها به میزان 55 درصد می‌باشد. درصد تغییرات در سه مرحله کاهش درصد رطوبت از 0 تا 25 درصد، از 25 درصد تا 50 درصد و از 50 درصد تا 75 درصد به ترتیب برای بارگذاری اول 16 درصد، 22 درصد و 13 درصد، برای سایر بارگذاری‌ها بطور میانگین به میزان 16 درصد، 22 درصد و 31 درصد می‌باشد.

- در وضعیت تکیه گاهی CSCS بطور میانگین در شش بارگذاری بررسی شده (نسبت‌های N_y/N_x برابر با 0، 0.33، 1، 2 و 3) بر اثر افزایش درجه حرارت، میزان کاهش بار بحرانی کمانش به میزان 22 درصد

7-فهرست علائم

ماتریس صلیبیت محوری	A
طول نوار	a
ماتریس صلیبیت محوری-خمشی	B
عرض نوار	b
رطوبت ثانویه	C
رطوبت اولیه	C_0
ماتریس صلیبیت	D
ماتریس صلیبیت خمشی	d
مدول الاستیسیته	E_i
بردار کرنش ناشی از حرارت و رطوبت	e
بردار نیروهای داخلی	F
بردار نیروهای داخلی ناشی از حرارت و رطوبت	F^N
ضخامت ورق	h
ضخامت هر زیر لایه	h_i
ماتریس سختی استاندارد	K

8-مراجع

[1] Amoushahi, H. and Azhari, M., "Buckling of Composite FRP Structural Plates Using the Complex Finite Strip Method" Composite structures, Vol. 90, pp. 92-99, 2009.

[2] Lee, D., "The Local Buckling Coefficient for Orthotropic Structural Sections" Aeronautic J, Vol 82, pp. 313-320, 1978.

[3] Lee, D., "Some Observation on the Local Instability of Orthotropic Structural Sections" Aeronautic J, Vol 83, pp. 110-114, 1979.

[4] Lee, D. and Hewson, P., "The Use of Fiber-Reinforced Plastics in Thin-Walled Structures" Stability problems in engineering structures and composites, pp. 23-25, 1978.

[5] Banks, W. and Rhodes, J., "The Post-Buckling Behavior of Composite Box Sections" Proceedings of the international conference on composite structures, pp. 402-414, 1981.

[6] Banks, W. and Rhodes, J., "The Instability of Composite Channel Sections" Proceedings of the international conference on composite structures, pp. 442-452, 1983.

[7] Lopatin, A. and Morozov, E., "Buckling of a Uniformly Compressed Rectangular SSCF Composite Sandwich Plate" Composite Structures, Vol. 105, pp. 108-115, 2013.

[8] Della, C. and Shu, D., "Vibration of Delaminated Composite Plates" Appl Mech, Vol. 60, pp. 1-20, 2007.

[9] Tenek, L. Henneke, E. and Gunzburger, M., "Vibration of Delaminated Composite Plates and Some Applications to Non-Destructive Testing" Compos Struct, Vol 23, pp.253-262.

[10] Ju, J. Lee, H. and Lee, K., "Finite Element Analysis of Free Vibration of Delaminated Composite Plates" Compos Eng, Vol. 5(2), pp. 195-209, 1995.

[11] Champanelli, R. and Engblom, J., "The Effect of Delaminations in Graphite/PEEK Composite Plates on Modal Dynamic Characteristics" Compos Struct, Vol. 31, pp. 195-202, 1995.

[12] Hou, J. and Jeronimidis, G., "Vibration of Delaminated Thin Composite Plates" J Compos Part-A, Vol. 30, pp. 989-995, 1999.

[13] Shiau, L. and Zeng, J., "Free Vibration of Rectangular Plate with Delamination" Journal of Mechanics, Vol. 26, pp. 87-93, 2010.

[14] Kumar, S. Cinefra, M. and Carrera, M., "Finite Element Analysis of Free Vibration of The Delaminated Composite Plate With Variable Kinematic Multilayered Plate Elements" Composites Part B, Vol. 66, pp. 453-465, 2014.

[15] Alnefaie, K., "Finite Element Modeling of Composite Plates With Internal Delamination" Composite Structures, Vol. 90, pp. 21-27, 2009.

[16] Parhi, P. Bhattacharyya, S. and Sinha, P., "Finite Element Dynamic Analysis of Laminated Composite Plates with Multiple Delaminations" Journal of reinforced plastics and composites, Vol. 19, 2000.

[17] Goodarzian, F. and Amoushahi, H., "Dynamic Analysis of Composite Plates with Delaminations under Hygrothermal Loads Using Finite Strip Method" Journal of solid and fluid mechanics, Vol. 7, No. 1, pp. 187-203, 2016. (In Persian)

[18] Amoushahi H., "Time Depended Deformation and Buckling of Viscoelastic Thick Plates by a Fully Discretized Finite Strip Method Using Third Order Shear Deformation Theory" European Journal of Mechanics A/Solids, Vol.68, pp. 38-52, 2018.

[19] Amoushahi H., "Time Depended Deformation of Viscoelastic Thick Plates by a Fully Discretized Finite Strip Method Using Higher Order Shear Deformation Theory", Accepted in Civil Engineering Sharif Journal, 2017 (In Persian).

[20] Varzandian, G.A. and Ziaei S., "Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory" AJSR-Mechanical Engineering, Vol 48, No. 4, pp. 331-346, 2017. (In Persian)

[21] Khorshidi, K. Bakhsheshy, A. and Ghadirian, H., "The Study of the Effects of Thermal Environment on Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Functionally Graded Rectangular Plates on Pasternak Elastic Foundation" Journal of solid and fluid mechanics, Vol 6, No. 3, pp. 137-147, 2016. (In Persian)

[22] Parhi, P. Bhattacharyya, S. and Sinha, P., "Hygrothermal Effects on the Dynamic Behavior of Multiple Delaminated Composite Plates and Shells" Journal of Sound and vibration, Vol. 248(2), pp. 195-214, 2001.

[23] Panda, H. Sahu, S. and Parhi, P., "Hygrothermal Effects on Free Vibration of Delaminated Woven Fiber Composite Plates" Composite Structures, Vol. 96, pp. 502-513, 2013.

ماتریس سختی هندسی	K_g
ضرایب بدون بعد کمانش در راستای x و y	K_1, K_2
لنگرهای خمشی	M_x, M_y, M_{xy}
لنگرهای خمشی ناشی از حرارت و رطوبت	M_x^N, M_y^N, M_{xy}^N
تعداد لایه‌ها	m
توابع شکل راستای عرضی	N_i
نیروهای محوری	N_x, N_y, N_{xy}
نیروهای محوری ناشی از حرارت و رطوبت	N_x^N, N_y^N, N_{xy}^N
بار بحرانی ورق در راستای x و y	N_{xcr}, N_{ycr}
شماره مود تغییر شکل	n
بردار نیرویی ناشی از حرارت و رطوبت	P^N
ماتریس صلبیت لایه‌ها در مختصات لایه‌ها	Q
ماتریس صلبیت لایه‌ها در مختصات کلی	\bar{Q}
نیروهای برشی	Q_i
نیروهای برشی ناشی از حرارت و رطوبت	Q_i^N
تعداد مود تغییر شکل	r
ماتریس صلبیت برشی	S
ماتریس تبدیل راستای لایه‌ها	T
دمای ثانویه	T
دمای اولیه	T_0
جابجایی در راستای محورهای x, y و z	u, v, w
جابجایی میان صفحه در راستای محورهای x, y و z	u_0, v_0, w_0
مختصات مرکز هر زیر لایه	z_0^t
ضرایب ثابت حرارت در راستای طولی و جانبی لایه‌ها	علایم یونانی α_1, α_2
ضرایب ثابت رطوبت در راستای طولی و جانبی لایه‌ها	β_1, β_2
مولفه‌های کرنش برشی	γ_{ij}
بردار درجات آزادی	δ
مولفه‌های کرنش طولی	ϵ_{ij}
درجات آزادی چرخش لبه‌ای حول محورهای y و x	θ_x, θ_y
زاویه هر لایه نسبت به دستگاه مختصات کلی	$\bar{\theta}$
انحنای ورق	κ_i
نسبت پواسون	ν_i
چرخش لبه‌ها حول محورهای x و y	ϕ_x, ϕ_y
فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق	ω
ضریب بدون بعد فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق	$\bar{\omega}$

- [24] Whitney, J. and Ashton, J., "Effect of Environment on the Elastic Response of Layered Composite Plates" American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 9, pp. 1708-1713, 1971
- [25] Sairam, K. and Sinha, P., "Hygrothermal Effects on the Free Vibration of Laminated Composite Plates" Journal of Sound and vibration, Vol. 158, pp. 133-148, 1992.

