جلد 5، شماره 2، شهریور 97، ص‌ص 200- 207

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیت**

http://jstc.iust.ac.ir

پایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت نیروی محوری بر روی بستر الاستیک پسترناک

عباس هادی[1]، سعید شاخصی[2*]، حمید رضا اویسی[3]، جمشید فضیلتی[4]

1- دانشجوی دکترا، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران

3- استاد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

4- استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران

* تهران، صندوق پستی 754-13445، s.shakhesi@isrc.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: 96/02/02

پذیرش: 96/03/25

کلیدواژگان:

پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند

پایداری حرارتی

بستر الاستیک پسترناک

نیروی محوری

توزیع دمای مختلف

چکیده

در این مقاله پایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بستر الاستیک و نیروی محوری بررسی شده است. ابتدا معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک مبتنی بر تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کویتر با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. معادلات مشتق جزئی حاکم با استفاده از روش حل گالرکین به معادلات جبری معمولی تبدیل و بار کمانش حرارتی محاسبه می‌شود. خواص مواد هدفمند مطابق قانون توانی در جهت ضخامت تغییر می‌کند. بستر الاستیک مورد بررسی از نوع دو پارامتری پسترناک بوده و شامل ترم‌های خطی وینکلر و برشی می‌شود. توزیع دما در طول ضخامت پوسته به سه صورت: تغییر دمای یکسان، توزیع خطی و غیرخطی در نظر می‌شود. برای حالت توزیع غیرخطی دما از دو روش حل سری و دقیق استفاده شده و اثرات آن‌ها بر دمای بحرانی پوسته بررسی می‌شوند. نشان داده می‌شود که روش حل سری نسبت به حل دقیق نتایج متفاوتی را حاصل می‌کند. دماهای بحرانی پوسته استوانه‌ای از جنس ماده همسانگرد تحت شرایط مرزی ساده با فرض افزایش یکنواخت دما و توزیع خطی دما بدست آمده و با نتایج مراجع مقایسه شده‌اند. با تکیه بر تئوری توسعه داده شده اثرات توزیع دما، ترکیب ماده هدفمند، بستر الاستیک و نیروی محوری بر پایداری حرارتی پوسته بررسی می‌شوند.

DOI: 10.22068/JSTC.2018.62430.1302

Thermal stability of FGM cylindrical shells on Pasternak elastic foundation under axial load

Abbas Hadi[1], Saeed Shakhesi[2*], Hamid Reza Ovesy[3], Jamshid Fazilati[4]

1- Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Research and Technology, Tehran, Iran
2- Space Transportation Research Institute, Iranian Space Research Center, Tehran, Iran
3- Aerospace Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
4- Aerospace Research Institute, Ministry of Science, Research and Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 13445-754, Tehran, Iran, s.shakhesi@isrc.ac.ir

Keywords

Functionally graded material cylindrical shells
Thermal stability
Axial load
Different temperature distribution

Abstract

Thermal stability characteristics of functionally graded material (FGM) cylindrical shells surrounded by elastic medium under axial load are investigated in this paper. Firstly, governing equations based on the first-order shear deformation theory of Sanders-Koiter for the cylindrical shell resting on elastic foundation are derived by using Hamilton's principle. The governing partial differential equations are converted to algebraic ones by using the Galerkin's method and thermal buckling load is obtained. The material properties of functionally graded materials are assumed to be graded in the thickness direction according to the power law. The elastic medium is assumed as two-parameter Pasternak elastic foundation that consists of Winkler and shear terms. Temperature distribution across the shell thickness is considered in three types: uniform temperature rise, linear and nonlinear temperature change. Two solution methods are used in case of nonlinear temperature distribution as series and exact analytical solutions and their effects on critical temperature of the shell are investigated. It is shown that series solution method yields different results with respect to exact analytical solution. Critical temperatures of isotropic cylindrical shell with simply supported boundary condition under uniform temperature rise and linear temperature distribution cases are obtained and compared with results in the literature. Based on the validated theory, the effects of temperature distribution, FGM configuration, elastic foundation and axial load on thermal stability of the shell are investigated.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Hadi, A. Shakhesi, S. Ovesy, H. R. Fazilati, J. , "Thermal stability of FGM cylindrical shells on Pasternak elastic foundation under axial load", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 05, No. 02, pp. 200-207, 2018.

1- مقدمه

استفاده از مواد هدفمند در کاربردهای مختلف در سال‌های اخیر رو به گسترش است. مواد هدفمند گونه‌ای از مواد مرکب هستند که با توجه به کاربردشان و به منظور دستیابی به خواص مورد نظر، طراحی می‌شوند. این مواد با دارا بودن خواص ترمومکانیکی عالی، در برابر دماهای بالا مقاوم هستند. امروزه پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند در بسیاری از کاربردهای مهندسی نظیر سازه‌های هوافضایی، لوله‌ها و مخازن تحت فشار و غیره استفاده می‌شوند.

با توجه به کاربرد این پوسته‌ها یکی از زمینه‌های بررسی و تحلیل مورد علاقه و مهم، موضوع پایداری حرارتی آن‌ها می‌باشد. تاکنون تحقیقات وسیعی در خصوص بررسی پایداری مکانیکی و حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای انجام شده است. محمودآبادی و همکاران [1] با استفاده از روش نوار محدود و تئوری لایروایز ردی، ناپایداری دینامیکی پنل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه ضخیم را بررسی نمودند. شاه‌سیاه و اسلامی [2, 3] کمانش حرارتی پوسته‌های نازک استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند را با استفاده از تئوری‌های سندرز و دانل بهبود یافته مورد مطالعه قرار دادند. میرزاوند و اسلامی [4, 5] اثر نواقص هندسی بر کمانش حرارتی پوسته‌های نازک استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند را بررسی نمودند. در تحقیق دیگری این محققان کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند همراه با عملگرهای پیزوالکتریک تحت ترکیبی از بار حرارتی و ولتاژ الکتریکی را با استفاده از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی مطالعه نمودند [6]. کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای از جنس ماده هدفمند که خواص مواد بجای تغییر در ضخامت، در طول پوسته تغییر می‌کنند توسط یعقوبی و همکاران بررسی شد [7]. ایشان در تحقیق خود توزیع دما را به سه صورت تغییر دمای یکنواخت و تغییر خطی در طول و ضخامت پوسته در نظر گرفتند. سان و همکاران [8] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند را با توسعه روش حل سیمپلکتیک[1] بررسی نمودند. آن‌ها در کار خود برای توزیع غیرخطی دما در ضخامت پوسته از روش حل سری چند جمله‌ای استفاده کردند. اویسی و همکاران [9] با استفاده از روش نیمه تحلیلی نوار محدود[2]، رفتار پس از کمانش صفحات مستطیلی از جنس مواد هدفمند در محیط حرارتی را بررسی نمودند. ایشان توزیع دما در ضخامت پوسته را در سه حالت افزایش یکنواخت دما، تغییر چادر مانند[3] و توزیع غیرخطی در نظر گرفتند. عارفی و رحیمی [10] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت فشار داخلی و اثرات حرارتی را مورد بررسی قرار دادند.

معمولاً پوسته‌ها با توجه به نوع کاربردشان، در تداخل با بستر الاستیک قرار دارند. تحقیقات گسترده‌ای نیز در خصوص بررسی اثرات بستر الاستیک بر ارتعاشات و پایداری پوسته‌ها انجام شده است. هادی و همکاران [11] اثرات بستر الاستیک بر ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت نیروی محوری، فشار جانبی و شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند. شنگ و وانگ اثر بارهای حرارتی بر ارتعاشات، کمانش و پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار دادند [12]. کمانش مکانیکی و حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک با فرض افزایش دمای یکنواخت توسط باقری زاده و همکاران [13, 14] بررسی شده است. شن [15, 16] تحلیل پس از کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت نیروی محوری و فشار جانبی و احاطه شده با بستر الاستیک را در محیط حرارتی انجام داد. همچنین رفتار پس از کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک بر پایه تئوری مرتبه بالای برشی توسط شن [17] مورد مطالعه قرار گرفت. عارفی و همکاران [18] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک و بارهای مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار دادند.

با بررسی تحقیقات انجام شده می‌توان بیان نمود که اعمال بارهای حرارتی به سه حالت صورت می‌پذیرد: (1) افزایش دمای یکنواخت پوسته، (2) تغییر دمای خطی در ضخامت پوسته و (3) تغییر غیرخطی دما در ضخامت پوسته که توزیع دما با معادله انتقال حرارت حالت پایا[4] تعریف می‌شود. بسیاری از محققان برای حالت سوم از روش حل تقریبی به فرم سری چند جمله‌ای[5] استفاده می‌کنند. این در حالی است که تاکنون هیچ تحقیقی در خصوص اثرات این روش بر توزیع دمای غیرخطی در ضخامت پوسته و پایداری حرارتی آن انجام نگرفته است. از آنجا که توزیع دما در ضخامت صفحات و پوسته‌ها در بررسی پایداری حرارتی آن‌ها بسیار اثرگذار است، لذا در تحقیق حاضر علاوه بر بررسی اثرات نیروی محوری و بستر الاستیک بر پایداری پوسته تحت سه نوع بارگذاری حرارتی ذکر شده، با مقایسه نتایج روش حل سری با نتایج حل دقیق، این موضوع نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به این منظور با فرض تغییر خواص مواد با ضخامت به صورت قانون توانی و استفاده از تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کویتر، تحلیل پایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک پسترناک و نیروی محوری بررسی شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده از روش حل سری و حل دقیق برای تعیین توزیع دما در ضخامت پوسته، مشخص می‌شود که استفاده از روش حل سری می‌تواند اثر مهمی در نتایج داشته باشد. همچنین صحت‌سنجی تئوری توسعه داده شده از طریق مقایسه نتایج با مراجع موجود انجام شده است.

2- روابط تئوری

2-1- الگوی ماده هدفمند

ماده هدفمند مورد بررسی در این تحقیق به گونه‌ای از ترکیب دو ماده تشکیل شده است که در آن خواص ماده در طول ضخامت پوسته با توجه به رابطه توانی زیر تغییر می‌کند:

$$P(z) = (P_o - P_i)V_o + P_i\,,\qquad V_o = \left(\frac{z+0.5h}{h}\right)^N,\ 0 \le N \le \infty\,, -h/2 \le z \le h/2 \tag{1}$$

که در آن P_o و P_i به ترتیب معرف خاصیت ماده در سطوح بیرونی و داخلی پوسته و N شاخص کسر حجمی ماده می‌باشند. در این تحقیق فرض می‌شود که خواص ماده شامل مدول الاستیسیته $E(z)$، چگالی $\rho(z)$، ضریب پواسون $\upsilon(z)$، ضریب انبساط $\alpha(z)$ و ضریب انتقال حرارت $k(z)$ مطابق رابطه (1) تغییر می‌کنند.

[1] Symplectic solution
[2] Finite strip
[3] Tent-like
[4] Steady state
[5] Polynomial series solution

2-2- سینماتیک مسأله

پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت h، شعاع R و طول L را تحت بستر الاستیک پسترناک مطابق شکل 1 در نظر بگیرید. مطابق تئوری مرتبه اول برشی، تغییر مکان هر نقطه دلخواه پوسته با رابطه زیر قابل توصیف است:

$$\begin{aligned} U &= u(x,\theta,t) + z\psi_x(x,\theta,t) \\ V &= v(x,\theta,t) + z\psi_\theta(x,\theta,t) \\ W &= w(x,\theta,t) \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن u، v و w به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان سطح میانی در جهات x، θ و z و همچنین ψ_x و ψ_θ به ترتیب چرخش حول محورهای θ و x می‌باشند. کرنش‌های متناظر با میدان تغییر مکان (2) را می‌توان به صورت رابطه (3) بیان نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{x,0} + zk_x \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z,0} \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن $\varepsilon_{i,0}(i = x,\theta)$ و $\gamma_{i,0}(i = x\theta, xz, \theta z)$ کرنش‌های عمودی و برشی سطح میانی و $k_i(i = x,\theta,x\theta)$ معرف انحناهای سطح میانی می‌باشند. روابط بین کرنش‌های میانی، انحناها و تغییر مکان (روابط سینماتیک) مطابق با تئوری سندرز-کویتر به صورت زیر می‌باشند [19]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta,0} &= \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta,0} &= \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz,0} &= \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z,0} &= \psi_\theta + \frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R} \\ k_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ k_\theta &= \frac{\partial \psi_\theta}{R\partial\theta} \\ k_{x\theta} &= \frac{\partial \psi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

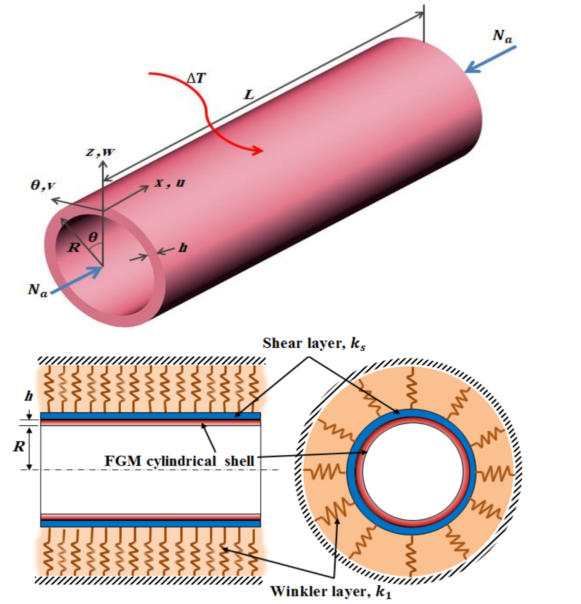

Fig. 1 The FGM cylindrical shell under elastic foundation and axial load

شکل 1 پوسته استوانه‌ای هدفمند تحت بستر الاستیک و نیروی محوری

3-2- روابط متشکله

ماتریس سفتی ماده هدفمند تشکیل شده از دو ماده همسانگرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \tag{5}$$

که ضرایب آن به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \upsilon^2(z)} \\ Q_{12} &= \frac{\upsilon(z)E(z)}{1 - \upsilon^2(z)} \\ Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1 + \upsilon(z))} \\ Q_{44} &= Q_{55} = K\frac{E(z)}{2(1 + \upsilon(z))} \end{aligned} \tag{6}$$

که در آن K ضریب تصحیح برش و برابر 5/6 در نظر گرفته می‌شود [20].

روابط متشکله برای پوسته مورد بررسی با در نظر گرفتن اثرات حرارتی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xx}{}^{th} \\ N_{\theta\theta}{}^{th} \\ N_{x\theta}{}^{th} \\ M_{xx}{}^{th} \\ M_{\theta\theta}{}^{th} \\ M_{x\theta}{}^{th} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z,0} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2)\mathrm{d}z \qquad ,(i,j = 1,2,6) \\ C_{ii} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ii}dz\,, (i = 4,5) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}{}^{th} \\ N_{\theta\theta}{}^{th} \\ N_{x\theta}{}^{th} \\ M_{xx}{}^{th} \\ M_{\theta\theta}{}^{th} \\ M_{x\theta}{}^{th} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} (Q_{11} + Q_{12}) \\ (Q_{12} + Q_{22}) \\ 0 \\ (Q_{11} + Q_{12})z \\ (Q_{12} + Q_{22})z \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha(z)\Delta T(z)\mathrm{d}z, \tag{9}$$

$$\Delta T(z) = T(z) - T_i \tag{10}$$

$\Delta T(z)$ تغییر دمای پوسته نسبت به حالت بدون تنش بوده و دمای سطح داخلی پوسته T_i به عنوان دمای اولیه فرض می‌شود. بنابراین در حالت $T(z) = T_i$ تنش‌های حرارتی صفر خواهند بود.

4-2- تعیین توزیع دمای پوسته

در این تحقیق سه نوع توزیع دما در ضخامت پوسته در نظر گرفته شده و اثر آن‌ها بر پایداری پوسته بررسی خواهد شد. در حالت اول افزایش دما به صورت یکنواخت در پوسته فرض می‌شود. در این حالت دمای اولیه پوسته برابر T_{ini} بوده و دما به طور یکنواخت به مقدار نهایی T_{fin} افزایش می‌یابد. بنابراین تغییر دما نسبت به حالت بدون تنش برابر است با:

$$\Delta T = T_{fin} - T_{ini} \qquad (11)$$

حالت دوم مربوط به توزیع خطی دما در ضخامت پوسته می‌شود که به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$T(z) = T_i - (T_i - T_o)(z/h + 0.5) \qquad (12)$$

که در آن T_i و T_o به ترتیب دمای سطوح داخلی و بیرونی پوسته می‌باشند.

در حالت سوم توزیع دمای غیرخطی در ضخامت با حل معادله انتقال حرارت حالت پایا در ضخامت پوسته از جنس ماده هدفمند تعیین می‌شود. معادله انتقال حرارت مورد نظر به صورت زیر است [20]:

$$\frac{d}{dz}\left[k(z)\frac{dT}{dz}\right] = 0 \qquad (13)$$

معادله (13) با اعمال شرایط مرزی به صورت $T(-h/2) = T_i$ و $T(h/2) = T_o$ حل می‌شود. با استفاده از روش سری چند جمله‌ای توزیع دمای غیرخطی به صورت زیر بیان می‌شود [21]:

$$T(z) = T_i - (T_i - T_o)\eta(z) \qquad (14)$$

که در آن:

$$\eta(z) = \frac{1}{C}\left[\left(\frac{2z+h}{2h}\right) - \frac{k_{oi}}{(N+1)k_i}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{N+1} + \frac{{k_{oi}}^2}{(2N+1){k_i}^2}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{2N+1} - \frac{{k_{oi}}^3}{(3N+1){k_i}^3}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{3N+1} + \frac{{k_{oi}}^4}{(4N+1){k_i}^4}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{4N+1} - \frac{{k_{oi}}^5}{(5N+1){k_i}^5}\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{5N+1}\right] \qquad (15)$$

$$C = 1 - \frac{k_{oi}}{(N+1)k_i} + \frac{{k_{oi}}^2}{(2N+1){k_i}^2} - \frac{{k_{oi}}^3}{(3N+1){k_i}^3} + \frac{{k_{oi}}^4}{(4N+1){k_i}^4} - \frac{{k_{oi}}^5}{(5N+1){k_i}^5} \qquad (16)$$

$$k_{oi} = k_o - k_i \qquad (17)$$

در این تحقیق علاوه بر روش حل سری با استفاده از روش حل تحلیلی نیز توزیع غیرخطی دمای پوسته بدست می‌آید. به این منظور با دو بار انتگرال‌گیری از معادله انتقال حرارت و اعمال شرایط مرزی رابطه زیر برای توزیع دما بدست می‌آید:

$$T(z) = T_i - \frac{(T_i - T_o)}{\int_{-h/2}^{h/2}\frac{dz}{k(z)}}\int_{-h/2}^{z}\frac{dz}{k(z)} \qquad (18)$$

2-5- معادلات حاکم بر پوسته

معادلات حرکت حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک و بارهای ترمومکانیکی با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شوند:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T - U + W)\mathrm{d}t = 0 \qquad (19)$$

T و U به ترتیب انرژی‌های جنبشی و کرنشی پوسته و W کار انجام شده توسط نیروهای خارجی هستند. t_1 و t_2 معرف زمان دلخواه هستند. از آنجا که هدف مقاله بررسی پایداری حرارتی پوسته است، بنابراین جمله مربوط به انرژی جنبشی از معادلات حاکم حذف خواهد شد.

با تعریف بردار کرنش و همچنین بردار نیروها و ممان‌ها به صورت زیر:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z,0} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک پسترناک به صورت زیر قابل بیان می‌باشد [13]:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\{N\}^T\{e\}Rd\theta dx + \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\left[k_1 w^2 + k_s\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + k_s\left(\frac{\partial w}{R\partial\theta}\right)^2\right]\mathrm{R}d\theta\mathrm{d}x \qquad (21)$$

عبارت انتگرال دوم مربوط به انرژی بستر الاستیک است که به انرژی کرنشی پوسته اضافه شده است. k_1، بر حسب نیرو بر واحد حجم، معرف پارامتر بستر وینکلر و k_s، بر حسب نیرو بر واحد طول، معرف پارامتر برشی بستر پسترناک می‌باشند.

کار انجام شده توسط نیروی محوری N_a و نیروی حرارتی ${N_{xx}}^{th}$ با عبارت زیر قابل توصیف است [2, 22]:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}(N_a - {N_{xx}}^{th})\left[C_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{R}d\theta\mathrm{d}x \qquad (22)$$

لازم به ذکر است که دو مؤلفه در کوتاه شدن طول استوانه حین کمانش سهم دارند: یکی کوتاه شدن در اثر تغییر مکان محیطی $(\partial v/\partial x)^2$ و دیگری کوتاه شدن در اثر تغییر مکان شعاعی $(\partial w/\partial x)^2$. برخی محققان از اثر ترم $(\partial v/\partial x)^2$ در روابط خود صرفنظر می‌کنند $(C_0 = 0)$. این در حالی است که در تحقیق حاضر نشان داده می‌شود که با توجه به مشخصات هندسی پوسته در برخی از موارد نمی‌توان از اثر این ترم صرفنظر کرد.

با جایگذاری روابط (21) و (22) در رابطه (19) و انجام محاسبات ریاضی، معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت بستر الاستیک پسترناک بر پایه تئوری مرتبه اول برشی سندرز-کویتر به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{2R^2\partial\theta} = 0 \qquad (23)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{2R\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} + (N_a - {N_{xx}}^{th})\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad (24)$$

$$-\frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} - k_1 w + k_s\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}\right) + (N_a - {N_{xx}}^{th})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\partial\theta} - Q_x = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R\partial\theta} - Q_\theta = 0 \qquad (27)$$

معادلات حاکم بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان را می‌توان با جایگذاری روابط (4) و (7) در معادلات (23-27) استخراج نمود:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = 0 \qquad (28)$$

عملگرهای دیفرانسیلی خطی L_{ij} در پیوست معرفی شده‌اند.

3- روش حل

در این تحقیق شرایط مرزی ساده در دو انتهای استوانه به صورت زیر مورد نظر است:

$$v = w = N_x = M_x = \psi_\theta = 0 \quad (29)$$

به منظور حل دستگاه معادلات (28)، با توجه به شرایط مرزی (29)، میدان تغییر مکان به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\begin{aligned} u &= A\cos(\lambda x)\cos(n\theta) \\ v &= B\sin(\lambda x)\sin(n\theta) \\ w &= C\sin(\lambda x)\cos(n\theta) \\ \psi_x &= D\cos(\lambda x)\cos(n\theta) \\ \psi_\theta &= E\sin(\lambda x)\sin(n\theta) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن $\lambda = m\pi/L$، m عدد نیم موج محوری و n عدد موج محیطی و A, B, C, D, E ضرایب ثابت مجهول می‌باشند.

با جایگذاری میدان تغییر مکان در دستگاه معادلات (28) و اعمال روش گالرکین، دستگاه معادلات جبری خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = 0 \quad (31)$$

که در آن T_{ij} ها عبارت‌های جبری بر حسب ثوابت ماده و مشخصات هندسی پوسته هستند. معیار بحث پایداری پوسته، داشتن جواب غیر بدیهی دستگاه معادلات (31) است که با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[T_{ij}]$ حاصل می‌شود:

$$\det([T_{ij}]) = 0 \quad (32)$$

با حل معادله (32) به ازای مقادیر مختلف m, n بار کمانش بدست می‌آید که کمترین مقدار آن مساوی بار بحرانی کمانش خواهد بود. لازم به توضیح است که با معلوم بودن توزیع دمای پوسته، می‌توان از رابطه (32) بار کمانش مکانیکی را تعیین نمود. از طرف دیگر با مشخص بودن مقدار نیروی محوری مکانیکی می‌توان دمای بحرانی پوسته را بدست آورد.

4- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش صحت سنجی نتایج تئوری توسعه داده شده با نتایج مراجع موجود بررسی می‌شود. به این منظور پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند با ترکیبی از فلز و سرامیک شامل فولاد و آلومینا با شعاع $R = 1$ و نسبت طول به شعاع $L/R = 1$ در نظر گرفته می‌شود. خواص مواد شامل مدول الاستیسیته و ضریب انبساط برای فولاد برابر $E_m = 200$ GPa, $\alpha_m = 11.7 \times 10^{-6}$ /°C و برای آلومینا برابر $E_c = 380$ GPa, $\alpha_c = 7.4 \times 10^{-6}$ /°C می‌باشند. ضریب پواسون هر دو ماده برابر $\upsilon_m = \upsilon_c = 0.3$ در نظر گرفته شده است. دماهای بحرانی پوسته استوانه‌ای با مشخصات ذکر شده در جدول‌های 1 و 2 که به ترتیب برای حالت افزایش دمای یکنواخت و توزیع خطی دما و توسط اسلامی و همکاران [23] و یعقوبی و همکاران [7] منتشر شده برای مقایسه با نتایج تحقیق حاضر استفاده شده‌اند. همانگونه که از بررسی مقایسه نتایج مشخص است، همخوانی کاملاً مناسبی بین نتایج وجود دارد. لازم به توضیح است که مقادیر کمتر دمای بحرانی بدست آمده از پژوهش حاضر نسبت به نتایج مراجع (به خصوص به ازای h/R=0.01) به علت استفاده از تئوری مرتبه اول برشی در پژوهش حاضر است در حالی که نتایج مراجع دیگر بر پایه تئوری پوسته نازک بدست آمده‌اند.

همچنین با بررسی نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود که اثر عبارت $(\partial v/\partial x)^2$ با افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته بیشتر می‌شود. بنابراین

جدول 1 مقایسه دماهای بحرانی پوسته استوانه‌ای در حالت افزایش یکنواخت دما

Table 1 Comparison of buckling temperatures of cylindrical shell for uniform temperature rise

ماده	h/R	مرجع [23]	مرجع [7]	پژوهش حاضر $C_0 = 0$	پژوهش حاضر $C_0 = 1$
سرامیک (N=0)	0.001	57.29	57.26	56.93	56.59
	0.005	286.48	286.51	284.15	281.84
	0.01	572.9	573.56	561.70	550.13
فلز (N=∞)	0.001	36.23	36.21	36.01	35.79
	0.005	181.19	181.21	179.72	178.26
	0.01	362.39	362.76	355.26	347.95

جدول 2 مقایسه دماهای بحرانی پوسته استوانه‌ای در حالت توزیع خطی دما

Table 2 Comparison of buckling temperatures of cylindrical shell for linear temperature distribution

ماده	h/R	مرجع [23]	مرجع [7]	پژوهش حاضر $C_0 = 0$	پژوهش حاضر $C_0 = 1$
سرامیک (N=0)	0.001	114.58	114.52	113.86	113.18
	0.005	572.96	573.02	568.29	563.67
	0.01	1145.8	1146.72	1123.40	1100.27
فلز (N=∞)	0.001	72.46	72.42	72.02	71.58
	0.005	362.4	362.46	359.43	356.51
	0.01	724.78	725.52	710.53	695.90

حذف این عبارت از معادلات حاکم، تنها در بررسی پوسته‌های خیلی نازک مجاز خواهد بود.

5- بحث و بررسی نتایج عددی

همانگونه که قبلاً اشاره شد، در تحقیق حاضر از دو روش حل سری چند جمله‌ای و حل تحلیلی دقیق جهت تعیین توزیع دما در ضخامت پوسته در حالت توزیع غیرخطی دما استفاده می‌شود. جهت بررسی اثر دو روش حل سری و حل دقیق بر توزیع دمای غیرخطی، صفحه ساخته شده از مواد هدفمند مورد بررسی توسط ردی [20] را در نظر بگیرید که سطح پایینی آن ($z = -h/2$) از آلومینیوم و سطح بالایی آن ($z = h/2$) از زیرکونیا تشکیل شده است. خواص مواد شامل مدول الاستیسیته و ضرایب انتقال حرارت و انبساط آلومینیوم برابر $E_i = 70$GPa, $k_i = 204 W/m.K$, $\alpha_i = 23 \times 10^{-6}$/°C و زیرکونیا برابر $E_o = 151$GPa, $k_o = 2.09 W/m.K$, $\alpha_o = 1 \times 10^{-5}$/°C می‌باشند. ضریب پواسون هر دو ماده نیز برابر $\upsilon_i = \upsilon_o = 0.3$ در نظر گرفته می‌شود. شکل 2 توزیع غیرخطی دما در ضخامت صفحه مورد نظر را به ازای مقادیر مختلف عدد کسر حجمی با استفاده از دو روش ذکر شده نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که دمای سطح پایینی صفحه برابر 20 °C و دمای سطح درونی برابر 300 °C در نظر گرفته شده است.

با بررسی شکل ارائه شده مشخص می‌شود که نتایج دو روش برای تعیین توزیع غیرخطی دما در ضخامت پوسته، به غیر از حالت ماده همسانگرد (سرامیک یا فلز) با هم متفاوت می‌باشند. از آنجا که توزیع دما در ضخامت پوسته نقش تعیین کننده‌ای در بررسی پایداری حرارتی آن دارد، بنابراین لازم است که اثر دو روش بر پایداری حرارتی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بررسی شود.

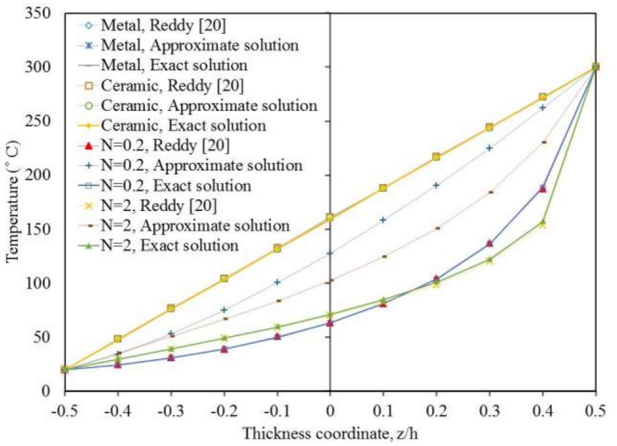

Fig. 2 Temperature distribution across the shell thickness for different volume fraction exponents

شکل 2 توزیع دما در ضخامت پوسته به ازای توان‌های کسر حجمی مختلف

در ادامه اثرات توزیع دما، ترکیب ماده هدفمند، نیروی محوری و بستر الاستیک بر پایداری حرارتی پوسته بررسی خواهد شد. به این منظور پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند با ترکیب آلومینیوم و زیرکونیا، $L/R = 1$ و خواص مواد ذکرشده در قبل رادر نظر بگیرید. شکل 3 اثر توزیع دما بر پایداری حرارتی پوسته‌های فلزی (آلومینیومی) و هدفمند (N=2) را نشان می‌دهد. UTR، LTD و NTD به ترتیب معرف افزایش یکنواخت دما، توزیع دمای خطی و غیرخطی در ضخامت پوسته می‌باشند. همانگونه که مشاهده می‌شود کمترین مقادیر بارهای بحرانی به ازای نسبت ضخامت به شعاع‌های مختلف، در حالت افزایش یکنواخت دما و بیشترین مقادیر بارهای بحرانی در حالت توزیع غیرخطی دما حاصل می‌شوند. از بررسی نمودار مشخص است که در حالت توزیع غیرخطی دما، مقادیر بدست آمده از دو روش تعیین توزیع دما متفاوت بوده به طوری که مقادیر بار بحرانی از روش حل دقیق نسبت به حل سری بیشتر می‌باشند. همچنین همانگونه که انتظار می‌رود برای پوسته فلزی نتایج حاصل از توزیع خطی و غیرخطی (سری و دقیق) بر هم منطبق می‌باشند. در ادامه جهت بررسی اثرات ترکیب ماده هدفمند، نیروی محوری و بستر الاستیک بر پایداری حرارتی پوسته، توزیع دمای پوسته به صورت غیرخطی و تعیین آن با روش حل دقیق در نظر گرفته خواهد شد.

اثرات ترکیب ماده هدفمند بر پایداری حرارتی پوسته در شکل 4 قابل مشاهده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش عدد کسر حجمی که منجر به افزایش درصد فلز ماده هدفمند می‌شود، دمای بحرانی پوسته کاهش می‌یابد.

به منظور سهولت بررسی نتایج، مقادیر بار بحرانی نیروی محوری و پارامترهای بدون بعد بستر الاستیک به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$N_{cr} = \frac{E_m h^2}{R\sqrt{[3(1-\upsilon_m{}^2)]}} ,$$
$$Kn1 = \frac{k_1 R^2(1-\upsilon_m{}^2)}{E_m h} , Kns = \frac{k_s(1-\upsilon_m{}^2)}{E_m h} \qquad (33)$$

که در آن‌ها از خواص فلز جهت بدون بعد نمودن پارامترها استفاده شده است.

شکل 5 اثر نیروی محوری (کششی و فشاری) بر پایداری حرارتی پوسته استوانه‌ای در حالت توزیع غیرخطی دما (بدست آمده از حل دقیق) و عدد کسر حجمی N=2 را نشان می‌دهد. با بررسی نمودار می‌توان مشاهده نمود که نیروی محوری کششی پایداری حرارتی پوسته را تقویت و نیروی محوری فشاری پایداری حرارتی پوسته را کاهش می‌دهد. همچنین میزان تغییرات دماهای بحرانی پوسته به ازای نیروهای محوری متفاوت، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، بیشتر می‌شود.

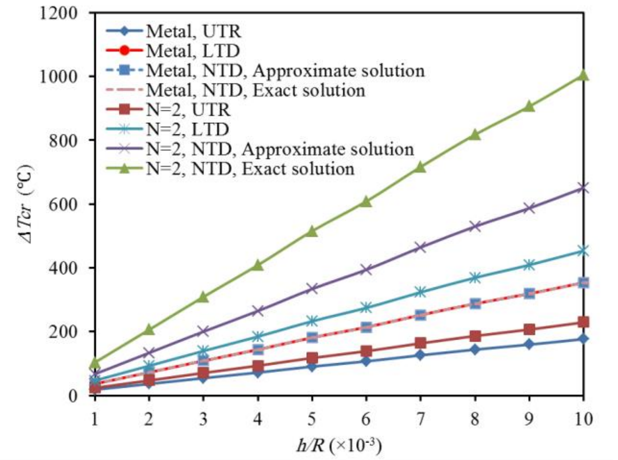

Fig. 3 Comparison of critical temperature of FG cylindrical shell for different types of thermal loads

شکل 3 مقایسه دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند به ازای بارگذاری متفاوت حرارتی

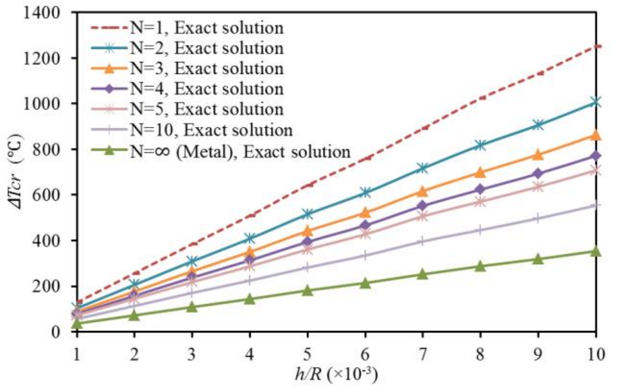

Fig. 4 Comparison of critical temperature of FG cylindrical shell for different volume fraction exponents

شکل 4 مقایسه دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند به ازای توان‌های کسر حجمی مختلف

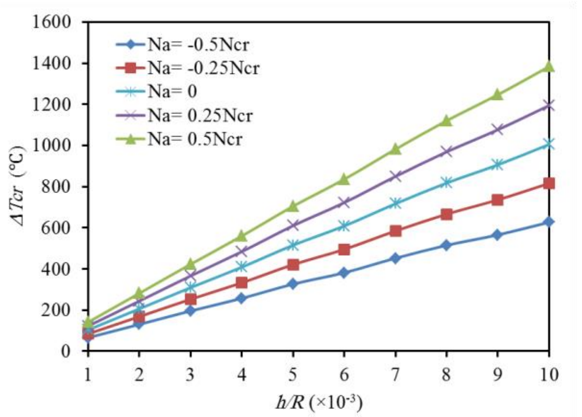

Fig. 5 Effect of axial force on critical temperature of FG cylindrical shell

شکل 5 اثر نیروی محوری بر دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند

تغییرات دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند با پارامترهای بستر الاستیک (وینکلر و برشی) به ازای عدد کسر حجمی N=2 در شکل‌های 6 و 7 نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که پایداری حرارتی پوسته با افزودن بستر الاستیک به آن افزایش می‌یابد. همچنین با بررسی نمودارها می‌توان اثر قابل توجه پارامتر برشی بستر بر پایداری حرارتی پوسته را مشاهده نمود.

6- نتیجه گیری

پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند در صنایع مختلف از جمله هوافضا، شیمیایی، نفت و گاز کاربرد گسترده‌ای دارند. با توجه به نوع عملکرد، این اجزای سازه‌ای معمولاً در تداخل با بستر الاستیک و تحت بارهای حرارتی و مکانیکی قرار داشته و پایداری حرارتی آنها موضوعی مهم جهت بررسی می‌باشد. بنابراین در تحقیق حاضر پایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت بستر الاستیک و نیروی محوری با فرض تغییرات یکنواخت دما و توزیع خطی و غیرخطی دما در ضخامت پوسته، مورد بررسی قرار گرفت. دو روش حل برای تعیین توزیع غیرخطی دمای پوسته معرفی و نتایج بدست آمده نشان داد که با توجه به روش انتخابی، پایداری حرارتی پوسته نیز متفاوت می‌باشد.

مشاهده شد که افزایش درصد حجمی فلز، موجب افزایش تنش‌های حرارتی به علت سفتی پایین‌تر ماده فلز در مقایسه با سرامیک شده و نهایتاً پایداری حرارتی پوسته کاهش می‌یابد.

نیروی محوری کششی و بستر الاستیک باعث افزایش دمای بحرانی پوسته می‌شوند. میزان تغییرات دمای بحرانی به ازای نیروی محوری و پارامتر وینکلر بستر، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع پوسته افزایش می‌یابد، درحالی که به ازای پارامتر برشی بستر، وابسته به این نسبت نمی‌باشد. همچنین پارامتر برشی بستر در مقایسه با پارامتر وینکلر اثر بیشتری بر دمای بحرانی پوسته دارد.

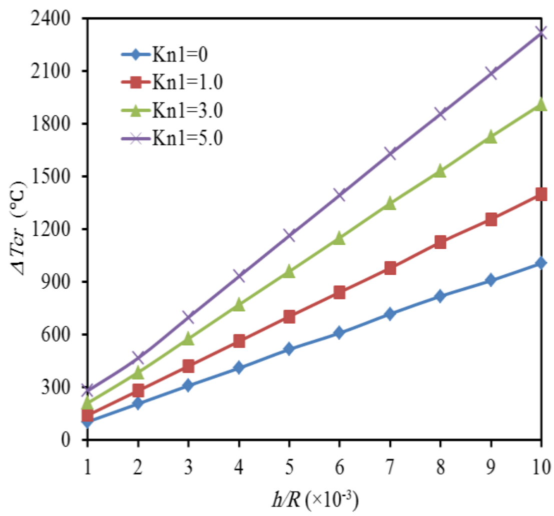

Fig. 6 Effect of Winkler parameter of elastic foundation on critical temperatures of FG cylindrical shell

شکل 6 اثر پارامتر وینکلر بستر الاستیک بر دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند

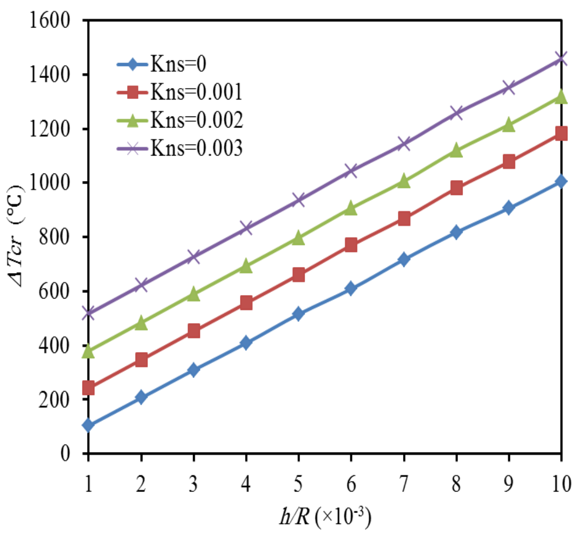

Fig. 7 Effect of shear parameter of elastic foundation on critical temperatures of FG cylindrical shell

شکل 7 اثر پارامتر برشی بستر الاستیک بر دمای بحرانی پوسته استوانه‌ای هدفمند

7- پیوست

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{4R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{R}\left(A_{12} + A_{66} - \frac{D_{66}}{4R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{13} = -L_{31} = \frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{14} = L_{41} = B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\left(B_{66} - \frac{D_{66}}{2R}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{15} = L_{51} = \frac{1}{R}\left(B_{12} + B_{66} - \frac{D_{66}}{2R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{22} = \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{4R^2} + N_a - N_{xx}{}^{th}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{C_{55}}{R^2}$$

$$L_{23} = -L_{32} = \frac{1}{R^2}(C_{55} + A_{22})\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{24} = L_{42} = \frac{1}{R}\left(B_{12} + B_{66} + \frac{D_{66}}{2R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{25} = L_{52} = \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{2R}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{C_{55}}{R}$$

$$L_{33} = (C_{44} + k_s + N_a - N_{xx}{}^{th})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}(C_{55} + k_s)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{A_{22}}{R^2} - k_1$$

$$L_{34} = -L_{43} = \left(C_{44} - \frac{B_{12}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{35} = -L_{53} = \frac{1}{R}\left(C_{55} - \frac{B_{22}}{R}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$L_{44} = -C_{44} + D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$L_{45} = L_{54} = \frac{1}{R}(D_{12} + D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}$$

$$L_{55} = -C_{55} + D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

8- مراجع

[1] Mahmoudabadi, M. R., Ovesy, H. R. and Fazilati, J., “Dynamic Instability Analysis of Laminated Composite Cylindrical Panels Using the First Order Shear Deformation Layerwise Theory and Spline Finite Strip Method“ Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 1, No. 1, pp. 61-74, 2014. (in Persian فارسی)

[2] Shahsiah, R. and Eslami, M. R., “Thermal Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shell“ Journal of Thermal Stresses, Vol. 26, pp. 277–294, 2003.

[3] Shahsiah, R. and Eslami, M., “Functionally Graded Cylindrical Shell Thermal Instability Based on Improved Donnell Equations“ AIAA journal, Vol. 41, No. 9, pp. 1819-1826, 2003.

[4] Mirzavand, B., Eslami, M. R. and Shahsiah, R., "Effect of Imperfections on Thermal Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells" AIAA J., Vol. 43, No. 9, pp. 2073–2076, 2005.
[5] Mirzavand, B. and Eslami, M. R., "Thermal Buckling of Imperfect Functionally Graded Cylindrical Shells Based on the Wan–Donnell Model" Journal of Thermal Stresses, Vol. 29, No. 1, pp. 37–55, 2006.
[6] Mirzavand, B. and Eslami, M., "Thermal Buckling of Simply Supported Piezoelectric Fgm Cylindrical Shells" Journal of Thermal Stresses, Vol. 30, No. 11, pp. 1117-1135, 2007.
[7] Yaghoobi, H., Fereidoon, A. and Shahsiah, R., "Thermal Buckling of Axially Functionally Graded Thin Cylindrical Shell" Journal of Thermal Stresses, Vol. 34, No. 12, pp. 1250-1270, 2011.
[8] Sun, J., Xu, X. and Lim, C., "Accurate Symplectic Space Solutions for Thermal Buckling of Functionally Graded Cylindrical Shells" Composites Part B: Engineering, Vol. 55, pp. 208-214, 2013.
[9] Ovesy, H. R., Ghannadpour, S. A. M. and Nassirnia, M., "Post-Buckling Analysis of Rectangular Plates Comprising Functionally Graded Strips in Thermal Environments" Computers and Structures, Vol. 147, pp. 209–215, 2015.
[10] Arefi, M. and Rahimi, G., "The Effect of Nonhomogeneity and End Supports on the Thermo Elastic Behavior of a Clamped–Clamped Fg Cylinder under Mechanical and Thermal Loads" International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 96, pp. 30-37, 2012.
[11] Hadi, A., Shakhesi, S., Ovesy, H. R. and Fazilati, J., "Free Vibration of Fgm Cylindrical Shells on Elastic Foundation under Axial Force, Lateral Pressure and Different Boundary Conditions", in Persian. Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, Vol. In Press, Accepted Manuscript, Available Online 17 May 2017.
[12] Sheng, G. G. and Wang, X., "Thermal Vibration, Buckling and Dynamic Stability of Functionally Graded Cylindrical Shells Embedded in an Elastic Medium" Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 27, No. 2, pp. 117–134, 2008.
[13] Bagherizadeh, E., Kiani, Y. and Eslami, M. R., "Mechanical Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells Surrounded by Pasternak Elastic Foundation" Composite Structures ,Vol. 93, pp. 3063–3071, 2011.
[14] Bagherizadeh, E., Kiani, Y. and Eslami, M. R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Material Cylindrical Shells on Elastic Foundation" AIAA Journal, Vol. 50, No. 2, pp. 500-503, 2012.
[15] Shen, H.-S., "Postbuckling of Shear Deformable Fgm Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium" International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 51, pp. 372–383, 2009.
[16] Shen, H.-S., Yang, J. and Kitipornchai, S., "Postbuckling of Internal Pressure Loaded Fgm Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium" European Journal of Mechanics-A:Solids, Vol. 29, pp. 448–460, 2010.
[17] Shen, H. S., "Thermal Postbuckling of Shear Deformable Fgm Cylindrical Shells Surrounded by an Elastic Medium" Journal of Engineering Mechanics, Vol. 139, No. 9, pp. 979-991, 2013.
[18] Arefi, M., Abbasi, A. and Vaziri Sereshk, M., "Two-Dimensional Thermoelastic Analysis of Fg Cylindrical Shell Resting on the Pasternak Foundation Subjected to Mechanical and Thermal Loads Based on Fsdt Formulation" Journal of Thermal Stresses, Vol. 39, No. 5, pp. 554-570, 2016.
[19] Wang, S. and Dawe, D. J., "Buckling of Composite Shell Structures Using the Spline Finite Strip Method" Composites: Part B, Vol. 30, pp. 351–364, 1999.
[20] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis" second ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2004 .
[21] Javaheri, R. and Eslami, M. R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates" AIAA Journal, Vol. 40, pp. 162–169, 2002.
[22] Lim ,C. W., Ma, Y. F., Kitipornchai, S., Wang, C. M. and Yuen, R. K. K., "Buckling of Vertical Cylindrical Shells under Combined End Pressure and Body Force" Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, pp. 876-884, 2003.
[23] Eslami, M. R., Ziaii, A. R. and Ghorbanpour, A., "Thermoelastic Buckling of Thin Cylindrical Shells Based on Improved Stability Equations" Journal of Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 299–315, 1996.