



بررسی تاثیر نصب جرم گسترده بر سرعت فلاتر ورق یک سر گیردار کامپوزیتی در جریان مافوق صوت

نادر وحدت آزاد^{۱*}، ابازر وحدت آزاد^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران
۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد واحد تهران جنوب، تهران
*nader.vahdatazad@ssau.ac.ir، ۱۳۸۴۶۶۳۱۱۳، صندوق پستی

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این پژوهش رفتار ارتعاشی و فلاتر یک ورق کامپوزیتی چند لایه یک سر گیردار در حضور جرم گسترده بررسی شده است. به منظور استخراج فرکانس های طبیعی با انتخاب مدهای فرضی از روش ریلی ریتز استفاده شده است. در این روش انرژی کرنشی ورق محاسبه شده و اثر جرم گسترده اضافه شده به صورت انرژی جنبشی برای سیستم لحاظ شده است. پس از حل مسئله مقدار ویژه فرکانس های طبیعی و حل ارتعاشات اجباری با در نظر گرفتن اثر سیال بر روی صفحه با استفاده از تئوری پیستون، سرعت فلاتر برای ورق با و بدون جرم گسترده بدست آمده است. اثر گستردگی طول یک جرم مشخص بر رفتار ارتعاشی ورق بررسی شده است. علاوه بر این، افزایش چگالی جرم اضافه شده در یک موقعیت مشخص بر سرعت فلاتر نشان داده شده است. تاثیر فاصله قرارگیری جرم گسترده از انتهای گیردار ورق مورد مطالعه قرار گرفته و تغییرات فشار آیرودینامیکی بی بعد و فرکانس بی بعد فلاتر بدست آمده است. در انتها با فرض چندلایه با زاویه لایه چینی های متفاوت رفتار ارتعاش اجباری ورق بدست آمده است.</p>	<p>دریافت: ۹۵/۵/۲۳ پذیرش: ۹۵/۱۲/ ۲۹</p> <p>کلیدواژگان: ورق کامپوزیتی یکسر گیردار ارتعاشات اجباری جرم اضافه شده ریلی ریتز سرعت فلاتر</p>

Investigation of attached mass effect on flutter speed of cantilever composite plate in supersonic flow

Nader Vahdat Azad^{1*}, Abazar Vahdat Azad²

1- School of Mechanical Engineering, Shahid Sattari University of Aeronautical Engineering, Tehran, Iran.

2- School of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, South Tehran Branch, Tehran, Iran

* P.O.B. 1384663113, Tehran, Iran, nader.vahdatazad@ssau.ac.ir

Keywords

Cantilever composite plate
Force vibration
Attached mass
Rayleigh-Ritz
Flutter speed

Abstract

In this study the vibration behavior of a laminated composite cantilever plate with an attached strip mass was studied. In order to extract flutter speed, the Rayleigh-Ritz method was used by choosing selected shape functions. In this method, strain energy of the plate is calculated and the effect of attached mass is considered as kinetic energy for the system. After reaching an eigenvalue problem then natural frequencies, the force vibration of the plate is analyzed by piston method and flutter speed for each case study is obtained. The effect of the attached mass length is shown. Moreover results have shown that flutter speed was reduced continuously by increasing the mass density. Also by considering a specific laminate with different orientation of layers flutter speed is obtained. At the end attached mass offset from clamped edge is analyzed. In this paper effect of attachment mass, mass length and mass position on plate flutter frequency is analyzed. The results obtained through this study reveal that strip mass density, attached mass length, orientation of composite layers and attached mass position can change the system critical dynamic pressure significantly.

۱- مقدمه

بکار رفته است [۱]. این سازه ها در بسیاری موارد در معرض بارگذاری های ارتعاشی هستند. از بین انواع شرایط مرزی متفاوت برای ورق ها، ورق یک سر گیردار به دلیل شرایط مرزی پیچیده کمتر بررسی شده است در حالی که کاربرد فراوانی برای آن یافت می شود. به عنوان نمونه در صنعت هوانوردی بال هواپیما را می توان با یک ورق یک سر گیردار معادل قرار داد و یا سطوح کنترلی بال و دم همگی ورق یک سر گیردار هستند که مساله ارتعاشات آزاد و اجباری آن سال ها توسط محققین بررسی شده است [۲].

در سال های اخیر صفحات چند لایه کامپوزیتی در صنعت و زمینه های جدید علوم مهندسی وارد شده است. سازه های ساخته شده از این مواد در معرض شرایط متفاوت بارگذاری از جمله بارهای دینامیکی هستند. ورق های مربعی و مستطیلی کاربرد وسیعی در مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا دارند. به طور کلی در بیشتر سازه های هوایی، دریایی و خودرو، ورق و پوسته

Please cite this article using:

Vahdat Azad, N. and Vahdat Azad, A., "Investigation of attached mass effect on flutter speed of cantilever composite plate in supersonic flow", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 2, pp. 179-188, 2017.

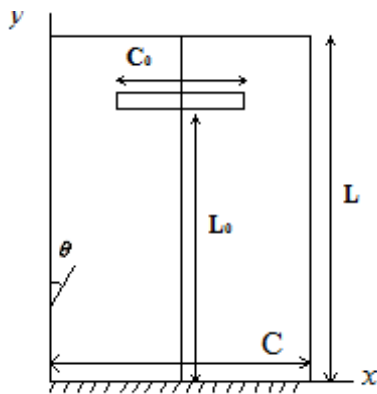
برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

کردند. فلاتر یک ورق با شرایط مرزی ساده با استفاده از روش لاگرانژ مورد مطالعه قرار گرفت [۱۴]. در تحقیقات دیگری روش المان محدود برای بررسی مشخصات فلاتر یک ورق بررسی گردید [۱۵، ۱۶]. رفتار ورق کامپوزیتی نیز مورد توجه محققین در جریان مافوق صوت بوده است [۱۷، ۱۸]. برخی از محققین به بررسی کنترل سرعت فلاتر با استفاده از پیزوالکتریک پرداخته‌اند [۱۹].

هرچند تحقیقاتی در زمینه ارتعاشات ورق با جرم نقطه ای و یا جرم توزیع شده به صورت دو بعدی وجود دارد، در نظر گرفتن جرم به صورت یک نوار نازک و لحاظ کردن آن به صورت توزیع یک بعدی تا کنون در نظر گرفته نشده است. در این پژوهش ارتعاشات اجباری (فلاتر) یک ورق یک سر گیردار به همراه جرم طولی توزیع شده روی آن بررسی شده است. این مساله می-تواند مدلی ساده از بال یک هواپیما باشد و توزیع جرم نیز متعلقات نصب شده روی بال مانند موتور و یا مخزن سوخت هستند. روابط این مساله با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده، به کمک توابع تقریب اولیه برای ورق یک سر گیردار حل شده و به کمک روش رلی-ریتز به مساله مقدار ویژه منجر شده است. ابتدا با ثابت در نظر گرفتن فاصله جرم گسترده از سر گیردار ورق، اثر اندازه موثر جرم یعنی اندازه گسترده‌گی بر سرعت فلاتر بررسی شده است. در ادامه برای یک چند لایه با زاویه چینی $[\theta, -\theta, \theta, -\theta, \theta]$ اثر تغییر زاویه در حالت ورق مقایسه شده است. در مرحله بعد اثر طول جرم گسترده بر فلاتر بررسی شده است. در نهایت دوری و نزدیکی جرم به سر گیردار بررسی شده است.

۲- تعریف مساله

شکل ۱ ورق مستطیلی با عرض C ، طول L و ضخامت کلی h را نشان میدهد. شرایط مرزی ورق یک سر گیردار در نظر گرفته شده است بدین معنی که ورق از یک طرف در راستای عرض خود گیردار و از سه طرف دیگر آزاد است. به فاصله مشخص L_0 از لبه گیردار ورق جرمی به صورت توزیع متقارن یک بعدی بر روی ورق سوار شده است که گسترده‌گی آن C_0 در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات عمومی در لبه صفحه تعریف شده است و مرکز آن در صفحه میانی ورق قرار دارد. در ادامه فرض بر این است که جابجایی کلی ورق در سه جهت با (u, v, w) نشان داده می‌شود که در این تحقیق فقط جابجایی عرضی یعنی w را در نظر گرفته شده است. دامنه هندسه صفحه به صورت $0 < x < C$ و $0 < y < L$ و $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$ تعریف می‌شود.



شکل ۱ هندسه ورق یک سر گیردار کامپوزیت با جرم اضافه شده

مساله ورق دارای بارگذاری به صورت جرمی از سیستم های الکترونیکی شروع شد. بوردهای الکتریکی و پایه صفحه مانند آن‌ها می‌تواند ورق مستطیلی در نظر گرفته شود که تعدادی جرم متمرکز را حمل می‌کند و در معرض بارگذاری ارتعاشی قرار دارد [۱]. گورمن در سال ۱۹۷۶ ارتعاشات آزاد یک ورق یک سر گیردار ایزوتروپ را حل کرد [۳]. او به کمک روش جمع آثار مودهای متقارن و پادمتقارن را برای ورق با نسبت‌های منطقی متفاوت تقریب زد. بوآی در سال ۱۹۹۴ ارتعاشات آزاد یک صفحه مستطیل شکل ایزوتروپ دارای جرم متمرکز را بررسی کرد. او به کمک روش ریتز و توابع پایه مثلثاتی تغییر شکل صفحه را تقریب زد و مساله را برای انواع شرایط مرزی مطالعه کرد [۴]. کمپاز در سال ۲۰۰۲ برای اولین بار ارتعاش آزاد ورقی را که دارای جرم توزیع شده است بررسی کرد [۵]. تا پیش از آن مطالعات غالباً بر روی تیر با جرم گسترده یکنواخت و یا ورق دارای جرم متمرکز محدود می‌شد. او معادلات حرکت سیستم را استخراج کرد و به کمک روش گلرکین مساله را به یک مساله مقدار ویژه تبدیل کرد تا به فرکانس های طبیعی سیستم منجر گردد. او دریافت مکان قرارگیری جرم اثر قابل ملاحظه ای بر رفتار ورق دارد. او همچنین اثر افزایش جرم در یک موقعیت مشخص را بر چند شکل مودهای اول ورق بررسی کرد [۵]. ونگ در سال ۲۰۰۲ اثر توده جرمی به صورت گسترده را بر پاسخ ارتعاشی ورق بررسی کرد [۶]. او به منظور محاسبه پاسخ صفحه مستطیلی از روش رلی ریتز استفاده کرد. در آن مطالعه اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی لحاظ نشده بود. در سال ۲۰۰۸ علی بیگ لو و همکاران ارتعاشات آزاد یک ورق چندلایه مستطیل شکل به همراه توده جرمی را بررسی کردند [۱]. آن‌ها به منظور حل مساله از تئوری مرتبه سوم برشی به کمک اصل همیلتون استفاده کردند. با توجه به چهار طرف مفصل بودن ورق، از توابع تقریب سری فوریه کمک گرفتند. آن‌ها دریافتند فرکانس های طبیعی ورق به مقدار بارگذاری جرمی و مکان آن وابسته است. همچنین با افزایش سطح توزیع جرم، فرکانس های طبیعی ورق افزایش می‌یابند [۱]. علی بخشی در سال ۲۰۱۱ ارتعاشات آزاد یک صفحه مستطیلی کامپوزیتی را که جرم گسترده دو بعدی داشت را بررسی کرد [۷]. او معادلات را به کمک تئوری صفحات دو متغیره اصلاح شده استخراج کرد و اثر نسبت منطقی ورق، اندازه و موقعیت جرم گسترده را بر ارتعاشات آزاد ورق بررسی کرد. در ادامه علی بخشی در سال ۲۰۱۲ در یک ورق چند لایه کامپوزیتی مستطیلی دارای جرم گسترده، اثر ناهمسانگردی را بر رفتار ارتعاشی ورق بررسی کرد [۸]. او با مطالعه پارامتری فرکانس بی بعد شده اثر ناهمسانگردی روی ارتعاشات آزاد صفحه چهار طرف مفصل برای چندین نوع لایه چینی متفاوت مورد مطالعه قرار داد. علی بخشی در سال ۲۰۱۴ ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیل شکل کامپوزیتی را دارای یک جرم گسترده دایره‌ای در حال دوران است را بررسی کرد [۹]. اثر دوران دیسک با سرعت زاویه ای دلخواه بر روی ورق به صورت انرژی جنبشی به انرژی جنبشی ورق اضافه شده است. در مطالعه او شرایط مرزی ورق چهار طرف مفصل در نظر گرفته شده است و اثر پارامترهای متفاوت بررسی شده است.

ناپایداری دینامیکی یک سازه در معرض جریان هوا یک مساله بسیار مهم در طراحی سازه‌هایی هوایی است. جردن [۱۰] اولین کسی بود که به این مساله پی برد. از آن زمان تحقیقات زیادی در این زمینه صورت پذیرفته است. داوول^۱ [۱۱] و بیسمارک^۲ [۱۲، ۱۳] این تحقیقات را مستندسازی

¹ Dowell

² Bismark

۳- روابط حاکم

روش ریلی ریتز بر پایه این فرض استوار است که فرم کلی جواب به صورت جمع ضربی از توابع معلوم تقریب زده می‌شود [۲۰]. توابع پایه اولیه بایستی شرایط مرزی هندسی را ارضاء کنند. مزیت استفاده از روش انرژی نسبت به معادله دیفرانسیل عدم نیاز به ارضاء شرایط مرزی نیرویی است که در بسیاری از مسائل از جمله صفحه یک سر گیردار نیاز نیست توابع پایه اولیه شرایط مرزی پیچیده نیرویی را نیز ارضاء کنند. جنس صفحه چندلایه کامپوزیتی فرض شده است. توزیع مشخصات ماده هر لایه فرض می‌شود به صورت ارتوتروپ است. رابطه کرنش با مولفه نیرو و ممان در یک چند لایه به صورت رابطه (۱) است [۲۱].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

در این رابطه M و N به ترتیب ممان خمشی و نیروی صفحه‌ای می‌باشند. ماتریس سختی داخل صفحه مطابق معادله (۲) استخراج می‌شود [۲۱].

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2)$$

ماتریس کوپل بین سختی داخل صفحه با خارج صفحه مطابق معادله (۳) و همچنین سختی خمشی یا خارج از صفحه بر اساس رابطه (۴) بدست می‌آید [۲۱].

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4)$$

ماتریس \bar{Q}_{ij} برای هر لایه بر اساس زاویه θ آن محاسبه می‌شود که انحراف از راستای ۱ تک لایه است. روابط مربوطه در مرجع [۲۱] آورده شده‌اند. کرنش ها و انحناهای صفحه میانی چندلایه نیز به صورت روابط (۵) تعریف می‌شوند [۲۱].

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

با توجه به تعریف انرژی کرنشی طبق رابطه (۶) می‌توان نوشت.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (6)$$

و با جاگذاری به رابطه کلی انرژی کرنشی برای یک ورق کامپوزیتی معادله (۷) بدست می‌آید [۲۲].

$$U = \int_0^L \int_0^C (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (7)$$

انرژی جنبشی نیز مطابق رابطه (۸) داری دو بخش انرژی جنبشی ورق کامپوزیتی و انرژی جنبشی برای جرم اضافه شده می‌باشد.

$$T_{total} = T_{plate} + T_{mass} \quad (8)$$

برای ورق انرژی جنبشی ناشی از تغییر مکان‌های عرضی و همچنین اینرسی‌های دورانی در نظر گرفته شده است. رابطه (۹) معادله حاکم به منظور استخراج انرژی جنبشی ورق را نشان می‌دهد [۲۳].

$$T_{plate} = 1/2 \rho h \int_0^L \int_0^C \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy \quad (9)$$

که در رابطه بالا دوران‌ها مطابق معادله (۱۰) تعریف می‌شوند [۲۳]. همچنین ممان اینرسی مطابق معادله (۱۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10)$$

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (11)$$

برای انرژی جنبشی جرم اضافه شده سرعت ناشی از تغییر مکان‌های عرضی در محل جرم در نظر گرفته شده است. معادله (۱۲) این انرژی را نشان می‌دهد.

$$T_{mass} = \frac{1}{2} \int_{\frac{c-c_0}{2}}^{\frac{c+c_0}{2}} M_0 \left\{ \left(\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, y_0)}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (12)$$

جابجایی‌ها را به صورت بسط روابط (۱۳) زیر در نظر می‌گیریم [۲۰].

$$\begin{aligned} u &= \sum_i \sum_j a_{ij}(t) u_i(x) v_j(y) \\ v &= \sum_r \sum_s b_{rs}(t) u_r(x) v_s(y) \\ w &= \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \phi_m(x) \psi_n(y) \end{aligned} \quad (13)$$

صفحه در نظر گرفته شده از یک سر گیردار و از سه سمت دیگر آزاد است. v, u, ϕ, ψ توابع خیز که شرایط تکیه‌گاهی را ارضاء می‌کنند و a, b, q توابع زمانی هستند. به همین خاطر بر اساس مرجع [۲۰] توابع پایه اولیه را به صورت روابط (۱۴) الی (۱۹) در نظر می‌گیریم:

$$u_i(x) = \cos i \pi \frac{x}{c}, \quad v_j(y) = \sin \left(\frac{2j-1}{2} \right) \pi \frac{y}{L} \quad (14)$$

$$u_r(x) = \cos r \pi \frac{x}{c}, \quad v_s(y) = \sin \left(\frac{2s-1}{2} \right) \pi \frac{y}{L} \quad (15)$$

$$U = D/2 \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dA \quad (24)$$

که

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (25)$$

کار نیروی فشاری آیرودینامیک عبارتست از:

$$W_{\Delta P} = \int_A \Delta P w dA \quad (26)$$

اگر در روابط (23) تا (26) تابع خیز ورق را

$$w(x, y, t) = \Phi_m(x, y) q_m(t) \quad (27)$$

در نظر بگیریم آنگاه انرژی جنبشی ورق را می توان با

$$T = \int_A \rho \cdot h \cdot (\Phi_m \dot{q}_m)^2 dA \quad (28)$$

تعریف می گردد. حال با استفاده از ترم اول لاگرانژ می توان ماتریس جرم را بدست آورد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \int_A \rho \cdot h \cdot \Phi_m \cdot \Phi_n \cdot \ddot{q}_m dA = M \ddot{q} \quad (29)$$

و

$$M_{mn} = \int_A \rho \cdot h \cdot \Phi_m \cdot \Phi_n \cdot dA \quad (30)$$

با جایگذاری (27) در ترم اول رابطه (24) خواهیم داشت.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} q_m \right)^2 \quad (31)$$

و به همین ترتیب مابقی ترم های دیگر انرژی پتانسیل محاسبه می گردد و در نهایت برای بدست آوردن ماتریس سختی از رابطه لاگرانژ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q} = \int_A D \left[\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} k + v \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + 2(1-v) \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} \right] q dx dy \\ = Kq \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{mn} = \int_A D \left[\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + 2(1-v) \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (33) \end{aligned}$$

حال به محاسبه کار نیروی فشار آیرودینامیکی می پردازیم.

$$\begin{aligned} W_{\Delta P} = \int_A \left(-\xi \frac{\partial w}{\partial x} - \mu \frac{\partial w}{\partial t} \right) w dA \\ = - \int_A \left(\xi \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} q_m + \mu \dot{\Phi}_m q_m \right) (\Phi_m q_m) dA \quad (34) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi_m(x) = \sqrt{2} \sin \left(\beta_m \frac{x}{c} + \frac{3}{4} \pi \right) \\ + \exp \left(-\beta_m \frac{x}{c} \right) + (-1)^{m+1} \exp \left[-\beta_m \left(1 - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_n(y) = \sqrt{2} \sin \left(\beta_n \frac{y}{L} - \frac{1}{4} \pi \right) \\ + \exp \left(-\beta_n \frac{y}{L} \right) + (-1)^{n+1} \exp \left[-\beta_n \left(1 - \frac{y}{L} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

در روابط بالا

$$\beta_m = \left(m - \frac{3}{2} \right) \pi, \quad \beta_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \quad (18)$$

در رابطه (17) $\phi(x)$ تابع شکل مود تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد و $\psi(y)$ رابطه (17) شکل مود تیر یکسر گیردار است. برای $m \leq 2$ موده های جابجایی و دورانی در نظر گرفته شده است بنابراین در رابطه (19) $A = 2$ در نظر گرفته شده است تا مقدار توابع $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x)$ در $x = 0$ با مقدار تابع $\phi_m(x)$ سازگار باشد.

$$\phi_1(x) = A, \quad \phi_2(x) = A \left(1 - 2 \frac{x}{C} \right) \quad (19)$$

در توابع استفاده شده تمامی شرایط مرزی هندسی رعایت شده است

یعنی در $y = 0$ ، $u = v = w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ می باشد.

تعداد جمله های مورد نیاز در استفاده از توابع تقریب اولیه برابر با تعداد فرکانس مورد نظر دارد. همچنین دقت فرکانس های محاسبه شده بستگی به توابع پایه استفاده شده دارد. در رفتار ارتعاشات اجباری صفحه، کاربرد اصل تغییرات همیلتون برای حرکت صفحه منجر به معادله (20) می شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\delta T - \delta U) + \delta W] dt = 0 \quad (20)$$

در رابطه بالا δT تغییرات انرژی جنبشی ورق و δU تغییرات انرژی کرنشی است. تغییرات کار مجازی انجام شده توسط نیروهای ناپایستار با δW نشان داده شده است. تغییرات کار مجازی بوسیله نیروهای ناپایستار با رابطه زیر نشان داده می شود.

$$\delta W = \int \Delta P \delta w dA \quad (21)$$

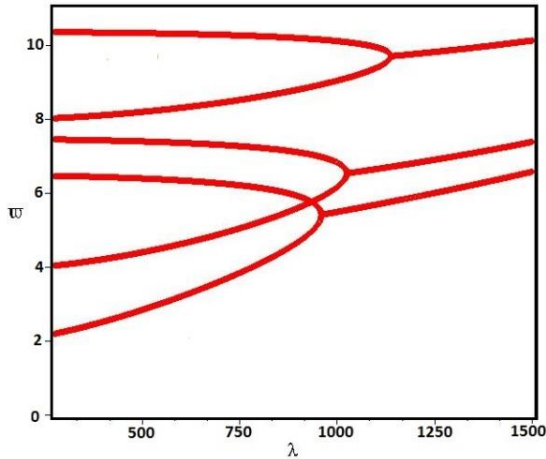
در این رابطه ΔP نیروی آیرودینامیکی بر روی ورق می باشد. مطابق با "تئوری پیستون" بدست می آید [24].

$$\begin{aligned} \Delta P = P - P_\infty = - \frac{2Q}{\sqrt{Ma^2 - 1}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{Ma^2 - 2}{Ma^2 - 1} \frac{1}{V_a} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ = -\xi \frac{\partial w}{\partial x} - \mu \frac{\partial w}{\partial t} \quad (22) \end{aligned}$$

در رابطه بالا Ma عدد ماخ و $Q = \rho_a V_a^2 / 2$ فشار دینامیکی می باشد که V_a سرعت جریان سیال و ρ_a دانسیته سیال می باشد. انرژی جنبشی و پتانسیل ورق با روابط (23) و (24) بدست می آید.

$$T = 1/2 \int_A \rho_m h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA \quad (23)$$

آیرویدینامیکی فرکانس‌های ورق تغییر می‌کنند. برخی از فرکانس‌ها شروع به افزایش و برخی دیگر کاهش می‌یابند. در شکل ۲ فرکانس اول، دوم و پنجم با افزایش سرعت جریان، افزایش و فرکانس سوم، چهارم و ششم کاهش می‌یابند. کمترین سرعتی که منحنی دو فرکانس به یکدیگر می‌رسند سرعت فلاتر ورق می‌باشد. مقایسه فشار آیرویدینامیکی بی بعد بحرانی و فرکانس در جدول ۱ نشان می‌دهد نتایج حاصل از حل برای صحنه گذاری فلاتر بر روی ورق کامپوزیت قابل قبول است.



شکل ۲ فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرویدینامیکی بی بعد فلاتر

جدول ۱ مقایسه فشار آیرویدینامیکی بی بعد بحرانی و فرکانس بی بعد

λ		$\bar{\omega}$	
مطالعه حاضر	مرجع [۲۵]	مطالعه حاضر	مرجع [۲۵]
۹۵۰/۱	۹۱۹	۵/۴۲۹	۵/۴۰۶
۱۰۲۵	۹۹۸	۶/۵۴۸	۶/۵۵۷
۱۱۳۵	۱۰۸۹	۹/۷۱۴	۹/۷۴۱

۴-۱- تاثیر نسبت M/M0

در مرحله بعد به آنالیز ورق یکسرگیردار که در انتهای آزاد آن جرم گسترده نصب گردیده است. ابتدا اثر نسبت وزن جرم گسترده نسبت به ورق مطالعه شده است. شکل ۳ تغییرات فرکانس بی بعد و ضریب دمپینگ را بر حسب فشار آیرویدینامیکی جریان برای نسبت $M/M_0=0.25$ را نشان می‌دهد (M جرم گسترده و M_0 جرم ورق می‌باشد). زمانی که ضریب دمپینگ تغییر علامت می‌دهد فلاتر اتفاق می‌افتد به عبارتی فرکانس فلاتر، فرکانسی است که منحنی دمپینگ سازه صفر می‌گردد. و برای تعیین سرعت فلاتر نمودار دمپینگ سازه بر حسب سرعت جریان سیال ترسیم می‌گردد سرعتی که منحنی دمپینگ سازه از صفر می‌گذرد و تغییر علامت می‌دهد را سرعت فلاتر گفته می‌شود. با بدست آوردن سرعت فلاتر از روی نمودار دمپینگ بر حسب سرعت جریان سیال، از نمودار متناظر یعنی نمودار سرعت سیال بر حسب فرکانس، فرکانس فلاتر بدست می‌آید. در شکل ۳ ب) ضریب دمپینگ برای مودهای مختلف ورق با تغییر سرعت جریان ترسیم شده است. محل تغییر علامت ضریب دمپینگ در شکل ۳ ب) فشار آیرویدینامیکی فلاتر را نشان می‌دهد که برابر با $\lambda = 40$ است. با پیدا کردن فشار آیرویدینامیکی (سرعت فلاتر) از شکل ۳ الف) استفاده می‌کنیم و فرکانس فلاتر را بدست می‌آوریم. در شکل ۳ الف) فرکانس بی بعد فلاتر برای $\lambda = 40$ برابر با $\bar{\omega} = 62$ است. در ادامه مقاله روند یافتن سرعت فلاتر به همین طریق می‌باشد. با حل

$$Q = \int_A \left(-\xi \frac{\partial w}{\partial x} - \mu \frac{\partial w}{\partial t} \right) \frac{\partial w}{\partial q} dA$$

$$= - \int_A 2\xi \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} \Phi_n q$$

$$- \int_A \mu \Phi_m \Phi_n \dot{q} = K_{\Delta P} q + C_{\Delta P} \dot{q} \quad (35)$$

که $K_{\Delta P}$ ماتریس سختی آیرویدینامیک و $C_{\Delta P}$ ماتریس دمپینگ آیرویدینامیک می‌باشد. حال معادله دینامیکی با رابطه (۳۶) بدست می‌آید.

$$M\ddot{q} + C_{\Delta P}\dot{q} + (K + K_{\Delta P})q = 0 \quad (36)$$

با بدست آوردن مقادیر ویژه (فرکانس‌های طبیعی سیستم) رابطه (۳۶) بر حسب سرعت جریان (با توجه به اینکه ماتریس‌های $K_{\Delta P}$ و $C_{\Delta P}$ تابعی از سرعت جریان هستند)، می‌توان سرعت فلاتر را تعیین کرد. به عبارتی با تغییر سرعت جریان مقدار ماتریس‌های $K_{\Delta P}$ و $C_{\Delta P}$ تغییر می‌کند. مقادیر ویژه رابطه (۳۶) فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد و با توجه به اینکه ماتریس دمپینگ نیز در رابطه (۳۶) ظاهر گشته است فرکانس طبیعی دارای قسمت حقیقی و موهومی است. در حالت کلی مقادیر ویژه بصورت معادله زیر و مختلط می‌باشند.

$$\omega = p \pm ir \quad (37)$$

$r = 2\pi f$ (فرکانس) و $p = 2\pi\delta$ (میرایی) به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی این عدد مختلط هستند. هنگامی که p مثبت است، دامنه نوسان‌های سازه، ناشی از حرکت سیال با گذشت زمان افزایش می‌یابد اما در صورتی که منفی باشد دامنه آن‌ها کاهش می‌یابد. اگر در سرعت v_1 ، p منفی و در سرعت v_2 مثبت باشد، مقدار p در سرعت v_0 (سرعتی بین v_1 و v_2 است) صفر است. در همسایگی سرعت v_0 دو ناحیه وجود دارد. یکی حالتی که p منفی است و دیگری هنگامی که p مثبت است. زمانی که p منفی است در این حالت سیستم پایدار است، اما اگر p مثبت باشد ناپایدار بوده و دامنه نوسانات سیستم با گذشت زمان افزایش می‌یابد. بنابراین برای تحلیل فلاتر، سرعت را تغییر می‌دهیم تا هنگامی که شرایط معادله زیر برقرار شود و این حالت شرایط فلاتر را مشخص می‌نماید. سرعتی که به ازای آن، این شرایط اتفاق بیافتد سرعت فلاتر می‌باشد.

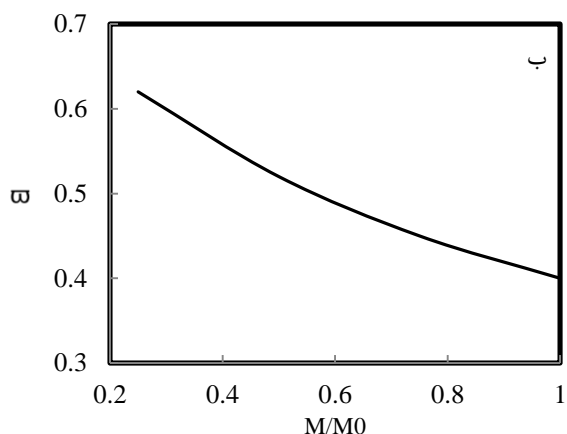
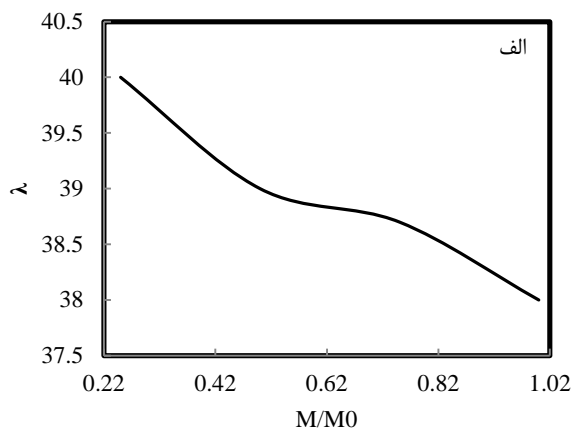
$$p = 0, \quad r \neq 0 \quad (38)$$

۴- نتایج (آنالیز فلاتر)

در این مرحله نتایج حاصل از حل ارتعاشات اجباری را صحنه گذاری می‌کنیم. در این مثال [۲۵] ورق کامپوزیتی از ۵ لایه با آرایش $[0,90,0,90,0]$ و دارای شرایط تکیه گاه ساده می‌باشد. مشخصات ورق به شرح ذیل می‌باشد.

$$\frac{E_L}{E_T} = 40.0, \frac{G_{LT}}{E_T} = 0.6, \frac{G_{TT}}{E_T} = 0.5, \nu_{LT} = 0.25$$

در این مقاله فرکانس طبیعی بی بعد به صورت $\bar{\omega} = \frac{\omega k^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{\rho}{E_T}}$ تعریف می‌گردد (که ضخامت و طول ورق K, h). به همین ترتیب برای فشار آیرویدینامیکی بی بعد $\lambda = \left(\frac{\rho_a v_a^2 k^3}{E_T h^2 \sqrt{Ma^2 - 1}} \right)$ تعریف می‌گردد که v_a سرعت جریان سیال، h ضخامت ورق، E_T مدول الاستیک ورق در راستای عمود بر جهت الیاف، E_L مدول الاستیک ورق در راستای الیاف، ρ_a دانسیته سیال (هوا) می‌باشد. نتایج حل برای ورق با مشخصات مذکور در شکل ۲ نشان داده شده است. شکل ۲ نشان می‌دهد با افزایش فشار

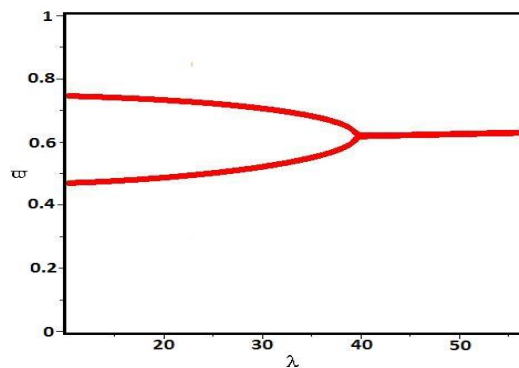


شکل ۴ الف- فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر بر حسب M/M0 ب- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب M/M0

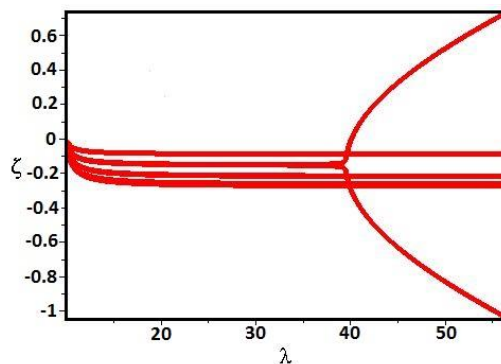
الف-

مساله برای $1 \leq M/M_0 \leq 2.5$. تغییرات سرعت و فرکانس فلاتر در شکل 4 نشان داده شده است. با افزایش نسبت جرم گسترده به جرم ورق، فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد (در w های کوچکتری رخ می‌دهد). همچنین با افزایش M/M_0 فشار آیرودینامیکی فلاتر کاهش افزایش می‌یابد.

الف-



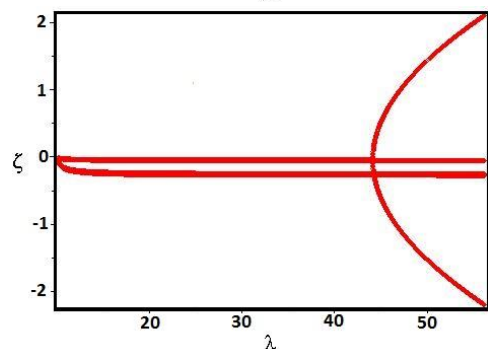
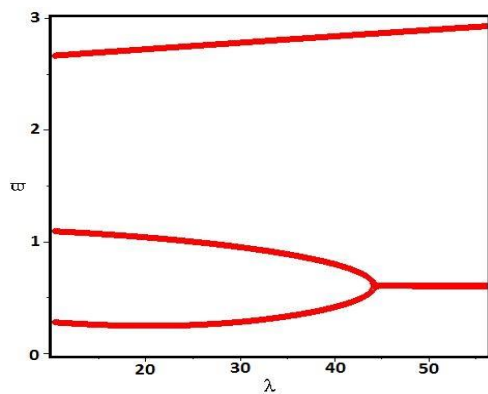
ب-



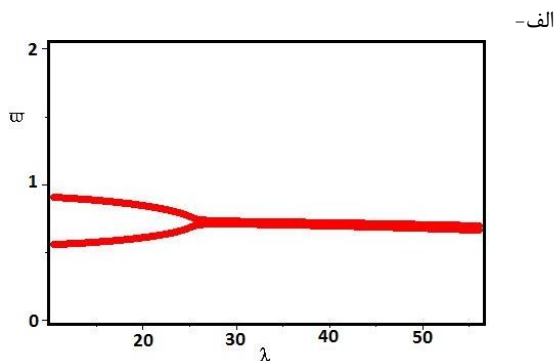
شکل ۳ فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرودینامیکی ب- دمپینگ بر حسب فشار آیرودینامیکی

۲-۴- اثر زاویه لایه‌های کامپوزیتی

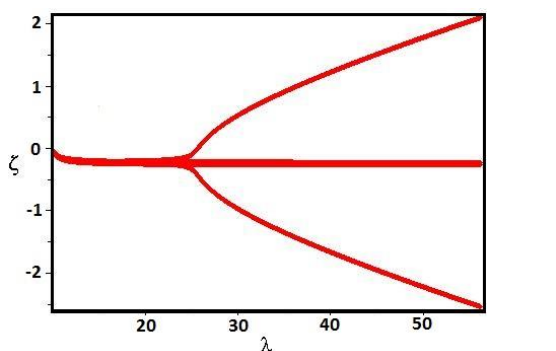
در این بخش اثر لایه چینی کامپوزیت بر فشار آیرودینامیکی فلاتر بررسی شده است. ورق از ۵ لایه کامپوزیت تشکیل شده است که به ازای مقادیر مختلف زاویه الیاف (۰ تا ۷۵ درجه)، پارامتر فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر و فرکانس فلاتر بدست آمده است. شکل ۵ تغییرات فرکانس بی بعد و دمپینگ را بر حسب سرعت جریان برای زاویه ۶۰ درجه نشان می‌دهد. در شکل ۶ تغییرات فشار آیرودینامیکی بی بعد و فرکانس فلاتر بر حسب تغییرات زاویه الیاف کامپوزیت نشان داده شده است. فشار آیرودینامیکی فلاتر از ۰ تا ۱۵ روند کاهشی، از ۱۵ تا ۴۵ درجه روند افزایشی و از ۴۵ تا ۷۵ درجه دوباره روند کاهشی را دارد. تغییرات فرکانس فلاتر به مانند فشار آیرودینامیکی فلاتر روند یکنواختی ندارد بطوریکه از ۰ تا ۱۵ روند افزایشی و از ۱۵ تا ۳۰ روند کاهشی و از ۳۰ تا ۴۵ افزایشی و سپس کاهشی است. دلیل تغییرات فشار آیرودینامیکی بی بعد و فرکانس فلاتر بر حسب تغییرات زاویه الیاف کامپوزیت این است که فرکانس‌های طبیعی کامپوزیت با تغییر زاویه الیاف تغییر می‌کند. به عبارتی با تغییر زاویه الیاف برخی از فرکانس‌های طبیعی ورق کم و برخی دیگر زیاد می‌شوند. با قرار گرفتن ورق در جریان مافوق صوت روند تغییرات فرکانس‌های ورق تا سرعت فلاتر تغییر نیز با تغییر زاویه الیاف تغییر می‌کند.



شکل ۵ الف- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرودینامیکی بی بعد ب- دمپینگ بر حسب فشار آیرودینامیکی بی بعد

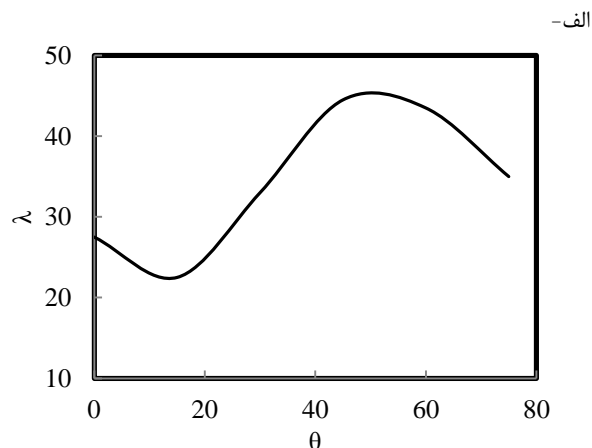


الف-

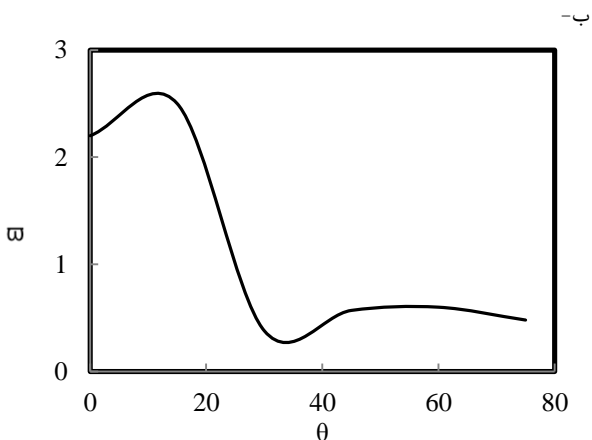


ب-

شکل ۷ الف- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرودینامیکی بی بعد ب- دمپینگ بر حسب فشار آیرودینامیکی بی بعد

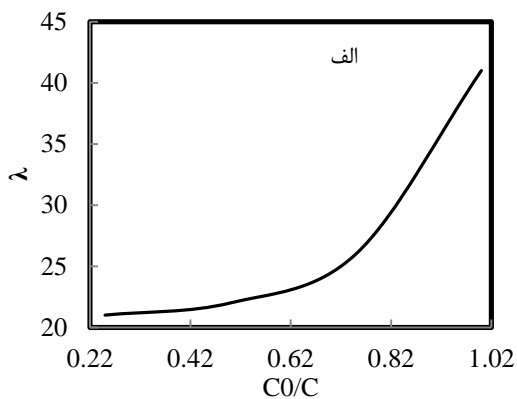


الف-

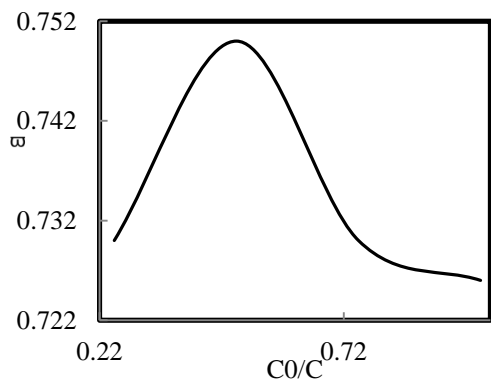


ب-

شکل ۶ الف- فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر بر حسب زاویه ب- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب زاویه



الف



شکل ۸ الف- فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر بر حسب C0/C ب- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب C0/C

۳-۴- اثر طول جرم

به منظور بررسی اثر طول جرم اضافه شده، جرمی با اندازه های مختلف با نسبت C_0/C در عرض ورق با تراکم های متفاوت قرار داده شده و اثر آن بر فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر و فرکانس فلاتر ورق بررسی شده است. همانطور که شکل ۱ نشان می دهد طول جرم به صورت C_0/C روی محور افقی نشان داده شده است محل اثر جرم اضافه شده را نشان می دهد. شکل ۷ تغییرات فرکانس بی بعد و دمپینگ را برای C_0/C برابر با ۰/۲۵ را نشان می دهد. شکل ۸ نشان می دهد با افزایش C_0/C از ۰/۲۵ تا ۱ فشار آیرودینامیکی فلاتر افزایش می یابد. فرکانس فلاتر ابتدا روند افزایشی و سپس روند کاهشی دارد.

۴-۴- تاثیر فاصله نصب جرم

در مرحله آخر به بررسی اثر فاصله جرم اضافه شده از سر گیردار (در مثال بال هواپیما ریشه بال)، جرم با فاصله های مختلف با نسبت L_0/L در طول ورق قرار داده شده و اثر آن بر فشار آیرودینامیکی فلاتر و فرکانس فلاتر ورق بررسی شده است. شکل ۹ تغییرات فرکانس بی بعد و دمپینگ را برای L_0/L برابر با ۰/۵ را نشان می دهد. شکل ۱۰ نشان می دهد با افزایش L_0/L از ۰/۲۵ تا ۰/۶ فشار آیرودینامیکی فلاتر افزایش می یابد و بعد از آن روند کاهشی است. فرکانس فلاتر با افزایش L_0/L روند کاهشی دارد.

۵- نتیجه گیری

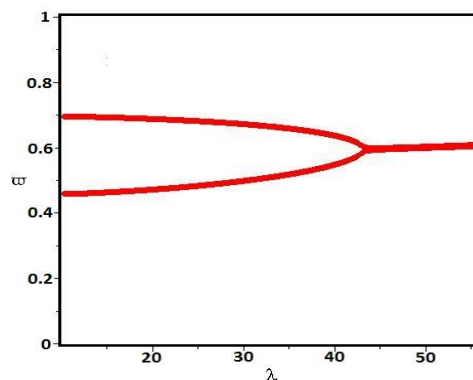
در این مقاله رفتار ارتعاشی و فلاتر یک ورق کامپوزیتی چند لایه یک سر گیردار در حضور جرم گسترده بررسی شده است. ابتدا اثر نسبت وزن جرم گسترده نسبت به ورق مطالعه شده است با حل مساله برای M/M_0 تغییرات فشار آیرودینامیکی بحرانی و فرکانس فلاتر بدست آمده است. با افزایش نسبت جرم گسترده به جرم ورق، فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش M/M_0 فشار آیرودینامیکی فلاتر کاهش می‌یابد به عبارتی با افزایش جرم متصل شده سرعت فلاتر کاهش می‌یابد.

در مرحله بعد به بررسی اثر زاویه الیاف کامپوزیت بر فلاتر پرداخته شد. فشار آیرودینامیکی فلاتر از ۰ تا ۱۵ درجه روند کاهشی، از ۱۵ تا ۴۵ درجه روند افزایشی و از ۴۵ تا ۷۵ درجه دوباره روند کاهشی را دارد. تغییرات فرکانس فلاتر به مانند فشار آیرودینامیکی فلاتر روند یکنواختی ندارد بطوریکه از ۰ تا ۱۵ روند افزایشی و از ۱۵ تا ۳۰ روند کاهشی و از ۳۰ تا ۴۵ افزایشی و سپس کاهشی است. در ادامه نشانه شد با افزایش C_0/C از ۰/۲۵ تا ۱ فشار آیرودینامیکی فلاتر افزایش می‌یابد. فرکانس فلاتر ابتدا روند افزایشی و سپس روند کاهشی دارد. با افزایش L_0/L از ۰/۲۵ تا ۰/۶ فشار آیرودینامیکی فلاتر افزایش می‌یابد (سرعت فلاتر افزایش یافته) و بعد از آن روند کاهشی است. فرکانس فلاتر با افزایش L_0/L به طور یکنواخت روند کاهشی دارد.

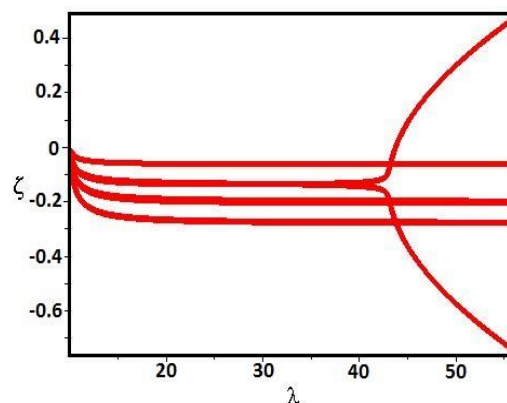
۶- مراجع

- [1] Alibeigloo, A., Shakeri, M., and Kari, M., "Free Vibration Analysis of Antisymmetric Laminated Rectangular Plates With Distributed Patch Mass Using Third-Order Shear Deformation Theory" Ocean Engineering, Vol. 35, No. 9, pp. 183-190, 2008.
- [2] Farhadi, S. and Hosseini-Hashemi, S., "Effect of a Bonded Patch on Aeroelastic Behavior of Cantilevered Plates" Journal of Applied Mathematics, vol. 20, No. 14, pp. 13-20, 2010.
- [3] Gorman, D., "Free Vibration Analysis of Cantilever Plates by the Method of Superposition" Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, No. 10, pp. 453-467, 1976.
- [4] Boay, C. G., "Frequency Analysis of Rectangular Isotropic Plates Carrying a Concentrated Mass," Computers & structures, Vol. 56, No. 14, pp. 39-48, 1995.
- [5] Kopmaz, O. and Telli, S., "Free Vibrations of a Rectangular Plate Carrying a Distributed Mass" Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, No. 6, pp. 39-57, 2002.
- [6] Wong, W., "The Effects of Distributed Mass Loading on Plate Vibration Behavior" Journal of Sound and Vibration, Vol. 252, No. 11, pp. 577-583, 2002.
- [7] Alashti, R. A. and Alibakhshi, R., "Free Vibration of Simply Supported Rectangular Composite Plates With Patch Mass" Computers & structures, Vol. 32, No. 8, pp. 3-48, 2012.
- [8] Alibakhshi, R., "The Effect of Anisotropy on Free Vibration of Rectangular Composite Plates with Patch Mass" International Journal of Engineering, Vol. 25, No. 3, pp. 223-232, 2012.
- [9] Alibakhshi, R. and Alashti, R. A., "Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Carrying Rotating Circular Mass," International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology, Vol. 7, No. 11, pp. 1-9, 2014.
- [10] Jordan PF. "The physical nature of panel flutter". Aero Digest. Vol. 34, No. 8, 1956.
- [11] Dowell, EH. Panel flutter., "a review of the aeroelastic stability of plates and shells" AIAA J, Vol. 8, No. 3, pp. 385-99, 1970.
- [12] Bismarck-Nasr, MN. "Finite element analysis of aeroelasticity of plates and shells". Appl Mech Rev, Vol.45, No. 12, pp. 461-82, 1992.

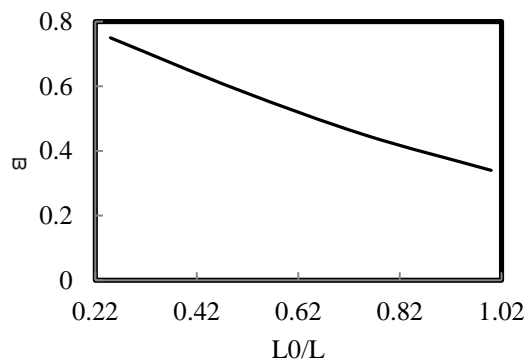
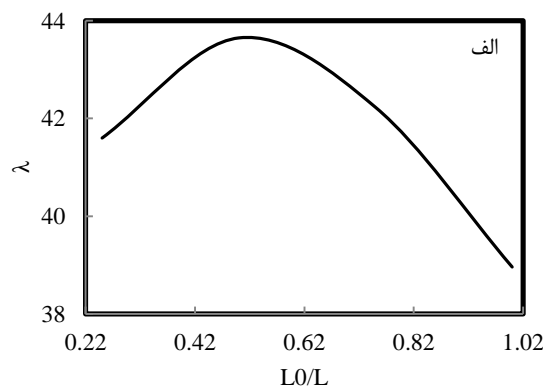
الف-



ب-



شکل ۹ الف- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب فشار آیرودینامیکی ب- دمپینگ بر حسب فشار آیرودینامیکی



شکل ۱۰ الف- الف- فشار آیرودینامیکی بی بعد فلاتر بر حسب L_0/L ب- فرکانس بی بعد فلاتر بر حسب L_0/L

- [13] Bismarck-Nasr MN. "Finite elements in aeroelasticity of plates and shells". Appl Mech Rev, Vol.49, No. 10, pp. 17-24, 1996.
- [14] Durvasula S. Flutter of simply supported parallelogrammic flat panels in supersonic flow. AIAA J; Vol. 5, pp. 1668-73, 1967.
- [15] Kariappa V, Somashekar BR, Shaw CG., "Discrete element approach to flutter of skew panels with in-plane forces under yawed supersonic flow", AIAA J, Vol. 8, pp. 2017-22, 1970.
- [16] Sander G, Bon C, Geradin M., "Finite element analysis of a supersonic panel flutter", Int J Numer Meth Eng. Vol.7, pp. 379-94, 1973.
- [17] Srinivasan RS, Babu BJC., "Flutter analysis of cantilevered quadrilateral plates" J Sound Vib, Vol.98, No. 1, pp. 45-53, 1985.
- [18] Srinivasan RS, Babu BJC., "Free vibration and flutter of laminated quadrilateral plates", Comput Struct, Vol. 27, pp. 297-304, 1987.
- [19] Farhadi S. S. Hosseini-Hashemi, "Flutter stabilization of cantilevered plates using a bonded patch," Vol.219, pp. 241-254, 2011.
- [20] Dowell, E. and Ye, W., "Limit cycle oscillation of a fluttering cantilever plate," AIAA journal, Vol. 29, No. 5, pp. 1929-1936, 1991.
- [21] Christensen, R. M., "Mechanics of composite materials: Courier Corporation," Krieger Publishing Company, Florida, 2012.
- [22] Sivakumara, K., "Natural frequencies of symmetrically laminated rectangular plates with free edges," Composite structures, Vol. 7, No. 8, pp. 191-204, 1987.
- [23] In, L. and Jung-Jin, L., "Vibration analysis of composite wing with tip mass using finite elements," Computers & structures, Vol. 47, No. 2, pp. 495-504 1993.
- [25] Mei, C., Abdel-Motagaly, K. and Chen, R., "Review of nonlinear panel flutter at supersonic and hypersonic speeds", Appl.Mech. Rev. Vol 52, pp.416-421, 1999.
- [26] Singha, M. K. and Ganapathi, M., "parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels", Composite Structures, Vol 69, No. 9. pp. 55-63, 2005.

