



استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای برای تحلیل اثر ترک بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

علی طالعزاده لاری^{1*}

1- استادیار، مهندسی مکانیک، مجتمع آموزش عالی لارستان، لار
* لار، صندوق پستی 74317-16137، a.talezadeh@lar.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله:

در این پژوهش ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در حضور ترک طولی و محیطی نفوذ کامل مطالعه شده است. معادلات حاکم بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نوشته شده و با انتخاب مقادیر مناسب برای پارامترها می‌تواند به هر یک از تئوری‌های دائل، لاو و یا ساندرز تبدیل شود. برای حل، از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای استفاده شده است. در این روش، فضای حل به چندین زیردامنه تقسیم شده و گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی لبه‌های پوسته و شرایط سازگاری در مرز مشترک زیردامنه‌ها در هر دو راستای طولی و محیطی به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته انجام شده است. در نهایت، با مونتاژ معادلات حاصله، یک دستگاه معادلات جبری تشکیل شده و با استفاده از حل مقدار ویژه، فرکانس طبیعی پوسته تعیین شده است. این روند در محیط متلب کدنویسی شده است. پس از مقایسه نتایج این روش با نتایج ارائه شده در مقالات موجود و نیز نتایج نرم‌افزار آباکوس و اطمینان از صحت و دقت آن، از این روش برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای ترک استفاده شده است. از نتایج به دست آمده می‌توان برای صحت‌سنجی مطالعات آتی استفاده نمود.

دریافت: 1401/04/01

پذیرش: 1401/06/03

کلیدواژگان

ارتعاشات، پوسته کامپوزیتی، ترک، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای

Using a multi domain generalized differential quadrature method to study the effect of crack on the vibrational behavior of composite cylindrical shell

Ali Talezadehlari^{1*}

1- Department of Mechanical Engineering, University of Larestan, Lar, Iran
P.O.B. 74317-16137, Lar, Iran, a.talezadeh@lar.ac.ir

Keywords

Vibration, Composite Shell, Through-the-Thickness Crack, First-order Shear Deformation Theory (FSDT), Multi Domain Generalized Differential Quadrature (GDQ)

Abstract

In this study, the vibration of a composite cylindrical shell in the presence of a longitudinal and circumferential crack was investigated. The governing equations were derived based on the first-order shear deformation theory and could be converted to Donnell's, Love's, and Sanders' theories by selecting proper parameters. A multi-domain generalized differential quadrature method was used to solve the problem. In this technique, a physical domain was decomposed into several elements. Then, a generalized differential quadrature method was employed to discretize the governing equations, boundary conditions at shell edges, and the compatibility conditions at the interface boundaries of adjacent elements in both longitudinal and circumferential directions. Assembling these discretized equations led to a system of algebraic equations, which could be solved through an eigenvalue solution to calculate the natural frequency of the shell. This procedure was coded in MATLAB environment. Numerical results obtained by the presented method were compared with ABAQUS results and those available in the literature. After verifying the accuracy and precision of the proposed method, it was employed to study the effect of different parameters on the vibrational behavior of cracked composite shells. The obtained results can be used as a benchmark for further studies.

1- مقدمه

به آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که پایداری و آنالیز ارتعاشی این پوسته‌ها یکی از مهم‌ترین آن‌هاست و مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

یکی از شایع‌ترین عیوب به وجود آمده در سازه‌های کامپوزیتی که بر کارایی و نیز رفتار ارتعاشی آن‌ها تأثیرگذار است، ترک‌ها هستند که ممکن است

سازه‌های کامپوزیتی به سبب خواص منحصربه‌فردی چون نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی کاربردهای فراوانی در صنایع مختلف دارند. در این میان پوسته‌های کامپوزیتی از جمله سازه‌های پرکاربردی هستند که از سال‌ها پیش مورد توجه بوده‌اند. از این رو انواع تحلیل‌های مربوط

Please cite this article using:

Talezadehlari, A., "Using a multi domain generalized differential quadrature method to study the effect of crack on the vibrational behavior of composite cylindrical shell," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 4, pp. 1849-1860, 2022. <https://doi.org/10.22068/JSTC.2022.556051.1792>

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

در اثر ضربه یا بارگذاری‌های دیگر ایجاد شده باشند. بررسی ارتعاشات سازه‌های کامپوزیتی ترک‌دار از دو لحاظ دارای اهمیت است: مطالعه اثر وجود ترک بر رفتار ارتعاشی سازه، بررسی ارتعاشات سازه به عنوان یک آزمون غیرمخرب جهت تشخیص وجود ترک احتمالی.

چنانچه بیان شد، ارتعاشات پوسته‌های بدون نقص (بدون وجود ترک یا گشودگی) از سال‌ها پیش مورد توجه پژوهشگران مختلف قرار داشته است. برای پوسته‌های ایزوتروپ امکان استفاده از روش‌های تحلیلی و ارائه جواب با فرم بسته¹ نیز وجود دارد [11]. اما در خصوص پوسته‌های کامپوزیتی به علت پیچیدگی روابط خواص مکانیکی، ارائه چنین پاسخ‌هایی مقدر نبوده و مطالعه ارتعاشات این پوسته‌ها به روش‌های نیمه‌تحلیلی، عددی و آزمون‌های تجربی انجام می‌شود. به عنوان نمونه می‌توان به پژوهش‌های هفت‌چناری و همکاران [2]، آمابیلی و ردی [3]، کوو و همکاران [4] و طالع‌زاده‌لاری و همکاران [5] و نیز مقالات مروری علی‌جانی و آمابیلی [6] و وو و لیو [7] اشاره نمود که در آن روش‌های گوناگون موجود برای تحلیل ارتعاشی پوسته‌هایی با خواص مکانیکی مختلف و شرایط مرزی متفاوت را بررسی نموده‌اند.

مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ترک‌دار را می‌توان بر اساس نوع ترک به دو دسته کلی تقسیم نمود: پوسته‌های دارای ترک‌های سطحی با عمق نفوذ محدود²؛ پوسته‌های با ترک نفوذی کامل³. نیک‌پور از جمله نخستین محققینی بود که به مطالعه ارتعاشات پوسته غیرایزوتروپ دارای ترک سطحی پرداخت. در این پژوهش ترک به صورت محیطی در نظر گرفته شد. وی ماتریس نرمی پوسته به صورت تابعی از طول ترک و خواص غیرایزوتروپیک مواد نوشت و نهایتاً روشی برای تشخیص وجود ترک از طریق بررسی ارتعاشات چنین سازه‌هایی پیشنهاد نمود [8]. مرادی و طواف به کمک روش مدل فنر خطی⁴، ارتعاشات پوسته ایزوتروپ استوانه‌ای دارای ترک محیطی سراسری و نیز ترک محیطی با طول و عمق محدود را مورد مطالعه قرار دادند [9,10]. ایشان همچنین با تلفیق این روش و الگوریتم بهینه‌سازی زنبورها، در پوسته‌های ایزوتروپ شیوه‌ای برای تشخیص ترک سطحی بر اساس تحلیل فرکانس ارتعاشی پیشنهاد دادند [11]. بین و لام با ادغام مدل فنر خطی و تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، حلی عددی برای ارتعاشات آزاد پوسته بلند دارای ترک محیطی سطحی با نفوذ محدود ارائه نمودند. در این مطالعه چهار شرایط مرزی مختلف ساده-ساده، ساده-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد در نظر گرفته شد [12]. سرکر و همکارانش با تلفیق مدل فنر خطی و روش ریتز، روشی برای تشخیص خرابی در پوسته‌های نازک استوانه‌ای ایزوتروپ ارائه نمودند. در این مطالعه معادلات بر اساس تئوری ساندرز نوشته شده و با تغییر دادن اندازه ترک و ضریب سفتی فنر، سناریوهای مختلف خرابی بررسی شده است [13]. معزز و همکارانش برای ارتعاشات پوسته ایزوتروپ بلند دارای ترک سطحی شبه بیضی در راستای دلخواه، حلی تحلیلی بر اساس اصل همیلتون ارائه نمودند. در این پژوهش دو نوع شرط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده بررسی شده است و بدین منظور معادلات بر اساس تئوری دائل نوشته شده و از مدل فنر خطی برای در نظر گرفتن اثرات ترک استفاده شده است. نتایج به دست آمده، با نتایج مدل المان محدود ایجاد شده در نرم‌افزار المان محدود آباکوس⁵ مقایسه و اعتبارسنجی شدند [14]. سعیدی و معزز روش فوق را برای تحلیل ارتعاشات پوسته بلند ارتوتروپیک دارای ترک

⁶ ANSYS

⁷ Extended Finite Element Method (XFEM)

⁸ Differential Quadrature (DQ)

⁹ Generalized Differential Quadrature (GDQ)

¹ Close form solution

² Part-through surface crack

³ Through-the-thickness cracks

⁴ Line spring model

⁵ ABAQUS

با توجه به مرور مقالات انجام شده، تاکنون از هیچ یک از نسخه‌های روش مربعات تفاضلی جهت تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای ترک استفاده نشده است. نزدیک‌ترین کار انجام شده به این موضوع، پژوهشی است که طالع‌زاده‌لاری در خصوص ارتعاشات پوسته‌ها و پنل‌های کامپوزیتی دارای گشودگی انجام داده‌اند [35,36]. گشودگی‌ها ممکن است جهت کاهش وزن و یا اتصال سایر اجزا به بدنه اصلی در سازه ایجاد شده باشند. اما از سوی دیگر، سازه‌های کامپوزیتی ممکن است در اثر نقص ساختاری و یا بارگذاری‌های مختلف دچار ترک شوند و با توجه به این موضوع که تأثیر ترک بر رفتار ارتعاشی پوسته‌ها کاملاً متفاوت از تأثیر وجود گشودگی است، انجام پژوهش حاضر ضرورت دارد. در این پژوهش حاضر با استفاده از روش تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای، رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی دارای ترک نفوذ کامل (طولی و محیطی) مورد مطالعه قرار گرفته است و اثر پارامترهای مختلف ترک بر رفتار ارتعاشی این پوسته‌ها بررسی شده است.

2- روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای

روش مربعات تفاضلی، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که علی‌رغم استفاده از تعداد گره کم، از دقت بالایی برخوردار است. اساس این روش بر تخمین مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت مجموع وزنی مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص استوار است.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

در رابطه فوق $f_x(x_i, t)$ مشتق تابع f نسبت به جهت مختصاتی x در نقطه x_i است و $c_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند. نکته اساسی در این روش، نحوه تعیین ضرایب وزنی مناسب است. محققین مختلفی برای تعیین این ضرایب به شیوه مناسب تلاش کرده‌اند. بلمن و همکارانش در سال 1972 بر اساس دو تابع آزمون مختلف، دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند که هر یک با محدودیت‌هایی همراه بود [19]. در سال 1989 کان و چانگ برای رفع این محدودیت‌ها، رابطه دیگری برای ضرایب وزنی پیشنهاد دادند [37,38]. اما استفاده از این روش برای مشتقات مراتب بالاتر با دشواری‌هایی همراه بود. در سال 1991 شو به کمک تقریب چند جمله‌ای³ و آنالیز خطی فضای برداری⁴ روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کرد [22]. این روش تمامی روش‌های قبل از جمله روش ارائه شده توسط کان و چانگ را شامل می‌شود. در این روش ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول طبق رابطه (2) بیان می‌شود:

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, & i \neq j \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(1)}, & i = j \end{cases} \quad (2)$$

که در این رابطه داریم:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (3)$$

شده و به کمک روش مربعات تفاضلی حل شدند [24]. هفت‌چناری و همکارانش ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول و به کمک روش مربعات تفاضلی بررسی کردند. این پژوهش کارایی و سهولت استفاده از روش مربعات تفاضلی را به خوبی نشان می‌دهد [2]. حسینی هاشمی و خرمی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از روش مربعات تفاضلی بررسی نمودند. در این پژوهش همگرایی سریع این روش و نیز دقت آن در مقایسه با نتایج سایر مقالات و نرم‌افزار المان محدود آباکوس نشان داده شد [25]. گلچی و طالبی توتی از این روش برای مطالعه ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ساندویچ پنل استفاده نمودند. در این روش دو نوع تکیه‌گاه ساده و گیردار بررسی شد. معادلات بر پایه تئوری برشی مرتبه اول نوشته شده و نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات و نیز نرم‌افزار المان محدود آباکوس اعتبارسنجی شده است [26]. سبحانی و همکارانش ارتعاشات یک سازه کامپوزیتی ساندویچی حاصل از اتصال پوسته‌های مخروطی-استوانه‌ای-مخروطی را بررسی نمودند. در این پژوهش معادلات بر اساس تئوری مرتبه اول برشی نوشته شده و به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته حل شده است [27].

برخی از محققین نیز با ترکیب روش مربعات تفاضلی و سایر روش‌های عددی به بررسی ارتعاشات پوسته‌های بدون نقص (بدون ترک یا گشودگی) پرداخته‌اند. ملک‌زاده و همکارانش ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با لایه‌چینی دلخواه را به کمک روش LW-DQ¹، که تلفیق تئوری لایه‌ای¹ روش مربعات تفاضلی بود، بررسی کردند. در این پژوهش، از تئوری لایه‌ای برای گسسته‌سازی معادلات در راستای شعاعی استفاده شد و گسسته‌سازی در راستای طولی به کمک روش مربعات تفاضلی انجام شد [28]. دانشجو و طالبی توتی با استفاده از روشی مشابه، ارتعاشات پوسته‌های ضخیم کامپوزیتی ساده و تقویت‌شده را مطالعه نمودند [29]. علی بیگلر از تلفیق روش فضای حالت² و روش مربعات تفاضلی برای تحلیل استاتیکی و ارتعاشاتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌چینی angle-ply و تکیه‌گاه دلخواه استفاده کرد [30]. علی بیگلر و کانی به روشی مشابه تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک را انجام دادند [31]. تانگ و همکارانش نیز از همین روش برای ارائه یک حل الاستیسیسته سه‌بعدی در خصوص تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با لایه‌چینی و شرایط مرزی دلخواه بهره گرفتند [32]. سلاحی و همکارانش با ترکیب تئوری لایه‌ای و روش مربعات تفاضلی و بسط سری فوریه ارتعاشات آزاد و گذرای پوسته مخروطی ناقص ساخته شده از مواد هدفمند و در معرض فشار متحرک را مطالعه نمودند [33].

همان‌گونه که بیان شد در پژوهش‌های انجام شده تقارن محوری پوسته مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. این در حالی است که وجود انواع ناپیوستگی‌های هندسی نظیر ترک، گشودگی، تغییر ضخامت محیطی و یا وجود شرایط مرزی ترکیبی در انتهای پوسته، تقارن محوری را از بین خواهد برد و نمی‌توان از این روش‌ها بهره گرفت. از جمله نخستین پژوهش‌هایی که به این موضوع توجه نموده و پوسته را در حالت کلی و بدون توجه به تقارن محوری آن مورد بررسی نمودند، پژوهشی است که طالع‌زاده‌لاری و رحیمی در خصوص کمناش پوسته‌های کامپوزیتی دارای گشودگی انجام دادند. در این مطالعه برای از بین بردن محدودیت‌های بیان شده، از روش تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای استفاده شد [34].

¹ Layerwise Theory
² state space

³ polynomial approximation
⁴ linear vector space analysis

دارای هندسه نامنظم و یا شرایط مرزی و بارگذاری ناپیوسته هستند به سادگی امکان پذیر نیست. برای رفع این معضل، شو و همکارانش با گسترش روش فوق، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته چند دامنه‌ای^۲ را ارائه نمودند [39]. در این روش دامنه حل به چندین زیردامنه^۳ (المان) با شکل منظم تقسیم شده و روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته برای هر زیردامنه اعمال شده و نهایتاً شرایط سازگاری در مرز زیردامنه‌ها اعمال می‌شود. این روش، برخی محدودیت‌های روش قبل را برطرف نموده و برای هندسه‌های دارای ناپیوستگی نظیر ترک نیز قابل استفاده است.

3- معادلات حاکم

برای تحلیل پوسته کامپوزیتی ترک‌دار، در گام اول بسته به نوع ترک، مطابق شکل 1 پوسته به سه یا چهار زیردامنه تقسیم شده است. معادلات حاکم برای تحلیل ارتعاشات آزاد در هر زیردامنه بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مطابق رابطه (8) بیان می‌شود [40]. این تئوری برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم نیز قابل استفاده است. علاوه بر این، با استفاده از این تئوری و تعریف 5 درجه آزادی برای هر گره می‌توان شرایط مرزی در لبه‌های پوسته را به سادگی اعمال نمود.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{C_2}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = P_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (8-a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{C_2}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + C_1 \frac{Q_y}{R} = P_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (8-b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_y}{R} = P_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8-c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = P_3 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8-d)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = P_3 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8-e)$$

در این روابط، R شعاع پوسته است و راستاهای طولی و محیطی پوسته به ترتیب با محور x و y مشخص شده است. همچنین، N_x ، N_y و N_{xy} بیانگر منته‌های نیرو؛ M_x ، M_y و M_{xy} منته‌های گشتاور؛ و Q_x و Q_y منته‌های نیروی برشی عرضی هستند. ضمن اینکه پارامترهای P_1 ، P_2 و P_3 ترم‌های اینرسی هستند که طبق رابطه (9) تعریف می‌شوند:

$$\{P_1, P_2, P_3\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \{1, z, z^2\} dz \quad (9)$$

علاوه بر این، ثوابت C_1 و C_2 نوع تئوری به کار گرفته شده را مشخص می‌کنند. $C_1 = C_2 = 1$ بیانگر تئوری ساندروز است. به ازای $C_1 = 1$ و $C_2 = 0$ روابط فوق به تئوری لاو تبدیل خواهد شد و نهایتاً $C_1 = C_2 = 0$ نشان‌دهنده تئوری دانل خواهد بود.

از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته می‌توان برای تقریب مشتق مراتب بالاتر نیز استفاده نمود. به عنوان مثال، مشتق مرتبه دوم در جهت مختصاتی x به صورت رابطه (4) نوشته می‌شود:

$$f_{xx}(x_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

رابطه کلی برای ضرایب وزنی تقریب مشتقات مراتب بالاتر مطابق رابطه (5) تعیین می‌شود [22]:

$$c_{ij}^{(m)} = \begin{cases} m \left(c_{ij}^{(1)} c_{ii}^{(m-1)} - \frac{c_{ii}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right), & i \neq j \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(m)}, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad m = 2, 3, \dots, N-1 \quad (5)$$

علاوه بر این، می‌توان از این روش می‌توان برای توابع چند متغیره نیز به سادگی استفاده نمود. به عنوان مثال مشتق تابع دومتغیره $f(x, y)$ در جهت x و y نیز به شیوه مشابهی تعریف می‌شود [22]:

$$f_x(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^N c_{i,k_1}^{(1)} f(x_{k_1}, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6-a)$$

$$f_{xx}(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^N c_{i,k_1}^{(2)} f(x_{k_1}, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6-b)$$

$$f_y(x_i, y_j) = \sum_{k_2=1}^M c_{j,k_2}^{(1)} f(x_i, y_{k_2}), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (6-c)$$

$$f_{yy}(x_i, y_j) = \sum_{k_2=1}^M c_{j,k_2}^{(2)} f(x_i, y_{k_2}), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (6-d)$$

$$f_{xy}(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^M c_{i,k_1}^{(1)} c_{j,k_2}^{(1)} f(x_{k_1}, y_{k_2}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (6-e)$$

هرچند انتخاب مختصات گره‌ها در این روش کاملاً اختیاری است و هیچ محدودیتی ندارد؛ اما نحوه توزیع گره‌ها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آن‌ها تأثیرگذار است. شو نشان داد که توزیع چبیشف-گوس-لوباتو^۱، که به اختصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود، نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت [22]. از این رو، در مطالعه حاضر از همین شیوه توزیع گره‌ها استفاده شده است. رابطه (7) نحوه توزیع چبیشف N گره در بازه $[a, b]$ را نشان می‌دهد. برای توزیع گره‌ها در راستای y نیز رابطه مشابهی وجود خواهد داشت.

$$x_i = a + \frac{1}{2}(b-a) \left(1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

علیرغم توانمندی روش مربعات تفاضلی در حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی و سرعت همگرایی بالای آن، استفاده از این روش برای مسائلی که

³ Sub-domain

¹ Chebyshev-Gauss-Lobatto

² Multi-domain Generalized Differential Quadrature

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (15-a)$$

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{44} & A_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (15-b)$$

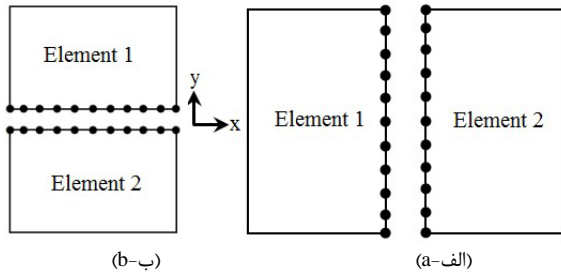


Fig. 2 connection of subdomains in a) x-direction b) y-direction [34]
شکل 2 نحوه اتصال دو زیردامنه (الف) در جهت x (ب) در جهت y [34]

که در این رابطه K_s ضریب تصحیح تنش برشی است که برابر 5/6 در نظر گرفته شده است. کرنش‌ها و تغییر انحنای لایه میانی را می‌توان بر حسب جابجایی‌ها و دوران‌های لایه میانی بیان نمود [40]:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \quad (16-a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; & \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x; \\ \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y - C_1 \frac{v}{R} \end{aligned} \quad (16-b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; & \kappa_y &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}; \\ \kappa_{xy} &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{C_2}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (16-c)$$

که در آن u و v و w به ترتیب جابجایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی لایه میانی استوانه و φ_x و φ_y چرخش‌ها حول محورهای x و y هستند. برای حل مسئله میدان جابجایی و چرخش‌ها طبق رابطه (17) در نظر گرفته می‌شود؛ که در آن فرکانس طبیعی پوسته بوده و $V(x, y)$ ، $U(x, y)$ ، $W(x, y)$ ، $\psi_x(x, y)$ و $\psi_y(x, y)$ شکل مود ارتعاشی پوسته را نشان می‌دهند.

$$u(x, y, t) = U(x, y)e^{i\omega t} \quad (17-a)$$

$$v(x, y, t) = V(x, y)e^{i\omega t} \quad (17-b)$$

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (17-c)$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \psi_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (17-d)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \psi_y(x, y)e^{i\omega t} \quad (17-e)$$

با تلفیق روابط (15)، (16) و (17) و جایگذاری آن‌ها در معادلات (8) و ساده‌سازی ترم $e^{i\omega t}$ از طرفین معادله، معادلات حاکم بر حسب میدان

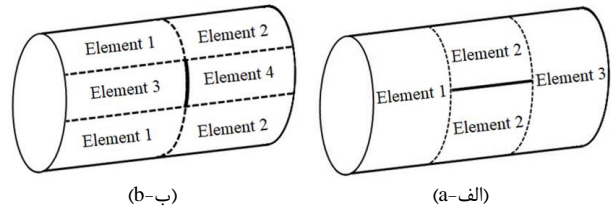


Fig. 1 Typical geometry of shell with a) longitudinal crack b) circumferential crack

شکل 1 هندسه پوسته دارای (الف) ترک طولی (ب) ترک محیطی

چنانچه بیان شد، معادلات بیان شده برای هر زیردامنه برقرار است. از آنجا که پوسته نهایی از اتصال این زیردامنه‌ها ایجاد می‌شود، لذا ضروری است که شرایط سازگاری مناسبی در مرز مشترک دو زیردامنه مجاور اعمال گردد. در مرزهای مشترک دو دسته معادله اعمال می‌گردد که هر دسته از معادلات جایگزین معادلات تعادل یکی از زیردامنه‌ها در مرز مشترک می‌شود [34]:
(1) سازگاری جابجایی‌ها و چرخش‌ها: برای حفظ پیوستگی پوسته لازم است که مقادیر جابجایی‌ها و چرخش‌ها در مرز مشترک دو زیردامنه یکسان باشند. بنابراین در این مرز مشترک خواهیم داشت:

$$\{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El 1)} = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El 2)} \quad (10)$$

(2) سازگاری تنش‌ها و گشتاورها: برای برقراری تعادل، لازم است که برخی از منته‌های تنش و گشتاور در مرز مشترک دو زیردامنه با یکدیگر برابر باشند. برای دو زیردامنه که در جهت x به یکدیگر متصل شده‌اند (شکل 2- الف) شرایط سازگاری تنش‌ها و گشتاورها مطابق رابطه (11) خواهد بود:

$$\{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El 1)} = \{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El 2)} \quad (11)$$

اگر دو المان در جهت y به یکدیگر متصل باشند (شکل 2- ب) شرایط سازگاری تنش‌ها و گشتاورها به صورت زیر خواهد بود:

$$\{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El 1)} = \{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El 2)} \quad (12)$$

علاوه بر شرایط سازگاری که در مرز مشترک دو زیردامنه اعمال می‌شود، در سایر مرزهای هر زیردامنه بایستی شرایط مرزی مناسب اعمال شود. وجود ترک نیز اثرگذاری خود را با اعمال شرط مرزی آزاد نشان می‌دهد. در پژوهش حاضر انواع مختلف شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد بررسی شده است. این شرایط مرزی در لبه $y_i = y$ طبق رابطه زیر تعریف می‌شوند [41]:

$$C: \quad u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (13-a)$$

$$S: \quad w = \varphi_y = v = N_x = M_x = 0 \quad (13-b)$$

$$F: \quad N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x = 0 \quad (13-c)$$

روابط مشابهی نیز برای لبه $x = x_i$ وجود دارد:

$$C: \quad u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (14-a)$$

$$S: \quad w = \varphi_x = u = N_y = M_y = 0 \quad (14-b)$$

$$F: \quad N_y = N_{xy} = M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (14-c)$$

از طرف دیگر منته‌های تنش، گشتاور و تنش برشی عرضی به شکل زیر به کرنش‌ها و انحنای لایه میانی پوسته مرتبط هستند:

جدول 1 فرکانس طبیعی (هرتز) پوسته دارای ترک محیطی

Table 1 Natural frequency (Hz) of shell with circumferential crack

پژوهش حاضر			مرجع [18]	طول ترک (سانتی‌متر)
تئوری ساندرز	تئوری لاو	تئوری داتل		
375.25	376.84	393.07	375.39	بدون ترک
371.51	373.21	388.97	371.60	50
365.41	367.20	381.58	365.46	100
354.41	356.45	370.48	354.40	200

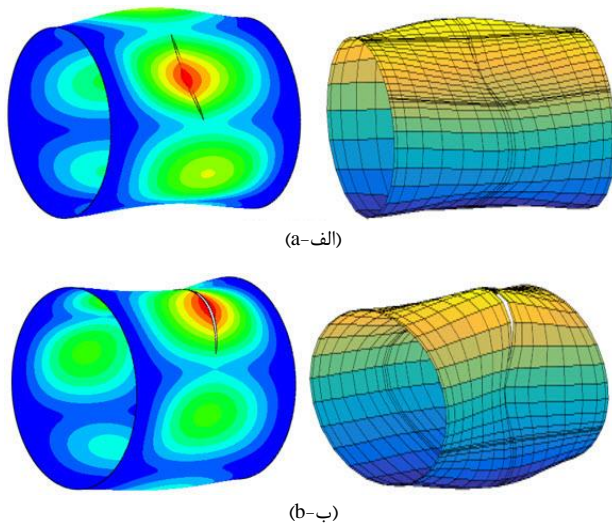


Fig 3. Mode shapes of shell with circumferential crack. a) C=100 cm, b) C=200 cm

شکل 3 شکل مود ارتعاشی پوسته دارای ترک محیطی. الف) c=100 cm، ب) c=200 cm

به منظور بررسی دقت و صحت روش پیشنهادی برای تحلیل ارتعاشات پوسته دارای ترک طولی، نتایج حاصل از آن با نتایج ارائه شده توسط جاویدروزی و همکارانش [16] و نیز نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. بدین منظور طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 1 متر، 0.5 متر و 1 میلی‌متر انتخاب شده است. همچنین، پوسته از جنس آلومینیوم و با مشخصات $E = 70 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0.3$ و $\rho = 5700 \text{ kg/m}^3$ در نظر گرفته شده است. ضمن اینکه هر دو تکیه‌گاه به صورت گیردار در نظر گرفته شده است. فرکانس طبیعی به دست آمده برای پوسته ترک‌دار نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون ترک بی‌بعد شده و در شکل 4 نشان داده شده است. ضمناً به عنوان نمونه یکی از مودهای ارتعاشی در شکل 5 نمایش داده شده است. شایان ذکر است با توجه به ابعاد ترک، ابعاد زیردامنه‌ها تغییر می‌کند. لذا بسته به ابعاد ترک، تعداد گره‌های مورد نیاز هر زیردامنه جهت اطمینان از همگرایی نتایج، متفاوت (در حدود 1500 گره) خواهد بود. این در حالی است که برای تحلیل این مسئله در آباکوس به بیش از 8000 المان نیاز است. مقایسه‌های صورت گرفته دقت و صحت نتایج حاصل از روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان از این روش برای بررسی اثرات پارامترهای مختلف استفاده نمود.

جابجایی، چرخش‌ها و مشتقات آن‌ها به دست خواهد آمد [36]. برای حل این معادلات در هر زیردامنه به ترتیب N و M گره در راستای x و y در نظر گرفته شده و در هر گره گسسته‌سازی معادلات به کمک روابط (6) انجام شده است. بدین ترتیب می‌توان معادلات را برای گره دلخواه (i,j) به شکل ماتریسی به فرمت زیر نوشت [36]:

$$[k]_{5 \times 5} \{U_{i,j}, V_{i,j}, W_{i,j}, \psi_{x_{i,j}}, \psi_{y_{i,j}}\}^T - \omega^2 [m]_{5 \times 5} \{U_{i,j}, V_{i,j}, W_{i,j}, \psi_{x_{i,j}}, \psi_{y_{i,j}}\}^T = [0] \quad (18)$$

با اعمال این روش برای تمامی گره‌های یک زیردامنه، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم در آن زیردامنه به دستگاه معادلات جبری تبدیل خواهد شد که می‌توان آن را به فرم ماتریسی زیر نوشت. در این رابطه $\{d\}^e$ شامل جابجایی و دوران‌های همه گره‌های زیردامنه مورد نظر است.

$$([K]^e - \omega^2 [M]^e) \{d\}^e = 0 \quad (19)$$

با مونتاژ نمودن معادلات همه زیردامنه‌ها، نهایتاً یک دستگاه معادلات جبری برای کل سازه ایجاد خواهد شد. علاوه بر این، بایستی شرایط مرزی مناسب و نیز شرایط سازگاری بین هر دو زیردامنه مجاور نیز بر این دستگاه معادلات اعمال شوند. بدین منظور نیاز است تا معادلات (10) تا (14) نیز شیوه مشابهی در هر گره گسسته‌سازی شوند. در نهایت دستگاه معادله حاصل، یک معادله مقدار ویژه خواهد بود که می‌توان با حل آن فرکانس طبیعی پوسته را تعیین نمود. لازم به ذکر است که تمامی این مراحل در نرم‌افزار متلب¹ کدنویسی شده است.

4- اعتبارسنجی

پیش از این در مقالاتی که توسط نویسنده منتشر شده است [35,36]، کارایی و دقت روش ارائه شده برای تحلیل ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی کامل (بدون ترک یا هر نوع ناپیوستگی هندسی دیگری) با تکیه‌گاه‌های مختلف نشان داده شده است. لذا در این قسمت صرفاً عملکرد این روش در تحلیل ارتعاشات پوسته با دو نوع ترک طولی و محیطی مورد بررسی قرار گرفته است. برای اعتبارسنجی نتایج روش پیشنهادی در خصوص پوسته با ترک محیطی، پوسته‌ای با خواص مکانیکی $E = 168 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0.3$ و $\rho = 5700 \text{ kg/m}^3$ در نظر گرفته شده است. همچنین طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 2، 1 و 0.1 متر انتخاب شده و تکیه‌گاه‌ها به صورت گیردار فرض شده‌اند. فرکانس طبیعی به دست آمده برای ابعاد مختلف ترک طولی در جدول 1 آورده شده و با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس و نیز مرجع [18] مقایسه شده است. لازم به ذکر است برای روش حاضر وابستگی نتایج به تعداد گره‌های هر زیردامنه بررسی شده تا از همگرا بودن نتایج اطمینان حاصل شده است. نهایتاً در چهار زیردامنه مجموعاً کمتر از 800 گره استفاده شده است. این در حالی است که برای همگرایی نتایج در نرم‌افزار آباکوس به بیش از 5000 المان نیاز است. همان‌گونه که پیداست نتایج حاصل از هر سه تئوری قابل قبول است؛ اما نتایج تئوری لاو و ساندرز (و به خصوص تئوری ساندرز) تطابق بیشتری با نتایج آباکوس دارد. در مراجع [35,36] نیز همین نتیجه برای پوسته‌های بدون ترک حاصل شده بود. همچنین شکل 3 مود ارتعاشی به دست آمده از روش حاضر و نرم‌افزار آباکوس را برای دو اندازه مختلف ترک نشان می‌دهد.

¹ Matlab

جدول 2 خواص مکانیکی مواد مختلف [42]

Table 2 Mechanical properties of different materials [42]

نام ماده	گرافیت اپوکسی	شیشه اپوکسی	بورون اپوکسی	فولاد	آلومینیوم
شماره ماده	M1	M2	M3	M4	M5
E_{11} (GPa)	181	38.6	204	200	70
E_{22} (GPa)	10.3	8.27	18.5	200	70
G_{12} (GPa)	7.17	4.14	5.59	76.92	28
ν_{12}	0.28	0.23	0.26	0.3	0.25
ρ (kg/m^3)	1600	1800	2000	7800	2600

5-1- اثر طول ترک و زاویه قرارگیری آن

تغییرات شش فرکانس ارتعاشی اول پوسته به ازای ابعاد مختلف ترک طولی و محیطی در شکل 6 نشان داده شده است. این نتایج نشان می‌دهد که ترک‌های طولی کوچک ($c/L \leq 0.2$) تأثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پوسته ندارند. با افزایش طول ترک ($c/L > 0.2$)، اثرات آن بر فرکانس ارتعاشی ظاهر می‌شود. نکته جالب توجه آن است تأثیر ترک بر فرکانس‌های اول و دوم بسیار بیشتر از سایر مدهای فرکانسی است. در حالیکه وجود ترک‌های بزرگ می‌تواند تا 40٪ این فرکانس‌ها را کاهش دهد؛ فرکانس ارتعاشی مدهای سوم و چهارم ارتعاشی حتی به ازای ترک‌هایی با طول $c=0.6L$ هم تغییر قابل ملاحظه‌ای ندارند و کاهش فرکانس طبیعی این پوسته‌ها نسبت به پوسته بدون ترک کمتر از 3٪ است. کاهش فرکانس‌های مربوط به مود پنجم و ششم به ازای هر طول ترک دلخواهی همواره کمتر از 10٪ است.

علت این موضوع را می‌توان با توجه به شکل مود ارتعاشی پوسته ترک‌دار، که در شکل 7 نمایش داده شده است، توضیح داد. شکل مود اول و سوم و پنجم برای $c=0.1L$ مشابه یکدیگر و نیز مشابه شکل مود ارتعاشی پوسته بدون ترک است و دهانه ترک باز نمی‌شود. در واقع ترک تأثیری بر شکل مود ارتعاشی ندارد. برای $c=0.4L$ شکل مدهای سوم و پنجم همچنان مشابه پوسته بدون ترک است؛ در حالیکه در مود اول باز شدن دهانه ترک به وضوح قابل مشاهده است و همین امر بر فرکانس ارتعاشی آن نیز مؤثر است. برای $c=0.8L$ نیز مشاهده می‌شود که وجود ترک بر شکل مدهای اول و سوم مؤثر است، لذا فرکانس طبیعی آن‌ها را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. اما بر شکل مود پنجم تأثیر زیادی ندارد؛ بنابراین، عدم تأثیرگذاری وجود ترک بر فرکانس طبیعی مود پنجم قابل توجیه است.

بررسی نتایج مربوط به پوسته دارای ترک محیطی نشان می‌دهد که رفتار پوسته در برابر این نوع ترک کاملاً متفاوت است. تأثیر ترک‌های محیطی بر فرکانس طبیعی پوسته به مراتب کمتر از ترک‌های طولی است؛ به گونه‌ای که فرکانس طبیعی پوسته نهایتاً 20٪ کاهش می‌یابد. ضمن اینکه کاهش فرکانس طبیعی پوسته در اثر افزایش ابعاد ترک، روندی یکنواختی دارد و بر خلاف ترک‌های طولی جهشی در نمودار مشاهده نمی‌شود. علاوه بر این، هرچند اثر وجود ترک محیطی بر فرکانس‌های اول و دوم اندکی بیشتر از سایر فرکانس‌هاست؛ این اختلاف چندان چشمگیر نبوده و با افزایش طول ترک تقریباً تمام فرکانس‌های ارتعاشی پوسته به صورت مشابهی کاهش می‌یابند. بررسی شکل مدهای ارتعاشی پوسته دارای ترک محیطی، که در شکل 8 نمایش داده شده است، روشن می‌سازد که حتی برای ترک‌های بزرگ (هرچند ممکن است دهانه ترک باز شود) شکل کلی مود ارتعاشی تغییر نمی‌کند و مشابه پوسته بدون ترک است. همین موضوع سبب می‌شود که اثرگذاری وجود چنین ترک‌هایی بر فرکانس ارتعاشی پوسته کمتر از ترک‌های طولی باشد.

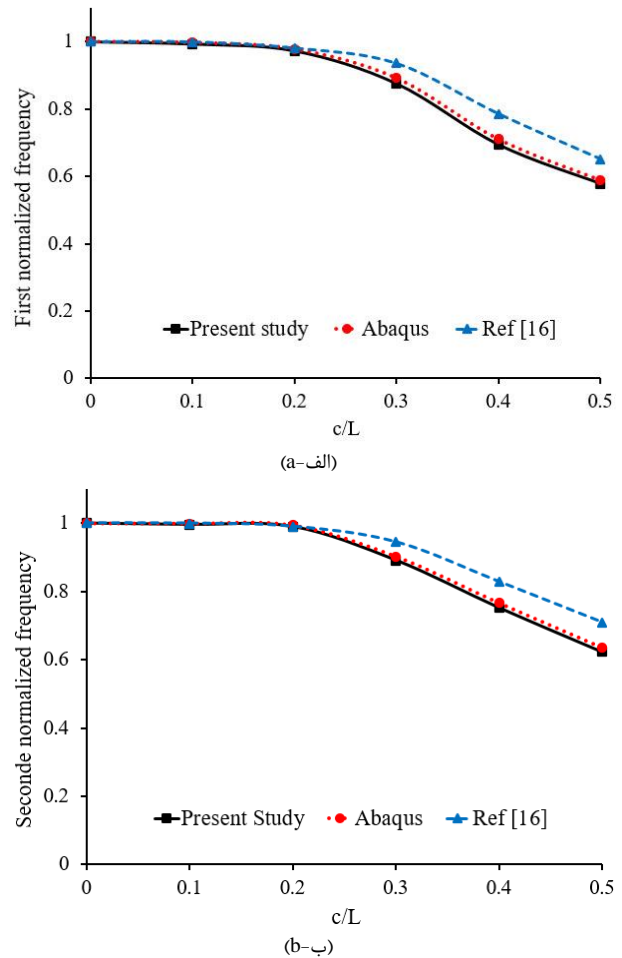
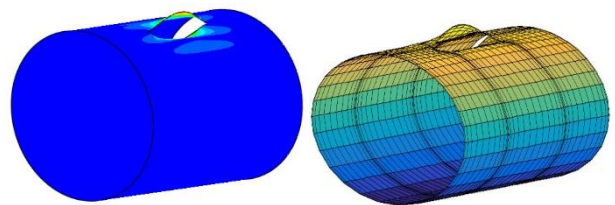


Fig 4. Variation of normalized frequency of shell with longitudinal crack; a) first mode b) second mode

شکل 4 تغییرات فرکانس بی‌بعد شده پوسته دارای ترک طولی؛ الف) مود اول ب) مود دوم

Fig 5. Mode shape of shell with longitudinal crack ($C/L=0.4$)

شکل 5 مود ارتعاشی پوسته دارای ترک طولی ($C/L=0.4$)

5- ارائه نتایج و بحث

برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات پوسته، یک مسئله پایه در نظر گرفته شده و با تغییر یک پارامتر و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، تأثیر آن پارامتر مطالعه شده است. بدین منظور طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 1 متر، 0.5 متر و 2 میلی‌متر فرض شده است. در هر مرحله ترک در وسط پوسته در نظر گرفته شده و نسبت c/L یا $c/2\pi R$ از 0.1 تا 0.9 تغییر داده شده است. شرایط تکیه‌گاهی پوسته گیردار-گیردار و جنس آن گرافیت اپوکسی با آرایش $S_{[45,0,90]_{\pm}}$ که شامل هشت لایه با ضخامت یکسان است انتخاب شده است. خواص مکانیکی بر اساس جدول 2 در نظر گرفته شده است. ضمناً، نتایج بر اساس تئوری ساندروز گزارش شده است.

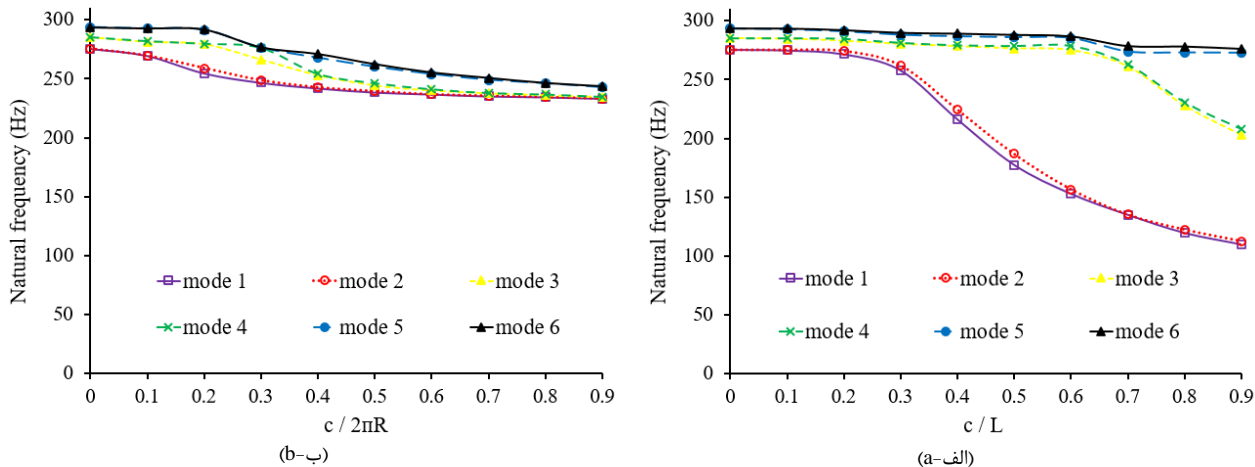


Fig 6. Frequency variation of shell with different crack dimension (L=1, R=0.5); a) longitudinal crack b) circumferential crack

شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای ابعاد مختلف ترک (L=1, R=0.5) الف) ترک طولی ب) ترک محیطی

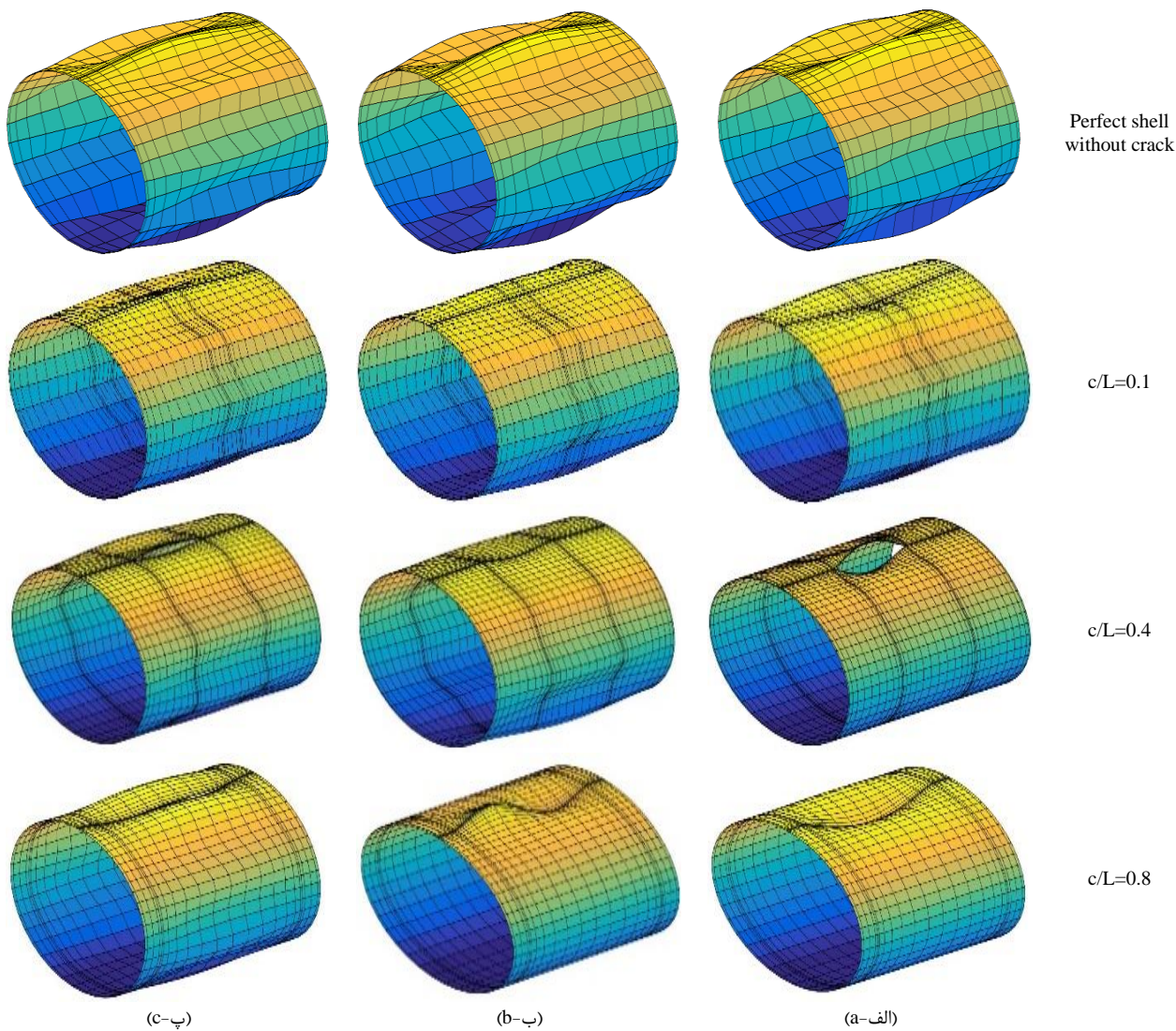


Fig. 7 Mode shapes of shell with different longitudinal crack size (L=1 m, R=0.5 m). a) First mode, b) Third mode, c) Fifth mode

شکل 7 مودهای ارتعاشی پوسته به ازای ابعاد مختلف ترک طولی (L=1 m, R=0.5 m). الف) مود اول، ب) مود سوم، پ) مود پنجم

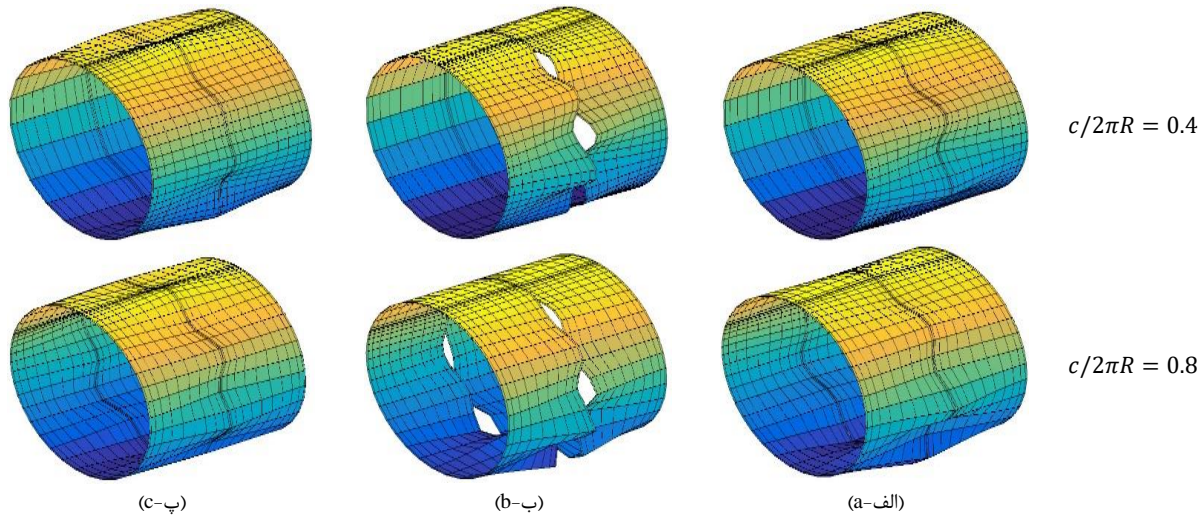


Fig. 8 Mode shapes of shell with different circumferential crack size (L=1 m, R=0.5 m). a) First mode, b) Third mode, c) Fifth mode

شکل 8 شکل مدهای ارتعاشی پوسته به ازای ابعاد مختلف ترک محیطی (L=1 m, R=0.5 m). الف) مود اول، ب) مود سوم، پ) مود پنجم

2-5- اثر ضخامت

هدف این بخش مطالعه اثر ضخامت بر رفتار پوسته ترک‌دار است. از آنجا که در بخش قبل مشخص شد ترک‌های طولی به مراتب تأثیرگذارتر از ترک‌های محیطی هستند، بررسی‌های این بخش به پوسته دارای ترک طولی محدود شده است. شکل 10-الف تغییرات اولین فرکانس طبیعی پوسته دارای ترک طولی با ضخامت‌های مختلف را نشان می‌دهد. مطابق انتظار با افزایش ضخامت، سفتی پوسته و فرکانس طبیعی آن افزایش یافته است. نکته قابل تأمل این است که این موضوع هم برای پوسته بدون ترک و هم برای پوسته ترک‌دار (با هر اندازه‌ای از ترک) صادق است. هرچند با افزایش ضخامت رفته رفته، میزان اثرگذاری آن بر افزایش فرکانس کاهش می‌یابد.

علاوه بر این، مشاهده می‌شود که تغییر ضخامت، روند کلی نمودار را تغییر نمی‌دهد. این موضوع به کمک شکل 10-ب بهتر درک می‌شود. در این شکل فرکانس‌های به دست آمده نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون ترک با همان ضخامت بی‌بعد شده است. چنانچه پیداست، با افزایش ضخامت پوسته علیرغم حفظ روند کلی نمودار، از میزان اثرگذاری ترک بر فرکانس طبیعی کاسته می‌شود. در این شکل نیز به خوبی دیده می‌شود که با افزایش ضخامت رفته رفته، شدت اثرگذاری آن بر افزایش فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

3-5- اثر خواص مواد

برای بررسی وابستگی اثر ترک به جنس پوسته، در این قسمت پنج جنس مختلف (سه نوع کامپوزیت و دو ماده ایزوتروپ) برای پوسته در نظر گرفته شده است که خواص مکانیکی آن‌ها پیش از این در جدول 2 آورده شده بود. برای هر پوسته اولین فرکانس طبیعی به ازای ابعاد مختلف ترک طولی و محیطی محاسبه شده است. بدیهی است که تغییر جنس پوسته، فرکانس طبیعی آن را تغییر می‌دهد. به همین دلیل و برای مقایسه بهتر، فرکانس طبیعی پوسته‌های ترک‌دار از جنس‌های مختلف، نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون ترک از همان جنس بی‌بعد شده و در شکل 11 ترسیم شده‌اند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که برای لایه‌چینی یکسان، رفتار همه پوسته‌ها در برابر تغییر اندازه ترک تقریباً مشابه و مستقل از جنس است. بررسی‌های انجام شده برای فرکانس‌های ارتعاشی بالاتر نیز به نتایج مشابهی منجر شد که به جهت حفظ اختصار از اشاره به آن‌ها صرف نظر شده است.

برای بررسی تأثیر احتمالی نسبت ابعادی پوسته، مساله مشابهی برای $L=1, R=2$ ($L/R=0.5$) بررسی شد که نتایج آن در شکل 9 نمایش داده شده است. چنانچه ملاحظه می‌شود روند کلی نمودارها مشابه حالت قبل ($L/R=2$) است. این موضوع نشان می‌دهد که نسبت ابعادی پوسته در نتیجه‌گیری انجام شده مؤثر نیست و برای پوسته‌های بلند نیز همچنان تأثیر ترک طولی بیشتر از ترک محیطی است.

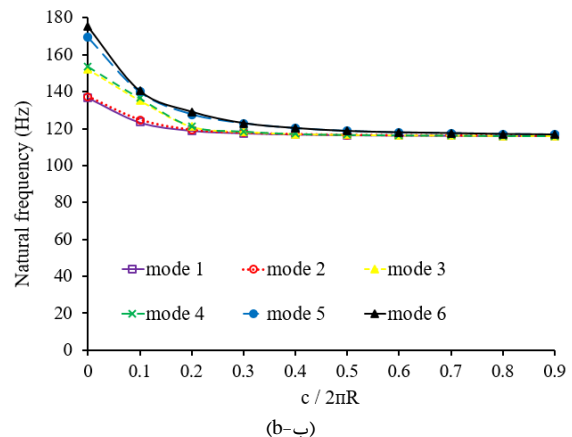
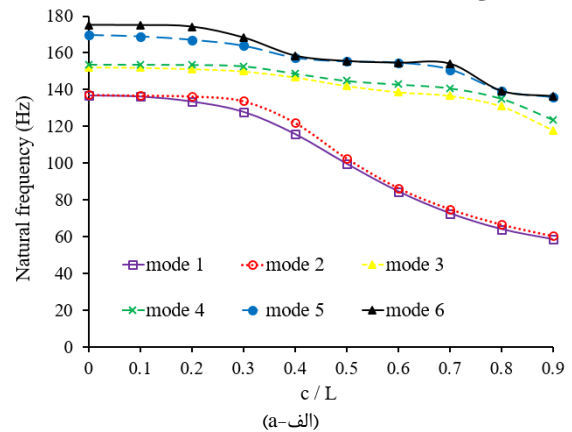


Fig. 9 Frequency variation of shell with different crack dimension (L=1, R=2); a) longitudinal crack b) circumferential crack

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته به ازای ابعاد مختلف ترک (L=1, R=2). الف) ترک طولی، ب) ترک محیطی

جنس گرافیت اپوکسی به صورت هشت لایه و با ضخامت 2 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. اولین فرکانس طبیعی پوسته به ازای سه اندازه مختلف ترک طولی مرکزی در جدول 3 آورده شده است.

جدول 3 فرکانس طبیعی پوسته با و بدون ترک طولی برای لایه‌چینی‌های مختلف
Table 3 Natural frequency of shell with and without longitudinal crack for different layout

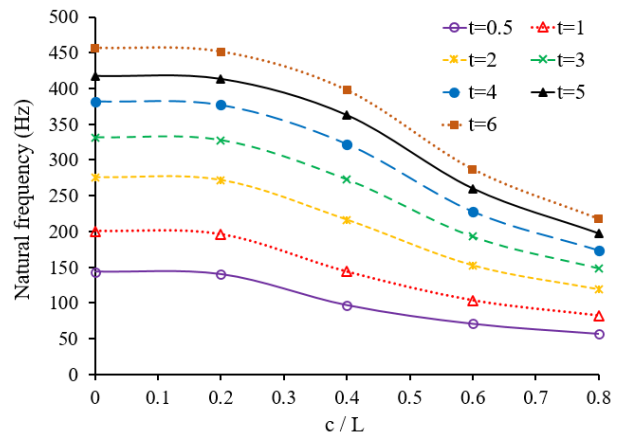
c/L=0.8	c/L=0.6	c/L=0.4	c/L=0	لایه‌چینی
119.35	152.71	216.29	275.62	[±45,0,90] _S
111.27	141.96	201.37	258.70	[±45,90,90] _S
125.60	160.88	226.73	290.71	[±45,0,0] _S
114.62	150.17	213.08	248.58	[0,90] _{2S}
115.89	146.88	205.96	271.70	[±60] _{2S}
120.76	153.43	216.35	280.58	[±45] _{2S}
118.97	154.08	219.03	268.61	[±30] _{2S}
112.06	150.03	207.69	232.81	[±15] _{2S}

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در میان آرایش‌های بررسی شده لایه‌چینی $[±45,0,0]_S$ بیشترین فرکانس طبیعی را داراست. این موضوع هم برای پوسته بدون ترک و هم برای پوسته با ابعاد مختلف ترک صادق است. کمترین فرکانس طبیعی برای پوسته بدون ترک، مربوط به لایه‌چینی $[±15]_{2S}$ است؛ اما برای پوسته دارای ترک، لایه‌چینی $[±45,90,90]_S$ کمترین فرکانس طبیعی را داراست. نکته قابل توجه اینکه وجود ترک بر لایه‌چینی‌های مختلف اثر متفاوتی دارد. به عنوان مثال چنانچه بیان شد، هرچند پوسته بدون ترک با لایه‌چینی $[±15]_{2S}$ کمترین فرکانس طبیعی را در میان آرایش‌های بررسی شده دارد؛ اما فرکانس ارتعاشی این پوسته تأثیر کمتری از وجود ترک طولی می‌پذیرد؛ به گونه‌ای که فرکانس ارتعاشی پوسته‌ای با این لایه‌چینی و دارای ترکی به ابعاد $c/L=0.6$ و $c/L=0.4$ بیشتر از پوسته‌ای با همین ترک و لایه‌چینی $[±60]_{2S}$ و $[±45,90,90]_S$ است.

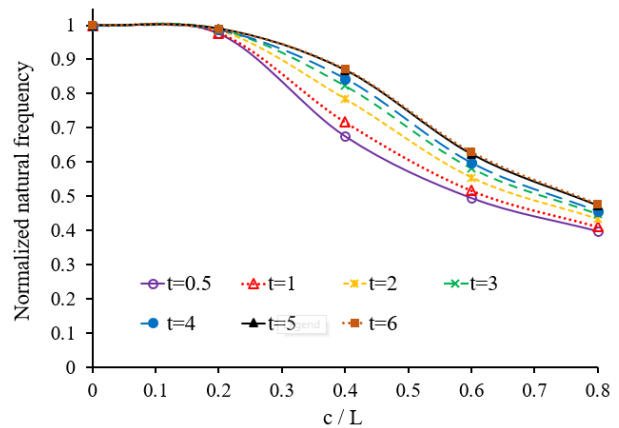
به منظور بررسی بهتر، نتایج به دست آمده برای هر لایه‌چینی نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون ترک با همان لایه‌چینی بی‌بعد شده و در جدول 4 نمایش داده شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که اگرچه تأثیر وجود ترک بر لایه‌چینی‌های مختلف متفاوت است؛ اما این مسئله به اندازه ترک بستگی ندارد. برای همه ابعاد ترک، در میان آرایش‌های بررسی شده بیشترین تأثیرپذیری از وجود ترک مربوط به لایه‌چینی $[±60]_{2S}$ و $[±45]_{2S}$ است و کمترین تأثیرپذیری مربوط به لایه‌چینی $[±60]_{2S}$ و $[0,90]_{2S}$ است. شایان ذکر است نتایج جدول 4 به ترتیب میزان تأثیرپذیری فرکانس طبیعی از وجود ترک (از کم به زیاد) مرتب و ارائه شده است. نکته قابل توجه دیگر اینکه با افزایش طول ترک، تفاوت میان لایه‌چینی‌های مختلف رفته رفته کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر با افزایش طول ترک اهمیت لایه‌چینی کاهش می‌یابد.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای دو نوع ترک طولی و محیطی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به گونه‌ای بیان شده که قابلیت تبدیل به تئوری‌های دانه، لاو و یا را دارد. برای گسسته‌سازی و حل معادلات از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته چند دامنه‌ای استفاده شده است. روند حل در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است. پس از اعتبارسنجی کد نوشته شده از آن برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشاتی پوسته ترک‌دار استفاده شده است.



(الف-ا)



(ب-ب)

Fig. 10 Frequency variation of cracked shell with different thickness, a) Natural frequency b) Normalized frequency

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته ترک‌دار با ضخامت‌های مختلف. الف) فرکانس طبیعی ب) فرکانس بی‌بعد شده

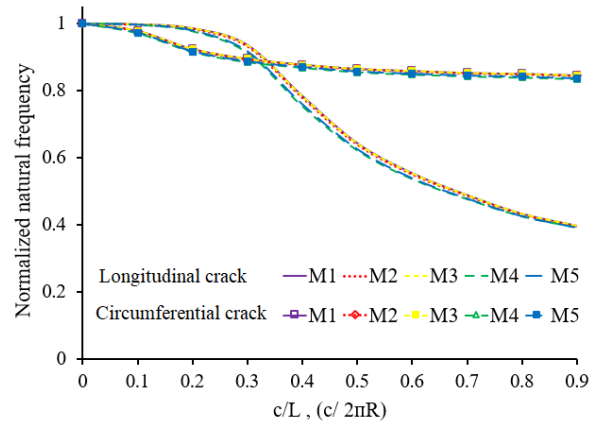


Fig. 11 Effect of mechanical properties on normalized frequency variation of the shell

شکل 11 اثر خواص مکانیکی بر تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته دارای ترک

4-5 اثر لایه‌چینی

در بخش قبل دیده شد که رفتار کلی پوسته دارای ترک مستقل از جنس آن است. در این قسمت اثر لایه‌چینی‌های مختلف بر فرکانس طبیعی پوسته با و بدون ترک بررسی شده است. ضمناً به دلیل اثرگذاری بیشتر ترک‌های طولی، این بررسی صرفاً به این ترک‌ها محدود شده است. در همه موارد، پوسته از

- [7] Wu, C.-P. and Liu, Y.-C., "A Review of Semi-Analytical Numerical Methods for Laminated Composite and Multilayered Functionally Graded Elastic/Piezoelectric Plates and Shells," *Composite Structures*, Vol. 147, pp. 1-15, 2016.
- [8] Nikpour, K., "Diagnosis of Axisymmetric Cracks in Orthotropic Cylindrical Shells by Vibration Measurement," *Composites science and technology*, Vol. 39, No. 1, pp. 45-61, 1990.
- [9] Tavaf, V. and Moradi, Sh. "Vibration Analysis of Cracked Cylindrical Shell with Finite Length," In Persian, 20th Annual International Conference of the Iranian Association of Mechanical Engineers, Shiraz, Iran, 1391.
- [10] Tavaf, V. Moradi, Sh. and Jamshidi Moghadam, P. "Vibration Analysis of Cracked Cylindrical Shell with Global Cracking," In Persian, 2nd International Conference of Accoustic and vibration, Tehran, Iran, 1391.
- [11] Moradi, S. and Tavaf, V., "Crack Detection in Circular Cylindrical Shells Using Differential Quadrature Method," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 111, pp. 209-216, 2013.
- [12] Yin, T. and Lam, H.-F., "Dynamic Analysis of Finite-Length Circular Cylindrical Shells with a Circumferential Surface Crack," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 139, No. 10, pp. 1419-1434, 2013.
- [13] Sarker, L., Xiang, Y., Zhu, X. and Zhang, Y., "Damage Detection of Circular Cylindrical Shells by Ritz Method and Wavelet Analysis," *Electronic Journal of Structural Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 62-74, 2015.
- [14] Moazzez, K., Googarchin, H. S. and Sharifi, S., "Natural Frequency Analysis of a Cylindrical Shell Containing a Variably Oriented Surface Crack Utilizing Line-Spring Model," *Thin-Walled Structures*, Vol. 125, pp. 63-75, 2018.
- [15] Googarchin, H. S. and Moazzez, K., "Analytical Solution for Free Vibration of Cracked Orthotropic Cylindrical Shells," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 153, pp. 254-270, 2019.
- [16] Javidruzzi, M., Vafai, A., Chen, J. and Chilton, J., "Vibration, Buckling and Dynamic Stability of Cracked Cylindrical Shells," *Thin-walled structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 79-99, 2004.
- [17] Dehghani Oskoueii, S., Esmailpour Estekanchi, H. and Vafaei, A., "Free vibration of Cracked Cylindrical Shells," In Persian, *Sharif: Civil Engineering*, Vol. 40, No. 1, pp. 27-33, 2008.
- [18] Nasirmanesh, A. and Mohammadi, S., "An Extended Finite Element Framework for Vibration Analysis of Cracked Fgm Shells," *Composite Structures*, Vol. 180, pp. 298-315, 2017.
- [19] Bellman, R. and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.
- [20] Bellman, R., Kashef, B. and Casti, J., "Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations," *Journal of computational physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.
- [21] Bert, C. W., Jang, S. K. and Striz, A. G., "Two New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components," *AIAA journal*, Vol. 26, No. 5, pp. 612-618, 1988.
- [22] Shu, C., "Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation," Ph.D. Thesis, University of Glasgow, United Kingdom, 1991.
- [23] Zhang, L., Xiang, Y. and Wei, G., "Local Adaptive Differential Quadrature for Free Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Various Boundary Conditions," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, No. 10, pp. 1126-1138, 2006.
- [24] Redekop, D., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Inhomogeneous Thick Orthotropic Shells of Revolution Using Differential Quadrature," *Journal of sound and vibration*, Vol. 291, No. 3-5, pp. 1029-1040, 2006.
- [25] Hosseini-Hashemi, S. and Khorami, K., "Analysis of Free Vibrations of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Using Differential Quadrature Method," In Persian, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2011.

جدول 4 فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته با و بدون ترک طولی برای لایه‌چینی‌های مختلف

Table 4 Normalized natural frequency of shell with and without longitudinal crack for different layups

c/L=0.8	c/L=0.6	c/L=0.4	c/L=0	لایه‌چینی
0.481	0.644	0.892	1	$[\pm 15]_{2S}$
0.461	0.604	0.857	1	$[0,90]_{2S}$
0.443	0.574	0.815	1	$[\pm 30]_{2S}$
0.433	0.554	0.785	1	$[\pm 45,0,90]_S$
0.432	0.553	0.780	1	$[\pm 45,0,0]_S$
0.430	0.549	0.778	1	$[\pm 45,90,90]_S$
0.430	0.547	0.771	1	$[\pm 45]_{2S}$
0.427	0.541	0.758	1	$[\pm 60]_{2S}$

نتایج به دست آمده نشان داد که مطابق انتظار وجود ترک (طولی و محیطی) همواره فرکانس طبیعی سازه را کاهش می‌دهد. در این زمینه اثرگذاری ترک طولی به مراتب بیشتر از ترک محیطی است. برای ترک‌های طولی کوچک ($c/L \leq 0.2$) میزان تأثیرگذاری بر فرکانس طبیعی بسیار ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. اما، وجود ترک‌های طولی بزرگ‌تر می‌تواند فرکانس طبیعی پوسته را به کمتر از نصف کاهش دهد. ضمناً مشاهده شد که تأثیرگذاری ترک بر فرکانس‌های مود اول و دوم ارتعاشی بسیار بیشتر از مودهای بالاتر است. این موضوع برای نسبت ابعادی‌های مختلف پوسته نیز صادق است. علاوه بر این، بررسی‌ها نشان داد که ضخامت پوسته نیز روند کلی اثرگذاری ترک را تغییر نمی‌دهد؛ البته اثر ترک بر کاهش فرکانس طبیعی در پوسته‌های نازک‌تر بیشتر است.

مطالعات در خصوص جنس پوسته و لایه‌چینی‌های مختلف نشان داد که این دو عامل روند کلی تغییرات فرکانس طبیعی پوسته را دگرگون نمی‌کنند، هرچند میزان تأثیرگذاری ترک بر فرکانس طبیعی پوسته به لایه‌چینی پوسته وابسته است. ضمن اینکه با افزایش اندازه ترک اهمیت آرایش لایه‌ها کمتر می‌شود.

7- مراجع

- [1] Vinson, J. R., "The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials," 1st ed., Springer Science & Business Media, pp. 221-22, 1993.
- [2] Haftchenari, H., Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R. and Sharma, C., "Dynamic Analysis of Composite Cylindrical Shells Using Differential Quadrature Method (Dqm)," *Composite Structures*, Vol. 78, No. 2, pp. 292-298, 2007.
- [3] Amabili, M. and Reddy, J., "A New Non-Linear Higher-Order Shear Deformation Theory for Large-Amplitude Vibrations of Laminated Doubly Curved Shells," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 4, pp. 409-418, 2010.
- [4] Qu, Y., Hua, H. and Meng, G., "A Domain Decomposition Approach for Vibration Analysis of Isotropic and Composite Cylindrical Shells with Arbitrary Boundaries," *Composite Structures*, Vol. 95, pp. 307-321, 2013.
- [5] Talezadehlari, A. Ghorbani Menghari, H. and Rahimi, Gh., "Experimental and Numerical Investigation of the Effective Parameters on Vibrational Behavior of Unstiffened and Stiffened Composite Cylindrical Shells," In Persian, *Journal of Mechanical Engineering of Tabriz University*, Vol. 50, No. 3, pp. 135-144, 2020.
- [6] Alijani, F. and Amabili, M., "Non-Linear Vibrations of Shells: A Literature Review from 2003 to 2013," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 58, pp. 233-257, 2014.

- [26] Golchi, M. and Talebitooti, M., "Vibration Analysis of the Composite Sandwich Conical Shell with Various Boundary Conditions Using Finite Element and Differential Quadrature Methods (DQ)," In Persian, Journal of Mechanical Engineering of Tabriz University, Vol. 48, No. 3, pp. 251-260, 2018.
- [27] Sobhani, E., Masoodi, A. R. and Ahmadi-Pari, A. R., "Vibration of FG-CNT and FG-GNP Sandwich Composite Coupled Conical-Cylindrical-Conical Shell," Composite Structures, Vol. 273, pp. 114281, 2021.
- [28] Malekzadeh, P., Farid, M. and Zahedinejad, P., "A Three-Dimensional Layerwise-Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells," International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 85, No. 7, pp. 450-458, 2008.
- [29] Daneshjou, K. and Talebitooti, M., "Free Vibration Analysis of Rotating Stiffened Composite Cylindrical Shells by Using the Layerwise-Differential Quadrature (LW-DQ) Method," Mechanics of Composite Materials, Vol. 50, No. 1, pp. 21-38, 2014.
- [30] Alibeigloo, A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical Shell Using State Space Differential Quadrature Method," International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 86, No. 11, pp. 738-747, 2009.
- [31] Alibeigloo, A. and Kani, A., "3D Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shell Integrated Piezoelectric Layers Using the Differential Quadrature Method," Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, No. 12, pp. 4123-4137, 2010.
- [32] Tong, B., Li, Y., Zhu, X. and Zhang, Y., "Three-Dimensional Vibration Analysis of Arbitrary Angle-Ply Laminated Cylindrical Shells Using Differential Quadrature Method," Applied Acoustics, Vol. 146, pp. 390-397, 2019.
- [33] Selahi, E., Setoodeh, A. R. and Tahani, M., "Transient Analysis and Free Vibration of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to Moving Pressure," In Persian, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, Vol. 53, No. 2, pp. 897-912, 2021.
- [34] Talezadehlari, A. and Rahimi, Gh., "Buckling Analysis of Perforated Composite Cylindrical Shell Using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 11, pp. 385-396, 2018.
- [35] Talezadehlari, A., "Free Vibration Analysis of Perforated Composite Cylindrical Shell Using Generalized Differential Quadrature Method," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 3, pp. 1120-1132, 2020.
- [36] Talezadehlari, A., "Free Vibration Analysis of Perforated Composite Cylindrical Shell and Panel Using Multi-Domain Generalized Differential Quadrature (Gdq) Method," Composite Structures, Vol. 287, pp. 115337, 2022.
- [37] Quan, J. and Chang, C., "New Insights in Solving Distributed System Equations by the Quadrature Method—I. Analysis," Computers & Chemical Engineering, Vol. 13, No. 7, pp. 779-788, 1989.
- [38] Quan, J. and Chang, C.-T., "New Insights in Solving Distributed System Equations by the Quadrature Method—II. Numerical Experiments," Computers & Chemical Engineering, Vol. 13, No. 9, pp. 1017-1024, 1989.
- [39] Shu, C., Khoo, B. and Yeo, K., "Numerical Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations by Generalized Differential Quadrature," Finite elements in analysis and design, Vol. 18, No. 1-3, pp. 83-97, 1994.
- [40] Sahu, S. and Datta, P., "Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987-2005—Part I: Conservative Systems," Applied mechanics reviews, Vol. 60, No. 2, pp. 65-75, 2007.
- [41] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis," 2nd ed., CRC press, pp. 478-480, 2003.
- [42] Hahn, H. T. and Tsai, S. W., "Introduction to Composite Materials," 1st ed., CRC Press, p. 19, 1980.