



## توسعه روش بسته‌شدن مجازی ترک با بکارگیری تئوری لایه‌گون برای بررسی گسترش تورق و جدایش لایه‌ها در تیر کامپوزیتی تحت مود یک

سید علی موسوی طارسی<sup>1</sup>، مهدی افشین<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند، تهران.

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند، تهران.

\* دماوند، صندوق پستی 39715-194، afshin@damavandiau.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله:

با توجه به حساسیت نتایج در ناحیه تورق و جدایش بین لایه‌ها در لمینیت‌های کامپوزیتی، لازم است تا از تئوری‌های دقیق که تمام مولفه‌های تنش را در بر گیرند برای بررسی این ناحیه استفاده شود. به این منظور در مطالعه حاضر، روش بسته شدن مجازی ترک بر اساس تئوری لایه‌گون، برای تحلیل گسترش تورق و جدایش بین لایه‌ها در یک تیر کامپوزیتی توسعه داده شده است. نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در مود یک، بر اساس خواص ماده تعیین شده و یک الگوریتم برای پیاده سازی روش ارائه شده است. روش مذکور بر روی تیر کامپوزیتی یکسر گیردار در لبه متقارن در دو حالت دو و سه بعدی به صورت عددی در نرم افزار متلب اجرا شده و به منظور صحت سنجی روش، با نتایج کارهای گذشته مبتنی بر المان محدود مقایسه شده است. همچنین حل تحلیلی مسئله نیز ارائه شده و با نتایج کار حاضر مورد مقایسه قرار گرفته است. رفتار نیرو-جابجایی یک تیر کامپوزیتی تحلیل شده که نشان دهنده قابلیت مناسب این روش در تحلیل تورق و گسترش جدایش بین لایه‌ها بوده و در عین حال حجم محاسبات به نسبت المان محدود سه بعدی کاهش یافته است.

دریافت: 1400/02/11

پذیرش: 1400/04/17

### کلیدواژگان

تیر کامپوزیتی

جدایش بین لایه‌ای

تئوری لایه‌گون

روش بسته شدن مجازی ترک

## Development of the Virtual Crack Closure Technique using Layer Wise theory for Delamination Propagation of a Composite Beam in Mode I

Sayed Ali Mousavi Tarsi, Mehdi Afshin\*

Department of Mechanical Engineering, Damavand Branch, Islamic Azad University, Damavand, Iran

\* P.O.B. 39715-194, Damavand, Iran, afshin@damavandiau.ac.ir

### Keywords

Composite Beam  
Delamination  
Layer Wise  
VCCT

### Abstract

Due to the sensitivity of the results in the delamination area of composite laminates, it is necessary to use accurate theories that include all components of stress to study this area. For this purpose, in the present study, the virtual crack closure technique based on layer wise theory has been developed to analyze the propagation of delamination in a composite beam. The strain energy release rate in mode I is determined based on the properties of the material and an algorithm is proposed to implement the method. The present method has been implemented numerically in MATLAB software on a 2D and 3D Double Cantilever Beam (DCB). In order to validate the method, it has been compared with the results of previous works based on Finite Element method. An analytical solution to the problem is also presented and compared with the results of the present work. The force-displacement behavior of a DCB composite beam is analyzed, which indicates the suitable capability of this method in the analysis of propagation of delamination, and the computations are reduced relative to the three-dimensional Finite Element.

### 1- مقدمه

تقویت شده شکل می‌گیرد و یکی از حالت‌های شکست متداول در صفحات کامپوزیتی می‌باشد. این پدیده باعث کاهش چشمگیر سفتی و استحکام ساختار کامپوزیتی می‌گردد. تحت عوامل مختلفی از جمله آسیب‌های ناشی از فرآیندهای تولید و بارهای عملیاتی ضربه‌ای، تورق در کامپوزیت‌ها می‌تواند به وقوع بپیوندد. بطور کلی تشخیص وقوع جدایش در یک سازه کامپوزیتی با تست‌های معمول مشکل می‌باشد. بنابراین تحقیقات گسترده‌ای برای

مواد کامپوزیتی بطور معمول دارای استحکام و سفتی بالایی می‌باشند، اما این مواد بطور بالقوه در برابر برخی آسیب‌ها همچون تورق<sup>1</sup> و جدایش بین لایه‌ای، ضعیف هستند. جدایش در واقع ترکی است که بین دو لایه متصل از الیاف

<sup>1</sup> Delamination

Please cite this article using:

Mousavi Tarsi, S. A. and Afshin, M., "Development of the Virtual Crack Closure Technique using Layer Wise theory for Delamination Propagation of a Composite Beam in Mode I", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 1, pp. 1443-1452, 2021.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

شکست، اغلب پارامترهای نرخ رهایی انرژی کرنشی<sup>4</sup> ( $G_{IIC}$  و  $G_{IC}$ ،  $G_{IC}$ ) برای تعیین شروع و گسترش جدایش در ساختارها بکار گرفته می‌شود. بدین منظور مقایسه‌ای بین مولفه‌های نرخ رهایی انرژی کرنشی حاصل از حالت بارگذاری با خصوصیات استحکام شکست ماده صورت می‌گیرد [13].

مقدار بحرانی نرخ رهایی انرژی کرنشی ( $G_C$ ) تابع جنس ماده و شکل جدایش حاصل از بارگذاری می‌باشد. سه حالت خالص بارگذاری شامل مود یک (بازشوندگی)، مود دو (برشی) و مود سه (لغزشی) در شکل 1 نشان داده شده است.

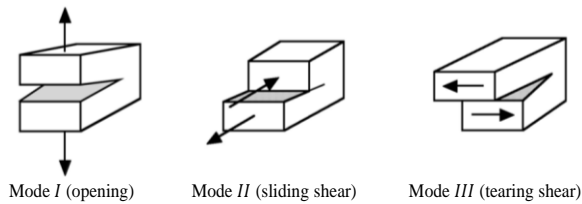


Fig. 1 Pure Mode Loadings [14]

شکل 1 بارگذاری مودهای خالص [14]

یک پدیده جدایش بین لایه‌های ممکن است حاصل بارگذاری یکی از این مودها و یا در نتیجه ترکیب این مودها باشد. نرخ رهایی انرژی کرنشی بحرانی ( $G_C$ ) که تورق در آن شروع به گسترش می‌کند و تعیین کننده مقاومت شکست است به طور قابل توجهی وابسته به مود بارگذاری می‌باشد [14].

شکره و زین‌الدینی [15] مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی را در حالت ترکیبی مودهای اول و دوم جدایش بین لایه‌های بصورت عددی محاسبه و نتایج مدل‌سازی‌های کار خود را با نتایج نیمه تجربی مقایسه کردند.

برای تعیین مقاومت شکست ( $G_C$ ) برای حالت‌های مختلف بارگذاری، انواع مختلف تست در شرایط آزمایشگاهی استاندارد استفاده می‌گردد [17,16]. استانداردهایی توسط ASTM<sup>5</sup> برای اندازه‌گیری ( $G_C$ ) تحت شرایط مختلف بارگذاری ارائه شده است. در استاندارد D5528 برای بارگذاری مود یک از تیر یک سر گیردار دو لبه متقارن<sup>6</sup> استفاده شده و مقاومت شکست را برای مود یک ( $G_{IC}$ ) بدست می‌دهد [18]. برای مسائل پیچیده‌تر در کاربردهای مهندسی، صرفاً بکارگیری تست‌های آزمایشگاهی کافی نبوده و رویکردهای عددی مانند روش المان محدود همراه با تکنیک بسته شدن مجازی ترک و سایر روش‌ها برای محاسبه عددی مولفه‌های نرخ رهایی انرژی کرنشی نیاز می‌باشد [19].

در تحقیق حاضر، تکنیک بسته شدن مجازی ترک بر مبنای تئوری لایه‌گون به منظور دستیابی به نتایج بهتر برای بررسی گسترش جدایش بین لایه‌های توسعه یافته است. فرمول بندی لایه‌گون در تیر کامپوزیتی دچار تورق بکار گرفته شده و مقادیر جابجایی در راستای ضخامت در سه بعد محاسبه می‌گردند. سپس با استفاده از روش بسته شدن مجازی ترک مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی تعیین شده و گسترش ترک بدین نحو تحلیل می‌گردد. تئوری چندین مسئله جدایش بین لایه‌های از طریق کد نویسی، پیاده‌سازی عددی شده و در انتها، نتایج با شبیه‌سازی‌های عددی مبتنی بر المان محدود،

پیش‌بینی شروع و گسترش ترک و جدایش بین لایه‌های در کامپوزیت‌ها در دهه اخیر شکل گرفته است. بخش مهمی از این تحقیقات بر روی درک مکانیسم شکست فرآیند جدایش بین لایه‌های متمرکز گردیده است. اوریفی و همکاران [1] مرور کاملی بر روی معیارهای شکست در مدل‌سازی‌های مواد کامپوزیتی در حالت‌های مختلف بارگذاری ارائه کردند. کارزارو و همکاران [2] معیار شکست را در پیش‌بینی شروع جدایش بین لایه‌های برای لمینت‌های کامپوزیتی معامد بکار گرفتند و بصورت عددی معیار خود را پیاده‌سازی و با نتایج تجربی مقایسه کردند. تورون [3] در کار خود دقت شبیه‌سازی گسترش جدایش بین لایه‌های را افزایش داده و نتایج قابل اطمینانی از شبیه‌سازی‌ها حاصل گردید. مدل‌سازی آسیب کامپوزیت و شبیه‌سازی آن در یک وضعیت همچون ضربه [4] و بارگذاری خستگی [5] نیز در فعالیت‌های اخیر صورت پذیرفته است.

نتایج شبیه‌سازی‌های پیش‌بینی خرابی ممکن است با نتایج تجربی گاه‌گاه متفاوت باشد. مهمترین دلایلی که باعث چنین اختلافی می‌گردد عبارتند از اینکه مواد کامپوزیتی همگن نبوده و دارای خواص غیر همسان در جهات مختلف می‌باشند. همچنین کامپوزیت‌ها عموماً شکننده بوده و شکل‌پذیر نیستند [6]. علاوه بر این، در حین مراحل ساخت ممکن است بخش‌هایی از ساختار دارای مقدار رزین کافی نباشد. در مجموع می‌توان گفت شروع و گسترش مودهای خرابی و آسیب کامپوزیت‌ها بخوبی شناخته نشده و فعالیت‌های بسیاری از محققین در جهت کاهش اختلاف بین شبیه‌سازی‌ها و نتایج تست‌ها به منظور توسعه روش‌های موجود متمرکز شده‌اند.

شبیه‌سازی‌های المان محدود مبتنی بر مفاهیم مکانیک شکست به منظور بررسی گسترش تورق در ساختارهای کامپوزیتی همواره مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. دو روش پرکاربرد در این زمینه، تکنیک بسته شدن مجازی ترک<sup>1</sup> و مدل ناحیه چسبنده<sup>2</sup> می‌باشند که با استفاده از نرم افزارهای المان محدود برای شبیه‌سازی رشد ترک در مواد مختلف از جمله مواد مرکب استفاده می‌گردند [7,8]. کروگر [9] از المان محدود برای مدل‌سازی و تحلیل انواع مختلف تیرهای کامپوزیتی در مبحث جدایش بین لایه‌ای استفاده کرده و فرمول‌بندی‌های این تکنیک را ارائه نمود. همچنین مروری کاملی بر روی فعالیت‌ها و جزئیات روش بسته شدن مجازی ترک انجام داده و این روش را با استفاده از المان محدود برای پیش‌بینی و رشد ترک بکار گرفت. معیارهای شکست به منظور گسترش جدایش بین لایه‌های را معرفی کرده و روش بسته شدن مجازی ترک (VCCT) را با استفاده از روش‌های المان محدود توسعه داد. باربرو [10] نخستین بار تئوری لایه‌گون<sup>3</sup> را برای جدایش لایه‌ها در یک صفحه کامپوزیتی بکار گرفت. همچنین ردی [11] نیز تئوری لایه‌گون را برای لمینت‌های کامپوزیتی توسعه داده و کارآمدی این تئوری را در پیش‌بینی رفتار کامپوزیت‌ها نشان داد. تبیی و ژانگ [12] مرور گسترده‌ای بر دستاوردهای اخیر جدایش بین لایه‌های در کامپوزیت‌ها که بصورت شبیه‌سازی و تجربی صورت گرفته، داشته و روش‌های معتبر بکار رفته در این خصوص را معرفی کردند

تورق معمولاً بعنوان یک ترک دوبعدی یا سه‌بعدی در نظر گرفته شده و از طریق مکانیک شکست شناخته می‌شود. از میان متغیرهای مکانیک

<sup>4</sup> Strain Energy Release Rate (SERR)

<sup>5</sup> American Society for Testing and Materials

<sup>6</sup> Double Cantilever Beam (DCB)

<sup>1</sup> Virtual Crack Closure Technique (VCCT)

<sup>2</sup> Cohesive Zone Model (CZM)

<sup>3</sup> Layer wise

شکل 2 نمایش دو بعدی تکنیک بسته شدن مجازی ترک برای المان‌های 4 گره‌ای در مختصات اصلی [24]

مدل سه‌بعدی المان با 8 گره در شکل 3 نشان داده شده است. مقادیر مولفه‌های نرخ رهایی انرژی کرنشی در موده‌های یک، دو و سه عبارتند از [24]:

$$\begin{aligned} G_I &= -\frac{1}{2\Delta A} Z_{Li}(w_{L\ell} - w_{L\ell^*}) \\ G_{II} &= -\frac{1}{2\Delta A} X_{Li}(u_{L\ell} - u_{L\ell^*}) \\ G_{III} &= -\frac{1}{2\Delta A} Y_{Li}(v_{L\ell} - v_{L\ell^*}) \end{aligned} \quad (2)$$

که  $\Delta a = \Delta ab$  ناحیه بسته‌شدن مجازی ترک می‌باشد.  $\Delta a$  طول المان در ناحیه نوک جدایش و  $b$  عرض المان می‌باشد.  $Z_{Li}$  و  $Y_{Li}$  و  $X_{Li}$  نیروهای موجود در ناحیه جلوی جدایش می‌باشند.  $w_{L\ell}$  و  $v_{L\ell}$  و  $u_{L\ell}$  جابجایی گره‌ها در سطح بالایی ترک و  $w_{L\ell^*}$  و  $v_{L\ell^*}$  و  $u_{L\ell^*}$  جابجایی گره‌ها در سطح پایین ترک می‌باشد.

نیروها و جابجایی‌ها در گره‌های نوک ترک در هر سه جهت قابل محاسبه می‌باشند و لذا تکنیک بسته شدن مجازی ترک یک شیوه مستقیم برای بدست آوردن نرخ رهایی انرژی کرنشی در نوک ترک در هر سه مود ارائه می‌دهد. برای روابط بیشتر در این زمینه می‌توان به تحقیقات کروگر رجوع کرد [24,9]. تکنیک بسته شدن مجازی ترک نمی‌تواند شروع ترک را پیش بینی کند و به یک ترک اولیه برای گسترش ترک و جدایش بین لایه‌های نیاز دارد. همچنین برای مواد الاستیک توسعه داده شده و در صورتیکه تغییر شکل‌های زیاد در ساختار همچون حالت پلاستیک، رخ دهد، نتایج قابل قبولی ارائه نمی‌دهد. به هر حال در صورتی که ترک اولیه وجود داشته باشد و ناحیه شکست در برابر کل ساختار کوچک باشد و از اثرات پل زنی الیاف صرفنظر شود، تکنیک بسته شدن مجازی ترک قابل اعتماد بوده و با دقت خوبی گسترش جدایش بین لایه‌های را پیش بینی می‌کند [12].

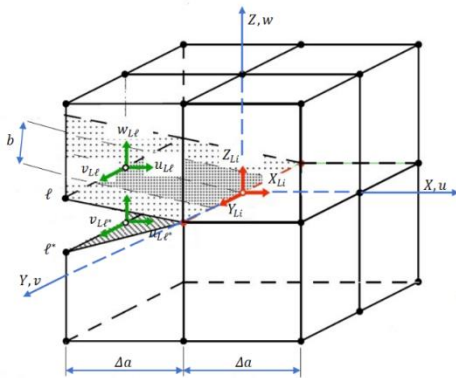


Fig. 3 3D display of VCCT method for 8-node elements in the original coordinate [24]

شکل 3 نمایش سه بعدی تکنیک بسته شدن مجازی ترک برای المان‌های 8 گره‌ای در مختصات اصلی [24]

#### 1-1- معیارهای گسترش تورق

تحلیل گسترش جدایش بین لایه‌های اغلب با رویکرد مکانیک شکست صورت می‌گیرد. برای یک مود خالص تورق، ترک موجود در ساختار وقتی رشد

نتایج تجربی کارهای پیشین و همچنین حل تحلیلی به منظور بررسی اعتبار و قابلیت بالای روش توسعه داده شده، مقایسه می‌گردد.

#### 2- تکنیک بسته شدن مجازی ترک

تکنیک بسته شدن مجازی ترک بطور گسترده‌ای در تحلیل جدایش بین لایه‌های بر اساس مکانیک شکست استفاده می‌گردد. این روش بر این فرض استوار است که میزان انرژی کرنشی آزاد شده در خلال یک فرآیند تورق، معادل میزان کار مورد نیاز برای بسته شدن ترک به طول اولیه می‌باشد [20]. تکنیک بسته‌شدن مجازی ترک نخستین بار توسط ریپیکی و کاننن برای مسائل دوبعدی مطرح گردید [21]. آن‌ها یک روش آسان و مستقیم برای محاسبه مقادیر نرخ رهایی انرژی کرنشی ارائه کردند. این تکنیک همچنین برای تحلیل مسائل سه‌بعدی توسط شیواکومار و همکاران گسترش یافت [22].

دو فرضیه اساسی برای اجرای تکنیک بسته شدن مجازی ترک وجود دارد: 1- میزان انرژی لازم برای باز شدن ترک به میزان کم، معادل میزان انرژی لازم برای بسته شدن ترک می‌باشد. 2- رشد ترک به طول اندک، محل نوک ترک را به میزان قابل توجهی تغییر نمی‌دهد [23,12]. بر اساس تئوری کلاپرون<sup>1</sup> میزان انرژی ذخیره شده در یک جسم الاستیک معادل نصف کار انجام شده توسط نیروهای اعمال شده در جابجایی مرزی می‌باشد [23]. پیاده‌سازی المان محدود در ساختار دوبعدی در شکل 2 نشان داده شده است. پارامترهای مود یک و مود دو از نرخ رهایی انرژی کرنشی  $G_{IC}$  و  $G_{IIC}$  برای المان‌های 4 نقطه‌ای از طریق ضرب نیرو در جابجایی در محل گره‌ها محاسبه می‌گردد [24]:

$$\begin{aligned} G_I &= -\frac{1}{2\Delta a} Z_i(w_\ell - w_{\ell^*}) \\ G_{II} &= -\frac{1}{2\Delta a} X_i(u_\ell - u_{\ell^*}) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $\Delta a$  طول المان،  $Z_i$  و  $X_i$  اندازه نیروها در نوک ترک می‌باشند. مقادیر جابجایی در ناحیه نوک ترک از طریق تفاضل بین جابجایی‌های گره‌ای در سطح بالای ترک ( $w_\ell$  و  $u_\ell$ ) و جابجایی‌های گره‌ها در سطح پایین ترک ( $w_{\ell^*}$  و  $u_{\ell^*}$ ) محاسبه می‌گردد.

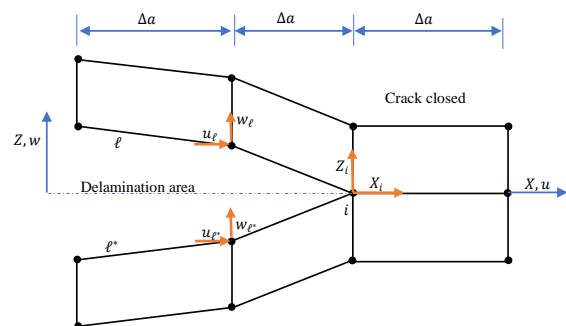


Fig. 2 2D display of the VCCT method for 4-node elements in the original coordinate [24]

<sup>1</sup> Clapeyron

تجربی بدست می آید [30]. رابطه بی-کی فقط به یک متغیر  $\eta$  به منظور کالیبره شدن با تست‌های تجربی نیاز دارد که این یک برتری عمده نسبت به دیگر معیارهای گسترش جدایش محسوب می‌گردد. مطالعات نشان داده که معیار بی-کی نتایج خوبی را در گسترش جدایش گزارش می‌دهد [31]، لذا در تحقیق حاضر از روابط بی-کی استفاده شده است.

### 3- فرمول‌بندی تئوری لایه گون

هندسه و مختصات تیر کامپوزیتی استفاده شده طبق تئوری لایه گون در شکل 4 نشان داده شده است.

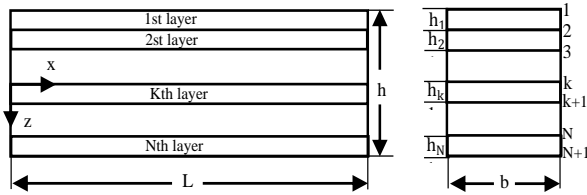


Fig. 4 Geometry and coordinates of composite beam in Layer Wise theory

شکل 4 هندسه و مختصات تیر کامپوزیتی در تئوری لایه گون

مقادیر جابجایی طبق تئوری لایه گون عبارتند از [32]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U_k(x)\Phi_k(z) \\ v(x, y, z) &= V_k(x)\Phi_k(z) \\ w(x, y, z) &= W_k(x)\Phi_k(z) \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (9)$$

در رابطه (9)،  $k$  شماره لایه‌های عددی در راستای ضخامت از مجموع کل  $N$  لایه بوده و  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب مولفه‌های جابجایی نقطه‌ای در یک لایه در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند. همچنین  $U_k$ ،  $V_k$  و  $W_k$  به ترتیب مولفه‌های جابجایی همه نقاط مستقر در صفحه  $k$ ام در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  و  $\Phi_k(z)$  تابع میان‌یابی کلی می‌باشند. تابع میان‌یابی در راستای ضخامت لایه پیوسته بوده و بدین صورت تعریف می‌گردد [32]:

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} 0 & z \leq z_{k-1} \\ \Psi_{k-1}^2 & z_{k-1} \leq z \leq z_k \\ \Psi_k^1 & z_k \leq z \leq z_{k+1} \\ 0 & z \geq z_{k+1} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (10)$$

در رابطه (10)،  $\Psi_k^j$  تابع محلی میان‌یابی لاگرانژی با در نظر گرفتن گره  $k$ ام از لایه  $k$ ام می‌باشد. این تابع می‌تواند خطی یا یک تابع با مشتقات بالاتر در راستای ضخامت  $z$  باشد. در این مطالعه از یک تابع میان‌یابی خطی استفاده شده است:

$$\Psi_k^1 = \frac{z_{k+1} - z}{h_k}, \quad \Psi_k^2 = \frac{z - z_k}{h_k} \quad (11)$$

با جایگذاری میدان جابجایی رابطه (9) در روابط کرنش-جابجایی خطی الاستیک، مولفه‌های کرنش بدین صورت بدست می‌آیند:

می‌یابد که میزان رهاسازی انرژی در موده‌های یک، دو و سه به مقدار بحرانی آن ساختار می‌رسد.

$$G_i \geq G_{ic} \quad i = I, II, III \quad (3)$$

نرخ رهایی انرژی کرنشی بحرانی ( $G_{ic}$ ) در موده‌های مختلف از طریق تست‌های استاندارد بدست می‌آید [25,18]. اغلب در شرایط واقعی، تورق در حالت موده‌های ترکیبی به وقوع می‌پیوندد. لذا در تحلیل گسترش جدایش نیاز به یک معیار حاصل از تقابل موده‌های مختلف و در نظر گرفتن حالت ترکیبی از موده‌ها می‌باشد [26]. روابط پاور<sup>1</sup> [27,14] و بی-کی<sup>2</sup> [29,28] به عنوان معیارهای مناسب و موثر در انتشار تورق برای ساختارهای دو بعدی و سه بعدی بصورت گسترده‌ای مطابق روابط (4) تا (8) بکار می‌روند:

Power law 2D:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^\beta \geq 1 \quad (4)$$

Power law 3D:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^\beta + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIC}}\right)^\chi \geq 1 \quad (5)$$

که  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\chi$  از نتایج تست‌های تجربی و با برازش منحنی بدست می‌آید. در یک حالت خاص  $\alpha = \beta = \chi = 1$  روابط پاور به روابط خطی تبدیل می‌گردد:

$$\frac{G_I}{G_{IC}} + \frac{G_{II}}{G_{IIC}} + \frac{G_{III}}{G_{IIIC}} \geq 1 \quad (6)$$

B-K law 2D:

$$\frac{G_T}{G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC})\left(\frac{G_{II}}{G_T}\right)^\eta} \geq 1 \quad (7)$$

B-K law 3D:

$$\frac{G_T}{G_{IC} + ((G_{IIC} - G_{IC})\frac{G_{II}}{G_T} + (G_{IIIC} - G_{IC})\frac{G_{III}}{G_T})\left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_T}\right)^{\eta-1}} \geq 1 \quad (8)$$

در روابط (7) و (8)  $G_T = G_I + G_{II} + G_{III}$  نرخ رهایی انرژی کل می‌باشد.  $G_{IC}$ ،  $G_{IIC}$  و  $G_{IIIC}$  نرخ آزادسازی انرژی‌های بحرانی به ترتیب در موده‌های یک، دو و سه می‌باشند.  $\eta$  در روابط بی-کی از تست‌های استاندارد

<sup>1</sup> Power law

<sup>2</sup> B-K law

شرایط مرزی مرتبط با معادله (16) شامل مشخص کردن یکی از  $U_k$  یا  $M_x^k$ ،  $V_k$  یا  $M_{xy}^k$  و  $W_k$  یا  $R_x^k$  در  $x = 0$  و  $x = L$  می‌باشد.

2-3- معادلات تعادل بر حسب جابجایی

روابط تنش-کرنش برای لایه  $k$ ام از یک لمینت غیر همسانگرد<sup>1</sup> بر اساس قانون هوک<sup>2</sup> عبارتست از [32]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (18)$$

$[\bar{C}]^k$  ماتریس سختی دوران یافته لایه  $k$ ام می‌باشد. با وجود اینکه مقدار  $\varepsilon_y^{(k)}$  بر اساس پارامتر جابجایی در معادله (9) برابر صفر می‌باشد، ولی در قانون هوک برای یک تیر کامپوزیتی نباید استفاده گردد. برای جبران حذف آن از رابطه زیر می‌توان کمک گرفت [32]:

$$\sigma_y^{(k)} = 0 \quad (19)$$

و بدین صورت عبارت  $\varepsilon_y^{(k)}$  از روابط باقیمانده در معادله (18) حذف می‌گردد. بعد از انجام این تغییر، رابطه تنش-کرنش برای تیر از نوع لمینیت کامپوزیتی بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (20)$$

و

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (21)$$

که  $\bar{C}_{pq}^{(k)}$  در معادله (20) عبارتست از:

$$\bar{C}_{pq}^{(k)} = \bar{C}_{pq}^{(k)} - \frac{\bar{C}_{2p}^{(k)} \bar{C}_{2q}^{(k)}}{\bar{C}_{22}^{(k)}} \quad (22)$$

با جایگذاری معادله (12) و معادله (20) در معادله (17) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{dU_k}{dx} \Phi_k, & \varepsilon_y &= 0, & \varepsilon_z &= W_k \frac{d\Phi_k}{dz} \\ \gamma_{yz} &= V_k \frac{d\Phi_k}{dz}, & \gamma_{xz} &= U_k \frac{d\Phi_k}{dz} + \frac{dW_k}{dx} \Phi_k, & \gamma_{xy} &= \frac{dV_k}{dx} \Phi_k \end{aligned} \quad (12)$$

1-3- معادلات تعادل

برای استخراج روابط تعادل از اصل کار مجازی استفاده می‌شود:

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (13)$$

که  $\delta U$  در رابطه (13) کار مجازی داخلی در تیر بوده و بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$\delta U = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (14)$$

$\delta V$  در رابطه (13) کار مجازی خارجی در اثر نیروهای عرضی  $P_t(x)$  و  $P_b(x)$  اعمال شده به ترتیب بر سطوح بالایی و پایینی تیر بوده و می‌توان بدین صورت آن را تعریف کرد:

$$\delta V = - \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L (P_t(x) \delta W_1(x) + P_b(x) \delta W_{N+1}(x)) dx dy \quad (15)$$

با جایگزینی مولفه‌های کرنش روابط (12) در معادله (14) و استفاده از روابط (13) و (15)، تعداد 3(N + 1) معادله تعادل مرتبط با 3(N + 1) مجهول  $U_k, V_k$  و  $W_k$  بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \delta U_k: \frac{dM_x^k}{dx} - Q_x^k &= 0 \\ \delta V_k: \frac{dM_{xy}^k}{dx} - Q_y^k &= 0 \\ \delta W_k: \frac{dR_x^k}{dx} - N_x^k &= -\delta_{k1} P_{tz}(x) - \delta_{k(N+1)} P_{bz}(x) \end{aligned} \quad (16)$$

روابط تنش در معادله (16) بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} (Q_x^k, Q_y^k) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \frac{d\Phi_k}{dz} dz \\ (M_x^k, M_{xy}^k) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_{xy}) \Phi_k dz \\ R_x^k &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \Phi_k dz, N_z^k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \frac{d\Phi_k}{dz} dz \end{aligned} \quad (17)$$

<sup>1</sup> Orthotropic

<sup>2</sup> Hooke law

$$\delta U_k: \bar{D}_{11}^{kj} \frac{d^2 U_j}{dx^2} - A_{55}^{kj} U_j + \bar{D}_{16}^{kj} \frac{d^2 V_j}{dx^2} - A_{45}^{kj} V_j + (\bar{B}_{13}^{kj} - B_{55}^{jk}) \frac{dW_j}{dx} = \alpha^{kj} U_j$$

$$(N_z^k, M_x^k, M_{xy}^k) = (\bar{B}_{13}^k, \bar{D}_{11}^k, \bar{D}_{16}^k) \frac{dU_j}{dx} + (\bar{A}_{33}^{kj}, \bar{B}_{13}^{kj}, \bar{B}_{36}^{kj}) W_j + (\bar{B}_{36}^{jk}, \bar{D}_{16}^{kj}, \bar{D}_{66}^{kj}) \frac{dV_j}{dx}$$
(23)

$$\delta V_k: \bar{D}_{16}^{kj} \frac{d^2 U_j}{dx^2} - A_{45}^{kj} U_j + \bar{D}_{66}^{kj} \frac{d^2 V_j}{dx^2} - A_{44}^{kj} V_j + (\bar{B}_{36}^{kj} - B_{45}^{jk}) \frac{dW_j}{dx} = \alpha^{kj} V_j$$

که

$$\delta W_k: (B_{55}^{kj} - \bar{B}_{13}^{jk}) \frac{dU_j}{dx} + (B_{45}^{kj} - \bar{B}_{36}^{jk}) \frac{dV_j}{dx} + D_{55}^{kj} \frac{d^2 W_j}{dx^2} - \bar{A}_{33}^{kj} W_j = -\delta_{k1} P_t(x) - \delta_{k(N+1)} P_b(x)$$
(24)

همچنین با جایگزین کردن معادله (12) و معادله (21) در معادله (17) خواهیم داشت:

عبارت  $\alpha^{kj}$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [33]:

$$\alpha^{kj} = \alpha \int_{-h/2}^{h/2} \Phi_k \Phi_j dz$$
(28)

انتخاب مقدار دلخواه  $\alpha$  باید به گونه‌ای باشد که مقادیر  $\alpha^{kj}$  در مقایسه با مقادیر عددی سختی  $A_{pq}^{kj}$  ( $pq = 44, 45$ ) نسبتاً کوچک شوند. معادله (28) با استفاده از متغیرهای فضای حالت می‌تواند به یک سیستم درجه اول معادلات دیفرانسیل ساده تبدیل گردد:

$$\{X_1(x)\} = \{U(x)\}, \quad \{X_2(x)\} = \{V(x)\},$$

$$\{X_3(x)\} = \{W(x)\}, \quad \{X_4(x)\} = \left\{ \frac{dU(x)}{dx} \right\},$$

$$\{X_5(x)\} = \left\{ \frac{dV(x)}{dx} \right\}, \quad \{X_6(x)\} = \left\{ \frac{dW(x)}{dx} \right\}$$
(29)

که برای مثال

$$\{U\}^T = [U_1, U_2, \dots, U_{N+1}]$$
(30)

جایگذاری معادله (30) در معادله (28) منجر به  $6(N+1)$  سیستم درجه اول معادلات دیفرانسیل ساده می‌گردد:

$$\left\{ \frac{dX(x)}{dx} \right\} + [A]\{X(x)\} = \{F(x)\}$$
(31)

ماتریس  $[A]$  و بردار  $\{F(x)\}$  به ترتیب ماتریس ضرایب و بردار نیرو می‌باشند [34]. معادله (32) با اعمال شرایط مرزی در  $x = L$  و  $x = 0$  حل شده و مقادیر جابجایی در تمام نقاط تیر تعیین می‌گردد. در نهایت از این مقادیر برای محاسبه پارامترها در تکنیک بسته شدن مجازی ترک استفاده می‌شود.

$$(\bar{A}_{pq}^{kj}, \bar{B}_{pq}^{kj}, \bar{D}_{pq}^{kj}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{pq}^{(k)} \left( \frac{d\Phi_k}{dz} \frac{d\Phi_j}{dz}, \Phi_k \frac{d\Phi_j}{dz}, \Phi_k \Phi_j \right) dz$$
(25)

همچنین با جایگزین کردن معادله (12) و معادله (21) در معادله (17) خواهیم داشت:

$$(Q_y^k, Q_x^k, R_x^k) = (A_{44}^{kj}, A_{45}^{kj}, B_{45}^{kj}) V_j + (A_{45}^{kj}, A_{55}^{kj}, B_{55}^{kj}) U_j + (B_{45}^{jk}, B_{55}^{jk}, D_{55}^{kj}) \frac{dW_j}{dx}$$
(26)

که

$$(A_{pq}^{kj}, B_{pq}^{kj}, D_{pq}^{kj}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{pq}^{(k)} \left( \frac{d\Phi_k}{dz} \frac{d\Phi_j}{dz}, \Phi_k \frac{d\Phi_j}{dz}, \Phi_k \Phi_j \right) dz$$
(27)

در نهایت معادلات تعادل بر حسب جابجایی با جایگزینی معادله (23) و معادله (25) در معادله (16) بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\delta U_k: \bar{D}_{11}^{kj} \frac{d^2 U_j}{dx^2} - A_{55}^{kj} U_j + \bar{D}_{16}^{kj} \frac{d^2 V_j}{dx^2} - A_{45}^{kj} V_j + (\bar{B}_{13}^{kj} - B_{55}^{jk}) \frac{dW_j}{dx} = 0$$

$$\delta V_k: \bar{D}_{16}^{kj} \frac{d^2 U_j}{dx^2} - A_{45}^{kj} U_j + \bar{D}_{66}^{kj} \frac{d^2 V_j}{dx^2} - A_{44}^{kj} V_j + (\bar{B}_{36}^{kj} - B_{45}^{jk}) \frac{dW_j}{dx} = 0$$

$$\delta W_k: (B_{55}^{kj} - \bar{B}_{13}^{jk}) \frac{dU_j}{dx} + (B_{45}^{kj} - \bar{B}_{36}^{jk}) \frac{dV_j}{dx} + D_{55}^{kj} \frac{d^2 W_j}{dx^2} - \bar{A}_{33}^{kj} W_j = -\delta_{k1} P_t(x) - \delta_{k(N+1)} P_b(x)$$
(27)

### 3-3- حل تحلیلی معادلات تعادل بر حسب جابجایی

معادلات تعادل (27) یک سیستم مرتبه دوم معادلات دیفرانسیل ساده می‌باشد. معادله مشخصه این سیستم دارای چهار ریشه تکراری بوده که در فرآیند حل مشکلاتی ایجاد می‌کند. به منظور ارائه طرحی برای حل این معادلات، برخی ترم‌های مصنوعی کوچک به این معادلات اضافه می‌شوند تا ریشه‌های مشخصه از هم متمایز شوند [33]. بنابراین معادله (27) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

## 4- پیاده‌سازی عددی

در بکارگیری تکنیک بسته شدن مجازی ترک به منظور اجرای جدایش بین لایه‌ای از روش متداول رهاسازی گره‌ها استفاده شده است. [35,12]. در این تحقیق دو صفحه مجاور ترک به صورت سطوح بالا و پایین دو تیر غیر متصل، در حالیکه مقید به یکدیگرند مدل می‌شوند. ناحیه پیش ترک  $\Delta a$  در این مدل در سطوح بالا و پایین مقید نمی‌باشد. وقتی معیار (بی-کی) بیان شده در بخش 2 ارضا گردد، قید اشاره شده رها شده و دو گره از هم جدا می‌گردد و یک گسترش ترک شکل می‌یابد. مزیتی که در روش حاضر نسبت به المان محدود وجود دارد امکان تغییر مقدار  $\Delta a$  بدون نیاز به مش‌بندی مجدد است.

برای پیاده‌سازی روش توسعه داده شده در تحقیق حاضر، یک الگوریتم در شکل 5 بیان شده است. در الگوریتم اشاره شده مقدار جابجایی  $\delta$  معادل جابجایی نهایی لبه آزاد تیر بر اساس شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود. در شروع کد، پارامتر جابجایی اولیه لبه آزاد تیر  $\delta_i$  به طور پیش فرض معادل صفر قرار گرفته که در پایان هر مرحله تا رسیدن به جابجایی نهایی لبه آزاد تیر افزایش می‌یابد. در هر گام مقادیر جابجایی و نیروها بر اساس روابط تئوری لایه‌گون که در بخش 3 ارائه گردید، محاسبه شده و سپس پارامترهای نرخ رهایی انرژی کرنشی مطابق روابط تکنیک بسته شدن مجازی ترک تعیین می‌گردد.

برنامه متلب انجام شده است. تیر کامپوزیتی در دو حالت دوبعدی و سه‌بعدی به منظور پیاده‌سازی عددی روش در نظر گرفته می‌شود.

با اعمال تئوری لایه‌گون در ساختار، مقادیر جابجایی محاسبه می‌گردد. پس از مشخص شدن مقادیر جابجایی‌ها، فرمول‌بندی روش بسته شدن مجازی ترک به منظور محاسبه مولفه‌های میزان رهایی انرژی کرنشی ( $G_{IC}$ ،  $G_{IIIC}$  و  $G_{IIIIC}$ ) در نوک ترک استفاده شده است، اگرچه در مدل ارائه شده تاثیر  $G_{II}$  و  $G_{III}$  در مقایسه با  $G_I$  ناچیز می‌باشد. در این مطالعه از معیار بی-کی برای پیش بینی گسترش ترک استفاده شده و پارامتر  $\eta = 1.75$  در نظر گرفته می‌شود.

به منظور بررسی و مقایسه نتایج با تحقیقات موجود در مرجع [35]، یک تیر کامپوزیتی با یک جدایش مستقیم در نظر گرفته شده که اندازه ابعادی آن در شکل 6 نشان داده شده است. تیر به سه زیر مدل تقسیم شده و حل معادلات هر کدام با استفاده از تئوری لایه‌گون انجام می‌شود. در ناحیه اتصال تیرها شرایط پیوستگی جابجایی اعمال شده و در صفحه ترک، تنش‌های در راستای ضخامت صفر در نظر گرفته می‌شوند. تیر دارای یک ترک اولیه  $a_0 = 30 \text{ mm}$  در طول المان‌های میانی بوده که در حین فرآیند جدایش در یک خط مستقیم گسترش می‌یابد. بارگذاری از طریق وارد ساختن یک جابجایی مشخص در لبه بالا و پایین تیر ( $\delta = 4 \text{ mm}$ ) اعمال می‌گردد.

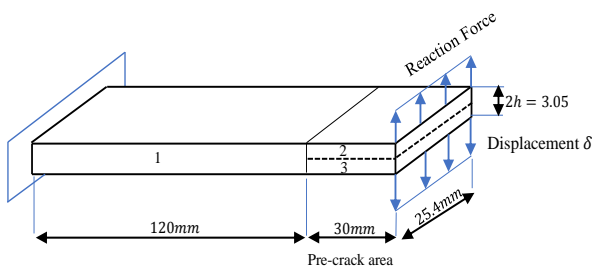


Fig. 6 Dimensions of the studied composite beam, boundary conditions and pre-crack area in the structure [35]

شکل 6 ابعاد تیر کامپوزیتی مورد مطالعه، شرایط مرزی و ناحیه پیش ترک در ساختار [35]

تیر کامپوزیتی مورد مطالعه شامل ماده گرافیت-اپوکسی T300/976 بوده که خواص مکانیکی آن در جدول 1 بیان شده است. همچنین فرض شده است که الیاف در جهت طولی نمونه قرار دارند.

جدول 1 خواص مکانیکی نمونه DCB [35]

Table 1 Mechanical properties of DCB specimens [35]

$E_1$	$E_2, E_3$	$G_{12}, G_{13}$	$G_{23}$	$\nu$	$G_{IC}$	$G_{IIIC}, G_{IIIIC}$
$N/mm^2$	$N/mm^2$	$N/mm^2$	$N/mm^2$		$N/mm$	$N/mm$
139300	9720	5580	3450	0.29	0.0876	0.3152

ابتدا یک تحلیل رشد ترک و جدایش در نرم افزار المان محدود آباکوس برای تیر کامپوزیتی در حالت دوبعدی و سه‌بعدی اجرا شده است. تحلیل با

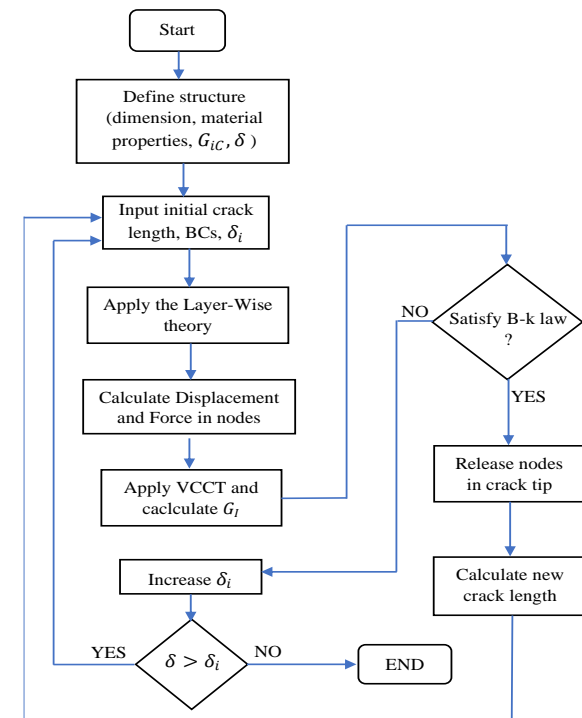
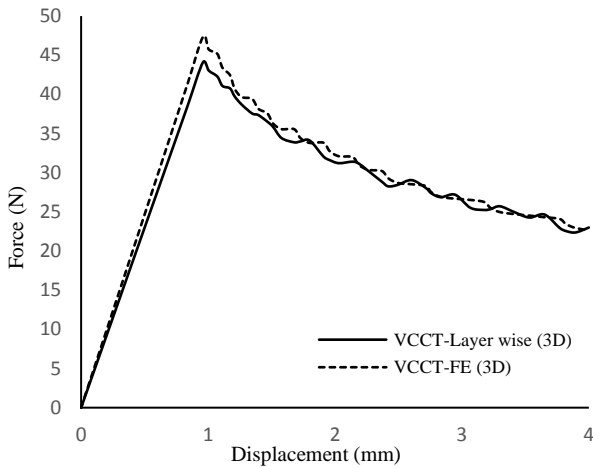


Fig. 5 Flowchart of Numerical implementation of the developed method

شکل 5 فلوچارت پیاده‌سازی عددی روش توسعه داده شده

## 5- بحث و نتایج

بر اساس روش توسعه داده شده که در بخش‌های قبل بیان گردید، مدل‌سازی انتشار ترک با روش بسته‌شدن مجازی ترک-لایه‌گون از طریق کدنویسی در



**Fig. 8** Comparison of the force-displacement curve obtained from the developed method (VCCT-Layer wise) and Abaqus software (VCCT-FE) for composite DCB in 3D

شکل 8 مقایسه منحنی نیرو-جابجایی حاصل از روش توسعه داده شده (روش بسته شدن مجازی ترک-لایه گون) و نرم افزار آباکوس (روش بسته شدن مجازی ترک-المان محدود) برای نمونه تیر کامپوزیتی در حالت سه بعدی

در منحنی‌های اشکال 7 و 8 اختلاف نیروی عکس‌العمل با روش المان محدود بین حالت‌های دوبعدی و سه بعدی قابل ملاحظه می‌باشد. در حالیکه این اختلاف بین حالت دو بعدی و سه بعدی در روش توسعه داده شده کمتر می‌باشد. بکارگیری تئوری لایه گون مقادیر جابجایی‌های دقیق‌تری به ویژه در حالت دوبعدی در روش بسته شدن مجازی ترک حاصل کرده که این نیز منجر به نزدیک شدن نتایج دو بعدی به سه بعدی در روش توسعه داده شده و در نتیجه پاسخ‌های واقعی‌تر در پیش‌بینی جدایش بین لایه‌های می‌گردد.

به منظور اعتبارسنجی روش توسعه داده شده، مقایسه‌ای با نتایج تجربی حاصل از فعالیت مرجع [36] صورت پذیرفته است. در این تحلیل تیر یک سرگردار دولبه متقارن با ابعاد  $150\text{mm} \times 25\text{mm}$ ، با ضخامت  $2h = 3.3\text{mm}$  همراه با یک ترک اولیه به طول  $a_0 = 63\text{mm}$  با خواص مکانیکی ذکر شده در جدول 2 مورد بررسی قرار گرفته است. مطابق شکل 9 روند منحنی نمودار نیرو-جابجایی نشان دهنده تطابق مناسب روش توسعه داده شده با نتایج تجربی می‌باشد.

جدول 2 خواص مکانیکی نمونه تجربی در مرجع [36]

$E_1$ ( $N/mm^2$ )	$E_2$ ( $N/mm^2$ )	$E_3$ ( $N/mm^2$ )
193382	6056	4500
$G_{12}$ ( $N/mm^2$ )	$G_{23}$ ( $N/mm^2$ )	$G_{31}$ ( $N/mm^2$ )
4452	3561	3561
$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
0.246	0.196	0.196
$G_{IC}$ ( $N/mm$ )	$G_{IIC}$ ( $N/mm$ )	
0.3880	0.8472	

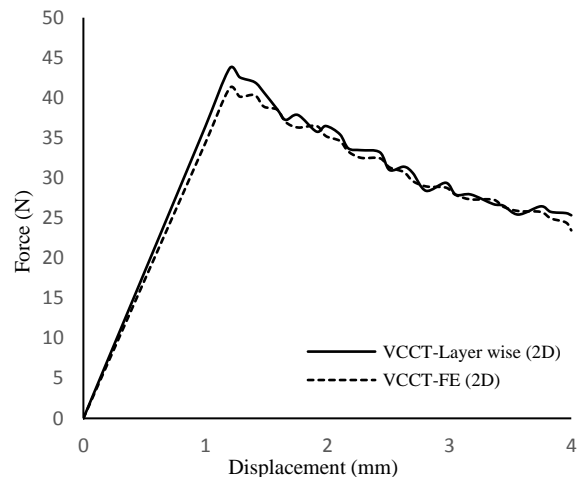
بکارگیری تکنیک بسته شدن مجازی ترک صورت پذیرفته و لذا تحت عنوان روش بسته شدن مجازی ترک-المان محدود در نظر گرفته می‌شود. نتایج تحلیل انجام شده بطور کامل منطبق با مرجع [35] بوده، لذا نتایج حاصل از مدل نرم افزار می‌تواند یک معیار مناسب برای صحت‌سنجی روش توسعه داده شده مبتنی بر تئوری لایه گون تلقی گردد. مقایسه‌ای بین نتایج تحلیل نرم‌افزاری و پیاده سازی عددی بر اساس الگوریتم شکل 5 در زمینه جدایش صورت گرفته است. نخست روش بسته شدن مجازی ترک-لایه گون برای تیر کامپوزیتی دو بعدی با شرایط مرزی شکل 6 اجرا گردید.

نتایج نمودار نیرو-جابجایی در شکل 7 نشان دهنده آن است که تطابق خوبی میان استفاده از المان محدود در مقایسه با تئوری لایه گون در هنگام بکارگیری فرمول بندی تکنیک بسته شدن مجازی ترک در جدایش وجود دارد.

در این مورد فرمول بندی‌های المان 4 گره‌ای که در بخش 2 بیان شد استفاده گردید. مقدار نیرو در منحنی‌های نیرو-جابجایی بیانگر نیروی عکس‌العمل در لبه انتهایی آزاد تیر می‌باشد.

در ادامه فرمول بندی المان 8 گره‌ای ارائه شده در بخش 2 به منظور آنالیز تیر یک سر گردار دولبه متقارن در حالت سه بعدی استفاده گردید. مقایسه‌ای بین نتایج پیاده سازی عددی روش بسته شدن مجازی ترک-لایه گون و روش بسته شدن مجازی ترک-المان محدود در حالت سه بعدی در شکل 8 نشان داده شده است.

در حالت سه بعدی نیز تئوری لایه گون رفتار مشابه‌ای را در مقایسه با المان محدود در حین گسترش جدایش و رشد ترک با استفاده از تکنیک بسته شدن مجازی ترک نشان می‌دهد.

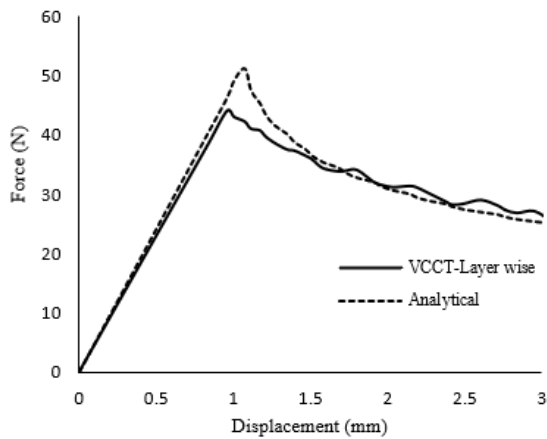


**Fig. 7** Comparison of the force-displacement curve obtained from the developed method (VCCT-Layer wise) and Abaqus software (VCCT-FE) for composite DCB in 2D

شکل 7 مقایسه منحنی نیرو-جابجایی حاصل از روش توسعه داده شده (روش بسته شدن مجازی ترک-لایه گون) و نرم افزار آباکوس (روش بسته شدن مجازی ترک-المان محدود) برای نمونه تیر کامپوزیتی در حالت دوبعدی

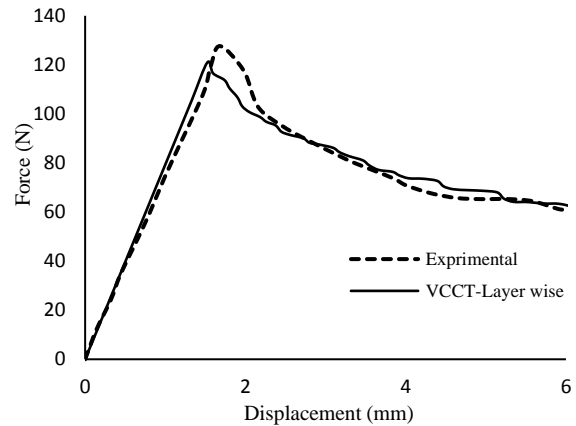


نمی‌گردد و همچنین حل تحلیلی خواص ارتروپیک ماده نیز در نظر گرفته نمی‌شود و فقط مدول الایسته  $E_1$  در محاسبات وارد می‌گردد.



**Fig. 10** Comparison of the force-displacement curve obtained from the developed method (VCCT-Layer wise) and the results of analytical solution in composite DCB

شکل 10 مقایسه منحنی نیرو-جابجایی حاصل از روش توسعه داده شده (روش بسته شدن مجازی ترک-لایه‌گون) و نتایج حل تحلیلی در تیر کامپوزیتی



**Fig. 9** Comparison of the force-displacement curve obtained from the developed method (VCCT-Layer wise) and experimental result in Ref.[36]

شکل 9 مقایسه منحنی نیرو-جابجایی حاصل از روش توسعه داده شده (روش بسته شدن مجازی ترک-لایه‌گون) و نتایج تجربی مرجع [36]

### 1-5- حل تحلیلی

نتایج حاصل از حل تحلیلی در موضوع جدایش مطابقت خوبی با نتایج تجربی نشان می‌دهد. این تحلیل‌ها با نادیده گرفتن تاثیرات جابجایی‌های بزرگ صورت می‌گیرد که در منابع به جزئیات آن اشاره شده است [38,37]. شرایط تنش صفحه‌ای و فرمول بندی‌های کرنش-جابجایی‌های کوچک به منظور مطابقت با فرضیات حل تئوری تیر تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. حل تحلیلی تیر یک سر گیردار دولبه متقارن بر اساس تئوری تیر برنولی و مکانیک شکست الاستیک خطی، در حالت بارگذاری مود یک مطابق شکل 6، بدین صورت در نظر گرفته می‌شود [40,39]:

$$R_{elastic} = \frac{3 E_1 I}{2 a_0^3} \cdot \delta \quad (33)$$

$$R_{delamination} = \sqrt{\frac{2 (b G_{IC} E_1 I)^{3/2}}{3 E_1 I \delta}} \quad (34)$$

که  $R_{elastic}$  بخش خطی نمودار نیرو-جابجایی قبل از گسترش جدایش و  $R_{delamination}$  قسمت غیر خطی نمودار نیرو-جابجایی در حین گسترش جدایش می‌باشد.  $\delta$  جابجایی پیش فرض اولیه،  $I$  ممان اینرسی بخش جدا شده تیر،  $h$  ارتفاع تیر،  $b$  عرض تیر،  $a_0$  طول ناحیه جدایش اولیه، بر اساس شرایط مرزی شکل 6 می‌باشد. همچنین میزان نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی در مود یک مطابق جدول 1  $G_{IC} = 0.0876 \text{ N/mm}$  در نظر گرفته می‌شود.

همانطور که در شکل 10 نشان داده است، میزان ماکزیمم منحنی نیرو-جابجایی در روش روش بسته شدن مجازی ترک-لایه‌گون در مقایسه با حل تحلیلی اندکی پایین‌تر می‌باشد. دلیل چنین اختلافی این است که در حل تحلیلی بر اساس مدل تیر برنولی، تغییر شکل برشی عرضی محاسبه

### 6- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، یک روش عددی برای پیش‌بینی گسترش ترک و جدایش در تیر کامپوزیتی ارائه گردید. تئوری لایه‌گون برای حل معادلات تیر همراه با جدایش استفاده شده و تکنیک بسته شدن مجازی ترک بر اساس جابجایی‌های بدست آمده از تئوری لایه‌گون توسعه داده شد. به منظور نشان دادن قابلیت بالای روش توسعه داده شده چند مثال عددی برای تیرهای چند لایه کامپوزیت همراه با جدایش بررسی شد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد تطابق خوبی در پیاده‌سازی عددی میان روش توسعه داده شده بسته شدن مجازی ترک-لایه‌گون با روش بسته شدن مجازی ترک-المان محدود و حل تحلیلی وجود دارد. همچنین تطابق مناسبی روش توسعه داده شده در مقایسه با نتایج تجربی نشان می‌دهد. لذا روش ارائه داده شده قابلیت پیش‌بینی مناسب برای مسئله استاتیک در دو حالت دوبعدی و سه‌بعدی در تیرهای از نوع لمینیت کامپوزیتی همراه با جدایش را دارد و در عین حال حجم محاسبات در آن نیز نسبت به روش المان محدود کمتر است.

### 7- مراجع

- [1] Orifici, A. C., Herszberg, I., and Thomson, R. S., "Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure," Composite Structures, Vol. 86, No. 1-3, pp. 194-210, 2008.
- [2] Carraro, P. A., Novello, E., Quaresimin, M., and Zappalorto, M., "Delamination onset in symmetric cross-ply laminates under static loads: Theory, numerics and experiments," Composite Structures, Vol. 176, pp. 420-432, 2017.
- [3] Turon, A., Camanho, P. P., Costa, J., and Renart, J., "Accurate simulation of delamination growth under mixed-mode loading using cohesive elements: Definition of interlaminar strengths and elastic stiffness," Composite Structures, Vol. 92, No. 8, pp. 1857-1864, 2010.

- [23] Watwood, V. B., "The finite element method for prediction of crack behavior," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 11, No. 2, pp. 323-332, 1970.
- [24] Krueger, R., "Virtual crack closure technique: History, approach, and applications," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 57, No. 1-6, pp. 109-143, 2004.
- [25] Standard Test Method for Mixed Mode I-Mode II Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber Reinforced Polymer Matrix Composites, Annual Book of ASTM Standard, ASTM D6671-01, 2000.
- [26] Liu, P. F., Hou, S. J., Chu, J. K., Hu, X. Y., Zhou, C. L., and Yan, L., "Finite element analysis of postbuckling and delamination of composite laminates using virtual crack closure technique," *Composite Structures*, Vol. 93, No. 6, pp. 1549-1560, 2011.
- [27] Whitcomb, J. D., "Analysis of Instability-Related Growth of a Through-Width Delamination," National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, VA, Report No. NASA TM-86301, 1984.
- [28] Camanho, P. P., Davila, C. G. and Pinho, S. T., "Fracture analysis of composite co-cured structural joints using decohesion elements," *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 27, No. 9, pp. 745-757, 2004.
- [29] Benzeggagh, M. L. and Kenane, M., "Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed-mode bending apparatus," *Composites Science and Technology*, Vol. 56, No. 4, pp. 439-449, 1996.
- [30] Camanho, P. P., Davila, C. G. and De Moura, M.F., "Numerical Simulation of Mixed-mode Progressive Delamination in Composite Materials," *Journal of Composite Materials*, Vol. 37, No. 16, pp. 1415-1439, 2007.
- [31] Camanho, P. P. and Davila, C.G., "Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials," National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, VA, Report No. NASA/TM-2002-211737, 2002.
- [32] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis," Second ed., CRC Press, 2004.
- [33] Tahani, M. and Nosier, A., "Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates," *Materials and Design*, Vol. 24, No. 8, pp. 647-658, 2003.
- [34] Afshin, M. and Taheri-Behrooz, F., "Interlaminar stresses of laminated composite beams resting on elastic foundation subjected to transverse loading," *Computational Materials Science*, Vol. 96, pp. 439-447, 2015.
- [35] Marjanović, M., Meschke, G. and Vuksanović, D., "A finite element model for propagating delamination in laminated composite plates based on the Virtual Crack Closure method," *Composite Structures*, Vol. 150, pp. 8-19, 2016.
- [36] G. R. Babu and B. Santhosh, "Experimental and Analytical Investigation on Delamination of Composites," vol. 4, no. 12, pp. 41-45, 2015.
- [37] Orifici, A. C., Thomson, R. S., Degenhardt, R., Bisagni, C. and Bayando, J., "Development of a finite-element analysis methodology for the propagation of delamination in composite structures," *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 43, No. 1, pp. 9-28, 2007.
- [38] Balzani, C. and Wagner, W., "An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 9, pp. 2597-2615, 2008.
- [39] Chen, J., Crisfield, M., Kinloch, A. J., Busso, E. P., Matthews, F. L. and Qiu, Y., "Mechanics of Composite Materials and Structures Predicting Progressive Delamination of Composite Material Specimens via Interface Elements," *Mechanics of Composite Materials*, No. 11, pp. 37-41, 2010.
- [40] Tenchev, R. T. and Falzon, B. G., "A pseudo-transient solution strategy for the analysis of delamination by means of interface elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, No. 9, pp. 698-708, 2006.
- [4] Feng, D. and Aymerich, F., "Finite element modelling of damage induced by low-velocity impact on composite laminates," *Composite Structures*, Vol. 108, No. 1, pp. 161-171, 2014.
- [5] Bak, L. V., Turon, A., Lindgaard, E., and Lund, E., "A simulation method for high-cycle fatigue-driven delamination using a cohesive zone model," *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. 106, No. February, pp. 1102-1119, 2012.
- [6] Fan, X. L., Sun, Q. and Kikuchi, M., "Review of Damage Tolerant Analysis of Laminated Composites," *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 2, No. 3, pp. 275-289, 2010.
- [7] Heidari-Rarani, M. and Sayedain, M., "Finite element modeling strategies for 2D and 3D delamination propagation in composite DCB specimens using VCCT, CZM and XFEM approaches," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 103, No. January, pp. 1-10, 2019.
- [8] Soroush, M., MalekzadehFard, k. and Sharavi M., "Experimental Measurement of Parameters for High Velocity Impact Simulation on Composite Plate Based On PDM and CZM," In Persian, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 9, pp. 2215-2226, 2019.
- [9] Krueger, R., "An approach to assess delamination propagation simulation capabilities in commercial finite element codes," National Aeronautics and Space Administration, Hampton, VA, Report No. NASA TM/2008-215123, 2008.
- [10] Barbero, E. J. and Reddy, J. N., "Modeling of delamination in composite laminates using a layer-wise plate theory," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28, No. 3, pp. 373-388, 1991.
- [11] Reddy, J. N., "An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates," *Composite Structures*, Vol. 25, No. 4, pp. 21-35, 1993.
- [12] Tabiei, A. and Zhang, W., "Composite laminate delamination simulation and experiment: A review of recent development," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 70, No. 3, 2018.
- [13] Xie, D., Sherrill, B. and Biggers, J., "Strain energy release rate calculation for a moving delamination front of arbitrary shape based on the virtual crack closure technique. Part I: Formulation and validation," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, No. 6, pp. 771-785, 2006.
- [14] Reeder, J.R., "3D Mixed-Mode Delamination Fracture Criteria-An Experimentalist's Perspective James R. Reeder," 21st Annual Technical Conference, pp. 1-19, 2006.
- [15] Shokrieh, M. M. and Zeinedini, A., "Modeling of delamination fracture toughness of I and II mixed mode of a laminated composite asymmetric double cantilever beam," In Persian, *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 13, No. 41, pp. 1-11, 2015.
- [16] Ahmadi-Najafabadi, M., Sedighi, M., Salehi, M. and Hossini-Toudeshky, H., "Investigation and monitoring of delamination in FMLs under mode I and II loading with FEM and AE," In Persian, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 78-86, 2015.
- [17] R. Mohammadi, M. Saedifar, M. A. Najafabadi, and H. H. Toudeshky, "Acoustic Emission Based Methodology to Evaluate the Fracture Toughness in Carbon / Epoxy Composites," *Amirkabir J. Mech. Eng.*, vol. 49, no. 2, pp. 137-138, 2017, doi: 10.22060/mej.2016.668.
- [18] ASTM Standard D5528, "Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites," *Annu. B. ASTM Stand.*, vol. 15.03, no. American Society for Testing and Materials, 2000.
- [19] Azimi, M., Mirjavadi, S. S., Asli, S. A. and Hamouda, A. M. S., "Fracture Analysis of a Special Cracked Lap Shear (CLS) Specimen with Utilization of Virtual Crack Closure Technique (VCCT) by Finite Element Methods," *Journal of Failure Analysis and Prevention*, Vol. 17, No. 2, pp. 304-314, 2017.
- [20] Aymerich, F., Lecca, G. and Priolo, P., "Modelling of delamination growth in composite laminates by the virtual internal bond method," *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 39, No. 2, pp. 145-153, 2007.
- [21] Rybicki, E. F. and Kanninen, M. F., "A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 9, No. 4, pp. 931-938, 1977.
- [22] Shivakumar, K. N., Tan, P. W. and Newman, J. C., "A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies," *International Journal of Fracture*, Vol. 36, No. 3, pp. 43-50, 1988.