نشریه علمی پژوهشی
علوم و فناوری کامپوزیت
http://jstc.iust.ac.ir

تحلیل غیرخطی خمش ورق چند لایهٔ هایپرالاستیک سیلیکون-لاستیک با استفاده از روش بدون شبکه بر پایهٔ توابع پایهٔ شعاعی

شهرام حسینی[1]، غلامحسین رحیمی[2*]

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
* تهران، صندوق پستی 111-14115، rahimi_gh@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله
دریافت: 1399/11/18
پذیرش: 1400/03/30

کلیدواژگان:
ورق هایپرالاستیک چندلایه
روش بدون شبکه
توابع پایهٔ شعاعی
تابع انرژی کرنشی نئوهوکین

چکیده

در این تحقیق به تحلیل رفتار خمشی ورق مربعی هایپرالاستیک چندلایه با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد پرداخته شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله از تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست استفاده شده و به دنبال آن از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای توصیف رفتار غیرخطی مادی ورق استفاده شده است. برای فرمولبندی کرنش‌های غیرخطی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول به کار رفته و برای استخراج معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک به فرم قوی، روابط اویلر-لاگرانژ به کار رفته‌اند. برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر مسئله از روش بدون شبکه به فرم قوی بر پایهٔ درونیابی نقاط شعاعی استفاده شده است. یکی از مزایای مهم این روش، اعمال شرایط مرزی غیرخطی در فرآیند حل مسئله است. از تابع پایهٔ شعاعی لگاریتمی برای استخراج توابع شکل روش بدون شبکه استفاده شده و دستگاه معادلات غیرخطی حاصل از درونیابی نقاط شعاعی با استفاده از الگوریتم طول کمان بررسی شده است. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج نرم افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که روش بدون شبکه به فرم قوی بر اساس توابع پایهٔ شعاعی دارای دقت بالایی در شرایط مرزی مختلف بوده به طوری که کمترین مقدار اختلاف در شرایط مرزی گیردار با 0.93 درصد اختلاف و بیشترین مقدار اختلاف در شرایط مرزی آزاد با 8.72 درصد اختلاف است.

Nonlinear Bending Analysis of Multi-Layer Hyperelastic Silicon-Rubber Plates Using Meshless Based on Radial Basis Functions

Shahram Hosseini, Gholamhossein Rahimi*
Department of mechanical engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115-111, Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

Keywords
Multi-layer hyperelastic plates
Meshless method
Radial basis functions
Neo-Hookean strain energy function

Abstract

In this paper, bending analysis of a hyperelastic multi-layer square plate with clamped, simply supported, and free boundary conditions are studied. The right Cauchy-Green tensor and neo-Hookean strain energy function utilized to define the plate's physical nonlinear behaviour. The nonlinear strains formulated using first-order shear deformation plate theory, and the Euler-Lagrange equations employed to derive the strong form of the governing equations. The meshless collocation method based on radial point interpolation method used to solve the nonlinear governing equations. The nonlinear boundary conditions imposed directly on the plate in meshless collocation method. The logarithm basis function utilized for defining shape functions, and the nonlinear system of equations solved using the arc-length algorithm. The results of the meshless method compared to those of ABAQUS finite element software. The results show that the meshless collocation method based on radial basis functions are efficient in nonlinear bending analysis of the multi-layer hyperelastic plate with various boundary conditions such that the less difference between meshless method and finite element method is 0.93% for clamped and the most difference is 8.72% with free boundary conditions.

1- مقدمه

مواد هایپرالاستیک[1] موادی هستند که نمودار تنش-کرنش آن‌ها به صورت غیرخطی بوده و برای بیان رفتار آن‌ها از توابع انرژی کرنشی غیرخطی مخصوص به آن‌ها استفاده می‌شود. این مواد به دلیل غیرخطی بودن رفتارشان در

[1] Hyperelastic Materials

Please cite this article using:
برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:
Hosseini, Sh., and Rahimi, Gh., "Nonlinear Bending Analysis of Multi-Layer Hyperelastic Silicon-Rubber Plates Using Meshless Based on Radial Basis Functions", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 8, No. 1, pp. 1387-1396, 2021.

سازه‌های مختلفی از جمله ورق‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. ورق‌های هایپرالاستیک علاوه بر رفتار غیرخطی هندسی دارای رفتار غیرخطی مادی نیز هستند و به همین دلیل فرمولبندی آن‌ها دارای پیچیدگی بیشتری در مقایسه با سازه‌های دیگر است. آمابیلی و همکاران [1] تحلیل ارتعاشی و خمشی ورق هایپرالاستیک نازک را به صورت تجربی و عددی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تابع انرژی کرنشی مونی-ریولین[1] و تئوری کلاسیک ورق‌ها برای فرمولبندی ورق هایپرالاستیک استفاده کرده‌اند. برسلاوسکی و همکاران [2] ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی را با استفاده از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین[2] مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری ورق کلاسیک برای جابجایی‌ها استفاده کرده‌اند. دو و همکاران [3] ورق چند لایهٔ هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از فرمولبندی سه بعدی و تابع انرژی کرنشی نئوهوکین برای تحلیل ورق هایپرالاستیک استفاده کرده‌اند. چن [4] انتشار موج در ورق‌های هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار داد. از روش پرتوربیشن[3] و فرض تراکم‌پذیری ورق در فرمولبندی مسئله استفاده شده است. لی و همکاران [5] هدایت موج در ورق‌ها و لوله‌های هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از مدل اجزای محدود برای بررسی مسئله استفاده نمودند. گاسم و همکاران [6] رفتار غیرخطی دینامیکی ورق هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ورق ساندویچی تحت بارگذاری اولیه را مورد تحلیل قرار دادند. درواکس و همکاران [7] ورق نازک هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در تحقیق خود، کمانش ورق هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. وانگ و همکاران [8] تحلیل ورق هایپرالاستیک در کرنش‌های محدود را مورد بررسی قرار دادند. جنس مادهٔ هایپرالاستیک به صورت تراکم‌پذیر و به صورت کرنش محدود در نظر گرفته شده است. تریپاتی و باجاج [9] بهینه‌سازی رزونانس داخلی در ارتعاشات عرضی ورق‌های هایپرالاستیک را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری‌های مونی-ریولین، نئوهوکین و تئوری الاستیسیته خطی برای استخراج معادلات مسئله استفاده کردند. کارپ و دوربان [10] انتشار موج در ورق هایپرالاستیک را مطالعه کردند. آن‌ها ورق را تحت تنش اولیه در نظر گرفتند.

تحلیل غیرخطی سازه‌ها به صورت تحلیلی نیازمند ساده‌سازی‌های فراوانی است که در اغلب اوقات از حالت واقعی فاصله می‌گیرد. بنابراین باید از یک روش عددی قدرتمند با کارایی مناسب استفاده نمود. عوامل مختلفی در انتخاب روش حل مناسب تاثیرگذار هستند. یکی از مهمترین عوامل، کارایی مناسب روش در تغییر شکل‌های بزرگ است. روش‌های بدون شبکه به دلیل عدم وابستگی به شبکه، در تحلیل‌های غیرخطی انعطاف بیشتری دارند. در این میان، روش بدون شبکه به فرم قوی به دلیل استفاده از فرم قوی معادلات و عدم نیاز به انتگرال-گیری، روش مناسبی برای تحلیل ورق‌های غیرخطی است. سینگ و شوکلا [11] تحلیل خمشی ورق‌های مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش بدون شبکه[4] بر اساس توابع پایهٔ شعاعی[5] به عنوان روش حل استفاده کردند. توو و همکاران [12] مدول برشی موثر را برای جامدات دوبعدی و خمش ورق بررسی کردند. آن‌ها از روش بدون شبکه به فرم قوی و توابع پایهٔ شعاعی در تحلیل خود استفاده کردند. التولائیا و الگهتانی [13] خیزهای بزرگ ورق نازک بر روی بستر غیرخطی را با استفاده از روش بدون شبکه مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از توابع پایهٔ شعاعی برای ساخت توابع شکل استفاده کردند. لی و همکاران [14] رفتار غیرخطی هندسی ورق چندلایهٔ کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولولهٔ کربنی را بررسی کردند. آن‌ها از روش بدون شبکه و تابع ذرات هسته برای تحلیل روابط ورق استفاده کردند. جاورسکا و اورکیز [15] تحلیل غیرخطی مسائل با استفاده از روش بدون شبکه را بررسی کردند. آن‌ها از روش چندنقطه‌ای و دیفرانسیل محدود برای حل معادلات غیرخطی استفاده کردند. لیو و وانگ [16] یک روش جدید برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی بر اساس روش بدون شبکه ارائه کردند. آن‌ها از روش بدون شبکه به فرم قوی برای ارائهٔ الگو استفاده کردند و شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. کومار و همکاران [17] یک روش بدون شبکه برای انتشار موج زمانی ارائه کردند. آن‌ها از روش کالوکیشن محلی[6] به عنوان روش بدون شبکه استفاده کردند. وانگ و همکاران [18] از روش بدون شبکه برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق کامپوزیتی تقویت شده با الیاف کربن استفاده کردند. آن‌ها از تئوری ورق کلاسیک برای فرمولبندی مسئله و از روش بدون شبکه تصادفی برای حل مسئله استفاده کردند. غلامی‌پور و غیاثی [19] انتشار موج در مخزن را مطالعه کردند. آن‌ها از روش بدون شبکه و توابع شکل درونیابی نقاط شعاعی هرمیتی برای تحلیل مسئله استفاده کردند. واقفی [20] تحلیل خمشی ورق مورب سه بعدی مدرج تابعی وابسته به دما و ترموالاستوپلاستیک را بررسی کرد. از روش درونیابی کریگینگ متحرک[7] به عنوان روش بدون شبکه برای تحلیل مسئله استفاده شده است. ژنگ و همکاران [21] ورق ترک‌دار را با استفاده از روش بدون شبکه بررسی کردند. آن‌ها از روش بدون شبکهٔ پترو-گالرکین محلی و تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول استفاده کردند. همچنین مادهٔ استفاده شده در راستای ضخامت به صورت مدرج تابعی[8] در نظر گرفته شده است. حسینی و رحیمی [22] خمش غیرخطی ورق هایپرالاستیک همگن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش بدون شبکه و توابع پایهٔ شعاعی برای تحلیل ورق استفاده کردند. همچنین نشان دادند که تغییر پارامتر شکل در تابع پایهٔ شعاعی لگاریتمی تاثیر محسوسی بر دقت نتایج ندارد. رودریجس و همکاران [23] ورق چندلایهٔ زاویه‌دار را مطالعه کردند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ بالا برای فرمولبندی مسئله و از روش بدون شبکه بر اساس درونیابی نقاط شعاعی برای حل معادلات مسئله استفاده کردند. پالیزوان و همکاران [24] خمش و کمانش ورق نیمه ضخیم ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای حل مسئله استفاده کردند. آقامحمدی و همکاران [25] روش‌های مختلف آماده‌سازی سطحی را بر خواص خمشی کامپوزیت‌های الیاف/فلز بررسی کردند. آذغان و همکاران [26] رفتار خمشی چندلایه‌های الیاف/فلز حاوی الیاف شیشه و کولار را مورد بررسی قرار دادند. پینگ و همکاران [27] تحلیل قفل شدگی برشی خمش ورق را با استفاده از روش بدون شبکه بر اساس درونیابی نقاط شعاعی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مرتبه‌های مختلف چندجمله‌ای‌ها را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با در نظر گرفتن مرتبهٔ چهار چندجمله‌ای‌ها می‌توان از قفل شدگی برشی پرهیز نمود.

در این تحقیق معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک چندلایه سیلیکون-لاستیک با استفاده از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول و تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست استخراج شده است. برای این منظور از معادلات اویلر لاگرانژ استفاده شده است که علاوه بر معادلات حاکم بر مسئله به فرم قوی، شرایط مرزی طبیعی نیز تولید می‌شوند. معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک چند

[1] Mooney-Rivlin
[2] Neo-Hookean
[3] Perturbation
[4] Meshless Method
[5] Radial Basis Functions
[6] Local Collocation
[7] Moving Kriging Interpolation
[8] Functionally Graded

لایه با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی بر پایهٔ توابع پایهٔ شعاعی مورد تحلیل قرار گرفته است. از تابع پایهٔ شعاعی لگاریتمی برای تشکیل توابع شکل مسئله استفاده شده و شرایط مرزی مختلف (گیردار، ساده و آزاد) مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

2- ورق‌های هایپرالاستیک

2-1- روابط ساختاری

برای استخراج روابط ساختاری حاکم بر ورق هایپرالاستیک از تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست استفاده شده است. دستگاه مختصات دکارتی با توجه به شکل 1 در نظر گرفته شده است.

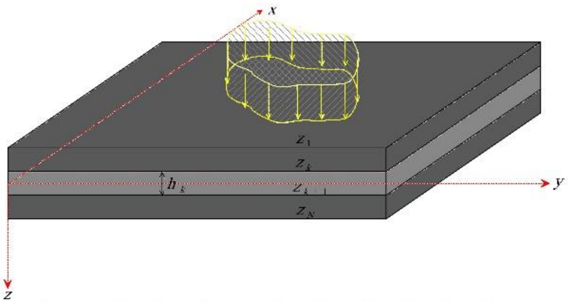

Fig. 1 multi-layer hyperelastic plate under uniformly distributed loading in cartesian coordiante

شکل 1 ورق چندلایه در دستگاه مختصات دکارتی تحت بارگذاری گسترده

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک، تانسور کرنش لاگرانژی به صورت رابطهٔ زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{1}$$

در نتیجه، تانسور تغییر شکل کوشی-گرین راست برابر است با:

$$\mathbf{C}=2\mathbf{E}+\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx}+1 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{xy} & 2\varepsilon_{yy}+1 & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 2\varepsilon_{zz}+1\end{bmatrix} \tag{2}$$

با توجه به رابطهٔ (۲)، ناورداهای اول و سوم عبارتند از:

$$\begin{aligned} I_1 &= trace(\mathbf{C})\\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \tag{3}$$

در این تحقیق، برای توصیف رفتار غیرخطی مادی ورق، از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین استفاده شده است. رابطهٔ چگالی انرژی کرنشی براساس مدل نئوهوکین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U}=C_{10}(I_1-3) \tag{4}$$

که در رابطهٔ فوق، C_{10} برابر با ضریب تابع انرژی کرنشی نئوهوکین می‌باشد. با فرض تراکم‌ناپذیر بودن سیلیکون و لاستیک و اعمال شرط تراکم‌ناپذیری (I_3=1) کرنش در راستای ضخامت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_{zz}=-\frac{1}{2}\left(\begin{matrix}-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2+2\varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}-2\varepsilon_{xz}^2\varepsilon_{yy}\\ +4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\\ -\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2\\ +2\varepsilon_{xx}+2\varepsilon_{yy}\end{matrix}\right)\Bigg/\left(\begin{matrix}4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}^2\\ +2\varepsilon_{xx}+2\varepsilon_{yy}+1\end{matrix}\right) \tag{5}$$

با توجه به رابطهٔ (5)، استفاده از این عبارت در رابطهٔ (4) منجر به پدیدار شدن عبارت‌های غیرخطی کسری شده و تحلیل معادلات را غیرممکن می‌سازد. به همین منظور از بسط تیلور برای ساده‌سازی معادلهٔ (5) استفاده شده است:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz}=&-4\varepsilon_{xx}^3-4\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2\\ &-4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2-2\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}-4\varepsilon_{yy}^3\\ &-\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2+2\varepsilon_{xx}^2+2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^2\\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_{xz}^2+2\varepsilon_{yy}^2+\frac{1}{2}\varepsilon_{yz}^2-\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\end{aligned} \tag{6}$$

با جایگذاری رابطهٔ (6) در (3) و (4)، انرژی کرنشی ورق هایپرالاستیک به صورت معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}U=\int C_{10}\big(&-8\varepsilon_{xx}^3-8\varepsilon_{xx}^2\varepsilon_{yy}-4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}^2-2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{xz}^2\\ &-8\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}^2-4\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{yy}-2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}-8\varepsilon_{yy}^3\\ &-2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz}^2+4\varepsilon_{xx}^2+4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2\\ &+\varepsilon_{xz}^2+4\varepsilon_{yy}^2+\varepsilon_{yz}^2\big)dV\end{aligned} \tag{7}$$

همچنین کار نیروی خارجی برابر است با:

$$W=\int w(x,y).\,q(x,y)\,dA \tag{8}$$

2-2- معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک

برای استخراج معادلات مربوط به کرنش، از تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول استفاده شده است. در همین راستا، جابجایی‌های ورق مرتبهٔ اول به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x,y,z)&=u_0(x,y)+z\varphi_x(x,y)\\ v(x,y,z)&=v_0(x,y)+z\varphi_y(x,y)\\ w(x,y,z)&=w_0(x,y)\end{aligned} \tag{9}$$

که u_0، v_0، w_0، φ_x و φ_y به ترتیب نشان دهندهٔ جابجایی درون صفحه‌ای در جهت x، جابجایی درون صفحه‌ای در جهت y، خیز صفحهٔ میانی، چرخش در جهت x و چرخش در جهت y هستند. با توجه به روابط جابجایی، کرنش‌های غیرخطی عبارتند از:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=u_{0,x}+z\varphi_{x,x}+\frac{1}{2}w_{0,x}^2\\ \varepsilon_{yy}&=v_{0,y}+z\varphi_{y,y}+\frac{1}{2}w_{0,y}^2\\ \varepsilon_{xy}&=u_{0,y}+v_{0,x}+z(\varphi_{x,y}+\varphi_{y,x})+w_{0,x}w_{0,y}\\ \varepsilon_{xz}&=\varphi_x+w_{0,x}\\ \varepsilon_{yz}&=\varphi_y+w_{0,y}\end{aligned} \tag{10}$$

برای استخراج معادلات حاکم بر ورق هایپرالاستیک از معادلات اویلر-لاگرانژ استفاده شده است. در این معادلات از تابع انرژی پتانسیل ورق (Π=U-W) استفاده شده است. با جایگذاری روابط (10) در (7) و سپس

جایگذاری روابط (7) و (8) در معادلات اویلر-لاگرانژ، معادلات حاکم بر مسئله حاصل می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&\delta u: A(-8w_{0,x}w_{0,xx}-6w_{0.y}w_{0,xy}-8u_{0,xx}-4v_{0,xy}\\
&\quad -2w_{0,yy}w_{0,x}-2(u_{0,yy}+v_{0,xy}))+B(-8\varphi_{x,xx}\\
&\quad -6\varphi_{y,xy}-2\varphi_{x,yy}=0\\
&\delta v: A(-6w_{0,xy}w_{0,x}-2w_{0,y}w_{0,xx}-6u_{0,xy}-2v_{0,xx}\\
&\quad -8w_{0,y}w_{0,yy}-8v_{0,yy})+B(-6\varphi_{x,xy}-2\varphi_{y,xx}\\
&\quad -8\varphi_{y,yy})=0\\
&\delta w: A(-12w_{0,x}^2w_{0,xx}-2(4w_{0,y}w_{0,xy}+4u_{0,xx}\\
&\quad +2v_{0,xy})w_{0,x}-2(2w_{0,y}^2+4u_{0,x}+2v_{0,y}\\
&\quad)w_{0,xx}-(2u_{0,xy}+2\,v_{0,xx})\,w_{0,y}-2(2u_{0,y}\\
&\quad +2v_{0,x})w_{0,xy}-2\varphi_{x,x}-8w_{0,y}w_{0,x}w_{0,xy}-\\
&\quad (2u_{0,yy}+2v_{0,xy})w_{0,x}-12w_{0,y}^2w_{0,yy}-2(2u_{0,x}\\
&\quad +4v_{0,y}+1)w_{0,yy}-2\varphi_{y,y})+B(-2(4\varphi_{x,xx}\\
&\quad +2\varphi_{y,xy})w_{0,x}-2(4\varphi_{x,x}+2\varphi_{y,y})w_{0,xx}-\\
&\quad (2\varphi_{x,xy}+2\varphi_{y,xx})w_{0,y}-2(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})w_{0,xy}\\
&\quad -(2\varphi_{x,yy}+2\varphi_{y,xy})w_{0,x}-2(2\varphi_{x,xy}+4\varphi_{y,yy})\\
&\quad w_{0,y}-2(2\varphi_{x,x}+4\varphi_{y,y})w_{0,yy}=q\\
&\delta\varphi_x: A(2\varphi_x+2w_{0,x})+B(-8w_{0,x}w_{0,xx}-6w_{0,y}\\
&\quad w_{0,xy}-8u_{0,xx}-6v_{0,xy}-2w_{0,yy}w_{0,x}-2u_{0,yy})\\
&\quad +D(-8\varphi_{x,xx}-6\varphi_{y,xy}-2\varphi_{x,yy})=0\\
&\delta\varphi_y: A(2\varphi_y+2w_{0,y})+B(-6w_{0,xy}w_{0,x}-2w_{0,y}\\
&\quad w_{0,xx}-6u_{0,xy}-2v_{0,xx}-8w_{0,y}w_{0,yy}-8v_{0,yy})\\
&\quad +D(-6\varphi_{x,xy}-2\varphi_{y,xx}-8\varphi_{y,yy})=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

همچنین شرایط مرزی عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&[A(4w_{0,x}^2+2w_{0,y}^2+8u_{0,x}+4v_{0,y})+B(8\varphi_{x,x}+4\varphi_{y,y})]n_y\\
&-[A(2w_{0,y}w_{0,x}+2u_{0,y}+2v_{0,x})+B(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})]n_x=0 \quad \text{یا} \quad u_0=0\\[6pt]
&A(w_{0,y}w_{0,x}+2u_{0,y}+2v_{0,x})+B(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})]n_y-[A\\
&(w_{0,x}^2+4w_{0,y}^2+4u_{0,x}+8v_{0,y})+B(4\varphi_{x,x}+8\varphi_{y,y})]n_x=0 \quad \text{یا} \quad v_0=0\\[6pt]
&[A(4w_{0,x}^3+2(w_{0,y}^2+4u_{0,x}+2v_{0,y}+1)w_{0,x}+(2u_{0,y}+2v_{0,x})\\
&w_{0,y}+2\varphi_x)+B(2(4\varphi_{x,x}+2\,\varphi_{y,y})w_{0,x}+(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})w_{0,y}\\
&)]n_y-[A(4w_{0,y}w_{0,x}^2+2u_{0,y}+2v_{0,x}w_{0,x}+4w_{0,x}^3+2(2u_{0,x}+\\
&4v_{0,y}+1)w_{0,y}+2\varphi_y)+B((2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})w_{0,x}+2(2\varphi_{x,x}+\\
&4\varphi_{y,y})w_{0,y})]n_x=0 \quad \text{یا} \quad w_0=0\\[6pt]
&[B(4w_{0,x}^2+2w_{0,y}^2+8u_{0,x}+4v_{0,y})+D(8\varphi_{x,x}+4\varphi_{y,y})]n_y-\\
&[B(2w_{0,y}w_{0,x}+2u_{0,y}+2v_{0,x})+D(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})]n_x=0 \quad \text{یا} \quad \varphi_x=0\\[6pt]
&[B(2w_{0,y}w_{0,x}+2u_{0,y}+2v_{0,x})+D(2\varphi_{x,y}+2\varphi_{y,x})]n_y-[B(2\\
&w_{0,x}^2+4w_{0,y}^2+4u_{0,x}+8v_{0,y})+D(4\varphi_{x,x}+8\varphi_{y,y})]n_x=0 \quad \text{یا} \quad \varphi_y=0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

در روابط فوق، ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
[A \quad B \quad D]=\int_{h_k}^{h_{k+1}}\sum_{k=1}^{N}C_{10}^{k}[1 \quad z \quad z^2]\,dz \tag{13}
$$

که k نشان دهندهٔ مشخصات مربوط به لایهٔ kام است.

همانطور که از روابط (11) و (12) مشخص است، معادلات حاکم بر مسئله، دارای عبارت‌های غیرخطی بوده و نمی‌توان این معادلات را با استفاده از روش-های تحلیلی بررسی نمود. بنابراین نیاز به استفاده از یک روش عددی کارآمد و مناسب جهت حل معادلات غیرخطی است. در ادامه به بررسی روش بدون شبکه و کاربرد آن در تحلیل غیرخطی ورق هایپرالاستیک پرداخته شده است.

3-روش بدون شبکه

روش‌های بدون شبکه به دلیل عدم استفاده از شبکه زمینه، روش‌های مناسبی برای تحلیل معادلات حاکم بر مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ هستند. دامنهٔ مسئله و مرزهای آن با استفاده گره‌های مجزا، گسسته شده و معادلات حاکم بر مسئله به دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شوند(شکل 1).

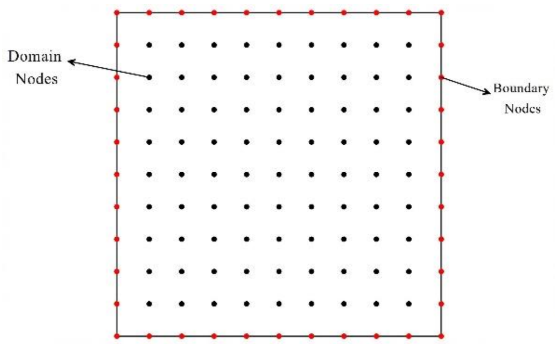

Fig. 2 distribution of the nodes on domain and boundary of a square plate

شکل 2 توزیع نقاط روی دامنه و مرز ورق مربعی به صورت گستردهٔ یکنواخت

از مزایای روش بدون شبکه به فرم قوی در مقایسه با فرم ضعیف می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- در روش بدون شبکه به فرم قوی، معادلات حاکم بر مسئله به صورت مستقیم مورد بررسی قرار گرفته و نیاز به انتگرال‌گیری عددی نیست.
- در روش بدون شبکه به فرم قوی، شرایط مرزی می‌توانند به صورت مستقیم در ماتریس سفتی اعمال شوند. بنابراین هر

شرط مرزی شامل عبارت های خطی یا غیرخطی می توانند مورد بررسی قرار گیرند.

- روش بدون شبکه به فرم قوی، دارای فرمولبندی و کدنویسی ساده تری در مقایسه با فرم ضعیف است. این مورد به دلیل عدم نیاز به فرم ضعیف معادلات و انتگرال گیری عددی است.

برای تقریب متغیرهای میدان حل از تابع پایۀ شعاعی لگاریتمی استفاده شده است. برای این منظور، متغیرهای مسئله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \begin{Bmatrix} a_i^u \\ a_i^v \\ a_i^w \\ a_i^{\varphi_x} \\ a_i^{\varphi_y} \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

توابع شکل ϕ_i با استفاده از رابطۀ زیر تعریف می‌شود:

$$\phi = [R^T(x)\, S_a + p^T(x)\, S_b] \tag{15}$$

که در رابطۀ (16) داریم:

$$\begin{aligned} &R^T(x,y) = [R_1(x,y), R_2(x,y), \dots, R_n(x,y)] \\ &p^T(x,y) = [p_1(x,y), p_2(x,y), \dots, p_m(x,y)] \\ &S_b = \left[P_m^T R_Q^{-1} P_m\right]^{-1} P_m^T R_Q^{-1} \\ &S_a = R_Q^{-1}[1 - P_m S_b] \\ &\mathrm{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(x_1,y_1) & R_2(x_1,y_1) & \cdots & R_n(x_1,y_1) \\ R_1(x_2,y_2) & R_2(x_2,y_2) & \cdots & R_n(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(x_n,y_n) & R_2(x_n,y_n) & \cdots & R_n(x_n,y_n) \end{bmatrix} \\ &\mathrm{P}_m = \begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_m(x_1,y_1) \\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_m(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_m(x_n,y_n) \end{bmatrix} \\ &p^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots] \end{aligned} \tag{16}$$

در رابطۀ (16) از تابع پایۀ شعاعی لگاریتمی استفاده شده و به صورت رابطۀ زیر تعریف می‌شود:

$$R_i(x,y) = \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right)^{\eta} \log\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right) \tag{17}$$

در رابطۀ (17)، η نشان دهندۀ پارامتر شکل است. انتخاب پارامتر شکل یکی از مهم‌ترین عوامل موثر بر دقت نتایج حاصل از روش بدون شبکه بر اساس توابع پایۀ شعاعی است. با توجه به مرجع [23] مقدار پارامتر شکل η=2 در نظر گرفته شده است. همچنین مشتق مرتبۀ q توابع شکل برابر است با:

$$\frac{\partial^q \phi_k}{\partial X^q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^q R_i}{\partial X^q} S_{ik}^a + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^q p_j}{\partial X^q} S_{jk}^b \tag{18}$$

که n و m به ترتیب برابر با تعداد نقاط دامنه و مرز مسئله و تعداد چندجمله-ای‌های استفاده شده در تابع شکل هستند.

با جایگذاری معادلات (14) و (18) در معادلۀ حاکم (11)، مجموعۀ معادلات حاکم، به دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل می‌شود که می‌توان فرم ماتریسی آن را به صورت رابطۀ زیر نشان داد:

$$(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{a}))\mathbf{a} = \mathbf{q} \tag{19}$$

که $\mathrm{K_L}$ و $\mathrm{K_{NL}}$ و q به ترتیب نشان دهندۀ ماتریس سفتی خطی، ماتریس سفتی غیرخطی و بارگذاری گستردۀ عرضی هستند و ماتریس سفتی غیرخطی از طریق رابطۀ زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{K}_{NL} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{a}} \tag{20}$$

که $\mathbf{R}$ نشان دهندۀ دستگاه معادلات جبری غیرخطی است.

برای یافتن پاسخ‌های دستگاه معادلات (19) از روش طول کمان استفاده شده است.

تحلیل ورق هایپرالاستیک با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

1- توزیع نقاط روی دامنه و مرز مسئله و گسسته‌سازی معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از توابع پایۀ شعاعی (رابطۀ(18))

2- حل دستگاه معادلات خطی با صرف نظر کردن از ماتریس سفتی غیرخطی(رابطۀ(19))

3- تشکیل ماتریس سفتی غیرخطی با استفاده از پاسخ‌های مرحلۀ قبل

4- محاسبۀ پاسخ‌های جدید با استفاده از روش طول کمان

5- محاسبۀ خطای میان پاسخ‌های جدید و قدیم

6- در صورتی که پاسخ مرحلۀ 5 مقداری کمتر از 10^{-4} داشت، جابجایی‌ها همگرا شده و در غیر این صورت مراحل 3 تا 5 با پاسخ‌های جدید تکرار می-شوند.

4-نتایج و بحث

در این بخش یک ورق مربعی چند لایۀ ساخته شده از سیلیکون و لاستیک تحت شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور ضرایب ثابت سیلیکون و لاستیک به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned} C_{10}^{silicon} &= 165000Pa \\ C_{10}^{rubber} &= 200000Pa \end{aligned} \tag{21}$$

نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود آباکوس[1] مقایسه شده است. در نرم افزار المان محدود آباکوس از المان $S4R$ چهار گره‌ای استفاده شده و ورق تحت بارگذاری گستردۀ یکنواخت قرار دارد.

ابتدا مطالعۀ همگرایی روش‌های بدون شبکه به فرم قوی و المان محدود برای شرایط مرزی مختلف در شکل 3 نشان داده شده است. در همۀ تحلیل‌های همگرایی از ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) با ضخامت h=0.005m استفاده شده است. همانطور که در شکل 3 مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش بدون شبکه برای همۀ شرایط مرزی (گیردار، ساده و آزاد) در تعداد گره‌های 19×19 و بیشتر همگرا شده است. بنابراین در همۀ تحلیل‌های این پژوهش از تعداد 19×19 گره با توزیع یکنواخت استفاده شده است .

[1] Abaqus Finite Element Method (FEM)

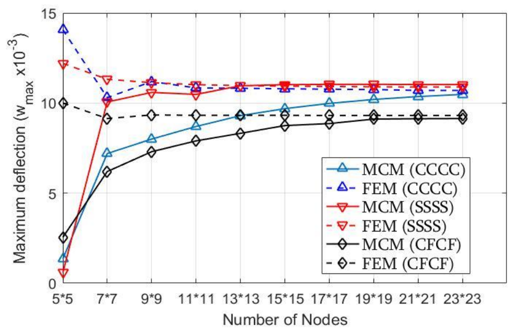

Fig. 3 Convergency diagram of a three-layer square hyperelastic plate (Sillicon/Rubber/Sillicon) with clamped, simply supported, and free boundary conditions

شکل 3 نمودار همگرایی روش بدون شبکه (MCM) و روش المان محدود (FEM) برای ورق مربعی سه لایهٔ هایپرالاستیک (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) با شرایط مرزی گیردار (C)، ساده (S) و آزاد (F)

در شکل 4 نمودار فشار-خیز بیشینه برای یک ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) و ضخامت h=0.005m با شرایط مرزی گیردار نشان داده شده است. بیشترین اختلاف میان نتایج حاصل از روش‌های بدون شبکه و المان محدود در این نمودار برابر با 0.93 درصد می‌باشد.

در شکل 5 نمودار فشار-خیز بیشینه برای یک ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) و ضخامت h=0.005m با شرایط مرزی ساده نشان داده شده است. بیشترین اختلاف میان نتایج حاصل از روش‌های بدون شبکه و المان محدود در این نمودار برابر با 1.73 درصد می‌باشد.

در شکل 6 نمودار فشار-خیز بیشینه برای یک ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) و ضخامت h=0.005m با شرایط مرزی ترکیبی گیردار و آزاد نشان داده شده است. بیشترین اختلاف میان نتایج حاصل از روش‌های بدون شبکه و المان محدود در این نمودار برابر با 8.72درصد می‌باشد.

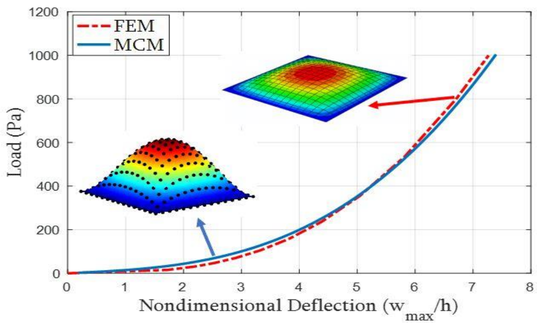

Fig. 4 Diagram of loading on non-dimensional maximum deflection for a three-layer plate (Sillicon/Rubber/Sillicon) under unifomly destributed loading and clamped boundary condition using MCM and FEM

شکل 4 نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینهٔ بی‌بعد شده برای ورق سه لایهٔ (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت و شرایط مرزی گیردار با استفاده از روش بدون شبکه (MCM) و روش المان محدود (FEM)

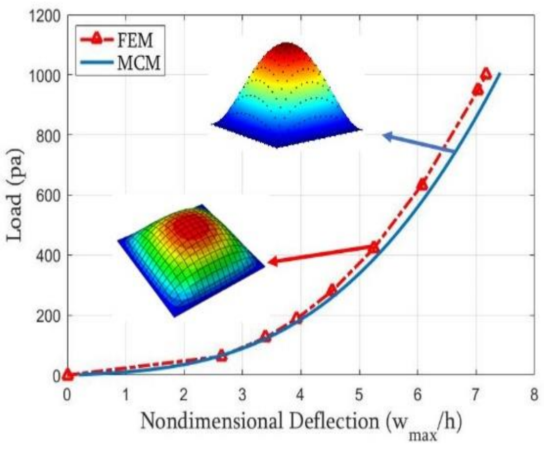

Fig. 5 Diagram of loading on non-dimensional maximum deflection for a three-layer plate (Sillicon/Rubber/Sillicon) under unifomly destributed loading and simply supported boundary condition using MCM and FEM

شکل 5 نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینهٔ بی‌بعد شده برای ورق سه لایهٔ (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت و شرایط مرزی ساده با استفاده از روش بدون شبکه (MCM) و روش المان محدود (FEM)

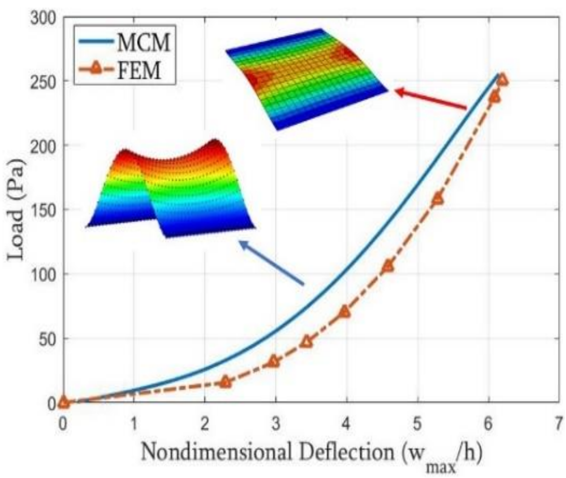

Fig. 6 Diagram of loading on non-dimensional maximum deflection for a three-layer plate (Sillicon/Rubber/Sillicon) under unifomly destributed loading and clamped and free boundary condition using MCM and FEM

شکل 6 نمودار بارگذاری بر حسب خیز بیشینهٔ بی‌بعد شده برای ورق سه لایهٔ (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت و شرایط مرزی گیردار و آزاد (CFCF) با استفاده از روش بدون شبکه (MCM) و روش المان محدود (FEM)

در شکل 7 نمودار خیز خط میانی ورق هایپرالاستیک در جهت x برای یک ورق چهارلایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون/لاستیک) با شرایط مرزی ساده با استفاده از روش بدون شبکه و روش المان محدود نشان داده شده است. در این شکل، ورق تحت بار گستردهٔ یکنواخت q=3000Pa قرار گرفته است. همچنین ضخامت هر لایه برابر با 0.0125 متر در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل 7 مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش بدون شبکه دارای مطابقت خوبی با روش المان محدود هستند به طوری که حداکثر اختلاف برابر با 0.94 درصد است.

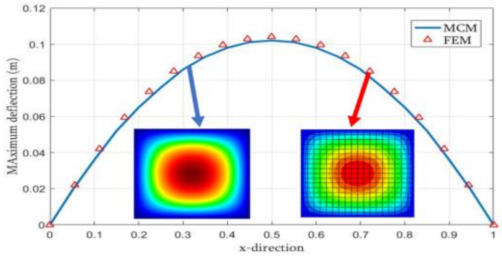

Fig. 7 Diagram of a four-layer hyperelastic plate (Sillicon/Rubber/Silicon/Rubber) with simply supported boundary condition under q=3000Pa using MCM and FEM

شکل 7 ن مودار خ یز ورق هایپرالا ستیک چهارلا یه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون/لا ستیک) با شرایط مرزی ساده ت حت بار گذاری گ سترده یکنوا خت q=3000Pa با ا ستفاده از روش بدون شبکه و روش المان محدود

در شکل 8 کانتور توزیع کرنش در یک ورق چهار لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون/لاستیک) با شرایط مرزی گیردار و بار گستردهٔ یکنواخت q=4000Pa با استفاده از روش بدون شبکه و روش المان محدود نشان داده شده است. در این تحلیل ضخامت هریک از لایه‌ها برابر با 0.005 متر درنظر گرفته شده است.

در شکل 9 کانتور توزیع تنش در راستای محور x در ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) با شرایط مرزی ساده و بار گستردهٔ یکنواخت q=4000Pa نشان داده شده است. همچنین ضخامت هریک از لایه‌ها برابر با 0.01 متر است. با توجه به نتایج شکل 9، حداکثر اختلاف میان روش‌های بدون شبکه و المان محدود برابر با 6.71 درصد می‌باشد.

در شکل 10 نمودار جابجایی یک ورق دولایهٔ (سیلیکون/لاستیک) با شرایط مرزی گیردار تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت نشان داده شده است. در این نمودار، نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده و حداکثر اختلاف آن‌ها 0.71 درصد می‌باشد.

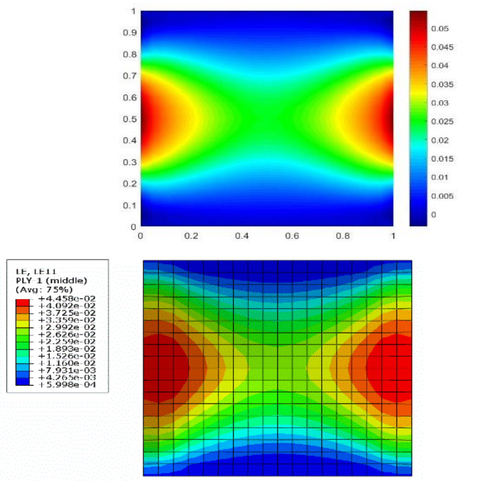

Fig. 8 Contour of strain along x-direction for a four-layer hyperelastic plate (Silicon/Rubber/Silicon/Rubber) with clamped boundary condition under q=4000Pa using MCM (top) and FEM (bottom)

شکل 8 کانتور توزیع کرنش محوری در راستای محور x برای ورق مربعی چهارلایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون/لاستیک) با شرایط مرزی گیردار تحت بارگذاری گسترده یکنواخت q=4000Pa با استفاده از روش بدون شبکه (بالا) و روش المان محدود (پایین)

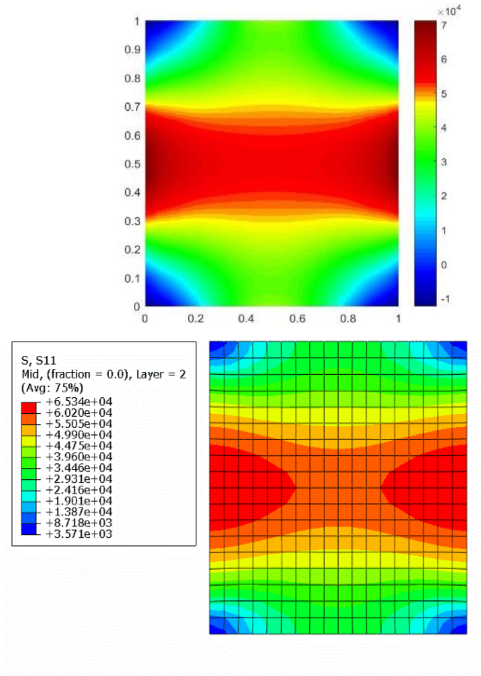

Fig. 9 Contour of stress along x-direction for a three-layer hyperelastic plate (Sillicon/Rubber/Sillicon) with simply supported boundary condition under q=4000Pa using MCM (top) and FEM (bottom)

شکل 9 کانتور توزیع تنش محوری در راستای محور x برای ورق سه لایه (سیلیکون/لاستیک/سیلیکون) با شرایط مرزی ساده و بار گستردهٔ یکنواخت q=4000Pa با استفاده از روش بدون شبکه (بالا) و روش المان محدود (پایین)

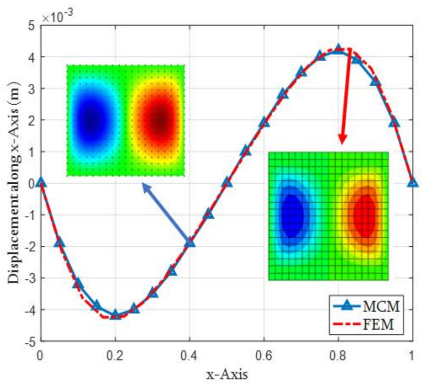

Fig. 10 in-plane displacement of a two-layer square hyperelastic plate (Sillicon/Rubber) with clamped boundary condition under q=3000Pa using MCM and FEM

شکل 10 جابجایی درون صفحه‌ای ورق دو لایهٔ (سیلیکون/لاستیک) برای یک ورق مربعی با شرایط مرزی گیردار تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت q=3000Pa با استفاده از روش‌های بدوش شبکه و المان محدود

در جدول 1 نتایج خمش ورق هایپرالاستیک با شرایط مرزی گیردار و ساده تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت q=6000Pa با استفاده از روش بدون شبکه آمده و نتایج آن با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است. با توجه به نتایج جدول 1، حداکثر و حداقل اختلاف میان روش‌های بدون شبکه و المان محدود به ترتیب در کرنش ورق دو لایه (13.57 درصد) و خیز ورق پنج لایه (0.3 درصد) می‌باشد.

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق تحلیل خمش غیرخطی ورق مربعی هایپرالاستیک چندلایه با شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد با استفاده از تابع انرژی کرنشی نئوهوکین و تئوری ورق برشی مرتبهٔ اول مورد بررسی قرار گرفت. برای استخراج معادلات ساختاری از تانسور کرنش لاگرانژی و تانسور تغییر شکل کوشی گرین راست استفاده شد. همچنین علاوه بر در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مادی، رفتار غیرخطی هندسی ورق هایپرالاستیک نیز مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از روش بدون شبکه به فرم قوی و درونیابی نقاط شعاعی تحلیل شد. نتایج حاصل از روش بدون شبکه با نتایج شبیه‌سازی المان محدود آباکوس مقایسه شد. نتایج نشان دادند که اختلاف نتایج خیز بیشینهٔ ورق میان روش بدون شبکه و روش المان محدود در ورق سه لایه برای شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد به ترتیب برابر با 0.93 درصد، 1.73 درصد و 8.72 درصد می‌باشد و با توجه به نتایج بدست آمده، بیشترین اختلاف در شرط مرزی آزاد است؛ اما شرایط مرزی گیردار و ساده کمترین میزان خطا را دارند. همچنین در نتایج مربوط به جابجایی درون صفحه‌ای، مطابقت مطلوبی میان دو روش بدون شبکه و المان محدود وجود دارد به طوری که حداکثر اختلاف میان آن‌ها برابر با 0.71 درصد است. در تحلیل ورق‌های چندلایه با تعداد لایه‌ها و شرایط مرزی مختلف، بیشترین اختلاف در کرنش‌ها وجود داشته و خیزهای بدست آمده در هر دو روش دارای دقت مطلوبی هستند؛ به طوری که اختلاف آن‌ها در حدود 0.3 درصد است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهند که روش بدون شبکه به فرم قوی با استفاده از توابع شکل حاصل از درونیابی نقاط شعاعی روشی مناسب و کارآمد برای تحلیل ورق هایپرالاستیک چندلایه با شرایط مرزی گوناگون است.

جدول 1 نتایج حاصل از تحلیل ورق هایپرالاستیک دو لایه تحت بارگذاری گستردهٔ یکنواخت q=6000Pa با شرایط مرزی گیردار و ساده با ضخامت h_1=h_2=0.005m با استفاده از روش‌های بدون شبکه و المان محدود

Table 1 results of a two-layer hyperelastic plate under q=6000Pa with clamped and simply supported boundary conditions and h_1=h_2=0.005m using MCM and FEM

تعداد لایه	روش حل	$w_{max} \times 10^{-2}$ (m)	$\varepsilon_{xx,max} \times 10^{-2}$	$\varepsilon_{xy,max} \times 10^{-2}$	$\sigma_{xx,max} \times 10^5$ Pa	$\sigma_{m,max} \times 10^5$ Pa
گیردار						
دو	FEM	12.66	5.34	2.02	1.27	2.07
لایه	MCM	12.58	5.66	1.95	1.24	2.16
سه	FEM	12.85	4.74	1.40	2.37	2.06
لایه	MCM	12.74	4.63	1.59	2.49	2.24
چهار	FEM	12.65	4.88	1.78	2.71	2.36
لایه	MCM	12.51	4.71	1.69	2.43	2.18
پنج	FEM	12.78	4.32	1.28	1.57	2.03
لایه	MCM	12.63	4.21	1.19	1.43	2.22
ساده						
دو	FEM	13.26	6.7	1.75	0.69	1.05
لایه	MCM	13.39	7.09	1.66	0.71	1.18
سه	FEM	13.55	7.5	1.64	0.96	0.96
لایه	MCM	13.62	7.73	1.53	0.94	0.94
چهار	FEM	13.46	7.65	1.25	0.93	0.98
لایه	MCM	13.41	7.82	1.18	0.90	0.93
پنج	FEM	13.49	7.78	1.21	1.19	1.07
لایه	MCM	13.53	7.91	1.09	1.28	1.19

6- فهرست علائم

a	بردار ضرایب تقریب روش بدون شبکه
C	تانسور تغییر شکل کوشی گرین راست
C_{10}	ضریب ثابت تابع انرژی کرنشی
E	تانسور کرنش لاگرانژی
I_1	ناوردای اول تانسور تغییر شکل کوشی گرین راست
I_3	ناوردای سوم تانسور تغییر شکل کوشی گرین راست
$\mathbf{K}_{NL}$	ماتریس سفتی غیرخطی
$\mathbf{K}_L$	ماتریس سفتی خطی
P_m	ماتریس چندجمله‌ای
p	بردار چند جمله‌ای
q	بردار بار نیروی عرضی
U	تابع انرژی کرنشی
$\bar{U}$	چگالی تابع انرژی کرنشی
R	تابع پایهٔ شعاعی لگاریتمی
$\mathbf{R}_Q$	ماتریس توابع پایهٔ شعاعی
u	جابجایی در راستای محور x
u_0	جابجایی صفحهٔ مرکزی در راستای محور x
v	جابجایی در راستای محور y
v_0	جابجایی صفحهٔ مرکزی در راستای محور y
W	کار نیروی خارجی
w	جابجایی در راستای z
Π	انرژی پتانسیل
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	کرنش‌های محوری
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$	کرنش‌های برشی
ϕ	توابع شکل بدون شبکه
φ_x	چرخش در جهت x
φ_y	چرخش در جهت y
η	پارامتر شکل

7 - مراجع

[1] Amabili, M., Balasubramanian, P., Ferrari, I. D. B. G., Garziera, R. and Riabova, K., “Experimental and Numerical Study on Vibrations and Static Deflection of a Thin Hyperelastic Plate“ Journal of Sound and Vibration, No. September, 2016.

[2] Breslavsky, I., Amabili, M. and Legrand, M., “Physically and Geometrically Nonlinear Vibrations of Thin Rectangular Plates“, Vol. 3, No. 2, pp. 1-2, 2012.

[3] Du, P., Dai, H. H., Wang, J. and Wang, Q., “Analytical Study on Growth-Induced Bending Deformations of Multi-Layered Hyperelastic Plates“ International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 119, pp. 103370-103370, 2020.

[4] Chen, R. M., "Some Nonlinear Dispersive Waves Arising in Compressible Hyperelastic Plates" International Journal of Engineering Science, Vol. 44, No. 18-19, pp. 1188-1204, 2006.

[5] Li, G. Y., He, Q., Mangan, R., Xu, G., Mo, C., Luo, J., Destrade, M. and Cao, Y., "Guided Waves in Pre-Stressed Hyperelastic Plates and Tubes: Application to the Ultrasound Elastography of Thin-Walled Soft Materials" Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 102, pp. 67-79, 2017.

[6] Gacem, H., Chevalier, Y., Dion, J. L., Soula, M. and Rezgui, B., "Nonlinear Dynamic Behaviour of a Preloaded Thin Sandwich Plate Incorporating Visco-Hyperelastic Layers" Journal of Sound and Vibration, Vol. 322, pp. 941-953, 2009.

[7] Dervaux, J., Ciarletta, P. and Ben Amar, M., "Morphogenesis of Thin Hyperelastic Plates: A Constitutive Theory of Biological Growth in the Föppl–Von Kármán Limit" Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 57, No. 3, pp. 458-471, 2009.

[8] Wang, J., Song, Z. and Dai, H. H., "On a Consistent Finite-Strain Plate Theory for Incompressible Hyperelastic Materials" International Journal of Solids and Structures, Vol. 78-79, pp. 101-109, 2016.

[9] Tripathi, A. and Bajaj, A. K., "Topology Optimization and Internal Resonances in Transverse Vibrations of Hyperelastic Plates" International Journal of Solids and Structures, Vol. 81, pp. 311-328, 2016.

[10]Karp, B. and Durban, D., "Evanescent and Propagating Waves in Prestretched Hyperelastic Plates" International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, pp. 1613-1647, 2005.

[11]Singh, J. and Shukla, K. K., "Nonlinear Flexural Analysis of Laminated Composite Plates Using Rbf Based Meshless Method" Composite Structures, Vol. 94, No. 5, pp. 1714-1720, 2012.

[12]Tu, W., Gu, Y. T. and Wen, P. H., "Effective Shear Modulus Approach for Two Dimensional Solids and Plate Bending Problems by Meshless Point Collocation Method" Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 36, pp. 675-684, 2012.

[13]Hussein Al-Tholaia, M. M. and Jubran Al-Gahtani, H., "Rbf-Based Meshless Method for Large Deflection of Elastic Thin Plates on Nonlinear Foundations" Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 51, pp. 146-155, 2015.

[14]Lei, Z. X., Zhang, L. W. and Liew, K. M., "Meshless Modeling of Geometrically Nonlinear Behavior of Cnt-Reinforced Functionally Graded Composite Laminated Plates" Applied Mathematics and Computation, Vol. 295, pp. 24-46, 2017.

[15]Jaworska, I. and Orkisz, J., "On Nonlinear Analysis by the Multipoint Meshless Fdm" Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 92, pp. 231-243, 2018.

[16]Liu, C. S. and Wang, F., "A Meshless Method for Solving the Nonlinear Inverse Cauchy Problem of Elliptic Type Equation in a Doubly-Connected Domain" Computers and Mathematics with Applications, Vol. 76, pp. 1837-1852, 2018.

[17]Kumar, A. and Bhardwaj, A., "A Local Meshless Method for Time Fractional Nonlinear Diffusion Wave Equation" Numerical Algorithms, pp. 1311-1334, 2020.

[18]Wang, J. F., Yang, J. P., Lai, S. K. and Zhang, W., "Stochastic Meshless Method for Nonlinear Vibration Analysis of Composite Plate Reinforced with Carbon Fibers" Aerospace Science and Technology, Vol. 105, pp. 105919, 2020.

[19]Gholamipoor, M. and Ghiasi, M., "Wave Propagation in Meshless Numerical Wave Tank by Using Hermite-Type Rpim" Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 121, pp. 233-242, 2020.

[20]Vaghefi, R., "Three-Dimensional Temperature-Dependent Thermo-Elastoplastic Bending Analysis of Functionally Graded Skew Plates Using a Novel Meshless Approach" Aerospace Science and Technology, Vol. 1, pp. 105916-105916, 2020.

[21]Zheng, H., Sladek, J., Sladek, V., Wang, S. K. and Wen, P. H., "Hybrid Meshless/Displacement Discontinuity Method for Fgm Reissner's Plate with Cracks" Applied Mathematical Modelling, Vol. 90, pp. 1226-1244, 2021.

[22]Hosseini, S. and Rahimi, G., "Nonlinear Bending Analysis of Hyperelastic Plates Using Fsdt and Meshless Collocation Method Based on Radial Basis Function" International Journal of Applied Mechanics, Vol. 13, No. 01, pp. 2150007, 2021/01/01, 2021.

[23]Rodrigues, D. E. S., Belinha, J., Dinis, L. M. J. S. and Natal Jorge, R. M., "A Meshless Study of Antisymmetric Angle-Ply Laminates Using High-Order Shear Deformation Theories" Composite Structures, Vol. 255, pp. 112795, 2021.

[24]Palizvan, A., Mossaiby, F. and Amoushahi, H., "Bending and Buckling Solution of Composite Viscoelastic Plate Using the Generalized Exponential Basis Function Method", Vol. 6, pp. 190-199, 2019.

[25]Aghamohammadi, H., Abbandanak, S. N. H., Eslami-farsani, R. and Hossein, S. M., "Effect of Various Surface Treatment Methods on the Flexural Properties of Fiber Metal Laminates", Vol. 6, pp. 495-502, 1398.

[26]Azghan, M. A., Fallahnejad, M., Zamani, A. and Eslami-farsani, R., "Investigation the Flexural Behavior of Fiber Metal Laminates Containing Glass and Kevlar Fibers Subjected to Thermal Cycling", Vol. 7, pp. 981-988, 2020.

[27]Xia, P. and Wei, K., "Shear Locking Analysis of Plate Bending by Using Meshless Local Radial Point Interpolation Method" Applied Mechanics and Materials, Vol. 166-169, pp. 2867-2870, 2012.