جلد 7، شماره 3، پاییز 99، ص‌ص 1120-1132

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیت**

http://jstc.iust.ac.ir

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

علی طالع‌زاده‌لاری

استادیار، مهندسی مکانیک، مجتمع آموزش عالی لارستان، لار

* لار، صندوق پستی 7431716137، a.talezadeh@lar.ac.ir

اطلاعات مقاله:

دریافت: 99/05/10

پذیرش: 99/10/03

کلیدواژگان

ارتعاشات

پوسته کامپوزیتی

گشودگی

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی کامل و دارای گشودگی مستطیلی بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات در حالت کلی به گونه‌ای نوشته شده که قابل تبدیل به هر یک از تئوری‌های دانل، لاو و یا ساندرز هستند. برای مطالعه پوسته دارای گشودگی فضای حل مسئله به گونه‌ای المان‌بندی شده که شرایط مرزی و بارگذاری در لبه‌های هر المان یکنواخت باشد. برای هر المان، معادلات حاکم، شرایط مرزی لبه‌ها و شرایط سازگاری در مرز مشترک المان‌های مجاور به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در راستای طولی و محیطی گسسته شده و با مونتاژ آنها یک دستگاه معادلات جبری تشکیل شده است. در نهایت، با استفاده از حل مقدار ویژه فرکانس طبیعی سازه محاسبه شده است. برای اعتبارسنجی این روش، نتایج حاصل از آن با نتایج موجود در مقالات و نیز نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. پس از اطمینان از کارایی روش حاضر، از آن برای مطالعه اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های با و بدون گشودگی استفاده شده است. این بررسی‌ها نشان می‌دهد که مستقل از جنس و لایه‌چینی پوسته، گشودگی‌های نسبتاً کوچک ($c/L<0.3$) تاثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پوسته ندارند. ضمن اینکه کاهش نسبت طول به شعاع و یا افزایش ضخامت پوسته نیز در کاهش اثرات گشودگی موثر است. علاوه بر این، اثر گشودگی‌های محیطی به مراتب کمتر از گشودگی‌های طولی است.

Free vibration analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method

Ali Talezadehlari

Department of Mechanical Engineering, Larestan University, Lar, Iran
*P.O.B. 7431716137, Lar, Iran, a.talezadeh@lar.ac.ir

Keywords

Vibration
Composite Shell, Cutout
First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
Generalized Differential Quadrature (GDQ)

Abstract

In this paper, the free vibration of a composite shell with and without a rectangular cutout was studied based on the first-order shear deformation theory. The equations were derived in a general form and can be converted to Donnell`s, Love`s, and Sanders` theories. To investigate the perforated shell a physical domain was decomposed into several elements with uniform boundary and loading conditions in each element edges. In each element, the governing equations were discretized in both longitudinal and circumferential directions by the use of generalized differential quadrature method (GDQM) as well as the boundary conditions at the cutout edges, and the compatibility conditions at the interface boundaries of adjacent elements. Assembling these discretized relations, a system of algebraic equations was generated. Finally, the natural frequencies were calculated by an eigenvalue solution. To validate the presented method, the results of GDQM were compared with the available ones in the literature and also with the ABAQUS finite element model. Then a parametric analysis was performed to investigate the effects of different parameters on the vibrational behavior of the shells with and without cutouts. This study illustrated that small cutouts ($c/L<0.3$) had no significant effect on the natural frequency of the shell. This was independent of both shell material and layup. In addition, decreasing the length to radius ratio or increasing the shell thickness decreased the effect of cutout on natural frequency. Moreover, circumferential cutouts had less effect than longitudinal ones.

Talezadehlari, A., “Free vibration analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method”, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 7, No. 3, pp. 1120-1132, 2020.

1- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای به علت کاربردهای فراوان و خواص ویژه‌ای که دارند، از سال‌ها پیش مورد توجه بوده‌اند. با توجه به نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی و سایر خواص منحصر به فرد کامپوزیت‌ها، رفته رفته پوسته‌های کامپوزیتی جای خود را در صنایع مختلف پیدا کرده‌اند. از این رو انواع تحلیل‌های پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که پایداری و آنالیز ارتعاشی این پوسته‌ها یکی از مهم‌ترین آنهاست. لذا آنالیز ارتعاشاتی این پوسته‌ها مورد توجه بسیاری از محققین بوده است.

از طرف دیگر در بسیاری از موارد برای کاهش وزن پوسته‌ها، ایجاد دسترسی به قسمت‌های داخلی و یا به منظور اتصال بخش‌های دیگر به سازه، ایجاد گشودگی در این سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر است. وجود این گشودگی‌ها از یک سو موجب کاهش سفتی سازه می‌شود و از طرف دیگر وزن آن را کاهش می‌دهد. همین مسئله موجب می‌شود که تاثیرات آن بر رفتار ارتعاشی پوسته‌ها به سادگی قابل پیش‌بینی نباشد و در طراحی چنین سازه‌هایی باید به وجود آن‌ها توجه نمود.

برخلاف پوسته‌های کامل (بدون گشودگی) که توسط محققین مختلفی مورد توجه قرار گرفته و انواع تئوری‌های گوناگونی برای آنالیز آنها مطرح شده است؛ پوسته‌های دارای گشودگی به علت پیچیدگی‌هایی که دارند کمتر به صورت تحلیلی و حتی نیمه تحلیلی بررسی شده‌اند و اکثر مطالعات صورت گرفته به روش‌های عددی و یا تست‌های آزمایشگاهی محدود شده است.

یکی از مهم‌ترین موارد تعیین‌کننده در کارایی روش‌های عددی، حجم محاسبات و هزینه محاسباتی ناشی از آن است. روش مربعات تفاضلی[1] یکی از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل است که مبانی نظری آن نخستین بار توسط بلمن و همکارانش در اوایل دهه 1970 مطرح شد [1, 2]. برت و همکارانش در سال‌های 1988 برای اولین بار از این روش برای حل مسائل سازه‌ای بهره بردند [3]. مهم‌ترین مزیت روش مربعات تفاضلی نسبت به سایر روش‌های عددی نظیر المان محدود، تقاضلات محدود و ... حجم پایین محاسبات آن است. در حالی که در بیشتر روش‌های عددی برای دست‌یابی به دقت‌های قابل قبول، نیاز به شبکه‌بندی ریز مسئله داریم؛ در روش مربعات تفاضلی می‌توان با استفاده از تعداد بسیار کمتری گره به همان دقت از جواب دست یافت.

یکی از مواردی که کاربرد روش مربعات تفاضلی را محدود نموده است عدم قابلیت استفاده از آن برای هندسه‌های نامنظم است. بر خلاف روش المان محدود که می‌تواند برای هر نوع هندسه‌ای (اعم از منظم یا نامنظم) به کار گرفته شود، استفاده مستقیم از روش مربعات تفاضلی برای مسائلی که در آن هندسه و یا بارگذاری دارای ناپیوستگی باشد امکان‌پذیر نیست. ضمن اینکه استفاده از روش‌هایی نظیر نگاشت[2] حوزه فیزیکی[3] مسئله به حوزه محاسباتی[4] سادگی و کارآمدی این روش را از بین می‌برد. برای رفع این محدودیت‌ها استریز و همکارانش در سال 1994 با تلفیق روش مربعات تفاضلی و تجزیه حوزه[5] ورژن جدیدی از روش مربعات تفاضلی با نام "روش مربعات المانی"[6] را ارائه نمودند [4]. ایشان این روش را برای تحلیل تیرهایی با بارگذاری‌های مختلف، از جمله بارگذاری ناپیوسته، به کار بردند و به نتایجی با دقت بالا دست یافتند. در سال 1997، وانگ و گو این روش را بهبود داده و روشی با نام "روش مربعات تفاضلی المانی"[7] ارائه نمودند [5]. این روش با موفقیت برای تحلیل‌های مختلف تیرها از جمله تحلیل تنش، ارتعاشات و کمانش به کار گرفته شد. همچنین این روش توانست نتایج دقیقی برای مسائل دارای بارگذاری و ضخامت ناپیوسته در تیرها فراهم آورد.

لیو و لیو در سال 1998 این روش را برای مسائل دوبعدی بسط دادند و از آن برای تحلیل تنش ورق ایزوتروپ استفاده نمودند. ایشان در این تحلیل ناپیوستگی هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی را بررسی نمودند. بدین منظور ورق به گونه‌ای به المان‌های مختلف مستطیلی تقسیم شد که بارگذاری، شرایط مرزی در هر المان ثابت باشد. سپس معادلات تعادل در هر المان جداگانه نوشته شده و با اعمال شرایط پیوستگی بین المان‌ها با یکدیگر کوپل می‌شوند. بررسی ایشان نشان داد که این روش می‌تواند به خوبی انواع ناپیوستگی‌ها از جمله گشودگی مربعی را تحلیل نماید [6]. در سال 1999 لیو مسئله مشابهی را برای ورق کامپوزیتی بررسی کرد و نشان داد که می‌توان از این روش برای ورق با انواع ناپیوستگی‌های هندسی، مادی، بارگذاری و شرایط مرزی استفاده نمود [7]. لیو و لیو در سال 1999 و 2001 مسئله ارتعاشات آزاد و کمانش تحت بار تک محوری ورق ایزوتروپ را بررسی نمودند. در این پژوهش ورق با ضخامت متغیر، شرایط مرزی ترکیبی و نیز ورق دارای ترک مطالعه شد [8-10]. در همه این مطالعات از تئوری برشی مرتبه اول برای تحلیل ورق استفاده شده است. استفاده از تئوری برشی مرتبه اول این مزیت را دارد که در هر گره سه درجه آزادی وجود دارد و به راحتی می‌توان شرایط مرزی را اعمال نمود.

از روش مربعات تفاضلی برای تحلیل‌های مختلف (استاتیکی، ارتعاشات، کمانش و ...) پوسته‌های ایزوتروپ و کامپوزیتی کامل (بدون گشودگی) استفاده شده است. در ادامه به برخی از پژوهش‌های انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته‌ها اشاره شده است. در تمامی این مطالعات با توجه تقارن محوری پوسته گسسته‌سازی معادلات صرفاً در راستای طولی انجام شده است.

ژانگ و همکارانش از ورژنی از روش مربعات تفاضلی به نام روش تطابق محلی مربعات تفاضلی[8] برای بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای بهره بردند. روابط بر اساس تئوری پوسته گلدنویزر-نواژیلو[9] نوشته شده و شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است [11]. ردکوپ ارتعاشات آزاد پوسته ارتوتروپ ضخیم حاصل از دوران که خواص آن در راستای شعاعی تغییر می‌کند را مطالعه نمود. معادلات بر پایه تئوری سه بعدی الاستیسیته نوشته شده و به کمک روش مربعات تفاضلی حل شده است [12]. هفت‌چناری و همکارانش ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف را به کمک روش مربعات تفاضلی بررسی کرده‌اند. معادلات حرکت بر پایه تئوری برشی مرتبه اول نوشته شده و اثر تغییرشکل برشی و اینرسی چرخشی لحاظ شده است. نتایج به دست آمده با نتایج موجود در مقالات مقایسه شده و کارایی و سهولت استفاده از روش مربعات تفاضلی به خوبی نشان داده شده است [13]. ملک‌زاده و همکارانش ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با لایه‌چینی دلخواه را بررسی کردند. ایشان در این پژوهش از تلفیق تئوری

[1] Differential Quadrature (DQ)
[2] Mapping
[3] Physical domain
[4] Computational domain
[5] Domain decomposition
[6] Quadrature Element Method (QEM)
[7] Differential Quadrature Element Method (DQEM)
[8] Local Adaptive Differential Quadrature Method (LaDQM)
[9] Goldenveizer–Novozhilov shell theory

لایه‌ای[1] و روش مربعات تفاضلی بهره بردند. با استفاده از تئوری لایه‌ای و فرم سه‌بعدی اصل همیلتن گسسته‌سازی در راستای محیطی صورت گرفت و در ادامه روش مربعات تفاضلی برای گسسته‌سازی در راستای طولی استوانه به کار گرفته شد. نتایج به دست آمده با نتایج موجود در مقالات و نیز نتایج نرم‌افزار المان محدود انسیس اعتبارسنجی شد. همچنین با مقایسه زمان مورد نیاز برای حل مسئله به روش ارائه شده و زمان حل انسیس کارایی و سرعت بالای همگرایی این روش نشان داده شد [14]. علی بیگلو بر پایه تئوری سه بعدی الاستیسیته و با بهره‌گیری از تلفیق روش فضای حالت[2] و روش مربعات تفاضلی تحلیل تنش و ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیتی با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را بررسی نمود [15]. کنی و علی بیگلو با همین روش رفتار ارتعاشی پوسته‌های چندلایه که سطوح داخلی و خارجی آنها مجهز به لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک بود را مطالعه نمودند. در این پژوهش نیز انواع شرایط تکیه‌گاهی برای پوسته مورد بررسی قرار گرفت. تاثیر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک، نسبت ضخامت لایه کامپوزیت به لایه پیزوالکتریک و نسبت شعاع میانی به ضخامت در رفتار ارتعاشی پوسته مطالعه شد [16]. فرشیدیان فر و گلزاری به کمک اصل همیلتون معادلات دینامیکی حاکم و شرایط مرزی متناظر را برای تحلیل ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک جدارهٔ حامل سیال، براساس مدل پوستهٔ استوانه‌ای دانل و تئوری اصلاح شدهٔ تنش کوپل نوشتند و برای حل این معادلات از روش مربعات تفاضلی بهره گرفتند [17]. کمریان و همکارانش ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی هدفمند را مورد بررسی قرار دادند که در آن کسر حجمی توزیع توانی سه پارامتری در راستای ضخامت پوسته داشت. تحلیل ارتعاش سازه بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته انجام شد فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته[3] بدست آمد. در این پژوهش، تاثیر نحوه توزیع مواد، شماره موج محیطی و پارامترهای هندسی بر فرکانس طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت [18]. اله کرمی و قصاب زاده ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند دو جهتی را بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی مطالعه کردند. در این پژوهش مشخصات مکانیکی مواد انتخاب شده به طور پیوسته بر اساس قانون توانی توزیع کسر حجمی در دو جهت ضخامت و طول تغییر می‌کند. شرایط مرزی به صورت ساده-ساده فرض شده و برای حل معادلات دیفرانسیل از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته استفاده شده است. در نهایت اثر پارامترهای هندسی و ثابت‌های قانون توانی بر فرکانس طبیعی و شکل مودهای پوسته مورد ارزیابی قرار گرفته است [19]. معصومی و همکارانش مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش معادلات بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده و به کمک روش مربعات تفاضلی حل شده است. دو نوع شرط مرزی آزاد و گیردار برای مخزن بررسی شده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده است. برای صحه‌گذاری نتایج حل تئوری، مدلسازی و تحلیل عددی مدل مورد نظر در نرم افزار المان محدود آباکوس صورت گرفته و نتایج بدست آمده از این نرم افزار با نتایج بدست آمده از روش تفاصل مربعات مورد مقایسه قرار گرفته است [20].

چنانچه بیان شد از انواع ورژن‌های روش مربعات تفاضلی برای حل مسائل گوناگون پوسته‌ها استفاده شده است. اما در همه این مطالعات با توجه به تقارن محوری پوسته، مسئله به یک مسئله یک بعدی در راستای طول پوسته تقلیل یافته است. این در حالی است که وجود ناپیوستگی هندسی (ترک، گشودگی، تغییر ضخامت و ...) در پوسته و یا وجود شرایط مرزی مرکب در انتهای پوسته، تقارن محوری را از بین خواهد برد و نمی‌توان از این روش‌ها بهره برد. تنها مطالعه صورت گرفته در زمینه پوسته‌های دارای گشودگی توسط طالع‌زاده‌لاری و رحیمی انجام شده است که به تحلیل کمانش محوری چنین پوسته‌هایی اختصاص دارد [21]. بنابراین، تا به حال از روش مربعات تفاضلی برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌های دارای گشودگی استفاده نشده است. در پژوهش حاضر پوسته در حالت کلی و بدون توجه به تقارن محوری آن مورد بررسی قرار گرفته است. این امر معادلات و روند حل را به مراتب پیچیده‌تر می‌سازد اما امکان بررسی پوسته‌ی دارای انواع ناپیوستگی‌ها، از جمله گشودگی مستطیلی، را فراهم می‌آورد.

2- روند حل مسئله و معادلات حاکم

برای تحلیل پوسته کامپوزیتی ابتدا بسته به ناپیوستگی‌های هندسی، بارگذاری، شرایط مرزی و ... موجود در مسئله، پوسته به N_E المان تقسیم شده است. این تقسیم‌بندی به گونه‌ای انجام می‌شود که خواص مواد و ضخامت در هر المان ثابت باشد و نیز در تمامی لبه‌های همه المان‌ها بارگذاری و شرایط مرزی پیوسته باشد. بدین منظور برای تحلیل پوسته دارای گشودگی لازم است مطابق شکل 1 پوسته به پنج المان تقسیم شود.

معادلات حاکم برای تحلیل ارتعاشات آزاد در هر المان بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مطابق رابطه (1) بیان می‌شود [22]. علت اصلی استفاده از این تئوری سهولت اعمال شرایط مرزی در لبه‌های پوسته است. ضمن اینکه با استفاده از این تئوری می‌توان پوسته‌های نسبتاً ضخیم را نیز بررسی نمود.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-\frac{C_2}{2R}\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=P_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+P_2\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \tag{a-1}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{C_2}{2R}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+C_1\frac{Q_y}{R}=P_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+P_2\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \tag{b-1}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{N_y}{R}=P_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{c-1}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=P_3\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}+P_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{d-1}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=P_3\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}+P_2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{e-1}$$

در این روابط محور x در جهت طولی پوسته، و محور y در راستای محیطی در نظر گرفته شده است. همچنین، در این رابطه N_x، N_y و N_{xy} بیانگر منتجه‌های نیرو، M_x، M_y و M_{xy} منتجه‌های گشتاور، و Q_x و Q_y منتجه‌های نیروی برشی عرضی هستند. همچنین پارامترهای P_1، P_2 و P_3 ترم‌های اینرسی هستند که طبق رابطه (2) تعریف می‌شوند:

$$\{P_1,P_2,P_3\}=\sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\rho^{(k)}\{1,z,z^2\}\,dz \tag{2}$$

علاوه بر این، شعاع پوسته استوانه‌ای با R نشان داده شده است. ضمن اینکه C_1 و C_2 ثوابتی هستند که نوع تئوری به کار گرفته شده را مشخص می‌کنند. به ازای $C_1=C_2=1$ روابط فوق به تئوری ساندرز تبدیل خواهد شد. $C_1=1$ و $C_2=0$ بیانگر تئوری لاو تبدیل خواهد بود و نهایتاً قرار دادن $C_1=C_2=0$ روابط فوق را به تئوری دانل تقلیل خواهد داد.

[1] Layerwise theory
[2] State space
[3] Generalized differential quadrature (GDQ)

همچنین منتجه‌های تنش، گشتاور و تنش برشی عرضی طبق رابطه (3) به کرنش‌ها و انحناهایی لایه میانی پوسته مرتبط هستند:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{a-3}$$

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s A_{44} & K_s A_{45} \\ K_s A_{44} & K_s A_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \tag{b-3}$$

که در این رابطه K_s ضریب تصحیح تنش برشی است. محققین مقادیر مختلفی را برای این ضریب پیشنهاد نموده‌اند که از میان آنها می‌توان به ضرایب پیشنهادی توسط رایزنر(5/6) [23]، میدلین $(\pi^2/12)$ [24] و ویتریک $(5/(6-\nu))$ [25] اشاره نمود. مالیک و برت در سال 1998 بررسی جامعی بر روی اثرات ضریب تصحیح تنش برشی بر نتایج ارتعاشات آزاد ورق ضخیم انجام دادند و اعلام داشتند که ضریب تصحیح پیشنهاد شده توسط ویتریک از دقت بالاتری برخوردار است [26]. لذا در مطالعه حاضر همین مقدار برای ضریب تصحیح تنش برشی انتخاب شده است.

همچنین ضرایب A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} ضرایب ماتریس سفتی هستند که بر حسب ابعاد پوسته، لایه‌چینی و خواص مکانیکی هر لایه طبق رابطه (4) محاسبه می‌شود:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}{}^{(k)} \left(z_{(k+1)} - z_{(k)}\right) \ , \qquad i,j = 1,2,6 \tag{a-4}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}{}^{(k)} \left(z_{(k+1)}{}^2 - z_{(k)}{}^2\right) \ , i,j = 1,2,6 \tag{b-4}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}{}^{(k)} \left(z_{(k+1)}{}^3 - z_{(k)}{}^3\right) \ , i,j = 1,2,6 \tag{c-4}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{ij}{}^{(k)} \left(z_{(k+1)} - z_{(k)}\right) \ , \qquad i,j = 4,5 \tag{d-4}$$

که در این روابط $\bar{Q}_{ij}{}^{(k)}$ سفتی دوران یافته لایه k ام است که بر اساس خواص مکانیکی این لایه و جهت قرارگیری آن تعریف می‌شود [22]. به منظور حفظ اختصار از بیان این روابط صرف نظر شده است

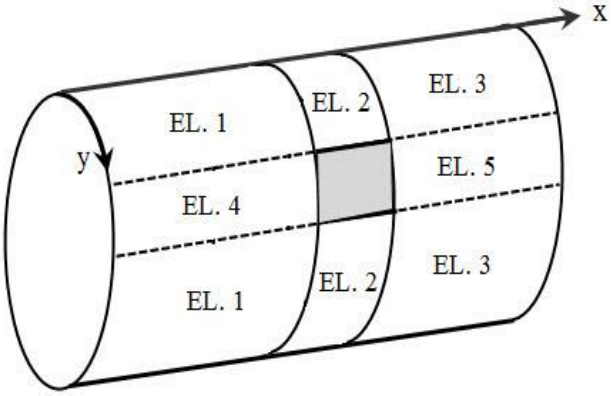

Fig. 1 Elements used for perforated shell [21]

شکل 1 تقسیم پوسته دارای گشودگی به المان‌های مناسب [21]

علاوه بر این در رابطه (3) $\kappa_{xy}, \kappa_y, \kappa_x, \gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{xy}^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_x^0$ کرنش‌ها و تغییر انحناهای لایه میانی هستند که طبق رابطه (5) به جابجایی‌ها و دوران‌های لایه میانی مرتبط هستند [22].

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \ ; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \tag{a-5}$$

$$\gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \ ; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \ ;$$

$$\gamma_{yz}^0 = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y - C_1 \frac{v}{R} \tag{b-5}$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \ ; \quad \kappa_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \ ;$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{C_2}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{c-5}$$

که در آن v, u و w به ترتیب جابجایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی لایه میانی استوانه و φ_x و φ_y چرخش‌ها حول محورهای y و x هستند.

فرض می‌کنیم میدان جابجایی و چرخش‌ها طبق رابطه (6) بیان شود؛ که در آن ω فرکانس طبیعی پوسته بوده و $\mathrm{U(x,y)}$، $V(\mathrm{x,y})$، $W(\mathrm{x,y})$، $\psi_x(\mathrm{x,y})$ و $\psi_y(\mathrm{x,y})$ شکل مود ارتعاشی پوسته را نشان می‌دهند.

$$u(x,y,t) = \mathrm{U(x,y)e^{i\omega t}} \tag{a-6}$$

$$v(x,y,t) = \mathrm{V(x,y)e^{i\omega t}} \tag{b-6}$$

$$w(x,y,t) = \mathrm{W(x,y)e^{i\omega t}} \tag{c-6}$$

$$\varphi_x(x,y,t) = \psi_x(\mathrm{x,y})\mathrm{e^{i\omega t}} \tag{d-6}$$

$$\varphi_y(x,y,t) = \psi_y(\mathrm{x,y})\mathrm{e^{i\omega t}} \tag{e-6}$$

با تلفیق روابط (3)، (5) و (6)، جایگذاری آنها در معادلات (1) و ساده‌سازی ترم $\mathrm{e^{i\omega t}}$ از طرفین معادله، معادلات حاکمه بر حسب میدان جابجایی، چرخش‌ها و مشتقات آنها مطابق رابطه (7) تعیین می‌شود

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2A_{16} - B_{16}\frac{C_2}{R}\right) \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{66} - B_{66}\frac{C_2}{R} + D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)\right\} U + \\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{16} + B_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right. \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(A_{12} + A_{66} - D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right) \\
&\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{26} - B_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\} \mathrm{V} + \\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_{12}}{R}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A_{26}}{R} - B_{26}\frac{C_2}{2R^2}\right)\right\} W + \\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2B_{16} - D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right. \\
&\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{66} - D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right\} \psi_x + \\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{16}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(B_{12} + B_{66} - D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right. \\
&\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{26} - D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\} \psi_y = -(P_1 U + P_2 \psi_x)\omega^2
\end{aligned} \tag{a-7}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{16}+B_{16}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(A_{66}+A_{12}-D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{26}-B_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}U+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{66}+B_{66}\frac{C_2}{R}+D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2A_{26}+B_{66}\frac{C_2}{R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(A_{22})-K_sA_{44}\left(\frac{C_1}{R}\right)^2\right\}\mathrm{V}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_{26}}{R}+B_{26}\frac{C_2}{2R^2}+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A_{22}}{R}+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right)\right\}W+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{16}+D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{66}+B_{12}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{26})+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right\}\psi_x+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{26}+D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{22})+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right\}\psi_y=-\left(P_1\mathrm{V}+P_2\psi_y\right)\omega^2 \tag{b-7}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{A_{12}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(B_{26}\frac{C_2}{2R^2}-\frac{A_{26}}{R}\right)\right\}U+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-K_sA_{45}\frac{C_1}{R}-\frac{A_{26}}{R}-B_{26}\frac{C_2}{2R^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-K_sA_{44}\frac{C_1}{R}-\frac{A_{22}}{R}\right)\right\}\mathrm{V}+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_sA_{55})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2K_sA_{45})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(K_sA_{44})-\frac{A_{22}}{R^2}\right\}W+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_sA_{55}-\frac{B_{12}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_sA_{45}-\frac{B_{26}}{R}\right)\right\}\psi_x+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_sA_{45}-\frac{B_{26}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_sA_{44}-\frac{B_{22}}{R}\right)\right\}\psi_y=-P_1W\omega^2 \tag{c-7}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{16}-D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}U+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{16}+D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{12}+B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{26})+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right\}\mathrm{V}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_{12}}{R}-K_sA_{55}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_{26}}{R}-K_sA_{45}\right)\right\}W+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2D_{16})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{66})-K_sA_{55}\right\}\psi_x+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(D_{12}+D_{66})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{26})-K_sA_{45}\right\}\psi_y=-(P_3\psi_x+P_2U)\omega^2 \tag{d-7}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{12}+B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{26}-D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}U+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{26}+D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{22})+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right\}\mathrm{V}+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_{26}}{R}-K_sA_{45}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_{22}}{R}-K_sA_{44}\right)\right\}W+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(D_{12}+D_{66})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{26})-K_sA_{45}\right\}\psi_x+\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{66})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2D_{26})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{22})-K_sA_{44}\right\}\psi_y=-\left(P_3\psi_y+P_2V\right)\omega^2 \tag{e-7}$$

برای تعیین فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد پوسته ، از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته استفاده شده است. در ادامه مبانی نظری این روش توضیح داده شده و سپس نحوه اعمال شرایط مرزی و چگونگی تحلیل پوسته دارای ناپیوستگی بیان شده است.

3- روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

روش مربعات تفاضلی، یک ابزار محاسباتی قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که علی‌رغم استفاده از تعداد گره کم، از دقت بالایی برخوردار است. در این روش، مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت ترکیب خطی وزن‌دار مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص تقریب زده می‌شود. به عنوان مثال رابطه زیر تقریب مشتق تابع $f(x)$ نسبت به جهت مختصاتی x در نقطه x_i را نشان می‌دهد. در این رابطه $c_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند.

$$f_x(x_i)=\sum_{j=1}^{N}c_{ij}^{(1)}f(x_j)\ ,\qquad i=1,2,\dots,N \tag{8}$$

همچنین این روش می‌تواند برای مراتب بالاتر مشتق و یا توابع چند متغیره نیز به سادگی به کار گرفته شود. به عنوان مثال مشتق تابع دو متغیره $f(x,y)$ در جهات x و y به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_x(x_i,y_j)=\sum_{k_1=1}^{N}c_{i,k_1}^{(1)}f(x_{k_1},x_j)\ ,\ i=1,2,\dots,N \tag{a-9}$$

$$f_{xx}(x_i,y_j)=\sum_{k_1=1}^{N}c_{i,k_1}^{(2)}f(x_{k_1},x_j)\ ,\ i=1,2,\dots,N \tag{b-9}$$

$$f_y(x_i,y_j)=\sum_{k_2=1}^{M}\overline{c_{j,k_2}^{(1)}}f(x_i,x_{k_2})\ ,\ j=1,2,\dots,M \tag{c-9}$$

$$f_{yy}(x_i,y_j)=\sum_{k_2=1}^{M}\overline{c_{j,k_2}^{(2)}}f(x_i,x_{k_2})\ ,\ j=1,2,\dots,M \tag{d-9}$$

$$f_{xy}(x_i,y_j)=\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{M}c_{i,k_1}^{(1)}\overline{c_{j,k_2}^{(1)}}f(x_{k_1},x_{k_2})\ ,\quad i=1,2,\dots,N\ ,\ j=1,2,\dots,M \tag{e-9}$$

اصلی‌ترین چالش این روش محاسبه ضرایب وزنی مناسب است. مختلفی در این زمینه پژوهش نموده و تلاش کرده‌اند تا محدودیت‌های این روش را کاهش دهند. بلمن و همکارانش در سال 1972 بر اساس دو تابع تست

مختلف، دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند [2]. در روش نخست محل گره‌ها کاملاً اختیاری بود و ضرایب وزنی با حل یک دستگاه معادلات جبری تعیین می‌شد. با افزایش تعداد گره‌ها، حل این دستگاه معادلات با مشکل مواجه می‌شد. در روش دوم این مشکل برطرف شد و عبارتی صریح برای ضرایب وزنی تقریب مشتق ارائه شد. اما در این روش مختصات گره‌ها ثابت و غیرقابل تغییر بود. در سال 1989 کان و چانگ برای رفع این محدودیت با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ رابطه صریح دیگری برای ضرایب وزنی ارائه کردند که هیچ محدودیتی برای نحوه توزیع گره‌ها نداشت، اما استفاده از آن برای مشتقات مراتب بالاتر با دشواری‌هایی همراه بود [28, 27]. در سال 1991 شو به کمک تقریب چند جمله‌ای[1] و آنالیز خطی فضای برداری[2] روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کرد که تمامی روش‌های قبل از جمله روش ارائه شده توسط کان و چانگ را شامل می‌شد [29]. در این روش ضرایب وزنی برای تقریب مشتق مرتبه اول طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \ , & i \neq j \\ -\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{N} c_{ij}^{(1)} \ , & i = j \end{cases} \tag{10}$$

که در این رابطه داریم:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1,k\neq i}^{N} (x_i - x_k) \tag{11}$$

همچنین ضرایب وزنی تقریب مشتقات مراتب بالاتر از رابطه بازگشی زیر به دست می‌آید:

$$c_{ij}^{(m)} = \begin{cases} m\left(c_{ij}^{(1)} c_{ii}^{(m-1)} - \dfrac{c_{ii}^{(m-1)}}{x_i - x_j}\right) \ , & i \neq j \\ -\displaystyle\sum_{j=1,j\neq i}^{N} c_{ij}^{(m)} \ , & i = j \end{cases}$$
$$i,j = 1,2,\dots,N; \quad m = 2,3,..,N-1 \tag{12}$$

هرچند انتخاب مختصات گره‌ها در این روش اختیاری است و هیچ محدودیتی ندارد، اما این موضوع به معنی عدم تاثیرگذاری نحوه توزیع گره‌ها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آنها نیست. شربورن و پاندای نخستین پژوهشگرانی بودند که حساسیت نتایج این روش نسبت به مختصات گره‌ها را مطرح نمودند [30]. شو در کتاب خود که در سال 2000 در خصوص کاربردهای روش مربعات تفاضلی نگاشته است، توزیع‌های مختلف گره‌ها را بررسی و با یکدیگر مقایسه کرده و نشان داد که توزیع چبیشف-گووس-لوباتو[3]، که به اختصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود، نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت [31]. در مطالعه حاضر توزیع گره‌ها طبق همین شیوه انجام شده است. رابطه (13) نحوه توزیع چبیشف N گره در بازه [a,b] را نشان می‌دهد:

$$x_i = a + \frac{1}{2}(b-a)\left(1 - cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right) \ ,$$
$$i = 1,2,\dots,N \tag{13}$$

برای حل مسئله ابتدا در هر المان گسسته‌سازی معادلات (7) به کمک روابط (9) صورت می‌پذیرد. بدین منظور، برای هر المان در راستای x و y به ترتیب N و M گره در نظر گرفته شده است. تعداد گره‌های المان‌های مختلف می‌تواند متفاوت باشد، اما مستقل از تعداد گره‌های المان مجاور نیست؛ و بایستی به گونه‌ای انتخاب شود که گره‌های لبه مشترک دوالمان مجاور بر روی یکدیگر قرار گیرند.

4- شرایط مرزی و سازگاری

پس از اعمال معادلات تعادل بر گره‌های هر المان، بایستی در مرز مشترک هر دو المان مجاور شرایط سازگاری اعمال شود. همچنین برای سایر لبه‌های هر المان که در مجاورت المان دیگری نیست (در تکیه‌گاه و لبه گشودگی)، شرایط مرزی اعمال خواهد شد. در پژوهش حاضر می‌توان انواع مختلف شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد را بررسی نمود که برای لبه $y = y_i$ و $x = x_i$ به ترتیب طبق روابط (14) و (15) تعریف می‌شوند: [32].

$$C: \quad u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \tag{a-14}$$
$$S: \quad w = \varphi_y = v = N_x = M_x = 0 \tag{b-14}$$
$$F: \quad N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x = 0 \tag{c-14}$$

$$C: \quad u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \tag{a-15}$$
$$S: \quad w = \varphi_x = u = N_y = M_y = 0 \tag{b-15}$$
$$F: \quad N_y = N_{xy} = M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \tag{c-15}$$

ضمن اینکه برای اعمال شرایط مرزی نیز لازم است تا گسسته‌سازی این معادلات به کمک روابط (9) انجام شود.

برای گره‌های واقع در مرز مشترک دو المان مجاور بایستی دو دسته معادله سازگاری برقرار شود که هر دسته جایگزین معادلات تعادل در نقاط مرزی یکی از المان‌ها خواهد شد:

1) سازگاری جابجایی‌ها و چرخش‌ها: پیوستگی پوسته ایجاب می‌کند که مقادیر جابجایی‌ها و چرخش‌های گره‌های مرزی در مرز مشترک دو المان مجاور یکسان باشند. بنابراین در مرز مشترک دو المان مجاور A و B خواهیم داشت:

$$\{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El\,A)} = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El\,B)} \tag{16}$$

2) سازگاری تنش‌ها و گشتاورها: برای برقراری تعادل، لازم است که برخی از منتجه‌های تنش و گشتاور در مرز مشترک دو المان مجاور با یکدیگر برابر باشند. روابط (17) و (18) به ترتیب این روابط را برای المان‌هایی که در جهت x (شکل 2-a) یا y (شکل 2-b) به یکدیگر متصل شده‌اند نشان می‌دهد:

$$\{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El\,A)} = \{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El\,B)} \tag{17}$$

$$\{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El\,A)} = \{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El\,B)} \tag{18}$$

لازم به ذکر است پوسته بدون ناپیوستگی هندسی و بارگذاری را می‌توان مطابق شکل 3 به صورت یک المان در نظر گرفت که ابتدا و انتهای آن به یکدیگر متصل شده باشد. در این حالت ضروری است شرایط سازگاری برای گره‌های ابتدایی و انتهایی پوسته در راستای محیطی اعمال شود.

برای تحلیل نهایی مسئله، معادلات حاکم برای گره‌های تمامی المان‌ها نوشته شده و در فرم ماتریسی به شیوه مناسب در کنار یکدیگر مونتاژ شده تا ماتریس کلی معادلات تشکیل شود. پس از جایگذاری شرایط سازگاری در گره‌های واقع در لبه‌های المان‌های مجاور، و اعمال شرایط مرزی در لبه گشودگی و نیز در دو انتهای پوسته، مسئله مقدار ویژه‌ای به فرم رابطه (19)

[1] Polynomial approximation
[2] Linear vector space analysis
[3] Chebyshev-Gauss-Lobatto

حاصل خواهد شد که با حل آن فرکانس طبیعی سازه تعیین خواهد شد. شایان ذکر است در این رابطه ماتریس‌های $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس سفتی و ماتریس وزن کل سازه هستند و بردار $\{d\}$ جابجایی‌ها و چرخش‌های تمامی گره‌ها را نشان می‌دهد. تمامی این مراحل در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است.

$$([K]-\omega^2[M])\{d\}=0 \tag{19}$$

5- اعتبارسنجی

برای اطمینان از روش پیشنهادی و کد نوشته شده نتایج حاصل از این روش برای پوسته با و بدون گشودگی با نتایج موجود در مقالات و همچنین نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است.

در گام نخست، پوسته کامپوزیتی بدون گشودگی با تکیه‌گاه ساده-ساده و با دو لایه‌چینی مختلف [0/90] و [90/0] در نظر گرفته شده و نتایج حاصل با نتایج ارائه شده در فصل هفتم کتاب کوتا [33] و نیز نتایج آباکوس مقایسه شده است. در این بررسی خواص کامپوزیت به صورت $E_1=20.02\ Mpsi$، $E_2=1.3\ Mpsi$، $G_{12}=1.03\ Mpsi$ و $\vartheta_{12}=0.3$ در نظر گرفته شده است. ضمن اینکه نتایج به صورت مستقل از چگالی پوسته و به شکل پارامتر بی‌بعد $\omega R\sqrt{\rho/E_1}$ گزارش شده است. برای تولید این نتایج چگالی پوسته $\rho=500\times10^{-6}\ lb\,s^2/in^4$ فرض شده است. همچنین شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 1 و 0.01 اینچ در نظر گرفته شده و نتایج برای طول‌های مختلف پوسته ارائه شده است

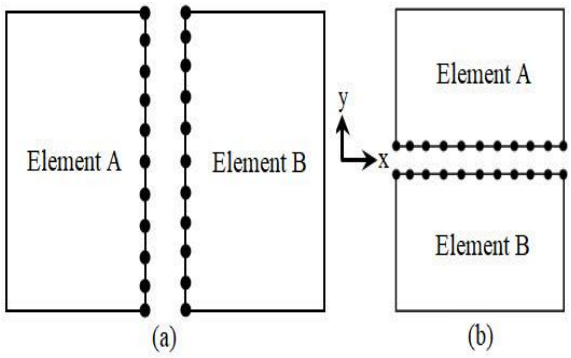

Fig. 2 Element connection (a) x direction (b) y direction

شکل 2 اتصال دو المان (a) در جهت x (b) در جهت y

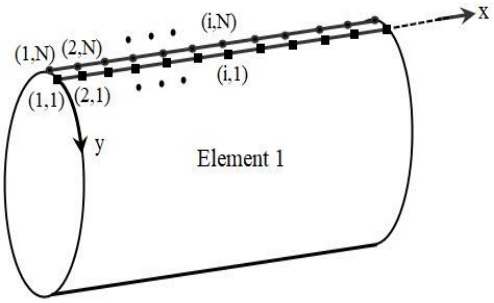

Fig. 3 Paired nodes at the two opposite edges of one element shell

شکل 3 گره‌های مشترک در ابتدا و انتهای تک المان پوسته

نتایج کد حاضر بر اساس تئوری ساندرز استخراج شده است. ضمن اینکه برای همگرایی نتایج 15 گره در راستای طولی و 45 گره در راستای محیطی استوانه مورد استفاده قرار گرفته است. شایان ذکر است، حساسیت نتایج به تعداد گره‌های محیطی بیشتر از تعداد گره‌های طولی است. علاوه بر این، تحلیل در آباکوس به کمک المان غیرخطی S8R انجام شده است. جدول 1 نتایج صحت و دقت نتایج از پژوهش حاضر را نمایش می‌دهد.

در قسمت بعدی این بخش، تفاوت میان سه تئوری دانل، لاو و ساندرز و میزان دقت هر تئوری مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور هندسه و خواص مکانیکی همچنان مشابه آنچه کوتا در نظر گرفته بود فرض شده است:

$$R=1\ in\quad,\quad t=0.01\ in$$
$$E_1=20.02\ Mpsi\quad,\quad E_2=1.3\ Mpsi\,,\quad \vartheta_{12}=0.3$$
$$G_{12}=G_{23}=G_{13}=1.03\ Mpsi,\quad \rho=500\times10^{-6}\ lb\,s^2/in^4$$

ضمن اینکه لایه‌چینی پوسته به صورت [90/0] انتخاب شده است. این بار شرایط مرزی پوسته گیردار-گیردار در نظر گرفته شده و فرکانس طبیعی پوسته برای نسبت‌های مختلف L/R برای هر سه تئوری محاسبه شده و با نتایج حاصل از آباکوس مقایسه شده است. نتایج حاصل شده در جدول 2 آورده شده است. ضمناً برای بررسی بهتر، درصد اختلاف نتایج سه تئوری نسبت به نتایج آباکوس در شکل 4 ترسیم شده است. به منظور حفظ ابعاد و کیفیت شکل، نتایج مربوط به $L/R=15\,,20$ نمایش داده نشده است.

مقایسه انجام شده نشان می‌دهد که نتایج دو تئوری لاو و ساندرز بسیار به یکدیگر نزدیک هستند و تفاوت معناداری میان آنها وجود ندارد. فرکانس طبیعی به دست آمده از هر دو تئوری همواره (برای پوسته‌های کوتاه و بلند) با نتایج به دست آمده از آباکوس مطابقت بسیار خوبی دارد و ماکزیمم اختلاف آن با نتایج آباکوس 0.3% است. با این حال، اگر قرار به انتخاب یکی از این دو تئوری باشد؛ نتایج حاصل از تئوری ساندرز تطابق بهتری با آباکوس دارند. بر خلاف این دو تئوری دقت نتایج تئوری دانل وابستگی شدیدی به نسبت طول به شعاع پوسته دارد. برای پوسته‌هایی با ارتفاع کم $(L/R\leq 2)$، که اصطلاحاً به آنها پوسته‌های کم‌عمق[1] نیز گفته می‌شود، دقت این تئوری قابل قبول است (اختلاف کمتر از 1%). اما برای پوسته‌های بلندتر تفاوت ایجاد شده میان نتایج حاصل از تئوری دانل با دو تئوری دیگر و نیز با نتایج آباکوس بسیار زیاد و غیرقابل قبول است. با توجه به مقایسه صورت گرفته، در بخش‌های آتی مقاله از تئوری ساندرز برای تولید نتایج استفاده شده است.

جدول 1 فرکانس طبیعی بی‌بعد شده پوسته کامپوزیتی با طول مختلف

Table 1 Dimensionless natural frequency of composite shell with various lengths

طول پوسته (in)	لایه چینی [0/90]			لایه چینی [90/0]		
	پژوهش حاضر	آباکوس	مرجع [33]	پژوهش حاضر	آباکوس	مرجع [33]
8	0.01481	0.01481	0.01482	0.01552	0.01553	0.01553
4	0.03011	0.03011	0.03013	0.03145	0.03147	0.03147
2	0.05911	0.05910	0.05915	0.06121	0.06121	0.06126
1	0.10831	0.10821	0.10837	0.11152	0.11146	0.11160

جدول 2 فرکانس طبیعی (هرتز) پوسته کامپوزیتی با طول مختلف

Table 2 Natural frequency (Hz) of composite shell with various length

طول پوسته (in)	تئوری دانل	تئوری لاو	تئوری ساندرز	آباکوس
0.25	18987.47	18981.27	18979.82	18940
0.5	7762.47	7748.52	7747.04	7747.2
0.75	5235.11	5217.74	5216.57	5217.6

[1] Shallow shell

4053.4	4051.30	4052.23	4069.66	1
2911.3	2907.50	2908.13	2926.76	1.5
2328.7	2326.85	2327.34	2352.19	2
1322.4	1325.03	1325.27	1344.39	4
915.53	916.98	917.17	940.05	6
714.55	716.61	716.73	739.27	8
557.22	558.28	558.40	583.70	10
402.74	402.95	403.03	437.66	15
282.25	282.68	282.74	301.34	20

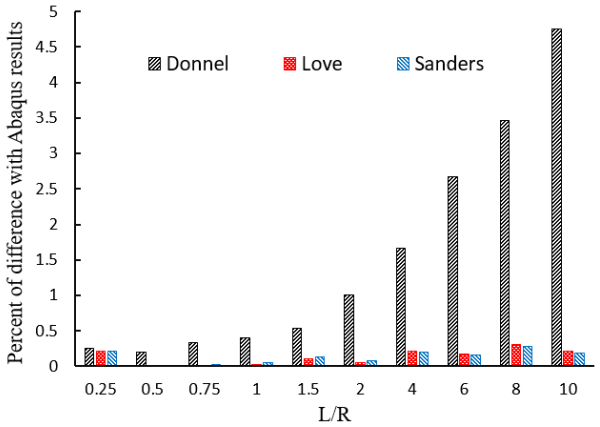

Fig. 4 Difference percent of different shell theories with Abaqus results

شکل 4 درصد اختلاف نتایج تئوری‌های مختلف پوسته با نتایج آباکوس

در آخرین قدم، به منظور اعتبارسنجی نتایج روش پیشنهادی برای پوسته‌های دارای گشودگی از نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده شده است. بدین منظور شعاع و طول پوسته 1 متر در نظر گرفته شده و نتایج برای ضخامت‌های 1 و 100 میلی‌متر گزارش شده است. همچنین سه سایز مختلف برای گشودگی مربعی مرکزی انتخاب شده است. شرایط مرزی گیردار-گیردار در نظر گرفته شده است. چگالی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب $2720\ kgm^{-3}$، $70\ GPa$ و 0.25 فرض شده است. چنانچه پیش از این بیان شد برای تحلیل پوسته دارای گشودگی، پوسته به پنج المان تقسیم شده که حداقل تعداد گره‌های لازم برای هر المان با توجه به همگرایی نتایج تعیین می‌شود. علاوه بر این، تحلیل در آباکوس به کمک المان غیرخطی S8R انجام شده است. نتایج به دست آمده بر اساس سه تئوری دانل، لاو و ساندرز در مقایسه با نتایج آباکوس در جدول 3 ارائه شده است. بررسی نتایج به دست آمده صحت و دقت روش مورد استفاده را نشان می‌دهد. ضمن اینکه با توجه به طول و شعاع پوسته، مطابق انتظار نتایج هرسه تئوری بسیار به یکدیگر نزدیک است و تفاوت قابل بحثی میان آنها وجود ندارد.

6- ارائه نتایج و بحث در نتایج

نتایج بخش قبل صحت و دقت نتایج به دست آمده از روش مربعات تفاضلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با و بدون گشودگی مستطیلی را نشان داد. در این قسمت، این روش برای بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای با و بدون گشودگی به کار گرفته شده است.

جدول 3 فرکانس طبیعی (هرتز) پوسته آلومینیومی با اندازه‌های مختلف گشودگی

Table 3 Natural frequency (Hz) of Aluminum shell with various cutout size

اندازه گشودگی	آباکوس	پژوهش حاضر		
		دانل	لاو	ساندرز
h = 1 mm				
-	86.955	87.944	87.740	87.735
0.25 × 0.25	82.663	81.633	81.515	81.512
0.5 × 0.5	54.948	54.372	54.373	54.378
0.75 × 0.75	39.05	38.513	38.535	38.541
h = 100 mm				
-	744.43	753.43	744.25	742.28
0.25 × 0.25	741.93	750.73	741.815	739.92
0.5 × 0.5	710.29	705.82	701.24	700.65
0.75 × 0.75	624.81	624.51	623.80	624.48

برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات پوسته، یک مسئله پایه در نظر گرفته شده و با تغییر یک پارامتر و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، تاثیر آن پارامتر مطالعه شده است. بدین منظور طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 100، 50 و 2.5 میلی‌متر فرض شده است. پوسته از جنس گرافیت اپوکسی با آرایش $[\pm 45/0/90]_S$ که شامل هشت لایه با ضخامت یکسان است انتخاب شده است. خواص مکانیکی گرافیت اپوکسی در جدول 4 آورده شده است. همچنین شرایط تکیه‌گاهی به صورت گیردار-گیردار در نظر گرفته شده است.

6-1- اثر اندازه گشودگی و خواص مواد

برای بررسی اثر اندازه گشودگی، یک گشودگی مربعی $(c_x = c_y = c)$ در وسط پوسته در نظر گرفته شده است. اندازه ضلع گشودگی از 10 تا 90 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. تاثیر افزایش اندازه گشودگی بر فرکانس طبیعی پوسته‌هایی از جنس مختلف مطالعه شده است. خواص مکانیکی این مواد مطابق مرجع [34] در جدول 4 آورده شده است. شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کامپوزیتی و فلزی به ازای ابعاد مختلف گشودگی را نشان می‌دهد. برای مقایسه بهتر نتایج پوسته‌ها با جنس‌های مختلف، هر یک از نمودارها نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون گشودگی از همان جنس بی‌بعد شده و در شکل 6 ترسیم شده‌اند. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که برای لایه‌چینی یکسان، رفتار همه پوسته‌ها در برابر تغییر اندازه گشودگی تقریباً مشابه و مستقل از جنس است.

تحلیل نتایج این دو شکل نشان می‌دهد که گشودگی‌های نسبتاً کوچک $(c/L < 0.3)$ تاثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پوسته ندارند. علت آن است که وجود این گشودگی‌ها تاثیر چشمگیری بر سفتی سازه ندارد؛ ضمن اینکه وزن پوسته نیز تقریباً به همان اندازه کاهش می‌یابد. از این رو، تاثیر چنین گشودگی‌هایی بر کاهش فرکانس طبیعی کمتر از 5% است. با افزایش اندازه گشودگی، تاثیر آن بر سفتی پوسته بیشتر آشکار خواهد شد و یک افت ناگهانی در نمودارها مشاهده می‌شود. به گونه‌ای که برای $c/L = 0.6$ فرکانس طبیعی پوسته حدود 30% کاهش می‌یابد. این قسمت از نمودار تقریباً خطی است و روندی کاهشی فرکانس طبیعی شیب تقریباً ثابتی دارد. هرچند، برای گشودگی‌های خیلی بزرگ، شیب نمودار رفته رفته کاهش می‌یابد.

جدول 4 خواص مکانیکی مواد مختلف [34]

Table 4 Mechanical properties of different materials [34]

	گرافیت اپوکسی	شیشه اپوکسی	بورون اپوکسی	فولاد	آلومینیوم
شماره ماده	M1	M2	M3	M4	M5
$E_{11}\ (GPa)$	181	38.6	204	200	70
$E_{22}\ (GPa)$	10.3	8.27	18.5	200	70

28	76.92	5.59	4.14	7.17	$G_{12}\ (GPa)$
0.25	0.3	0.26	0.23	0.28	ν_{12}
2600	7800	2000	1800	1600	$\rho\ (kg/m^3)$

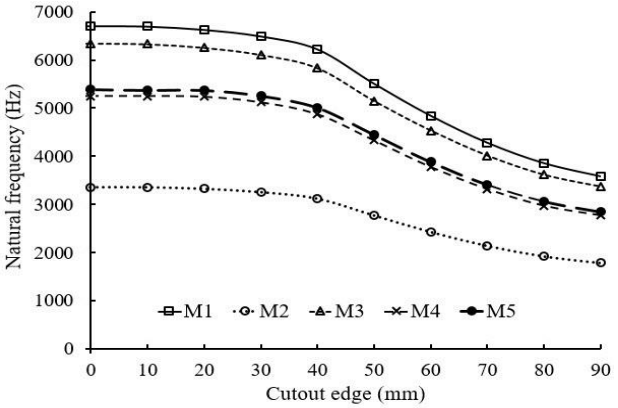

Fig. 5 Natural frequency variation for different cutout size

شکل 5 تغییرات فرکانس طبیعی برای ابعاد مختلف گشودگی

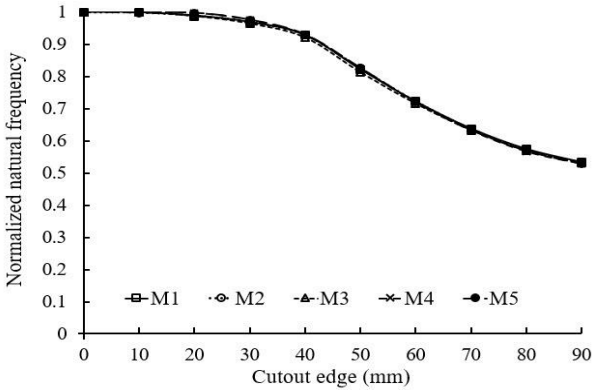

Fig. 6 Normalized natural frequency variation for different cutout size

شکل 6 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برای ابعاد مختلف گشودگی

6-2- اثر لایه‌چینی

پس از بررسی پوسته‌هایی با جنس مختلف، در این قسمت اثر لایه‌چینی‌های مختلف بر فرکانس طبیعی پوسته‌ای از جنس گرافیت اپوکسی با و بدون حضور گشودگی بررسی شده است. در همه موارد، پوسته به صورت هشت لایه در نظر گرفته شده است. فرکانس طبیعی پوسته به ازای سه اندازه مختلف گشودکی مرکزی در جدول 5 آورده شده است. ضمن اینکه نتایج برخی از لایه‌چینی‌ها برای سایر ابعاد گشودگی در شکل 7 نیز نمایش داده شده است. همچنین فرکانس طبیعی پوسته دارای گشودگی با آرایش مختلف نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون گشودگی با همان لایه‌چینی بی‌بعد شده و در شکل 8 نشان داده شده است. برای حفظ وضوح تصاویر و رویت بهتر نتایج، از نمایش نتایج مربوط به همه لایه‌چینی‌ها اجتناب شده است و موارد مشابه حذف شده است.

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که برای انواع لایه‌چینی‌های مختلف، وجود گشودگی و افزایش سایز آن فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد و این موضوع مستقل از چینش لایه‌هاست. اما میزان اثرپذیری پوسته با لایه‌چینی‌های مختلف کاملاً متفاوت است. لایه‌چینی‌های $[0/90]_{2S}$ و $[\pm15]_{2S}$ کمترین اثرپذیری از وجود گشودگی را دارند و لایه‌چینی‌های $[\pm60]_{2S}$ و $[\pm45]_{2S}$ بیشترین کاهش فرکانس را در اثر وجود گشودگی تجربه می‌نمایند. دقت بیشتر در شکل‌های 7 و 8 نشان می‌دهد علیرغم تفاوت نتایج لایه‌چینی‌های مختلف، شباهت‌هایی نیز در رفتار کلی آنها نمایان است. میزان افت نمودارها به نحوی است که با افزایش ابعاد گشودگی، تفاوت آرایش‌های مختلف رفته رفته از بین می رود و در واقع برای گشودگی‌های بزرگ هندسه پوسته نقش تعیین‌کننده‌تری خواهد داشت. ضمن اینکه برای انواع لایه‌چینی‌های بررسی شده، گشودگی‌های نسبتاً کوچک ($c/L < 0.3$) تاثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پوسته نداشتند.

برای پوسته بدون گشودگی، لایه‌چینی $[\pm45]_{2S}$ بیشترین فرکانس طبیعی را در میان آرایش‌های بررسی شده داراست. اما وجود گشودگی این مسئله را تحت تاثیر قرار می‌دهد و همان‌گونه که بیان شد کاهش قابل توجهی در فرکانس طبیعی این لایه‌چینی در اثر وجود گشودگی مشاهده می‌شود. میزان این کاهش به نحوی است که پوسته‌هایی با لایه‌چینی $[\pm45/0/90]_S$، $[\pm45/0/0]_S$ و $[\pm30]_{2S}$ در حضور گشودگی‌هایی به ابعاد $c/L = 0.6$ و $c/L = 0.9$ فرکانس طبیعی بیشتری نسبت به پوسته با لایه‌چینی $[\pm45]_{2S}$ دارند. بنابراین، اگرچه در نگاه اول به نظر می‌رسد لایه‌چینی $[\pm45]_{2S}$ به سبب فرکانس طبیعی بالاتر انتخاب ایده‌آلی است اما برای پوسته دارای گشودگی، لایه‌چینی‌های $[\pm45/0/90]_S$ و $[\pm45/0/0]_S$ انتخاب‌های مناسب‌تری هستند؛ هرچند لایه‌چینی $[\pm45]_{2S}$ نیز همچنان انتخاب مناسبی است.

جدول 5 فرکانس طبیعی پوسته برای لایه‌چینی‌های مختلف (Hz)

Table 5 Natural frequency of shell with various layups (Hz)

$c/L = 0.9$	$c/L = 0.6$	$c/L = 0.3$	$c/L = 0$	لایه‌چینی
3576.80	4840.40	6494.10	6707.60	$[\pm45/0/90]_S$
3243.80	4521.90	6127.20	6299.40	$[\pm45/90/90]_S$
3686.60	4833.70	6513.70	6797.40	$[\pm45/0/0]_S$
3414.40	4730.10	6579.80	6813.70	$[\pm45]_{2S}$
3140.30	3974.70	4617.30	4674.30	$[0,90]_{2S}$
2928.70	4132.40	5867.80	6121.70	$[\pm60]_{2S}$
3635.90	4778.70	6402.40	6580.90	$[\pm30]_{2S}$
3453.30	4242.70	5107.80	5156.00	$[\pm15]_{2S}$

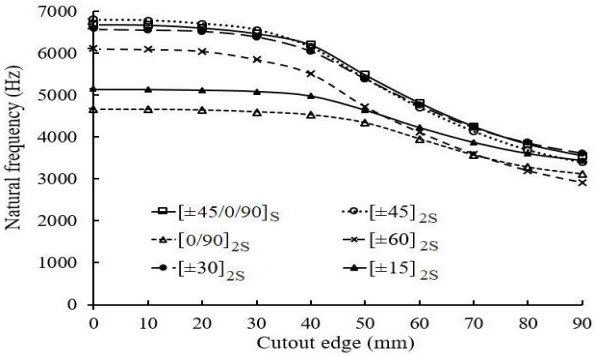

Fig. 7 Natural frequency variation for different shell layups

شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی برای لایه‌چینی‌های مختلف پوسته

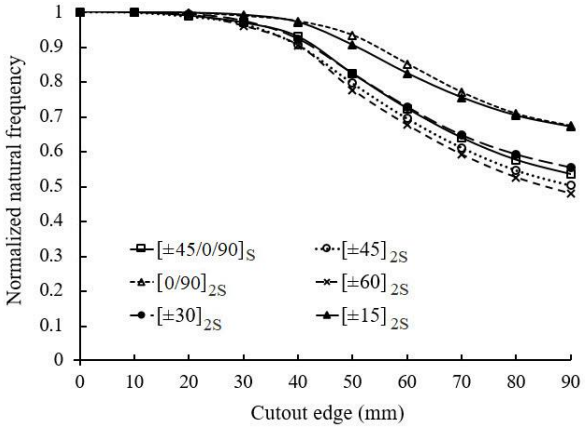

Fig. 8 Normalized natural frequency variation for different shell layups

شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برای لایه‌چینی‌های مختلف پوسته

6-3- اثر جهت گشودگی

در این قسمت جهت قرارگیری (طولی یا محیطی) گشودگی مستطیلی بررسی شده است. بدین منظور پنج حالت مختلف برای ابعاد گشودگی بررسی شده که در همه این موارد مساحت گشودگی‌ها برابر در نظر گرفته شده است. در اولین حالت اضلاع گشودگی با یکدیگر برابر در نظر گرفته شده است ($c_x = c_y$). در دو حالت دیگر، ضلع بزرگ گشودگی مستطیلی در راستای طولی فرض شده ($c_x = 4c_y$ و $c_x = 2c_y$)؛ و نهایتاً در دو حالت بعدی ضلع بزرگ مستطیل در راستای محیطی قرار گرفته است ($c_x = 0.5c_y$ و $c_x = 0.25c_y$).

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی پوسته را برای این پنج حالت نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که وجود گشودگی در راستای طولی پوسته موجب افت شدید در فرکانس طبیعی آن می‌شود. این در حالی است که گشودگی‌های محیطی به مراتب تاثیر کمتری بر رفتار فرکانسی پوسته دارند. البته باید توجه داشت که در این بررسی $L/R = 2$ و در نتیجه $L/2\pi R < 1$ است. بنابراین می‌توان ادعا کرد، زمانی که ضلع بزرگ‌تر گشودگی به موازات وجه کوچک‌تر پوسته قرار داشته باشد، گشودگی تاثیر بیشتری بر کاهش فرکانس طبیعی پوسته دارد.

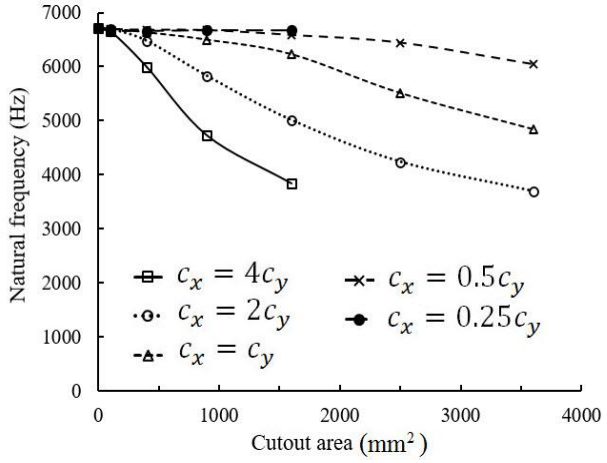

Fig. 9 Natural frequency variation for different cutout orientations ($L/R = 2$)

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی برای جهات مختلف گشودگی ($L/R = 2$)

این موضوع چندان هم دور از ذهن نیست. چرا که به عنوان نمونه، در حالت $c_x = 4c_y$ برای ایجاد گشودگی‌ای به مساحت $1600\,mm^2$، اضلاع گشودگی در راستای طولی و محیطی به ترتیب 80 و 20 میلی‌متر خواهند بود. وجود چنین گشودگی‌ای در پوسته‌ای به طول 100 میلی‌متر، به معنای از دست رفتن 80% طول پوسته است که موجب کاهش شدید سفتی پوسته و افزایش انعطاف‌پذیری آن شده و تاثیر به سزایی بر افت فرکانس ارتعاشی آن خواهد داشت.

برای بررسی بیشتر و بهتر این موضوع، حالت دیگری مورد بررسی قرار گرفت که در آن طول پوسته 500 میلی‌متر انتخاب شده است. بنابراین، $L/R = 10$ و در نتیجه $L/2\pi R > 1$ است. شکل 10 نتایج مربوط به این پوسته را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بر خلاف حالت قبل، گشودگی طولی کمترین تاثیر و گشودگی محیطی بیشترین تاثیر را بر کاهش فرکانس طبیعی پوسته دارد. بنابراین، مجدداً می‌توان نتیجه گرفت که گشودگی زمانی تاثیر بیشتری بر افت فرکانس طبیعی دارد که ضلع بزرگتر آن به موازات وجه کوچک‌تر پوسته باشد. شایان ذکر است که افت فرکانس در شکل 10 به مراتب کمتر از شکل 9 است. علت آن است که گشودگی محیطی به طول 80 میلی‌متر فقط 25% محیط پوسته را شامل می‌شود و تاثیر آن قطعاً کمتر از حالت قبلی است که گشودگی 80% طول پوسته را در برگرفته بود.

6-4- اثر محل قرارگیری گشودگی

به منظور مطالعه اثر محل قرارگیری گشودگی، یک گشودگی مربعی به ضلع 30 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. فاصله مرکز گشودگی از لبه پوسته بین 20 تا 80 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. فرکانس طبیعی به دست آمده در هر حالت نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون گشودگی بی‌بعد شده و نتایج در شکل 11 نمایش داده شده است.

همانگونه که انتظار می‌رفت نمودار به دست آمده کاملاً متقارن است. تحلیل نتایج روشن می‌سازد که محل قرارگیری گشودگی می‌تواند تا حدود 10% بر فرکانس طبیعی پوسته اثرگذار باشد. ضمن اینکه وجود گشودگی در نزدیکی لبه‌ها اثر بیشتری بر کاهش فرکانس طبیعی دارد. این مسئله کاملاً بر خلاف تاثیر گشودگی بر بار کمانش چنین پوسته‌هایی است که پیش از این در مرجع [21] مورد مطالعه قرار گرفته بود.

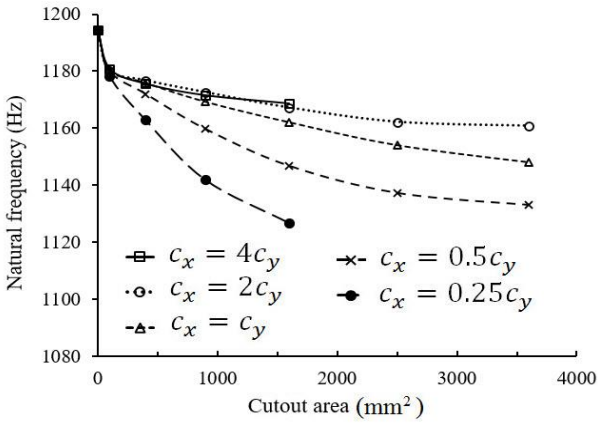

Fig. 10 Natural frequency variation for different cutout orientations ($L/R = 5$)

شکل 10 تغییرات فرکانس طبیعی برای جهات مختلف گشودگی ($L/R = 5$)

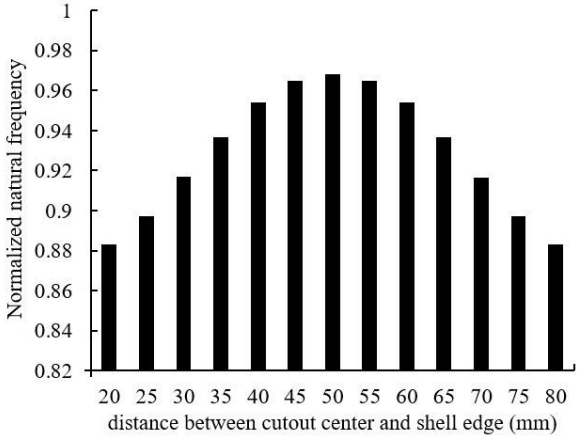

Fig. 11 Normalized natural frequency variation for different cutout location

شکل 11 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برای محل مختلف گشودگی

6-5- اثر طول و شعاع پوسته

برای بررسی اثر پارامترهای هندسی بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های با و بدون گشودگی در مرحله نخست تاثیر طول پوسته بر ارتعاشات پوسته بدون گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. پیش از این، مطالعه کمانش محوری پوسته‌ها نشان داده بود که برای پوسته‌های بلند $(L/R > 1)$طول پوسته بر بار کمانش موثر نیست اما برای پوسته‌های کوتاه $(L/R < 1)$ مسئله متفاوت است و بار بحرانی شدیداً به طول پوسته وابسته است [35]. بررسی حاضر نشان می‌دهد که تغییرات فرکانس طبیعی پوسته‌ها رفتار مشابهی ندارند. شکل 12 تغییرات فرکانس طبیعی به ازای تغییر نسبت طول به شعاع پوسته را برای چهار پوسته با شعاع‌های مختلف $(R = 25, 50, 100, 200\ mm)$ نشان می‌دهد. با افزایش طول پوسته انطاف‌پذیری سازه بیشتر شده و در واقع سفتی آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین مطابق انتظار، افزایش طول پوسته فرکانس طبیعی آن را کاهش می‌دهد. این روند کاهشی همواره وجود دارد و تفاوتی میان پوسته‌های بلند و کوتاه نیست. البته میزان اثرگذاری طول پوسته بر فرکانس طبیعی همواره یکسان نیست و با افزایش طول پوسته رفته رفته اثر آن کاهش می‌یابد اما هیچ‌گاه به طور کامل از میان نمی‌رود.

اگر هر یک از نمودارهای شکل 12 نسبت به فرکانس طبیعی پوسته‌ای با نسبت طول به شعاع مساوی یک، بی‌بعد شده و ترسیم شود؛ شکل 13 حاصل خواهد شد. ملاحظه می‌شود که مستقل از شعاع پوسته، تغییرات نسبت طول به شعاع پوسته اثر یکسانی بر فرکانس طبیعی پوسته دارد.

در مرحله بعد اثر طول و شعاع پوسته بر رفتار ارتعاشی پوسته دارای گشودگی مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور پوسته‌ای به طول 100 میلی‌متر و پنج شعاع مختلف 25، 50، 100، 200 و 400 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. در هر مرحله ابعاد گشودگی از 10 تا 90 میلی‌متر متغیر فرض شده است $(0.1 < c/L < 0.9)$. مطالعه مشابهی بر روی پوسته‌هایی با شعاع 100 میلی‌متر و طول‌های 25، 50، 100، 200 و 400 میلی‌متر انجام شد. در این قسمت نیز ابعاد گشودگی برای هر پوسته به نحوی انتخاب شد که نسبت c/L بین 0.1 تا 0.9 تغییر یابد. برای هر قسمت فرکانس طبیعی به دست آمده نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون گشودگی بی‌بعد شده است. نتایج به دست آمده در شکل‌های 14 و 15 ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که برای پوسته دارای گشودگی نیز با افزایش نسبت طول به شعاع (افزایش طول و یا کاهش شعاع) فرکانس طبیعی پوسته کاهش می‌یابد. ضمن اینکه اثر گشودگی بر کاهش فرکانس چنین پوسته‌هایی نیز بیشتر است.

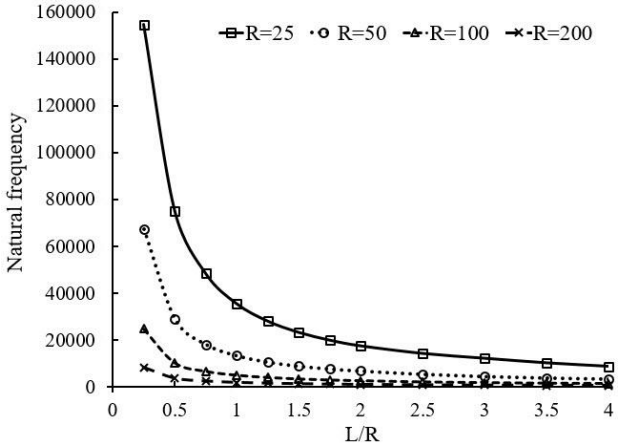

Fig. 12 Natural frequency variation for different shell lengths

شکل 12 تغییرات فرکانس طبیعی به ازای طول‌های مختلف پوسته

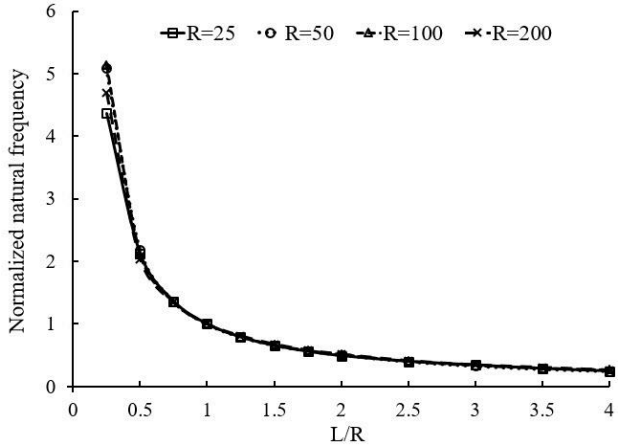

Fig. 13 Normalized natural frequency variation for different shell lengths

شکل 13 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به ازای طول‌های مختلف پوسته

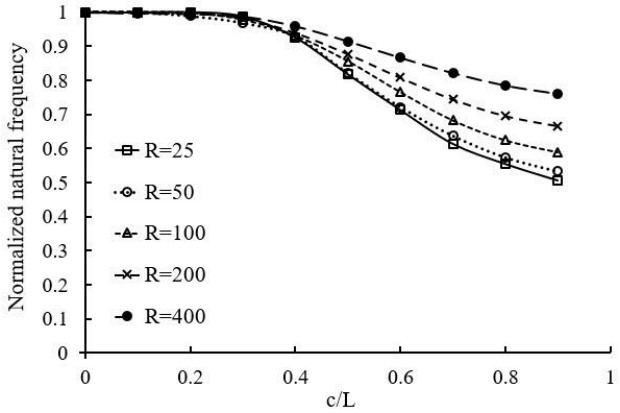

Fig. 14 Normalized natural frequency changes with cutout size for different shell radius (L=100 mm)

شکل 14 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به ازای ابعاد مختلف گشودگی برای پوسته با شعاع‌های مختلف (L=100 mm)

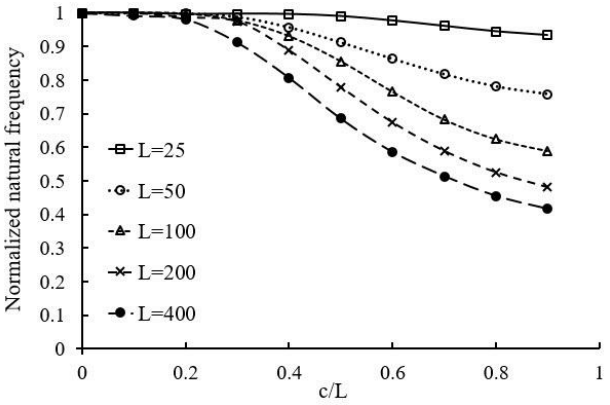

Fig. 15 Normalized natural frequency changes with cutout size for different shell lengths (R=100 mm)

شکل 15 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده به ازای ابعاد مختلف گشودگی برای پوسته با طول‌های مختلف (R=100 mm)

6-6- اثر ضخامت

در این قسمت اثر ضخامت پوسته بر رفتار ارتعاشی پوسته با و بدون گشودگی مورد مطالعه قرار گرفته است. شش ضخامت مختلف برای پوسته بررسی شده است. شکل 16 فرکانس طبیعی این پوسته‌ها را به ازای ابعاد مختلف گشودگی نشان می‌دهد. بررسی نتایج نشان می‌دهد که مطابق انتظار با افزایش ضخامت پوسته، سفتی سازه افزایش یافته که این امر موجب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. در شکل 17 نتایج هر پوسته نسبت به فرکانس طبیعی پوسته بدون گشودگی بی‌بعد شده است تا میزان اثرگذاری گشودگی بر رفتار فرکانسی پوسته دقیق‌تر بررسی شود. هرچند، ترند نمودارها برای ضخامت‌های مختلف پوسته مشابه یکدیگر است؛ اما مشخص است که میزان اثرگذاری گشودگی بر کاهش فرکانس طبیعی پوسته‌های نازک‌تر بیشتر از پوسته‌های ضخیم است و با افزایش ضخامت پوسته، از میزان اثرگذاری گشودگی کاسته می‌شود. این مسئله مشابه میزان اثرگذاری گشودگی بر بار کمانشی پوسته‌های با ضخامت مختلف است که پیش از این بررسی شده است [21].

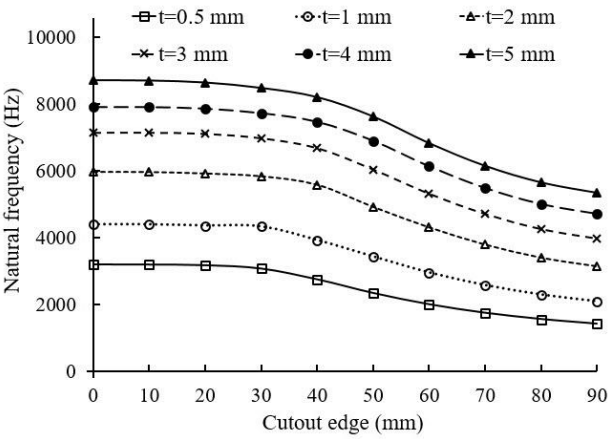

Fig. 16 Variation of natural frequency for different shell thickness

شکل 16 تغییرات فرکانس طبیعی برای ضخامت‌های مختلف پوسته

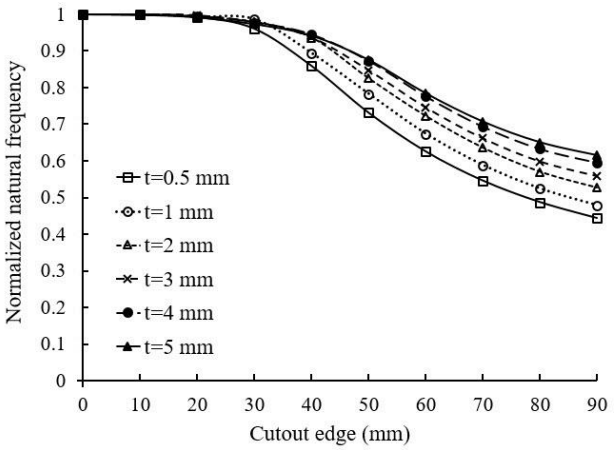

Fig. 17 Variation of normalized natural frequency for various shell thickness

شکل 17 تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شده برای ضخامت‌های مختلف پوسته

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با و بدون گشودگی مطالعه شده است. معادلات حاکم بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به گونه‌ای بیان شده که می‌توان با انتخاب مناسب پارامترهایی، آن را به تئوری دانل، لاو و یا ساندرز تبدیل نمود. برای تحلیل پوسته دارای گشودگی سطح پوسته به تعداد مناسبی المان تقسیم شده است. این المان‌بندی به نحوی صورت گرفته که شرایط مرزی و بارگذاری در لبه‌های هر المان یکنواخت باشد. در هر المان، معادلات حاکم به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در هر دو راستای طولی و محیطی گسسته شده و با مونتاژ این معادلات یک دستگاه معادلات جبری تشکیل شده است. همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی در لبه‌های پوسته و گشودگی و نیز گسسته‌سازی شرایط سازگاری در مرز مشترک المان‌های مجاور نیز به کمک همین روش انجام شده است. با اعمال این شرایط و حل مسئله مقدار ویژه حاصل شده، فرکانس طبیعی پوسته تعیین شده است. تمامی مراحل یاد شده در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است.

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده، نتایج پوسته با و بدون گشودگی با نتایج موجود در مراجع و نیز نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. این مقایسه کارایی این روش و دقت بالای نتایج آن را در عین هزینه محاسباتی پایین به خوبی نشان می‌دهد. در گام بعد، به کمک این روش اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های کامپوزیتی با و بدون گشودگی مطالعه شده است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که گشودگی‌های نسبتاً کوچک ($c/L < 0.3$) تاثیر چندانی بر فرکانس طبیعی پوسته ندارند. برای گشودگی‌های بزرگ‌تر فرکانس طبیعی پوسته تقریباً با شیب ثابتی کاهش می‌یابد. این مسئله مستقل از جنس و لایه‌چینی است. بررسی جهت و محل قرارگیری گشودگی نشان داد که قرارگیری ضلع بزرگ‌تر گشودگی به موازات وجه کوچک‌تر پوسته موجب افت شدید در فرکانس طبیعی آن می‌شود. ضمن اینکه وجود گشودگی در نزدیکی لبه‌ها اثر بیشتری بر کاهش فرکانس طبیعی دارد. بررسی پارامترهای هندسی پوسته نشان می‌دهد که هیچ یک از این پارامترها نمی‌توانند مستقلاً رفتار فرکانسی پوسته را پیش‌بینی نماید. اما به طور کلی کاهش نسبت L/R و افزایش ضخامت پوسته، فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد. ضمن اینکه این تغییرات

اثر وجود گشودگی بر فرکانس طبیعی را نیز تقلیل می‌دهد. به عبارت دیگر وجود گشودگی بر پوسته‌های بلندتر و نازک‌تر موثرتر است و فرکانس طبیعی آنها را بیشتر کاهش می‌دهد.

8- مراجع

[1] Bellman, R. and Casti, J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration," Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.

[2] Bellman, R., Kashef, B. and Casti, J., "Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations," Journal of computational physics, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.

[3] Bert, C. W., Jang, S. K. and Striz, A. G., "Two New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components," AIAA journal, Vol. 26, No. 5, pp. 612-618, 1988.

[4] Striz, A. G., Weilong, C. and Bert, C. W., "Static Analysis of Structures by the Quadrature Element Method (Qem)," International Journal of Solids and Structures, Vol. 31, No. 20, pp. 2807-2818 ,1994.

[5] Wang, X. and Gu, H., "Static Analysis of Frame Structures by the Differential Quadrature Element Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, No. 4, pp. 759-772, 1997.

[6] Liu, F.-L. and Liew, K., "Static Analysis of Reissner-Mindlin Plates by Differential Quadrature Element Method," Journal of Applied Mechanics, Vol. 65, pp. 705-710, 1998.

[7] Liu, F. L., "Differential Quadrature Element Method for Static Analysis of Shear Deformable Cross- Ply Laminates," International journal for numerical methods in engineering, Vol. 46, No. 8, pp. 1203-1219, 1999.

[8] Liu, F.-L. and Liew, K., "Vibration Analysis of Discontinuous Mindlin Plates by Differential Quadrature Element Method," Journal of vibration and acoustics, Vol. 121, No. 2, pp. 204-208, 1999.

[9] Liu, F.-L. and Liew, K., "Analysis of Vibrating Thick Rectangular Plates with Mixed Boundary Constraints Using Differential Quadrature Element Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, No. 5, pp. 915-934, 1999.

[10] Liu, F.-L., "Differential Quadrature Element Method for Buckling Analysis of Rectangular Mindlin Plates Having Discontinuities," International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, No. 14, pp. 2305-2321, 2001.

[11] Zhang, L., Xiang, Y. and Wei, G., "Local Adaptive Differential Quadrature for Free Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Various Boundary Conditions," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 48, No. 10, pp. 1126-1138, 2006.

[12] Redekop, D., "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Inhomogeneous Thick Orthotropic Shells of Revolution Using Differential Quadrature," Journal of sound and vibration, Vol. 291, No. 3-5, pp. 1029-1040, 2006.

[13] Haftchenari, H., Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R. and Sharma, C., "Dynamic Analysis of Composite Cylindrical Shells Using Differential Quadrature Method (Dqm)," Composite Structures, Vol. 78, No. 2, pp. 292-298, 2007.

[14] Malekzadeh, P., Farid, M. and Zahedinejad, P., "A Three-Dimensional Layerwise-Differential Quadrature Free Vibration Analysis of Laminated Cylindrical Shells," International Journal of Pressure Vessels and Piping ,Vol. 85, No. 7, pp. 450-458, 2008.

[15] Alibeigloo, A., "Static and Vibration Analysis of Axi-Symmetric Angle-Ply Laminated Cylindrical Shell Using State Space Differential Quadrature Method," International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 86 ,No. 11, pp. 738-747, 2009.

[16] Kani, A. and Alibeigloo, A., "Numerical Solution for Vibration of Cylindrical Laminated Shell with Piezoelectric Layer," In Persian, Journal of Simulation and Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering (Journal of Solid Mechanics in Engineering), Vol. 6, No. 1, pp. 55-63, 2013.

[17] Farshidian far, A. and Golzari, M., "Study the Free Vibration and Stability of Fluid-Conveying Carbon Nanotubes Using Cylindrical Shell Model," In Persian, Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME, Vol. 15, No. 2, pp. 73-99, 2013.

[18] Kamarian, S., Bodaghi, M. and Shakeri, M., "Free Vibration Analysis of Sandwich Cylindrical Shells with Functionally Graded Material Using 3d Elasticity Theory," In Persian, ISME 2014, Iran, Ahvaz, 2014.

[19] Allahkarami, F. and saryazdi, M. G., "Free Vibration Analysis of Thin and Relatively Thick Two Dimensional Functionally Graded Cylindrical Shell Based on First Order Shear Deformation Theory," In Persian, Journal of Mechanical Engineering of Tabriz University ,Vol. 46, No. 1, pp. 15-28, 2016.

[20] Masoumi, A. A., Rahimi, G. H. and Liaghat, G. H., "The Use of the Differential Quadrature Method in the Analysis of Composite Metal Cylindrical Vessel under Dynamical Load," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 319-330, 2017.

[21] Talezadehlari, A. and Rahimi, G. H., "Buckling Analysis of Perforated Compiste Cylindrical Shell Using Generalized Differential Quadrature Method (Gdqm)," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 11, pp. 385-396, 2018.

[22] Sahu, S. and Datta, P., "Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, No. 11, pp. 1245-1253, 2003.

[23] Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," Journal of Applied mechanics, Vol. 12, pp. 69-A77, 1945.

[24] Mindlin, R. D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, 1951.

[25] Wittrick, W., "Analytical, Three-Dimensional Elasticity Solutions to Some Plate Problems, and Some Observations on Mindlin's Plate Theory," International Journal of Solids and Structures, Vol. 23, No. 4, pp. 441-464, 1987.

[26] Malik, M. and Bert, C. W., "Three-Dimensional Elasticity Solutions for Free Vibrations of Rectangular Plates by the Differential Quadrature Method," International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, No. 3-4, pp. 299-318, 1998.

[27] Quan, J. and Chang, C., "New Insights in Solving Distributed System Equations by the Quadrature Method—I. Analysis," Computers & Chemical Engineering, Vol. 13, No. 7, pp. 779-788, 1989.

[28] Quan, J. and Chang, C.-T., "New Insights in Solving Distributed System Equations by the Quadrature Method—Ii. Numerical Experiments," Computers & Chemical Engineering, Vol. 13, No. 9, pp. 1017-1024, 1989.

[29] Shu, C., "Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation," Ph.D Thesis, Glasgow, 1991.

[30] Sherbourne, A. and Pandey, M., "Differential Quadrature Method in the Buckling Analysis of Beams and Composite Plates," Computers & Structures, Vol. 40, No. 4, pp. 903-913, 1991.

[31] Shu, C., "Differential Quadrature and Its Application in Engineering", First Ed. Springer Science & Business Media, pp. 110-118, 2000.

[32] Reddy, J. N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis," Second ed., CRC press, pp. 479-480, 2003.

[33] Qatu, M. S., "Vibration of Laminated Shells and Plates" 1st ed., Elsevier, pp. 272-278, 2004.

[34] Hahn, H. T. and Tsai, S. W., "Introduction to Composite Materials", First Ed., CRC Press, pp. 19, 1980.

[35] Talezadehlari, A., "Analytical and Experimental Buckling Analysis of Stiffened Composite Cylindrical Shell with Cutout," In Persian, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Iran, 2017.