



تحلیل ارتعاش آزاد الکترومکانیکی نانوورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده

کوروش خورشیدی^{۱*}، علی سیاهپوش^۲، ابوالفضل فلاح^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

۲- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

*k-khorshidi@araku.ac.ir، ۳۸۱۵۶۸۳۴۹ صندوق پستی

چکیده	اطلاعات مقاله
هدف این مقاله مطالعه ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک تحت بار الکترومکانیکی شامل نیروی محوری و ولتاژ خارجی بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده نمایی و مثلثاتی به همراه تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده است. در تئوری غیرمحلّی تنش در هر نقطه تابعی از کرنش در تمامی نقاط محیط می‌باشد. این تئوری اهمیت بسزایی در ساختارهای با ابعاد میکرو و نانو دارد. در تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده نمایی و تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده مثلثاتی، توابع نمایی و مثلثاتی در راستای ضخامت، جهت در نظر گرفتن تأثیرات تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی بکار رفته است. از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی جهت در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول کوچک نانو ورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک استفاده شده است. نانو ورق مرکب پیزوالکتریک مورد مطالعه در این تحلیل ورق مستطیلی ساخته شده از ماده مرکب پیزوالکتریک PZT 4 متشکل از ترکیبات بلوری سرب، زیرکونیم و تیتانیم جهت دست‌یابی به خواص فلز-سرامیک و همچنین خاصیت پیزوالکتریک می‌باشد. با بکارگیری اصل همپلتون معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش نانو ورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک به دست آمده و برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی از حل دقیق ناوبر استفاده شده است. در نهایت تأثیر پارامتر مقیاس نانو، نیروهای محوری، ولتاژ خارجی و نسبت‌های هندسی روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شش مد ارتعاشی اول نانو ورق مستطیلی مرکب پیزوالکتریک مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.	دریافت: ۹۵/۵/۲۱ پذیرش: ۹۵/۸/۱۶
	کلیدواژگان: نانو ورق مرکب پیزوالکتریک ارتعاش آزاد غیرمحلّی تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی

Electro-Mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories

Korosh Khorshidi*, Ali Siahpush, Abolfazl Fallah

1- Department of Mechanical Engineering, University of Arak, Arak, Iran

*P.O.B. 381568349, Arak, Iran, k-khorshidi@araku.ac.ir

Keywords

Composite piezoelectric nanoplate
Free vibration
Nonlocal
Exponential and trigonometric shear deformation

Abstract

The aim of this paper is to study the free vibration of composite rectangular piezoelectric nanoplate subjected to an electro-mechanical loading includes a biaxial force and an external voltage based on exponential shear deformation theory and trigonometric shear deformation theory in conjunction with the nonlocal elasticity theory under the simply supported boundary condition. The nonlocal theory states that stress at a point is a function of strains at all points in the continuum. The nonlocal elasticity theory becomes significant for small length scale in micro and nanostructures. In exponential shear deformation theory and trigonometric shear deformation theory, exponential and trigonometric functions are used in terms of thickness coordinate to include the effect of transverse shear deformation and rotary inertia. Nonlocal elasticity theory is employed to investigate effect of small scale on natural frequency of composite rectangular piezoelectric nanoplate. It is assumed that the composite rectangular piezoelectric nanoplate made of PZT 4 composite piezoelectric material includes crystal compounds of Pb, Zr and Ti to achieve metal-ceramic and piezoelectric properties. The governing differential equations of the vibration of the composite rectangular piezoelectric nanoplate are derived by using the Hamilton's principle, which are then solved by using the Navier method to obtain the natural frequencies of the composite rectangular piezoelectric nanoplate. The detailed parametric study is conducted to discuss the influences of the nonlocal parameter, biaxial force external electric voltage and geometrical ratios on the first six nondimensional frequencies of the composite rectangular piezoelectric nanoplate.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید: Please cite this article using:

Khorshidi, K. Siahpush, A. and Fallah, A., "Electro-Mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 2, pp. 151-160, 2017.

۱- مقدمه

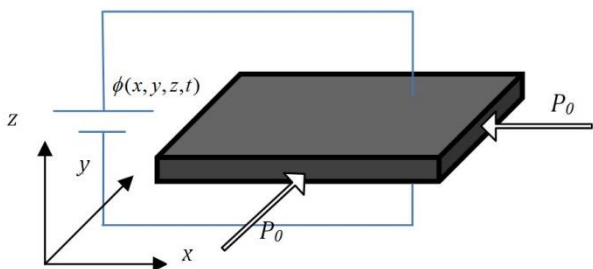
مواد مرکب پیزوالکتریک با توجه به ویژگی تبدیل انرژی‌های الکتریکی و مکانیکی به هم کاربرد وسیعی در حس‌گرها و عملگرها جهت کنترل سیستم‌های مختلف یافته‌اند لذا بررسی رفتار این مواد جایگاه خاصی در پژوهش‌های امروزه دارد. در سالیان اخیر با گرایش به کوچک‌سازی دستگاه‌ها در صنایع مختلف مواد مرکب پیزوالکتریک با هدف دستیابی به خواص توامان فلز - سرامیک از قبیل ترکیبات غیرآلی نانو ساختارهای آن‌ها مانند نانو سیم‌ها، نانو لوله‌ها، نانو حلقه‌ها و نانو تسمه‌ها مورد توجه بسیاری قرار گرفته‌اند. مواد مرکب پیزوالکتریک حول محوری که در جهت آن پلاریزه می‌شوند دارای خصوصیات ایزوتروپیک می‌باشند [۱]. تحلیل روی نانو سیم‌ها و نانو تسمه‌های توسط وانگ [۲] انجام شده است. پارک و همکاران [۳] لایه فیلم نازک باریک -تیتانیوم را در نانو ژئراتورها بررسی کرده‌اند. مطالعه اثر شکل و ساختار نانو سیم اکسید روی را بر روی مقاومت لایه‌ای نانو سیم پوشیده شده با کربن موضوع تحقیقات گالان و همکاران [۴] بوده است. نانو ساختار پیزوالکتریک یکی از شاخه‌های فناوری امروزه با کنترل ابعاد که ممکن است در حد چند نانومتر باشد است. در چنین مقیاس‌هایی اثر اندازه در رفتار ماده موثر است که با توجه به آزمایش‌های مختلف و شبیه سازی اتمی آشکار می‌گردد. تئوری محیط‌های پیوسته کلاسیک قادر به تجزیه و تحلیل نانو ساختارها نیست و بدین منظور نظریه‌های توسعه یافته دیگری از قبیل گرادیان کرنش [۵] و تنش کوپل [۶] و غیر محلی [۷-۹] برای در نظر گرفتن اثر اندازه بکار می‌روند، در این زمینه می‌توان به تحلیل ارتعاش آزاد و خمش نانو تیر تیموشنکو پیزوالکتریک هدفمند با بکارگیری تئوری گرادیان کرنش توسط لی و همکاران [۱۰] اشاره نمود. در تئوری کلاسیک محلی، بین تنش و کرنش در هر نقطه یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که حالت تنش یک نقطه فقط تابعی منحصر به فرد از کرنش در همان نقطه است. در حالی که در مدل الاستیسیته غیرمحلی حالت تنش در یک نقطه خاص تابعی از حالت کرنش در تمام نقاط جسم است. بر این پایه مطالعات و تحقیقات گسترده‌ای بر روی نانو تیرها، نانو ورق‌ها و نانو پوسته‌ها صورت گرفته است.

الظهرانی و همکاران [۱۱] خمش ترمومکانیکی نانو ورق روی بستر الاستیک در محیط مرطوب را دستمایه تحقیق قرار داده‌اند، تحلیل خمش غیر خطی نانو ورق‌های اورتوتروپیک در قالب الاستیک از مطالعات گلمکانی و رضاطلب [۱۲] بوده است. شیمشک و یورتجو [۱۳] حل دقیقی برای خمش و کمانش نانو تیرهای هدفمند بر پایه تئوری تیر تیموشنکو ارائه داده‌اند. همچنین حل دقیق ارتعاش آزاد نانو ورق‌های مستطیلی بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول از کارهای حسینی هاشمی و همکاران [۱۴] می‌باشد. صبحی [۱۵] پوسته‌های چند لایه گرافن تحت شرایط مرزی مختلف را با استفاده از تئوری ورق دو متغیره مورد تحلیل قرار داده است. وانگ و همکاران [۱۶] انتشار موج در نانو ساختارهای لایه‌ای متناوب بررسی نموده است. اگرچه مطالعات ذکر شده مربوط به نانو ساختارهای کلاسیک بوده‌اند اما اخیراً این تئوری برای توضیح رفتار نانو ساختارهای پیزوالکتریک وابسته به اندازه بسط داده شده است. لیائولینگ و همکاران ارتعاش آزاد، ارتعاش غیر خطی و پساکمانش ترمومکانیکی را در نانو تیرهای پیزوالکتریک بر پایه تئوری تیر تیموشنکو و بکارگیری تئوری غیر محلی بررسی کرده‌اند [۱۷-۱۹]. آرنی و همکاران [۲۰-۲۳] مطالعات خود را در زمینه رفتار کمانشی، خمشی و ارتعاشات غیر خطی نانو لوله‌های نیتريد برون با استفاده از مدل‌های تیر، ورق

و پوسته انجام داده‌اند. لیو و همکاران [۲۴] حل دقیق ارتعاش آزاد نانو ورق مرکب پیزوالکتریک بر پایه تئوری ورق کلاسیک به همراه اثرات ضریب مقیاس نانو و بارهای ترمومکانیکی روی فرکانس‌های طبیعی نانو ورق مرکب پیزوالکتریک ارائه داده‌اند. همچنین لیائولینگ و همکاران [۲۵] نیز حل تحلیلی برای نانو ورق مرکب پیزوالکتریک بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از تئوری غیرمحلی و تأثیر مقیاس اندازه و بارهای ترمومکانیکی را روی فرکانس‌های طبیعی بررسی نمودند. در تئوری‌های جابجایی ورق کلاسیک و تئوری‌های مشابه توزیع تنش و کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت در نظر گرفته نمی‌شود و یا بصورت تابع خطی از ضخامت ورق فرض می‌گردد. اما در تئوری‌های جدید برای مدل سازی این توزیع و ارضای شرایط سطح عاری از تنش، از توابع دقیق تری بهره گرفته می‌شود که از آن جمله می‌توان به دو توزیع نمایی و مثلثاتی اشاره نمود. محققان بسیاری جهت توصیف رفتار ساختارها از این تئوری‌ها بهره گرفته‌اند که نمونه‌هایی قابل ذکر هستند. صیاد و گوگال خمش و ارتعاش آزاد در ورق‌های ایزوتروپیک ضخیم بر پایه تئوری تغییر شکل برشی نمایی را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۲۶]. آن‌ها همچنین تحلیل تنش در ورق‌های لایه‌ای ضخیم را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی به انجام رسانده‌اند [۲۷]. تحلیل ارتعاشات پیچشی ورق ضخیم با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی نیز توسط خارده [۲۸] صورت گرفته است. تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی برای ورق‌های ایزوتروپیک لایه‌ای مرکب و ساندویچی توسط سوآرز [۲۹] ارائه گردیده است. تونسی و همکاران [۳۰] در مورد خمش ترمومکانیک ورق‌های ساندویچی هدفمند با استفاده از تئوری مثلثاتی تحقیق کرده‌اند، توسعه تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق مرکب متقارن لایه‌ای از پژوهش‌های رنگو و همکاران [۳۱] می‌باشد. خورشیدی و فلاح [۳۲] به بررسی کمانش نانورق هدفمند با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی پرداخته‌اند، همچنین خورشیدی و همکاران [۳۳] تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق هدفمند را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی انجام داده‌اند.

در این تحقیق مساله ارتعاش آزاد نانو ورق مرکب پیزوالکتریک PZT 4 متشکل از ترکیبات بلوری سرب، زیرکونیم و تیتانیوم جهت بهره بردن از خواص فلزی و سرامیکی و همچنین خاصیت پیزوالکتریک تحت بارهای الکترومکانیکی شامل نیروی محوری و ولتاژ الکتریکی خارجی، با در نظر گرفتن توزیع نمایی و مثلثاتی تنش برشی و کرنش برشی بررسی خواهد شد که هدف آن به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. در پژوهش‌های گذشته از توزیع تنش برشی و کرنش برشی صرف نظر شده و یا بصورت تابع خطی لحاظ گردیده‌اند که با توجه به غیرخطی بودن این توزیع در این مقاله با اعمال دو توزیع نمایی و مثلثاتی و مقایسه نتایج حاصل شده از این دو تابع توزیع با سایر منابع موجود پاسخ‌های دقیقتر نسبت به سایر پژوهش‌های انجام شده به دست آمده است. برای این منظور از روش تحلیلی ناوبر بهره‌گرفته شده است که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را در بر می‌گیرد. تئوری حاکم بر مساله تئوری‌های اصلاح شده تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی است و برای توصیف تأثیرات مقیاس کوچک بر ارتعاش خارج از صفحه نانو ورق مرکب پیزوالکتریک از تئوری غیرمحلی آرینگن استفاده شده است. معادلات حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. نتایج حاصل از این مقاله با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر اعتبارسنجی شده و در نهایت تأثیر پارامتر مقیاس نانو، نیروهای محوری، ولتاژ الکتریکی خارجی و

روابط جابه‌جایی هر نقطه در سه راستای مختصات x ، y و z به صورت روابط (۷) می‌باشند.



شکل ۱ نانورق مرکب پیزوالکتریک PZT4

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z)\xi(x, y, t) \\ \tilde{V}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z)\psi(x, y, t) \\ \tilde{W}(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (7)$$

توابع u ، v و w جابه‌جایی‌های لایه میانی در جهات x ، y و z می‌باشند. همچنین ξ و ψ اینرسی‌های چرخشی به ترتیب حول محوره‌های x ، y و z در زمان t هستند. تابع $f(z)$ شکل توزیع تنش‌ها و کرنش‌های برشی در راستای ضخامت h در نانو ورق مرکب پیزوالکتریک است.

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (8)$$

$$f(z) = \frac{h}{z} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (9)$$

علاوه بر میدان جابه‌جایی برای تحلیل، خواص الکتریکی بایستی معادله مکسول را نیز مطابق رابطه (۱۰) ارضا کنند.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (10)$$

مطابق شکل ۱ روی لایه‌های بالا و پایین نانورق مرکب پیزوالکتریک الکترودهایی جهت اعمال ولتاژ قرار دارد که توزیع پتانسیل الکتریکی روی الکترودها ثابت می‌باشد. هنگامی که اتصال الکترودها روی دو وجه نانورق مرکب پیزوالکتریک برقرار می‌شود توزیع پتانسیل الکتریکی صفر می‌شود [۳۶-۳۴]. جهت به دست آوردن جابه‌جایی‌های الکتریکی در معادله مکسول تابع توزیع پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی نانورق مرکب پیزوالکتریک Φ به صورت ترکیب دو تابع خطی و کوسینوسی [۳۷] در نظر گرفته شده است.

$$\Phi_{(x,y,z,t)} = -\cos(\gamma z) \varphi_{(x,y,t)} + \frac{2zV_0}{h} \quad (11)$$

در این رابطه $\gamma = \frac{\pi}{h}$ و V_0 ولتاژ خارجی اعمال شده به نانورق مرکب پیزوالکتریک و همچنین $\varphi_{(x,y,t)}$ تغییرات فضا زمان پتانسیل الکتریکی در لایه میانی است. با اتصال الکترودهای بالا و پایین پتانسیل الکتریکی در دو لایه بالا و پایین نانورق مرکب پیزوالکتریک صفر می‌شود. طبق تئوری‌های جابه‌جایی تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی کرنش‌های خطی در نانورق مرکب پیزوالکتریک از روابط (۱۵) تا (۱۲) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (12)$$

نسبت‌های ابعادی روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شش مد ارتعاشی اول نانو ورق مرکب پیزوالکتریک مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲- تئوری الاستیسیته غیر محلی

در مدل الاستیسیته غیرمحلی تنش در یک نقطه خاص تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است و طبق تئوری اتمی دینامیک ساختار شبکه‌ای و آزمایشات مختلف قابل تشریح است و می‌تواند توضیح کافی از برخی از پدیده‌های مربوط به مقیاس اتمی و مولکولی مانند ارتعاش با فرکانس بالا و پراکندگی موج ارائه دهد. با صرف نظر از اثرات نیروهای حجمی روابط انتگرالی (۱) و (۲) بیان‌گر تئوری غیرمحلی با در نظر گرفتن ماده پیزوالکتریک می‌باشد [۷-۹].

$$\sigma_{ij}(X) = \int_V \alpha(|\hat{X} - X|, \mu) [C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\hat{X}) - e_{kij} E_k(\hat{X})] d\hat{X} \quad (1)$$

$$D_i(X) = \int_V \alpha(|\hat{X} - X|, \mu) [e_{ikl} \varepsilon_{kl}(\hat{X}) + d_{ik} E_k(\hat{X})] d\hat{X} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$E_i = -\nabla \Phi \quad (4)$$

در روابط (۱) تا (۴)، μ حجم ماده مرکب پیزوالکتریک، σ_{ij} تانسور تنش، ε_{ij} تانسور کرنش، D_i جابه‌جایی الکتریکی و E_i میدان الکتریکی می‌باشند. همچنین C_{ijkl} ، e_{kij} ، d_{ik} و Φ به ترتیب ماتریس ضرایب ساختاری، ثوابت پیزوالکتریک، ثوابت دی‌الکتریک و تابع پتانسیل الکتریکی هستند. $\alpha(|\hat{X} - X|, \mu)$ تابع قدرمطلق غیرمحلی است که با در نظر گرفتن روابط و ترکیب آن‌ها تأثیرات در هر نقطه به وسیله کرنش محلی در نقطه مرجع به دست می‌آید. $|\hat{X} - X|$ فاصله بین نقطه X و نقطه دلخواه \hat{X} می‌باشد. $\mu = e_0 a / l$ می‌باشد که در آن a طول باند شبکه فضایی، l طول مشخصه خارجی و e_0 نیز پارامتر ثابتی است که به جنس ماده و مواد تشکیل‌دهنده آن بستگی دارد و با استفاده از نتایج تجربی برای نانوساختارها تعیین می‌شود. روابط انتگرالی را می‌توان به صورت دیفرانسیلی (۵) و (۶) بازنویسی کرد.

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (5)$$

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + d_{ik} E_k \quad (6)$$

∇^2 عملگر لاپلاسین و ضریب مقیاس $(e_0 a)$ مبین اثرات اندازه روی پاسخ ساختارها در ابعاد نانو می‌باشد.

۳- تحلیل ارتعاش نانورق مرکب پیزوالکتریک

ارتعاش آزاد نانو ورق مرکب پیزوالکتریک تحت بارهای الکترومکانیکی بر پایه تئوری غیر محلی مورد تحلیل قرار گرفته است. شرایط نانو ورق مرکب مستطیلی پیزوالکتریک به طول l_a ، عرض l_b و ضخامت h در مختصات مستطیلی $(0 \leq x \leq l_a, 0 \leq y \leq l_b, -h/2 \leq z \leq h/2)$ مطابق شکل ۱ نشان داده شده است.

نانورق مرکب پیزوالکتریک تحت نیروهای خارجی (فشاری و کششی) و پتانسیل الکتریکی Φ در راستای ضخامت مورد اعمال دوقطبی موازی با محور z قرار می‌گیرد. طبق تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی [۳۳، ۳۲]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u - \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v - \frac{\partial P_x}{\partial x} \delta \xi \\
 & -\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} \delta \psi - \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \delta \xi - \frac{\partial P_y}{\partial y} \delta \psi + Q_{xz} \delta \xi + Q_{yz} \delta \psi \\
 & + \frac{\partial D_x}{\partial x} \cos(\gamma z) \delta \varphi + \frac{\partial D_y}{\partial y} \cos(\gamma z) \delta \varphi \\
 & + D_z \gamma \sin(\gamma z) \delta \varphi \, dV
 \end{aligned}$$

برای نانورق مرکب پیزوالکتریک انرژی جنبشی نیز از رابطه (۲۸) به دست می‌آید.

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) \, dV \quad (28)$$

که پس از اعمال تغییرات و جایگذاری روابط (۷) در رابطه (۲۸) داریم.

$$\begin{aligned}
 \delta T = \frac{1}{2} \int_V & \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_4 \delta v - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_6 \delta \psi - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_4 \delta u \right. \\
 & - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_6 \delta \xi - \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial x} I_5 \delta w - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_1 \delta u - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_1 \delta v \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_1 \delta w - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} I_2 \delta w - \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial y} I_2 \delta w \\
 & + \frac{\partial^3}{\partial t} I_2 \delta u + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_2 \delta v + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} I_3 \delta w \\
 & + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} I_3 \delta w - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_4 \delta \xi - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_4 \delta \psi \\
 & \left. + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} I_5 \delta \xi + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_5 \delta \psi - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial y} I_5 \delta w \right) dV
 \end{aligned} \quad (29)$$

در روابط (۲۷) و (۲۹) ضرایب N, P و Q معرف نیروها، M گشتاورهای خمشی وارد شده به نانورق مرکب پیزوالکتریک و I اثرات ناشی از اینرسی می‌باشند و با استفاده از روابط (۳۰) تا (۳۳) محاسبه می‌شوند.

$$\{N_x, N_y, N_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} dz \quad (30)$$

$$\{M_x, M_y, M_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} z dz \quad (31)$$

$$\{P_x, P_y, P_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\} f(z) dz \quad (32)$$

$$\{Q_{xz}, Q_{yz}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} \frac{df(z)}{dz} dz \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 & (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \\
 & = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) \, dz
 \end{aligned} \quad (34)$$

ρ در رابطه (۳۴) چگالی معادل ماده مرکب پیزوالکتریک است. نیروهای خارجی اعمال شده روی نانورق مرکب پیزوالکتریک به صورت نیروی‌های کششی و فشاری P_0 و نیروهای ناشی از ولتاژ خارجی V_0 در نظر گرفته شده است و کار ناشی از این نیروها به صورت رابطه (۳۵) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 W_f = & \frac{1}{2} \int_A \left[(F_{Px} + F_{Ex}) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (F_{Py} + F_{Ey}) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{df(z)}{dz} \xi, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{df(z)}{dz} \psi \quad (15)$$

با استفاده از رابطه (۱۱) مولفه‌های میدان الکتریکی به صورت رابطه (۱۶) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 E_x = & -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \cos(\gamma z) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
 E_y = & -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \cos(\gamma z) \frac{\partial \varphi}{\partial y}
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\gamma \sin(\gamma z) \varphi - \frac{2V_0}{h}$$

برای ساختارهای نانورق مرکب پیزوالکتریک روابط تنش و جابه‌جایی الکتریکی از معادلات (۵)، (۶) و (۱۶) به شکل روابط (۱۷) تا (۲۴) بسط داده می‌شوند.

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{xx} = \tilde{c}_{11} \varepsilon_{xx} + \tilde{c}_{12} \varepsilon_{yy} - \tilde{e}_{31} E_z \quad (17)$$

$$\sigma_{yy} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{yy} = \tilde{c}_{12} \varepsilon_{xx} + \tilde{c}_{11} \varepsilon_{yy} - \tilde{e}_{31} E_z \quad (18)$$

$$\sigma_{xz} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{xz} = 2\tilde{c}_{44} \varepsilon_{xz} - \tilde{e}_{15} E_x \quad (19)$$

$$\sigma_{yz} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{yz} = 2\tilde{c}_{44} \varepsilon_{yz} - \tilde{e}_{15} E_y \quad (20)$$

$$\sigma_{xy} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{xy} = 2\tilde{c}_{66} \varepsilon_{xy} \quad (21)$$

$$D_x - (e_0 a)^2 \nabla^2 D_x = 2\tilde{e}_{15} \varepsilon_{xz} + \tilde{d}_{11} E_x \quad (22)$$

$$D_y - (e_0 a)^2 \nabla^2 D_y = 2\tilde{e}_{15} \varepsilon_{yz} + \tilde{d}_{11} E_y \quad (23)$$

$$D_z - (e_0 a)^2 \nabla^2 D_z = \tilde{e}_{31} \varepsilon_{xx} + \tilde{e}_{31} \varepsilon_{yy} + \tilde{d}_{33} E_z \quad (24)$$

در روابط (۱۷) تا (۲۴) \tilde{c}_{ij} ، \tilde{e}_{ij} و \tilde{d}_{ij} به ترتیب ضرایب معادل ساختاری، پیزوالکتریک و دی الکتریک نانورق مرکب پیزوالکتریک در شرایط تنش صفحه‌ای می‌باشند [۳۸، ۳۹] و به صورت روابط (۲۵) ارائه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{11} = & c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \quad \tilde{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}, \\
 \tilde{c}_{44} = & c_{44}, \quad \tilde{c}_{66} = c_{66}
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{13} e_{33}}{c_{33}}, \quad \tilde{e}_{15} = e_{15}$$

$$\tilde{d}_{11} = d_{11}, \quad \tilde{d}_{33} = d_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}$$

انرژی کرنشی نانورق مرکب پیزوالکتریک به شکل رابطه (۲۶) تعریف می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i) \, dV \quad (26)$$

با قرار دادن معادلات (۱۲) تا (۱۶) در رابطه (۲۶) تغییرات انرژی کرنشی نانورق مرکب پیزوالکتریک به صورت رابطه (۲۷) نوشته می‌شود.

$$\delta U = \int_V \left(-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta w \right) \, dV \quad (27)$$

$$-2A_8 \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + A_9 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_4 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} I_2 \right)$$

$$A_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + A_6 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + A_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - A_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + A_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_7 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2A_8 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + A_9 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_4 - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_2 \right) \quad (46)$$

$$A_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - A_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + A_5 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - A_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{13} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + B_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2A_8 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) - 4A_{14} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2A_{15} \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + A_5 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - A_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{13} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + A_2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - A_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_{11} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + B_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial x} I_5 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} F_x - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} F_y - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} I_1 - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} I_2 - \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial y} I_2 + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} I_3 + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} I_3 - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial y} I_5 \right) \quad (47)$$

$$A_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_{16} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - A_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + A_{17} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + B_5 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - 2A_{15} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} + A_{18} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - A_9 \xi + B_7 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_6 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_4 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} I_5 \right)$$

$$A_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - A_{13} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + A_{17} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - A_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + A_{16} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B_5 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + A_9 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2A_{15} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + A_{18} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - A_9 \xi + B_7 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_6 - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_4 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_5 \right) \quad (48)$$

$$B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - B_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_5 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - B_9 \varphi - B_{10} + B_7 \frac{\partial \xi}{\partial x} - B_8 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B_7 \frac{\partial \psi}{\partial y} - B_8 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (49)$$

ضرایب A_i و B_j در پیوست ذکر شده‌اند. مساله مقدار مرزی برای ارتعاش نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده توسط روابط (45) تا

در رابطه (35) A محدوده لایه میانی نانورق مرکب پیزوالکتریک می‌باشد. همچنین (F_{Px}, F_{Py}) و (F_{Ex}, F_{Ey}) نیروهای عمود بر سطح شامل نیروهای محوری مکانیکی و الکتریکی در امتداد محورهای x و y هستند که مقادیر آن‌ها از روابط (36) و (37) قابل محاسبه است.

$$F_{Px} = F_{Py} = P_0 \quad (36)$$

$$F_{Ex} = F_{Ey} = -2e_{31} V_0 \quad (37)$$

اصل همیلتون [8] با استفاده از رابطه (38) تعریف می‌شود.

$$\int_0^t (\delta T + \delta W_f - \delta U) dt = 0 \quad (38)$$

با به‌کارگیری اصل همیلتون روابط حاکم بر رفتار ارتعاشی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک به صورت روابط (39) تا (44) حاصل می‌شوند.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \cdot \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_4 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} I_2 \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \cdot \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_4 - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_2 \right) \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \left(-\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial x} I_5 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} F_x - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} F_y - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} I_1 - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} I_2 - \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial y} I_2 + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} I_3 + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} I_3 - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial y} I_5 \right) \quad (41)$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_{xz} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \cdot \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} I_6 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} I_4 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} I_5 \right) \quad (42)$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} - Q_{yz} = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \cdot \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} I_6 - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} I_4 + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} I_5 \right) \quad (43)$$

$$-D_2 \gamma \sin(\gamma z) - \frac{\partial D_x}{\partial x} \cos(\gamma z) - \frac{\partial D_y}{\partial y} \cos(\gamma z) = 0 \quad (44)$$

با جایگذاری مولفه‌های نیروهای منته (روابط (30) تا (34)) در معادلات حاکم بر حرکت (39) تا (44)، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک بر حسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت روابط (45) تا (49) نتیجه می‌شوند.

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + A_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_7 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (45)$$

نانو کمتر است که این امر در مقایسه کاهش فرکانس طبیعی در $\frac{l_a}{h} = 10$ نسبت به حالت $\frac{l_a}{h} = 40$ مشهود است.

جدول ۱ خواص الکترومکانیکی PZT 4 [۲۵]

خواص دی الکتریک	خواص پیزوالکتریک	خواص مکانیکی
d11 (nC/V-m) ۵/۸۴۱	-۴/۱	e31 (C/m ²) ۱۳۲
d33 (nC/V-m) ۷/۱۲۴	۱۰/۵	e15 (C/m ²) ۷۱
	۱۴/۱	e33 (C/m ²) ۷۳
		c33 (Gpa) ۱۱۵
		c44 (Gpa) ۲۶
		c66 (Gpa) ۳۰/۵
		p(kg/m ²) ۷۵۰۰

جدول ۲ مقایسه فرکانس اول بی بعد نانو ورق مرکب مسطح پیزوالکتریک در تئوری‌های تغییرشکل برشی نمایی و مثلثاتی با دو تئوری کلاسیک و تغییرشکل برشی مرتبه اول

μ	$\frac{l_a}{h} = 10$			$\frac{l_a}{h} = 40$		
	Exp.	Tri.	[۲۵]	Exp.	Tri.	[۲۴]
۰	۰/۶۰۶۴	۰/۶۰۵۹	۰/۶۰۶۸	۰/۶۲۹۰	۰/۱۵۶۸	۰/۱۵۶۶
۰/۱	۰/۵۵۴۱	۰/۵۵۳۵	۰/۵۵۴۵	۰/۵۷۴۸	۰/۱۴۳۲	۰/۱۴۲۹
۰/۲	۰/۴۵۳۳	۰/۴۵۲۹	۰/۴۵۳۶	۰/۴۷۰۲	۰/۱۱۷۱	۰/۱۱۶۸
۰/۳	۰/۳۶۳۷	۰/۳۶۳۴	۰/۳۶۴۱	۰/۳۷۷۵	۰/۰۹۴۰	۰/۰۹۳۷
۰/۴	۰/۲۹۷۲	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۷۶	۰/۳۰۸۵	۰/۰۷۶۸	۰/۰۷۶۴
۰/۵	۰/۲۴۸۹	۰/۲۴۸۷	۰/۲۴۹۱	۰/۲۵۸۲	۰/۰۶۴۲	۰/۰۶۳۸

۲-۴- تحلیل الکترومکانیکی

شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شش مد ارتعاشی اول نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک نسبت به تغییر ضریب مقیاس کوچک نانو را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی نمایی نشان می‌دهد. در این تحلیل ابعاد به صورت $V_0 = 0$ و $P_0 = 0$ ، $h = 5 \text{ nm}$ ، $l_b = 60 \text{ nm}$ ، $l_a = 40 \text{ nm}$ است. $\mu = 0$ بیان گر حالت کلاسیک نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک بدون اثر غیر محلی است.

ملاحظه می‌شود فرکانس‌های طبیعی به دست آمده در این تحلیل نسبت به حالت کلاسیک کاهش می‌یابند. ضریب مقیاس کوچک اثر مهمی روی فرکانس‌های طبیعی دارد به طوری که با افزایش آن فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک به شکل چشم‌گیری کاهش می‌یابند. دلیل این امر تأثیر ضریب غیر محلی روی اثر دو طرفه کلیه نقاط دامنه مورد تحلیل می‌باشد که موجب کاهش سختی نانو ساختارها و کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. شکل ۳ نیز تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد شش مد ارتعاشی اول نسبت به ضریب مقیاس کوچک نانو بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی را نشان می‌دهد. که روند کاهشی فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک با افزایش مقدار ضریب مقیاس کوچک همچنان مشهود است. همچنین آنگاه تغییرات فرکانس طبیعی با تغییرات ضریب مقیاس نانو نسبت عکس داشته که می‌تواند ناشی از اثر کاهشی زیاد در تنش‌های برشی به موجب افزایش ضریب نانو و کاهش سختی نانو ساختار پیزوالکتریک باشد.

مطابق جدول ۲ و با توجه به شکل‌های ۲ تا ۴ تفاوت میان مقادیر فرکانس طبیعی هر مد ارتعاشی در تئوری‌های مختلف قابل ملاحظه است به طوری که فرکانس‌های حاصله از تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی، نمایی،

(۴۹) معین شده‌اند. برای یافتن فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک از حل دقیق برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده می‌شود. سری‌های فوریه زیر به عنوان پاسخ مساله در معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک جایگذاری شده‌اند [۴۰]. همچنین U_{mn} ، $\alpha = \frac{m\pi}{l_a}$ ، $\beta = \frac{m\pi}{l_b}$ و Φ_{mn} ، Ψ_{mn} ، W_{mn} ، V_{mn} می‌باشند. بدیهی است که این روابط در شرایط مرزی هندسی مساله صدق می‌کنند.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \xi \\ \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ E_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \Psi_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} e^{i\Omega t} \quad (50)$$

پس از ساده‌سازی معادله ماتریسی به فرم بسته ارائه شده در رابطه (۵۱) حاصل می‌شود که با حل آن فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک به دست می‌آیند. در این رابطه، Ω فرکانس طبیعی، \bar{K} ماتریس سختی و \bar{M} ماتریس جرم نانورق مرکب پیزوالکتریک است.

$$[\bar{K} - \bar{M}\Omega^2] = 0 \quad (51)$$

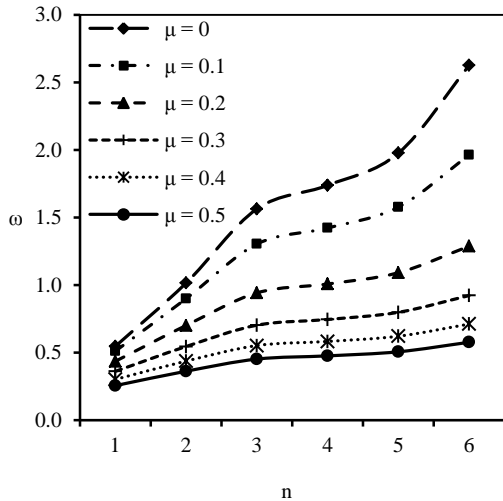
۴- نتایج عددی

۴-۱- اعتبارسنجی

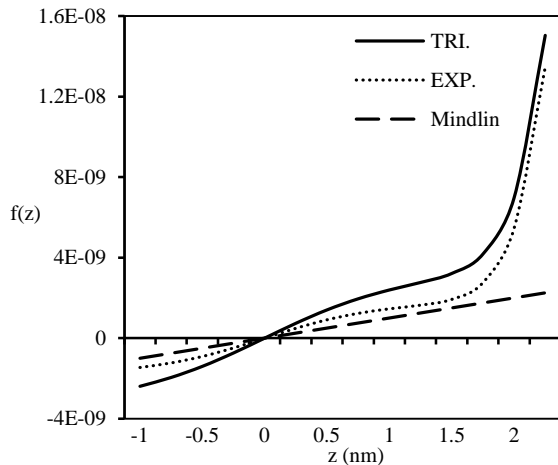
در این بخش نتایج عددی برای ارتعاش آزاد نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. نانو ماده مرکب پیزوالکتریک در نظر گرفته شده جهت تحلیل رفتار ارتعاشی PZT4 می‌باشد که خواص الکترومکانیکی آن مطابق جدول ۱ است.

لیو و همکاران [۲۴] حل دقیق ارتعاش آزاد نانورق مرکب پیزوالکتریک بر پایه تئوری ورق کلاسیک به همراه اثرات ضریب مقیاس نانو و بارهای ترموالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک ارائه داده‌اند. همچنین لیائو لینگ و همکاران [۲۵] نیز حل تحلیلی برای نانورق مرکب پیزوالکتریک بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از تئوری غیر محلی و تأثیر مقیاس اندازه و بارهای ترموالکتریک را روی فرکانس‌های طبیعی بررسی نمودند که نتایج حاصل شده توسط آن‌ها مورد مقایسه نتایج به دست آمده در این تحلیل جهت اعتبارسنجی قرار گرفته‌اند. فرکانس‌های طبیعی بی بعد نانورق مرکب پیزوالکتریک از رابطه $\omega = \Omega l_a \sqrt{\frac{\rho}{E_{11}}}$ به دست می‌آیند.

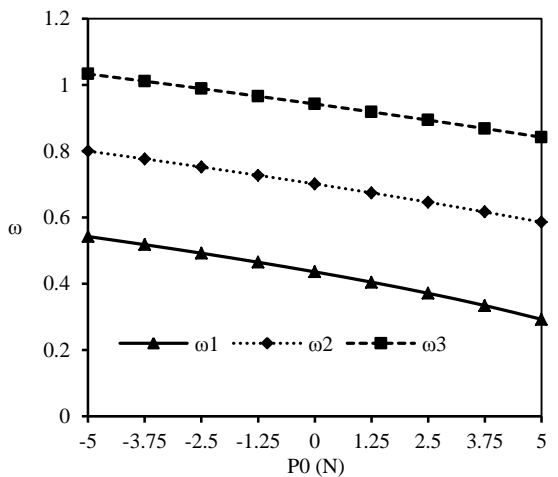
در جدول ۲ مقادیر فرکانس اول بی بعد حاصله از دو تئوری تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی ارائه شده و همچنین با نتایج به دست آمده از تئوری ورق کلاسیک [۲۴] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۲۵] مقایسه شده است. ابعاد و متغیرهای نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک به صورت $l_a = 40 \text{ nm}$ ، $l_b = 50 \text{ nm}$ ، $h = 5 \text{ nm}$ و $P_0 = 0$ و $V_0 = 0$ در محاسبات در نظر گرفته شده است. با افزایش نسبت $\frac{l_a}{h}$ در نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که دلیل آن افزایش تأثیر تغییر شکل برشی عرضی در نسبت‌های بزرگتر $\frac{l_a}{h}$ است. افزایش طول نانورق مرکب پیزوالکتریک در ضخامت ثابت باعث کاهش گشتاور خمشی شده که متعاقباً انرژی کرنشی و سختی نانورق کم می‌شود و همین امر سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. همچنین در نسبت‌های کوچکتر طول به ضخامت اثر ضریب مقیاس



شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شش مد ارتعاشی اول نسبت به ضریب مقیاس کوچک در نانورق مرکب پیزوالکتریک بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی

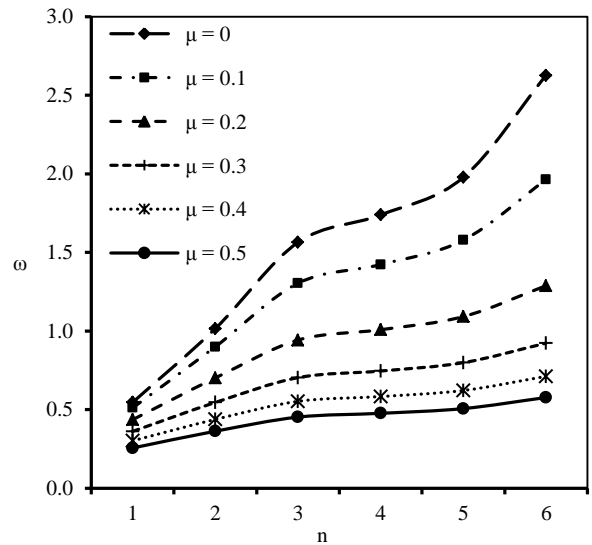


شکل ۴ بسط تیلور توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت نانورق مرکب پیزوالکتریک بر پایه دو تئوری تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی و مقایسه با بسط تیلور توزیع خطی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (میندلین)



شکل ۵ اثر نیروی محوری روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی

مرتبه اول و کلاسیک به ترتیب دارای روند افزایشی می‌شود که به دلیل تفاوت در توزیع تنش برشی و اینرسی دورانی در راستای ضخامت می‌باشد.



شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد شش مد ارتعاشی اول نسبت به ضریب مقیاس کوچک در نانورق مرکب پیزوالکتریک بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی نمایی

در تئوری ورق کلاسیک توزیع تنش برشی عرضی لحاظ نمی‌شود اما در تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول، نمایی و مثلثاتی جهت اعمال اثر تنش برشی عرضی بترتیب از توابع خطی، نمایی و مثلثاتی استفاده می‌شود که با توجه به بسط تیلور توابع توزیع تنش برشی در راستای ضخامت در تئوری‌های ذکر شده و نمودار آن‌ها در شکل ۴ روند افزایشی تابع توزیع تنش برشی عرضی مشهود است به طوری که مقادیر تابع مثلثاتی همواره از تابع نمایی، و تابع نمایی همواره از تابع خطی بیشتر است. و همین امر موجب توزیع گسترده‌تر تنش‌های برشی عرضی در نمودارهای بالاتر می‌شود که باعث کاهش اثر تمرکز تنش برشی، کاهش سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک و متعاقباً کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. با مقایسه نمودار دو تابع توزیع نمایی و مثلثاتی با تابع خطی ارضای شرط سطح عاری از تنش برشی در نانورق مرکب پیزوالکتریک در دو تئوری تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی قابل توجه است. به طوری که در $\pm \frac{h}{2}$ توزیع گسترده‌تر و در نتیجه بر خلاف دو تئوری ورق کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول بدون استفاده از ضریب تصحیح برشی سطح عاری از تنش برشی مدل شده است. شکل ۵ اثر نیروی محوری $P_0(N)$ را روی سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد در نانورق مرکب پیزوالکتریک با شرایط $V_0 = 0$ و $\mu = 0.2$ نشان می‌دهد. با اعمال نیروی محوری فشاری فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانورق مرکب پیزوالکتریک کاهش می‌یابند که این روند با اعمال نیروی محوری کششی معکوس می‌شود. این تغییرات ناشی از تغییر سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در اثر مثبت یا منفی بودن نیروهای محوری اعمال شده می‌باشد که حاکی از فشاری و کششی بودن نیروهای محوری است. با افزایش اعمال نیروی فشاری سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک کاهش می‌یابد و در مقابل نیروی کششی مقاومت سختی را افزایش می‌دهد. در شکل ۶ اثرات تغییر ولتاژ خارجی $V_0(V)$ روی سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانورق مرکب پیزوالکتریک بررسی شده که در این تحلیل نیز $P_0 = 0$ و $\mu = 0.2$ لحاظ شده است.

افزایش نسبت طول به عرض باعث کشیدگی در شکل هندسی نانورق مرکب پیزوالکتریک می‌شود که این امر موجب افزایش اثرات تکیه‌گاهی است که به نوبه خود انرژی کرنشی ذخیره شده در نانو ساختار را بالا می‌برد با توجه به تاثیر مستقیم انرژی کرنشی روی سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در نتیجه فرکانس‌های طبیعی روند افزایشی می‌یابند. افزایش نسبت طول به عرض باعث کشیدگی در شکل هندسی نانورق مرکب پیزوالکتریک می‌شود که این امر موجب افزایش اثرات تکیه‌گاهی است که به نوبه خود انرژی کرنشی ذخیره شده در نانو ساختار را بالا می‌برد با توجه به تاثیر مستقیم انرژی کرنشی روی سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در نتیجه فرکانس‌های طبیعی روند افزایشی می‌یابند.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر رفتار ارتعاشی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک با به‌کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی بر پایه تئوری غیر محلی و به‌روش تحلیلی ناوبر برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم بر حرکت با استفاده از اصل همپلتون به‌دست آمد. نتایج عددی در مورد تأثیر ضریب مقیاس نانو، نیروی محوری، ولتاژ خارجی و نسبت‌های بعد نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک نشان دهنده موارد ذیل است:

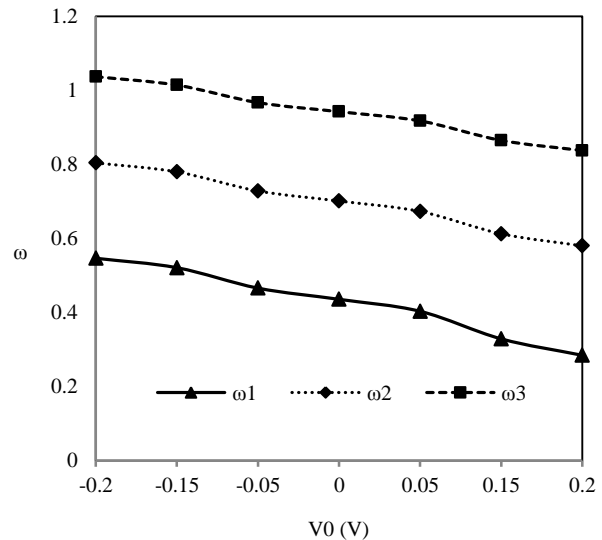
۱- با مطالعه تأثیر ضریب مقیاس کوچک نانو روی فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک مشاهده شد با افزایش این ضریب فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. نرخ کاهش مقدار فرکانس طبیعی در مقادیر پایین ضریب مقیاس نانو بیشتر است و با افزایش این ضریب نرخ کاهش فرکانس طبیعی کند می‌شود که می‌تواند ناشی از اثر کششی زیاد در تنش‌های برشی بموجب افزایش ضریب نانو و کاهش سختی نانو ساختار پیزوالکتریک باشد.

۲- مقادیر فرکانس طبیعی هر مد ارتعاشی در تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی و مثلثاتی دارای اختلاف است. تفاوت در نوع توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت موجب بروز اختلاف در مقادیر فرکانس‌های طبیعی است.

۳- فرکانس‌های طبیعی با افزایش نسبت طول به ضخامت به شدت کاهش می‌یابند. افزایش طول نانورق مرکب پیزوالکتریک در ضخامت ثابت باعث کاهش گشتاور خمشی شده که متعاقباً انرژی کرنشی و سختی نانورق کم می‌شود و همین امر سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

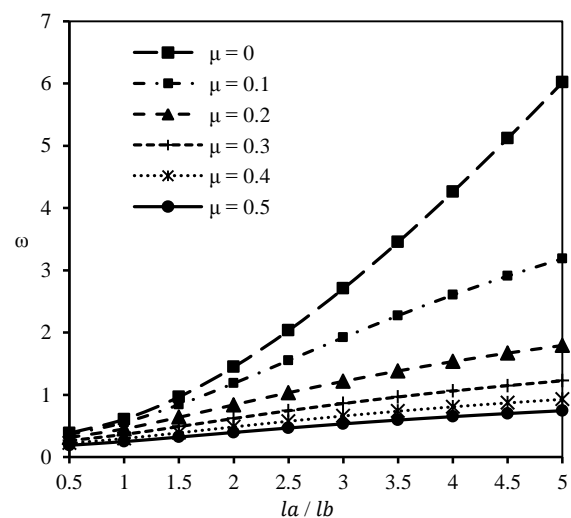
۴- روند افزایش فرکانس‌های طبیعی با افزایش نسبت طول به عرض رابطه مستقیم دارد که در نسبت‌های پایین طول به عرض این افزایش مقدار فرکانس با شیب کم و با افزایش نسبت طول به عرض با نرخ بیشتری همراه می‌باشد. افزایش نسبت طول به عرض باعث کشیدگی در شکل هندسی نانورق مرکب پیزوالکتریک می‌شود که این امر موجب افزایش اثرات تکیه‌گاهی است که به نوبه خود انرژی کرنشی ذخیره شده در نانو ساختار را بالا می‌برد با توجه به تاثیر مستقیم انرژی کرنشی روی سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در نتیجه فرکانس‌های طبیعی روند افزایشی می‌یابند.

۵- نیروهای محوری در ارتعاش و فرکانس طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک موثر بوده که با افزایش اعمال نیروی فشاری فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابند و این روند با اعمال نیروی محوری کششی معکوس می‌شود. این تغییرات ناشی از کاهش سختی نانورق مرکب



شکل ۶ اثر ولتاژ خارجی روی فرکانس‌های طبیعی نانورق مرکب پیزوالکتریک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی

فرکانس‌های طبیعی نسبت به تغییرات ولتاژ خارجی بسیار حساس بوده به طوری که با تغییر اندک ولتاژ الکتریکی از $0/2$ تا $0/2$ فرکانس‌های طبیعی دچار کاهش قابل توجه شده‌اند. در مواد مرکب پیزوالکتریک به دلیل ماهیت و ساختار بلورهای نیروی مکانیکی و ولتاژ الکتریکی دارای اثرات مشابهی هستند و همین امر باعث ایجاد نیروهای فشاری و کششی در نانو ساختار با اعمال ولتاژ مثبت و منفی می‌شود که تغییر سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در اثر ایجاد این نیروها موجب کاهش و افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. تأثیر ضریب مقیاس نانو روی فرکانس طبیعی اول بی‌بعد در نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک در نسبت‌های مختلف طول به عرض در شکل ۷ نشان داده شده است که مربوط به تئوری‌های تغییر شکل برشی نمایی می‌باشند و از نیروی محوری و ولتاژ الکتریکی خارجی چشم‌پوشی ($P_0 = 0$ و $V_0 = 0$) و ضخامت ثابت لحاظ شده است.



شکل ۷ اثر نسبت طول به عرض (l_a/l_b) روی فرکانس اول بی‌بعد در نانورق مرکب مسطح پیزوالکتریک بر اساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی

$$A_{19} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{44} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad B_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} \gamma \sin(\gamma z) dz$$

$$B_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} \frac{2V_0}{h} dz \quad B_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} z \gamma \sin(\gamma z) dz$$

$$B_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} z \frac{2V_0}{h} dz \quad B_5 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} f(z) \gamma \sin(\gamma z) dz$$

$$B_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{31} f(z) \frac{2V_0}{h} dz \quad B_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{15} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cos(\gamma z) dz$$

$$B_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d_{11} (\cos(\gamma z))^2 dz \quad B_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d_{33} (\gamma \sin(\gamma z))^2 dz$$

$$B_{10} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d_{33} \gamma \sin(\gamma z) \frac{2V_0}{h} dz$$

۷- مراجع

[1] Jalili, N., "Piezoelectric-Based Vibration Control from Macro to Micro/Nano Scale Systems", Springer Science Business Media, LLC 2010, ISBN 978-1-4419-0069-2, 2009.

[2] Wang, Z.L., "ZnO Nanowire and Nanobelt Platform for Nanotechnology", Materials Science and Engineering, Vol. 64, No. 3-4, pp. 33-71, 2009.

[3] Park, K.I. Xu, S. Liu, Y. Hwang, G.T. Kang, S.J. Kang, S.J.L. Wang, Z.L. and Lee K.J., "Piezoelectric BaTiO3 Thin Film Nanogenerator on Plastic Substrates", Nano Letters, Vol.10, No 12, pp. 4939-4943, 2010.

[4] Galan, U. Lin, Y.R. Ehlert, G.J. and Sodano, H.A., "Effect of ZnO Nanowire Morphology on the Interfacial Strength of Nanowire Coated Carbon Fibers", Composites Science and Technology, Vol. 71, No. 7, pp. 946-954, 2011.

[5] Lam, D.C.C. Yang, F. Chong, A.C.M. Wang, J. and Tong, P., "Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 51, No. 8, pp. 1477-1508, 2003.

[6] Yang, F. Chong, A.C.M. Lam, D.C.C. and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.

[7] Eringen, A.C., "Nonlocal Polar Elastic Continua", International Journal of Engineering Science, Vol. No. 1, pp. 1-16, 1972.

[8] Eringen, A.C., "On Differential Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves", Journal of Applied Physics, Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.

[9] Eringen, A.C., "Nonlocal Continuum Field Theories", Springer, NewYork, ISBN 978-0-387-22643-9, 2002.

[10] Li, Y.S. Feng, W.J. and Cai, Z.Y., "Bending and Free Vibration of Functionally Graded Piezoelectric Beam Based on Modified Strain Gradient Theory", Composite Structures, Vol. 115, pp. 41-50, 2014.

[11] Alzahrani, E.O. Zenkour, A.M. and Sobhy, M., "Small Scale Effect on Hygro-Thermo-Mechanical Bending of Nanoplates Embedded in an Elastic Medium", Composite Structures, Vol. 105, pp. 163-172, 2013.

[12] Golmakani, M.E. and RezaTalab, J., "Nonlinear Bending Analysis of Orthotropic Nanoscale Plates in an Elastic Matrix Based on Nonlocal Continuum Mechanics", Composite Structures, Vol.111, pp. 85-97, 2014.

[13] Şimşek, M. and Yurtcu, H.H., "Analytical Solutions for Bending and Buckling of Functionally Graded Nanobeams Based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory", Composite Structures, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.

[14] Hosseini-Hashemi, S. Zare M. and Nazemnezhad, R., "An Exact Analytical Approach for Free Vibration of Mindlin Rectangular Nanoplates via Nonlocal Elasticity", Composite Structures, Vol. 100, pp. 290-299, 2013.

پیزوالکتریک در اثر فشار محوری است و در مقابل نیروی کششی مقاومت سختی را افزایش می‌دهد.

۶- فرکانس‌های طبیعی نسبت به تغییرات ولتاژ خارجی بسیار حساس بوده و به سرعت تغییر می‌کنند به طوری که تغییرات اندک ولتاژ الکتریکی موجب تغییر بسیار زیاد در فرکانس‌های طبیعی می‌شود. در مواد مرکب پیزوالکتریک به دلیل ماهیت و ساختار بلورها نیروی مکانیکی و ولتاژ الکتریکی دارای اثرات مشابهی هستند و همین امر باعث ایجاد نیروهای فشاری و کششی در نانوساختار با اعمال ولتاژ مثبت و منفی می‌شود که تغییر سختی نانورق مرکب پیزوالکتریک در اثر ایجاد این نیروها دلیل کاهش و افزایش فرکانس‌های طبیعی است.

۷- در تئوری‌های تغییر شکل برشی اصلاح شده که دو توزیع تنش برشی عرضی نمایی و مثلثاتی از آن جمله هستند بدون استفاده از ضریب تصحیح برشی شرایط سطوح عاری از تنش برشی ارضا می‌شود.

۶- پیوست

$$A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} dz \quad A_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} z dz$$

$$A_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} f(z) dz \quad A_4 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} dz$$

$$A_5 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} z dz \quad A_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} f(z) dz$$

$$A_7 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} dz \quad A_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} z dz$$

$$A_9 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} f(z) dz \quad A_{10} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} z^2 dz$$

$$A_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} z f(z) dz \quad A_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} z^2 dz$$

$$A_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} z f(z) dz \quad A_{14} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} z^2 dz$$

$$A_{15} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} z f(z) dz \quad A_{16} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11} f(z)^2 dz$$

$$A_{17} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{12} f(z)^2 dz \quad A_{18} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{66} f(z)^2 dz$$

- [39] Pietrzakowski, M., "Piezoelectric Control of Composite Plate Vibration: Effect of Electric Potential Distribution", *Computers & Structures*, Vol.86, No. 9, pp. 948-954, 2008.
- [40] Bodaghi, M. and Shakeri, M., "An analytical Approach for Free Vibration and Transient Response of Functionally Graded Piezoelectric Cylindrical Panels Subjected to Impulsive Loads", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 5, pp. 1721-1735, 2012.
- [15] Sobhy, M., "Generalized Two-variable Plate Theory for Multi Layered Grapheme Sheets with Arbitrary Boundary Conditions", *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 9, pp. 2521-2538, 2014.
- [16] Chen, A.L. Wang, Y.S. Ke, L.L. Guo, Y.F. and Wang, Z.D., "Wave Propagation in Nanoscaled Periodic Layered Structures", *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 10, pp. 2427-2437, 2013.
- [17] Ke, L.L. and Wang, Y.S., "Thermoelectric-Mechanical Vibration of Piezoelectric Nanobeams Based on the Nonlocal Theory", *Smart Materials and Structures*, Vol. 21, No. 2, 025018, 2012.
- [18] Ke, L.L. Wang, Y.S. and Wang, Z.D., "Nonlinear Vibration of the Piezoelectric Nanobeams Based on the Nonlocal Theory", *Composite Structures*, Vol. 94, No. 6, pp. 2038-2047, 2012.
- [19] Liu, C. Ke, L.L. Wang, Y.S. Yang, J. and Kitipornchai, S., "Buckling and Post Buckling of Size-Dependent Piezoelectric Timoshenko Nanobeams Subject to Thermo-Electro-Mechanical Loadings", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 14, No. 03, 1350067, 2014.
- [20] Arani, A.G. Roudbari, M.A. and Amir, S., "Nonlocal Vibration of SWBNNT Embedded in Bundle of CNTs Under a Moving Nanoparticle", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 407, No. 17, pp. 3646-3653, 2012.
- [21] Arani, A.G. Atabakhshian, V. Loghman, A. Shajari, A.R. and Amir S., "Nonlinear Vibration of Embedded SWBNNTs Based on Nonlocal Timoshenko Beam Theory Using DQ Method", *Physica B: Condensed Matter*, Vol. 407, No. 13, pp. 2549-2555, 2012.
- [22] Arani, A.G. Amir, S. Shajari, A.R. and Mozdianfard, M.R., "Electro-Thermo-Mechanical Buckling of DWBNNTs Embedded in Bundle of CNTs Using Nonlocal Piezoelectricity Cylindrical Shell Theory", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 2, pp. 195-203, 2012.
- [23] Arani, A.G. Abdollahian, M. Kolahchi, R. and Rahmati, A.H., "Electro-Thermo-Torsional Buckling of an Embedded Armchair DWBNNT Using Nonlocal Shear Deformable Shell Model", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 51, pp. 291-299, 2013.
- [24] Liu, C. Ke, L.L. Wang, Y.S. Yang, J. and Kitipornchai, S., "Thermo-Electro-Mechanical Vibration of Piezoelectric Nanoplates Based on the Nonlocal Theory", *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 167-174, 2013.
- [25] Ke, L.L. Liu, C. and Wang, Y.S., "Free Vibration of Nonlocal Piezoelectric Nanoplates under Various Boundary Conditions", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 66, pp. 93-106, 2015.
- [26] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M., "Bending and Free Vibration Analysis of Thick Isotropic Plates by Using Exponential Shear Deformation Theory", *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 6, No. 1, pp. 65-82, 2012.
- [27] Ghugal, Y.M. and Sayyad, A.S., "Stress Analysis of Thick Laminated Plates Using Trigonometric Shear Deformation Theory", *International Journal of Applied Mechanics* Vol. 5, No. 1, 1350003, 2013.
- [28] Kharde, S.B. Mahale, A.K. Bhosale, K.C. and Thorat S.R., "Flexural Vibration of Thick Isotropic Plates by Using Exponential Shear Deformation Theory", *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp. 369-374, 2013.
- [29] Mantari, J.L. Oktem, A.S. and Soares, C.G., "A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Isotropic, Laminated Composite and Sandwich Plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 1, pp. 43-53, 2012.
- [30] Tounsi, A. Houari, M.S.A. Benyoucef, S. and Bedia, A.A., "A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 24, No. 1, pp. 209-220, 2013.
- [31] Rango, R.F. Nallim, L.G. and Oller, S., "Formulation of Enriched Macro Elements Using Trigonometric Shear Deformation Theory for Free Vibration Analysis of Symmetric Laminated Composite Plate Assemblies", *Composite Structures*, Vol. 119, pp. 38-49, 2015.
- [32] Khorshidi, K. and Fallah, A., "Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Nano-plate Based on Nonlocal Exponential Shear Deformation Theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 113, pp. 94-104, 2016.
- [33] Khorshidi, K. Asgari, T. and Fallah, A., "Free Vibrations Analysis of Functionally Graded Rectangular Nanoplates Based on Nonlocal Exponential Shear Deformation Theory", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 2, No. 2, pp. 79-93, 2015.
- [34] Quek, S.T. and Wang, Q., "On Dispersion Relations in Piezoelectric Coupled-Plate Structures", *Smart Materials and Structures*, Vol. 9, No. 6, pp. 859-867, 2000.
- [35] Wang, Q. and Quek, S.T., "Flexural Vibration Analysis of Sandwich Beam Coupled with Piezoelectric Actuator", *Smart Materials and Structures*, Vol. 9, No 1, pp. 103-109, 2000.
- [36] Wang, Q. Quek, S.T. Sun, T.C. and Liu, X., "Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate", *Smart Materials and Structures*, Vol. 10, No. 2, pp. 229-239, 2001.
- [37] Wang, Q., "Axisymmetric Wave Propagation in a Cylinder Coated with a Piezoelectric Layer", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 11, pp. 3023-3037, 2002.
- [38] Zhao, M. Qian, C. Lee, S.W.R. Tong, P. Suemasu, H. and Zhang, T.Y., "Electro-Elastic Analysis of Piezoelectric Laminated Plates", *Advanced Composite Materials*, Vol.16, No. 1, pp. 63-81, 2007.