جلد ٤، شماره ٢، شهریور ٩٦، ص‌ص ١٤١- ١٥٠

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیـــت**

http://jstc.iust.ac.ir

تأثیر میرایی بر پاسخ غیرخطی ارتعاشات اجباری نانوکامپوزیت‌های زمینه گرافنی

رضا معدولیت[۱]، احمد قاسمی قلعه‌بهمن[۲*]، قاسم محمدحنیفه[۳]

۱- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج

* سمنان، صندوق‌پستی ۱۹۱۱۱- ۳۵۱۳۱، ghasemi@semnan.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۵/۳/۲۴

پذیرش: ۹۵/۵/۱۰

کلیدواژگان:

نانوکامپوزیت گرافنی

ارتعاشات اجباری غیرخطی

میرایی

پاسخ تحلیلی

چکیده

در این مطالعه، پاسخ غیرخطی نانوکامپوزیت‌های گرافنی نسبت به تشدید هارمونیک بررسی شده است. از اهداف این مقاله ارایه روابط دینامیکی مواد نانوکامپوزیتی است که در آن اثرات هم‌زمان غیرخطی‌های هندسی و میرایی انرژی ناشی از محیط ویسکوالاستیک خارجی و میرایی داخلی در نظر گرفته شده است. بر اساس نظریه الاستیک غیرموضعی، روابط غیرخطی کرنش- جابه‌جایی وون- کارمن، معادله اساسی حرکت غیرخطی با روش همیلتون به‌دست آمده است و سپس با استفاده از روش گالرکین، به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی ساده‌سازی می‌شود. این معادله برای یافتن رابطه فرم بسته بین فرکانس- دامنه ارتعاش ورق گرافنی چهارسر تکیه‌گاه ساده به‌صورت تحلیلی به‌وسیله روش مقیاس‌های چندگانه حل می‌شود. مطالعه پارامتری هم به‌صورت ویژه بر مجموعه‌ای از عوامل هم‌چون پارامتر غیرموضعی، نسبت ابعادی و هر دو ضریب میرایی (داخلی و خارجی) و نیز فرکانس نیروی تحریک خارجی انجام شده است. نتایج به‌دست آمده اثرات سختی افزایی غیرخطی را در حالت تشدید اولیه و همچنین پدیده‌های قابل توجه دیگری را برخلاف تحلیل خطی نشان می‌دهد.

Effect of damping on nonlinear forced vibration response of graphene-based nanocomposites

Reza Madoliat[1], Ahmad Ghasemi-Ghalebahman[2*], Ghasem Mohammad-Hanifeh[3]

1- Department of Mechanical Engineering, Iran University of science and engineering, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran
3- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Karaj Branch, Karaj, Iran
*P.O.B. 35131-19111, Semnan, Iran, ghasemi@semnan.ac.ir

Keywords

Graphene nanocomposites
Nonlinear forced vibration
Damping
Analytical Solution

Abstract

In this study, the nonlinear responses of graphene-based nanocomposite to harmonic resonances have been discussed. This paper presents results of a study aimed at representing dynamic interactions in nanocomposite with simultaneous consideration of geometrical nonlinearity and energy damping effect by viscoelastic medium and internal damping. Based on nonlocal elasticity theory and invoking the nonlinear von Karman strain- displacement relations, the nonlinear governing equation is extracted using the Hamilton principle. To reduce the equation of motion to a nonlinear ordinary differential equation, the Galerkin's procedure is implemented; then using the multiple scale method, the obtained equation is solved analytically to assess the closed form nonlinear amplitude-frequency relations relevant to graphene with simply supported boundary conditions under harmonic excitation. The detailed parametric study is conducted, focusing on the series effects of nonlocal parameter, aspect ratio and both damping coefficients (internal and external), and frequency of excitation load. The outcomes show a hardening nonlinearity effect for the primary resonance as well as illustrate some phenomena different from the linear vibration.

۱- مقدمه

در چند سال اخیر به‌دلیل پیشرفت‌های علوم مهندسی، کاربرد سیستم‌های الکترومکانیکی مقیاس نانو[۱] و هم‌چون نانو محرک‌های فرکانس بالا، نانوحس‌گرها، نانو ابرخازن‌ها و نانو نیمه‌هادی‌ها اهمیت فراوانی پیدا کرده است. همچنین ورق گرافن به‌عنوان یک نانوصفحه با خواص الکتریکی و مکانیکی فوق‌العاده، در طراحی و تولید اکثر سیستم‌های مذکور جایگاه ویژه‌ای داشته است [۱-۴]. استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بسیار محدود، زمان‌بر و هزینه‌بر بوده و نظریه‌های محیط پیوسته کلاسیک توانایی تشریح مواد نانو را ندارند. در حوزه تحلیلی دو روش غیرکلاسیک محیط

1. NEMS

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Madoliat, R. Ghasemi-Ghalebahman, A. and Mohammad-Hanifeh, G., "Effect of damping on nonlinear forced vibration response of graphene-based nanocomposites", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 2, pp. 141-150, 2017.

پیوسته، نظریه گرادیان کرنش و نظریه تنش غیرمحلی کاربرد زیادی برای تشریح رفتار دینامیکی و ارتعاشی سیستم های مبتنی بر گرافن داشته‌اند، همچنین تحقیقات بسیاری در زمینه ارتعاش نانوورق‌ها انجام شده است. پرادهان و همکاران [۵] عملکرد ارتعاشاتی آن‌ها را به‌روش ناویر در سال ۲۰۱۱ مورد بررسی قرار دادند. علیرغم اینکه تحقیقات زیادی توسط دانشمندان مختلف در مورد رفتار دینامیکی غیرخطی صفحات در مقیاس بزرگ انجام شده است [۶]، تحقیقات کمی در این زمینه در مورد نانو صفحات بر اساس نظریه غیرمحلی صورت گرفته است [۷].

یکی از مولفه‌های اساسی در طراحی اغلب این نوع سیستم‌ها، تأثیر نیروهای خارجی نوسانی بر حرکت و ارتعاش آن‌ها می‌باشد، در این حالت شناسایی رفتار سیستم در نزدیکی شرایط تشدید[1] اهمیت به‌سزایی دارد، زیرا زمانی که فرکانس نیروی تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم باشد منجر به ارتعاش نامطئن با دامنه بسیار بالا در سازه می‌شود [۸-۹].

در پژوهش انجام شده توسط انصاری و رمضان‌نژاد [۱۰]، یک مدل دینامیکی برای توصیف رفتار ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی چندلایه واقع بر بستر الاستیک و در محیط حرارتی ارائه شده است. در کار انجام شده، اثر تعداد لایه‌ها، ضریب بستر الاستیک، نسبت ابعادی نانولوله و دما بر پاسخ فرکانسی سیستم غیرخطی بررسی شده است.

تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق ویسکوالاستیک تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت میدان الکترواستاتیک توسط جلالی و اسماعیل‌زاده [۱۱] ارائه شده است. برای استخراج خواص ماده از روش اشلبی- موری- تاکانا و برای استخراج معادلات از روش نیوتن و تئوری وون- کارمن استفاده شده و از روش گالرکین و تئوری مقیاس‌های چندگانه نیز برای حل این معادلات استفاده شده است. همچنین در این تحقیق اثر ولتاژ الکتروستاتیک بر ضریب میرایی ویسکوالاستیک مطالعه شده است.

حیدری رارانی و همکاران [۱۲] یک حل تحلیلی برای بررسی ارتعاشات آزاد نانوورق دولایه تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک ارائه نمودند. با استفاده از روش انرژی و نظریه غیرمحلی ارینگن معادلات حاکم به‌دست آمده و برای حل این معادلات با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده از روش ناویر کمک گرفته شده است. همچنین اثر پارامترهای مختلف مانند ثوابت فنری بستر الاستیک، نوع آرایش نانوذرات، پارامتر غیرمحلی بر رفتار ارتعاشی نانوورق دو لایه بررسی شده است.

فتحعلی‌لو و رضایی [۱۳] با استفاده از تئوری غیرموضعی به تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر حس‌گر الکترواستاتیکی پرداخته و برای حل معادلات غیرخطی حاکم از روش گالرکین با دو رویکرد مختلف کمک گرفتند. از جمله محاسن روش پیشنهادی آن‌ها این است که قادر به شناسایی تمامی نقاط تعادلی محتمل می‌باشد.

در اکثر منابع قبلی، ورق‌های گرافن به‌صورت ساختاری الاستیک مدل‌سازی شده‌اند، در حالی‌که این ماده از خود رفتار میرایی ساختاری نشان داده است، در مقاله‌ای که در سال ۲۰۱۲ توسط سو و همکاران [۱۴] ارائه شده است، خصوصیات میرایی سازه‌ای نانوورق اکسید گرافن با استفاده از حلقه‌های هیسترزیس[2] آزمایش انبساط حرارتی و تنش- کرنش آن اثبات شده است. هر سازه‌ای که در تماس با لایه‌های پلیمری باشد، در حین اعمال نیروی استاتیکی و دینامیکی از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهد،

ایچلر و همکاران [۱۵] میرایی را در محرک‌های مکانیکی مبتنی بر گرافن بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند در سیستم مورد تحلیل‌شان میرایی شدیداً وابسته به دامنه حرکت بوده و می‌توان آن را نیرویی غیرخطی به‌حساب آورد. اشماتف [۱۶]، ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی صفحات مستطیلی ناهمسان‌گرد ویسکوالاستیک را بررسی کرد و با استفاده از روش گالرکین معادلات ارتعاشاتی حاکم را حل کرد. او از دو نظریه کلاسیک و میندلین بهره برده و معادلات را برحسب آن‌ها استخراج کرده است. عبارت‌های غیرخطی معادلات به‌دلیل استفاده از روابط غیرخطی برای تنش و کرنش است. سخایی‌پور و همکاران [۱۷] تأثیر جرم نقطه‌ای و ذرات اتمی را به‌عنوان محرک خارجی روی فرکانس اساسی سیستم‌های نانوسازه مبتنی بر گرافن بررسی کردند تا احتمال استفاده از این سیستم را به‌عنوان حس‌گرهای جرمی بررسی کنند. هی و همکاران [۱۸] پاسخ ارتعاشات غیرخطی نانوورق‌های چندلایه که تحت تأثیر بار نقطه‌ایی بودند را با در نظر گرفتن نظریه‌محلی ارائه کردند. گیلچریست و همکاران [۱۹] از طریق روش اجزاء محدود برای تحلیل دینامیکی و مودال نانوسازه‌ها راه‌حلی جدید را ارائه کردند.

تحلیل ارتعاشات یک گرافن ناهمسان‌گرد ویسکوالاستیک که روی بستر پلیمری قرار گرفته است در پژوهش پوراسماعیلی و همکاران [۲۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. نویسندگان در این کار مقادیر ویژه مختلط را در فرم کاملا تحلیلی و دقیق ارائه کرده‌اند همچنین تأثیر پارامترهای میرایی و فنریت بستر، پارامتر غیرمحلی، ابعاد نانوورق و میرایی داخلی آن را روی فرکانس طبیعی میرا شده در نظر گرفته‌اند.

اصولاً در بیشتر سازه‌های نانومکانیکی نظیر محرک‌های گرافنی، تغییر مکان سازه متناسب با ضخامت آن و به‌صورت رابطه‌ای خطی در نظر گرفته می‌شود. اما اگر دامنه ارتعاش و نوسانات سازه بزرگ باشد، آنگاه این دیدگاه خطی‌سازی هندسی منجر به افت شدید دقت و صحت نتایج تحلیل دینامیکی و شبه استاتیکی می‌شود. بنابراین اعمال فرضیاتی هم‌چون غیرخطی درنظر گرفتن هندسه تغییر شکل مدل می‌تواند موجب بهبود شرایط تحلیل در این وضعیت شود. جمعه‌زاده و همکاران [۲۱] ارتعاشات با دامنه بزرگ را برای سازه‌ای از گرافن‌های چندلایه بر اساس نظریه غیر محلی تحلیل کردند. تفاوت عمده پژوهش آن‌ها با کارهای مشابه قبلی در نظر گرفتن رابطه غیرخطی وون- کارمن بین تنش- کرنش در سازه بود. آن‌ها سپس با استفاده از توابع ایری تنش معادلات غیرخطی حاکم بر مجموعه را استخراج کردند و از روش گالرکین، معادله دیفرانسیل غیرخطی ارتعاش سیستم پیوسته را به‌دست آورده و آن را از روش تعادل هارمونیک حل کردند. نتایج حاصل از این پژوهش تأثیر بسیار مهم میزان دامنه ارتعاش بر فرکانس ارتعاش را در این سیستم آشکار کرد.

در منابع [۲۲] و [۲۳] سیستم‌های مشابهی از نانوورق‌های گرافنی در محیط‌های الاستیک یا به‌صورت آزاد نیز مورد تحلیل ارتعاشات قرار گرفته‌اند. اما تفاوتی که دیده می‌شود آن‌ها از معادلات وون- کارمن استفاده نکرده‌اند و همچنین تحقیقات آن‌ها بدون در نظر گرفتن پارامتر غیرمحلی و با نظریه کلاسیک تنش بوده است.

در پژوهش انجام شده توسط شن [۲۴]، یک سیستم تک گرافن روی یک محیط الاستیک فرض شده است. او از روابط تنش و کرنش وون- کارمن در فضای الاستیسیته غیرمحلی استفاده نموده است. در نهایت او به‌روش اغتشاشات اقدام به حل معادلات دیفرانسیل کرده که تقریب بهتری از نتایج را می‌دهد.

1. Resonance
2. Hysteresis

لین در [۲۵] ارتعاشات اجباری نانو میله‌هایی که در معرض میرایی محیطی بود را بررسی کرد. او تأثیر میرایی موجود را روی پاسخ فرکانسی و فاکتورهای میرایی مورد توجه قرار داد.

حسینی هاشمی و همکاران [۲۶] ارتعاشات اجباری خطی نانوورق گرافنی ویسکوالاستیک را روی بستر ویسکوالاستیک در حضور نیروی خارجی هارمونیک بررسی کردند؛ آن‌ها پاسخ فرکانسی سیستم را برای شرایط مختلف پارامتری سیستم به‌دست آوردند.

ارتعاشات آزاد و اجباری نانوورق الاستیک گرافنی مستقر بر یک محیط کامپوزیتی الاستیک توسط جمعه‌زاده و همکاران [۲۷] بررسی شده است. آن‌ها ارتعاشات اجباری را برای فرکانس تحریک رزونانس و پایین‌تر از آن بررسی و تأثیر عواملی چون سختی بستر، پارامترغیرمحلی، فرکانس تحریک خارجی، نیروی وارده و شرایط مرزی را بر پاسخ فرکانسی با جزئیات بررسی کردند.

با در نظر گرفتن اثرات هم‌زمان تنش سطحی و تئوری الاستیسیته غیرموضعی، پوراشرف و انصاری [۲۸] توانستند یک حل دقیق به‌منظور تحلیل ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای هدفمند در محیط حرارتی ارائه نمایند. برای استخراج معادلات از اصل همیلتون و تئوری‌های گورتین- مورداک و ارینگن استفاده شده است. معادلات غیرخطی حاکم نیز با استفاده از روش‌های گالرکین و اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه حل شده و اثر پارامترهای مختلف نظیر شاخص قانون توانی، تنش سطحی، پارامتر غیرموضعی، شرایط مرزی و دما بر پاسخ ارتعاشی به تفصیل بررسی شده است.

کاغذیان و همکاران [۲۹] ارتعاشات غیرخطی یک نانوعمل‌گر پیزوالکتریک بایمورف را با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی مطالعه نمودند. برای استخراج و حل معادلات از اصل همیلتون، روش گالرکین و نظریه تغییرات هی استفاده شده است. همچنین اثر پارامترهایی چون ولتاژ، ضریب مقیاس و ضخامت و طول لایه‌های پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی مطالعه شده است.

تاکنون تأثیر میرایی در ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق گرافن بررسی نشده است؛ لذا هدف اصلی از این پژوهش بررسی نحوه تأثیر پارامترهای بستر و نانوورق گرافن بر ارتعاشات غیرخطی سیستمی با میرایی انرژی می‌باشد.

۲- شرح مساله

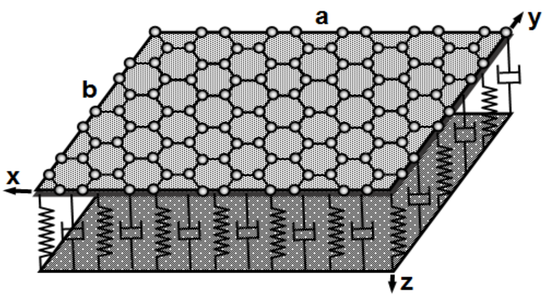
نظریه الاستیک غیرمحلی اولین بار توسط ارینگن[1] برای در نظر گرفتن اثر پارامتر سایز کوچک[2] در مدل‌سازی مکانیک محیط پیوسته در مسائل غیرکلاسیک ارائه شد [۳۰].

در نظریه غیرمحلی بر خلاف نظریه الاستیسیته کلاسیک، تنش در یک نقطه از یک مدل فیزیکی پیوسته وابسته به کرنش تمامی نقاط آن مدل است. به بیان دیگر کرنش در یک نقطه وابسته به تنش و مشتقات جزئی آن در نقطه مذکور است. معادله دیفرانسیل مربوط به این نظریه، توسط ارینگن به‌صورت رابطه (۱) بیان شده است [۳۰]، که در آن تانسور تنش غیرمحلی با σ_{ij} و تانسور تنش محلی با t_{ij} نشان داده شده‌اند.

$$(1-\mu\nabla^2)\sigma_{ij}=t_{ij} \qquad (۱)$$

1. Eringen
2. Small scale effect

مطابق شکل ۱، یک ورق گرافن روی یک محیط ویسکوالاستیک قرار گرفته است، که این محیط به‌صورت همزمان دارای خواص کششی- فشاری و میرایی است. ابعاد ورق گرافن $a\times b$ و ضخامت h می‌باشد. این نانوورق ناهمسان‌گرد دارای مدول الاستیک E_1 و E_2 و نسبت پواسون ν_{12} و ν_{21} در دو راستای x و y است. همچنین مدول برشی G_{12}، چگالی جرمی ρ و میرایی داخلی τ_d نیز سایر خواص آن است. مطابق شکل، مبدأ مختصات در گوشه ورق آن هم در صفحه میانی ضخامت آن قرار گرفته است.



شکل ۱ مدل هندسی سیستم نانوکامپوزیت پایه گرافنی

براساس نظریه کلاسیک ورق‌ها، میدان جابجایی در هر نقطه به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود [۳۱].

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad (۲)$$

به این دلیل که هدف از این پژوهش، بررسی ارتعاش با دامنه زیاد ورق گرافن و تغییر مکان‌های بزرگ است، از روابط کرنش- جابجایی غیرخطی وون- کارمن[3] مطابق مرجع [۳۱] در تحلیل استفاده شده است. بر اساس این روابط می‌توان کرنش را به‌صورت رابطه (۳) نوشت.

$$\{\varepsilon^0\}+\{\varepsilon^1\}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

در رابطه فوق $\{\varepsilon^0\}$ و $\{\varepsilon^1\}$ به ترتیب معرف بردارهای کرنش درون صفحه ای و برون صفحه‌ای یا انحنای صفحه میانی می‌باشند.

پس از آن، برای به‌دست آوردن رابطه تنش-کرنش صفحه ای برای یک ورق ناهمسان‌گرد ویسکوالاستیک با میرایی سازه‌ای که ساختار درونی آن بر اساس مدل کلوین برای مواد ویسکوالاستیک باشد، مطابق مرجع [۳۲]، مدول یانگ برای این مواد از $E_{1,2}$ به $(1+\tau_d\,\partial/\partial t)E_{1,2}$ تبدیل می شوند که ثابت آسایش زمانی ماده ویسکوالاستیک را با τ_d نمایش نشان داده‌ایم. با در نظرگرفتن نظریه غیرمحلی که در رابطه (۱) اشاره شده، رابطه (۴) بیان می‌شود.

3. Von-Karman

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{nl}=\left(1+\tau_d\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0\\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{۴}$$

که در آن درایه‌های ماتریس سفتی کاهش‌یافته بر طبق مرجع [۳۱] به‌صورت رابطه (۵) است.

$$\begin{aligned}&\bar{Q}_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\bar{Q}_{12}=\frac{\nu_{12}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\ &\bar{Q}_{12}=\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\bar{Q}_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},\\ &\bar{Q}_{66}=G_{12}=\frac{E_1}{2\left(1+\nu_{12}\right)}\end{aligned} \tag{۵}$$

منتجه‌های تنش صفحه‌ای و ممان برون صفحه‌ای غیرمحلی نیز از روابط (۶) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&\left(1-\mu\nabla^2\right)\{N\}_{nl}=[[A][B]]\begin{Bmatrix}\{\varepsilon^0\}\\ \{\varepsilon^1\}\end{Bmatrix}\\ &\left(1-\mu\nabla^2\right)\{M\}_{nl}=[[B][D]]\begin{Bmatrix}\{\varepsilon^0\}\\ \{\varepsilon^1\}\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{۶}$$

ماتریس‌های A,B,D نیز به‌صورت رابطه (۷) بیان می‌شوند.

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_{ij}\left(1,z,z^2\right)dz\quad (i,j=1,2,6) \tag{۷}$$

اکنون رابطه بین منتجه های ممان و جابجایی عرضی را می‌توان بر اساس روابط کرنش- جابجایی و روابط ساختاری تنش- کرنش در قالب رابطه (۸) بیان کرد.

$$\begin{aligned}&\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}_{nl}=\\ &\left(1+\tau_d\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{21} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\partial^2 w_0/\partial x^2\\ -\partial^2 w_0/\partial y^2\\ -\partial^2 w_0/\partial x\,\partial y\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{۸}$$

۳- معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار سیستم

۳-۱- معادله حرکت

برای رسیدن به معادله حرکت سیستم از روش کار مجازی و اصل همیلتون استفاده می‌شود که با رابطه (۹) بیان می‌شود [۳۳].

$$\int_0^T\left(\delta K+\delta W-\delta U\right)dt=0 \tag{۹}$$

در رابطه فوق نماد δ معرف تغییرات بوده، K انرژی جنبشی مجازی، W کارمجازی انجام شده توسط نیروی خارجی اعمالی و U انرژی پتانسیل (کرنشی) مجازی است و مطابق روابط (۱۰) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}&K=\frac{1}{2}\iiint\rho\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right]dV\\ &U=\frac{1}{2}\iiint\left[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\gamma_{xx}\right]dV\\ &W=\iiint\left(q(x,y,t)+f_{ext}\right)w_0\,dV\end{aligned} \tag{۱۰}$$

در این روابط، $q(x,y,t)$ نیروی خارجی وارده از بستر و f_{ext} نیروی حاصل از تحریک هارمونیک خارجی هستند. بار خارجی عرضی که توسط لایه ویسکوالاستیک به ورق گرافن وارد می‌شود، برابر است با رابطه (۱۱).

$$q(x,y,t)=-K_w(w_0)-C_d\frac{\partial}{\partial t}(w_0) \tag{۱۱}$$

پارامترهای K_W و C_D به ترتیب ضریب سختی وینکلر و میرایی بستر پلیمری ویسکوالاستیک می‌باشند. می‌توان بر اساس اصل همیلتون معادلات حرکت سیستم را در قالب سه رابطه (۱۲) تا (۱۴) بیان کرد.

$$\delta u_0=0:\frac{\partial N_{xx}^0}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}^0}{\partial y}-I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial t^2}=0 \tag{۱۲}$$

$$\delta v_0=0:\frac{\partial N_{yy}^0}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}^0}{\partial x}-I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial t^2}=0 \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}&\delta w_0=0:\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+q(x,y,t)\\ &\quad+N_{xx}^0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+2N_{xy}^0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}+N_{yy}^0\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\\ &\quad-I_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+I_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial t^2}\right)+f_{ext}=0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در روابط فوق اینرسی‌های جرمی ورق با رابطه (۱۵) حساب می‌شوند.

$$\left(I_0,I_1,I_2\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho_0\left(1,z,z^2\right)dz \tag{۱۵}$$

سپس با انتخاب تابع تنش ایری[1] مناسب $\varphi(x,y)$، که در معادلات زیر صدق کند، مطابق رابطه (۱۶) تحلیل مسأله ادامه پیدا می‌کند.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=N_{xx}^0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=N_{yy}^0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-N_{xy}^0 \tag{۱۶}$$

اگر جهت مثبت محور z به سمت پایین فرض شود، با استفاده از دسته معادلات (۶)، (۱۴) و (۱۶) و جای‌گذاری عبارات مربوط به جابجایی عرضی درون این معادلات و با فرض متقارن بودن صفحه گرافن ($B_{ij}=0$)، نهایتاً معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر سیستم را می‌توان بر اساس تغییر شکل عرضی ورق و تابع تنش ایری و با استفاده از روابط (۱۷) الی (۱۸) نوشت.

$$\begin{aligned}&\left(1+\tau_d\frac{\partial}{\partial t}\right)D\left(w_0\right)\\ &\quad-\left(1-\mu\nabla^2\right)\left[M\left(w_0\right)+q+f_{ext}+L\left(w_0,\varphi\right)\right]=0\end{aligned} \tag{۱۷}$$

1. Airy stress function

$$A_{11}^{*}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\left(A_{12}^{*}+2A_{66}^{*}\right)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+A_{22}^{*}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} =\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \tag{۱۸}$$

معادله (۱۷) معادله حرکت عرضی حاکم بر سیستم و معادله (۱۸) نیز معادله حاکم بر تابع تنش ایری می‌باشد. در این روابط به اختصار از عبارات $D(w_0)$ ، $M(w_0)$ ، $L(w_0,\varphi)$ و A_{ij}^{*} استفاده شده است که در بخش پیوست این عبارات معرفی شده و فرم کامل آن‌ها ارائه شده است.

۳-۲- شرایط مرزی

مطابق مدل سیستم مورد مطالعه، شرایط مرزی ورق به‌صورت چهار طرف تکیه‌گاه‌ساده[1] در نظر گرفته می‌شود که فاقد نیروی درون صفحه ایی می‌باشد؛ پس می‌توان شرایط جابجایی و تابع تنش را در موقعیت مرزهای ورق با روابط (۱۹) نشان داد.

$$\begin{aligned}&w_0=0,\, M_{xx}=0,\, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0,\, \int_0^b\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy=0\;;\; x=0,a\\ &w_0=0,\, M_{yy}=0,\, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=0,\, \int_0^a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx=0\;;\; y=0,b\end{aligned} \tag{۱۹}$$

با فرض حرکت هارمونیک زمانی برای هر کدام از نانوورق‌ها و با توجه به شرایط مرزی مطرح شده در روابط (۱۹)، برای حل معادلات (۱۷) و (۱۸) می‌توان از تابع (۲۰) که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند، استفاده کرد.

$$w_0\left(x,y,t\right)=h\sum_m\sum_n\sin\left(\alpha_m x\right)\sin\left(\beta_n y\right)\eta(t) \tag{۲۰}$$

در رابطه فوق، اندیس های m و n معرف نیم موج های مود حرکتی بوده و $\alpha_m=m\pi/a$ و $\beta_n=n\pi/b$ می‌باشند. همچنین $\eta(t)$ یک تابع مجهول و پاسخ زمانی سیستم می‌باشد که در ادامه بر اساس روش مقیاس های زمانی بسط داده شده و معادلات دیفرانسیل نظیر آن استخراج خواهد شد.

با جای‌گذاری رابطه (۲۰) در معادله (۱۸) و پس از انجام محاسبات ریاضی، تابع تنشی که شرایط مرزی حاکم بر مساله را ارضاء می کند، به فرم رابطه (۲۱) به‌دست می‌آید.

$$\varphi(x,y,t)=\frac{h^2}{32}\left[\frac{(a/b)^2}{A_{22}^{*}(n/m)^2}\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)+\frac{(n/m)^2}{A_{11}^{*}(a/b)^2}\cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right)\right]\eta(t)^2 \tag{۲۱}$$

۳-۳- اعمال روش گالرکین بر معادلات

مطابق مرجع [۳۳]، یکی از روش‌های قدرتمند برای تبدیل معادلات حرکت سیستم به فرم معادلات دیفرانسیل زمانی، که در بسیاری از مقالات همچون [۲۷] نیز از آن استفاده شده است، روش گالرکین است. با استفاده از روش گالرکین، که فرم کلی آن مطابق رابطه (۲۲) ارائه شده است، معادله (۱۷) به فرم یک معادله مودال زمانی (رابطه (۲۲)) تبدیل خواهد شد.

$$\iint\Gamma(w,\varphi)\,\Psi(x,y)\,dy\,dx=0 \tag{۲۲}$$

1. Simply support

در رابطه (۲۲)، $\Gamma(w,\varphi)$ معرف تابع باقی‌مانده است که در اینجا نظیر معادله حاکم بر سیستم می‌باشد که در رابطه (۱۷) به آن اشاره شده و $\Psi(x,y)$ تابع وزنی کاندید شده فضایی مناسب برای ارضاء شرایط مرزی مطابق رابطه (۱۹) می‌باشد. با جای‌گذاری معادلات (۱۷) و (۲۰) در رابطه (۲۲)، می‌توان رابطه (۲۳) را نوشت.

$$\int_0^a\int_0^b\mathrm{Sin}\left(\alpha_m x\right)\mathrm{Sin}\left(\beta_n y\right)\left[\left(1+\tau_d\frac{\partial}{\partial t}\right)D\left(w_0\right)+\left(1-\mu\nabla^2\right)\left\{M\left(w_0\right)-q-f_{ext}-L\left(w_0,\varphi\right)\right\}\right]dy\,dx=0 \tag{۲۳}$$

اکنون فرم کلی تابع تنش ایری که وابسته به زمان و مختصات فضایی است (رابطه (۲۱)) را در معادله (۲۳) وارد نموده و پس از انجام محاسبات، مطابق با مرجع [۲۷]، با در نظر گرفتن مد اصلی فرکانس سیستم غیرخطی حاضر $(m=1,n=1)$ ، معادله دیفرانسیل زمانی مودال به فرم کلی رابطه (۲۴) به‌دست می‌آید که ضرایب این رابطه بر اساس پارامترهای سیستم در پیوست آمده است.

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+C_1\frac{d}{dt}+C_2\right)\eta(t)+C_3\,\eta(t)^3=f_{ext} \tag{۲۴}$$

۴- پاسخ ارتعاشات اجباری غیرخطی با روش اغتشاش

ابتدا با فرض تحریک هارمونیک خارجی با فرکانس ω_{ex} ، فرم کلی مساله با توجه به معادله (۲۴)، به‌صورت رابطه (۲۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\ddot{\eta}+C_1\,\dot{\eta}+C_2\,\eta+C_3\,\eta^3=F\cos\left(\omega_{ex}\,t\right) \tag{۲۵}$$

با توجه به وجود عبارات غیرخطی در معادله فوق، با استفاده از نظریه اغتشاشات[2] و بوسیله روش مقیاس‌های زمانی چندگانه [3]، پاسخ سیستم به تحریک خارجی تحلیل می‌شود. مطابق مراجع [۳۶-۳۴] با لحاظ تغییراتی در متغیرها مطابق این روابط: $F=\bar{f}\varepsilon, C_3=\bar{\alpha}\varepsilon, C_2={\omega_0}^2, C_1=2\bar{\mu}\varepsilon$ امکان استفاده از روش مقیاس‌های زمانی مهیا می‌شود. در این روابط ε بیان‌گر پارامتر کوچک اغتشاشی بی بعد از مرتبه اول می‌باشد.

لازم به ذکر است در صورت استفاده از مراتب بزرگ‌تر، ترم‌هایی از پارامترهای سیستم در جواب معادله دیفرانسیل ظاهر خواهد شد که به علت کوچکی از پاسخ تحلیلی سیستم حذف می‌شوند و لذا ترم های مرتبه بالا را می‌توان به‌عنوان خطای حل معادله دیفرانسیل منظور نمود. همچنین بر طبق کارهای انجام شده مرتبه بزرگی جملات معادله (۲۵) نیز یکسان فرض شده است. با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای ذکر شده، می‌توان معادله (۲۵) را به فرم رابطه (۲۶) بازنویسی کرد.

$$\ddot{\eta}+{\omega_0}^2\,\eta=-2\varepsilon\,\bar{\mu}\,\dot{\eta}-\bar{\alpha}\,\varepsilon\,\eta^3+\bar{f}\,\varepsilon\cos\left(\omega_{ex}\,t\right) \tag{۲۶}$$

در روش پیشنهاد شده، مقیاس‌های زمانی را به ترتیب از تند به کند و به فرم $T_n=\varepsilon^n\,t$ منظور نموده و روابط مشتق با توجه به قاعده مشتق زنجیره ای مطابق رابطه (۲۷) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial T_n}=D_n\;;\; n=0,1,2,\ldots\\ &\frac{d}{dt}=\left(D_0+\varepsilon\,D_1+\varepsilon^2\,D_2+\cdots\right)\\ &\frac{d^2}{dt^2}=\left({D_0}^2+2\,\varepsilon\,D_0\,D_1+\varepsilon^2\,{D_1}^2+\cdots\right)\end{aligned} \tag{۲۷}$$

2. Perturbation
3. Multiple scale method

همچنین مطابق روش مقیاس‌های زمانی، فرم کلی جواب نیز مطابق رابطه (۲۸) بسط داده می‌شود.

$$\eta(t)=\eta_0\left(T_0,T_1,\ldots\right)+\varepsilon\,\eta_1\left(T_0,T_1,\ldots\right)+O\left(\varepsilon^2\right) \tag{۲۸}$$

مساله ارتعاشات اجباری مورد بحث برای حالتی که $\omega_{ex}\to\omega_0$ (حالت تشدید اولیه[1]) تحلیل می‌شود؛ در این حالت فرکانس تحریک را به‌صورت $\omega_{ex}=\omega_0+\varepsilon\sigma$ بازنویسی کرده که درآن، σ پارامتر انحراف از تشدید[2] است. سپس رابطه (۲۸) در معادله اصلی سیستم جای‌گذاری شده و نهایتاً رابطه (۲۹) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\left(D_0{}^2+2\varepsilon D_0 D_1+\varepsilon^2 D_1{}^2+\omega_0{}^2+\cdots\right)\left(\eta_0+\varepsilon\eta_1+\cdots\right)\\&=-2\varepsilon\,\bar{\mu}\left(D_0+\varepsilon D_1+\cdots\right)\left(\eta_0+\varepsilon\eta_1+\cdots\right)\\&-\bar{\alpha}\,\varepsilon\left(\eta_0+\varepsilon\eta_1+\cdots\right)^3+\bar{f}\,\varepsilon\cos\left(\omega_{ex}t\right)\end{aligned} \tag{۲۹}$$

چون ε^i ها مستقل خطی هستند، تمامی ضرایب آن‌ها در معادله فوق باید مساوی صفر باشند، لذا: روابط (۳۰) و (۳۱) حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}&O\left(\varepsilon^0\right):D_0{}^2\eta_0+\omega_0{}^2\eta_0=0\;;\\&\eta_0=A\left(T_1,T_2,\ldots\right)e^{i\omega_0T_0}+c.c\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}&O\left(\varepsilon^1\right):D_0{}^2\eta_1+\omega_0{}^2\eta_1\\&=-2D_0D_1\eta_0-2\bar{\mu}D_0\eta_0-\bar{\alpha}\eta_0{}^3+\bar{f}\cos\left(\omega_{ex}t\right)\end{aligned} \tag{۳۱}$$

معادله دوم به شکل رابطه (۳۲) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}&O\left(\varepsilon^1\right):D_0{}^2\eta_1+\omega_0{}^2\eta_1\\&=-2i\,\omega_0D_1A\,e^{i\,\omega_0T_0}-2i\,\omega_0\,\bar{\mu}A\,e^{i\,\omega_0T_0}\\&-\bar{\alpha}\left(A^3e^{3i\,\omega_0T_0}+3A^2\bar{A}e^{i\,\omega_0T_0}\right)+\frac{1}{2}\bar{f}\,e^{i\,\omega_0T_0}e^{i\,\sigma T_1}+c.c\end{aligned} \tag{۳۲}$$

شرط رسیدن به جواب بامعنی در معادله بالا، حذف جملات سکولار[3] در پاسخ زمانی است تا پاسخ در زمان طولانی به بی نهایت میل نکند، سپس رابطه (۳۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&-2i\,\omega_0D_1A\,e^{i\,\omega_0T_0}-2i\,\omega_0\,\bar{\mu}A\,e^{i\,\omega_0T_0}\\&-3\bar{\alpha}A^2\bar{A}e^{i\,\omega_0T_0}+\frac{1}{2}\bar{f}\,e^{i\,\omega_0T_0}e^{i\,\sigma T_1}=0\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با استفاده از فرم قطبی برای ساده تر شدن روند تحلیل عملیات ریاضی، فرض میکنیم: $A=\alpha e^{i\beta}/2$ باشد، سپس معادله فوق را با استفاده از فرض بالا بازنویسی می‌کنیم. برای صفر شدن کل عبارت بالا، قسمت موهومی و حقیقی آن باید همزمان مساوی صفر باشند؛ در نهایت دستگاه معادلات مطابق (۳۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}:\ \beta'=\frac{3\bar{\alpha}}{8\omega_0}\alpha^2-\frac{\bar{f}}{2\omega_0\,\alpha}\cos\left(\sigma T_1-\beta\right)\\&\mathrm{Im}:\ a'=-\bar{\mu}\,\alpha+\frac{\bar{f}}{2\omega_0}\sin\left(\sigma T_1-\beta\right)\end{aligned} \tag{۳۴}$$

1. Primary Resonance
2. Detuning parameter
3. Secular term

پاسخ حالت مانای سیستم[4] از مساوی صفر قرار دادن a' و β' در معادلات فوق به‌دست آمده و سرانجام با حذف پارامتر کوچک اغتشاش، فرم بسته[5] و پاسخ تحلیلی زیر برای ارتعاشات اجباری غیرخطی سیستم (۳۵) حاصل خواهد شد.

$$\frac{C_1^2}{4}+\left(\omega_{ex}-\omega_0-\frac{3C_3}{8\omega_0}\alpha^2\right)^2=\frac{F^2}{4\alpha^2\,\omega_0{}^2} \tag{۳۵}$$

۵- نتایج و تشریح آن‌ها

۵-۱-اعتبارسنجی با منابع

در این بخش با استفاده از نتایج به‌دست آمده از روابط تحلیلی ارائه شده در مراجع موجود، صحت و اعتبار نتایج به‌دست آمده از روابط تحلیلی استخراج شده در حالت خاصی که سیستم بدون میرایی داخلی و خارجی باشد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. با صرف‌نظر کردن از عوامل میرایی داخلی و خارجی در سیستم، در معادله (۲۵) ضریب $C_1=0$ شده و با در نظر گرفتن مشخصات مادی و هندسی که در ادامه به آن اشاره شده، نتایج مربوط به ارتعاش اجباری سیستم غیرخطی الاستیک جهت مقایسه با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۷] به‌دست می‌آید. دامنه فرکانس به ازای نسبت های متفاوت فرکانس نیروی تحریک به فرکانس سیستم و برای دو حالت افزایش یا کاهش نسبت فرکانسی در جداول ۱ و ۲ با نتایج نظیر ارائه شده در این مرجع مقایسه شده است که این مقایسه صحت مدل تحلیلی ارائه شده را به اثبات می‌رساند. در ادامه به مفاهیم حالت افزایشی و کاهشی فرکانس که در این جداول آمده، اشاره خواهد شد.

$$\begin{aligned}&E_1=1.949\,\mathrm{TPa},\ E_2=1.962\,\mathrm{TPa},\ h=0.156\,\mathrm{nm}\\&\nu_{12}=0.201,\ \rho=5295\,\mathrm{Kg/m^3},\ a=4.888\,\mathrm{nm}\\&b=4.855\,\mathrm{nm},\ \mu=1.5\,\mathrm{nm}^2,\ p^*=1,\ k^*=20\end{aligned}$$

جدول ۱ مقایسه دامنه فرکانس در نسبت های متفاوت فرکانس نیروی تحریک به فرکانس سیستم (ω_{ex}/ω_0) در حالت افزایشی

نسبت فرکانسی	۱	۱/۱	۱/۲	۱/۳	۱/۴
دامنه فرکانس در مرجع [۲۷]	۰/۳۹۲	۰/۴۵۳	۰/۴۸۶	۰/۵۳۳	۰/۵۷۱
دامنه فرکانس در تحقیق	۰/۳۶۸	۰/۴۴۷	۰/۴۹۴	۰/۵۴۲	۰/۵۹۱

جدول ۲ مقایسه دامنه فرکانس در نسبت های متفاوت فرکانس نیروی تحریک به فرکانس سیستم (ω_{ex}/ω_0) در حالت کاهشی

نسبت فرکانسی	۲	۱/۹	۱/۸	۱/۷	۱/۶
دامنه فرکانس در مرجع [۲۷]	۰/۰۹۴	۰/۱۰۴	۰/۱۲۳	۰/۱۴۸	۰/۱۸۶
دامنه فرکانس در تحقیق	۰/۰۸۶	۰/۰۹۶	۰/۱۲۷	۰/۱۴۲	۰/۱۹۱

۵-۲-تحلیل نتایج

در ادامه برای تحلیل نتایج به‌دست آمده، با توجه به مراجع از خواص زیر برای ورق گرافن ناهمسان‌گرد استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}&E_1=2.434\,\mathrm{TPa},\ E_2=2.473\,\mathrm{TPa},\ h=0.129\,\mathrm{nm}\\&\nu_{12}=0.197,\ \rho=6316\,\mathrm{Kg/m^3},\ a=b=10\,\mathrm{nm}\end{aligned}$$

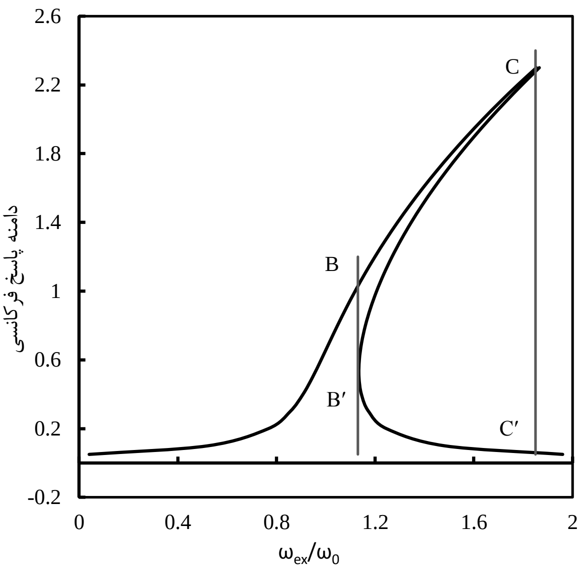
4. Steady State Response
5. Closed Form

همچنین برای بی بعدشدن پارامترهای سیستم از رابطه (۳۶) استفاده شده است.

$$K_w = D_{11}\frac{k^*}{a^4},\ C_D = C\sqrt{\frac{E_1}{a^2}},\quad \tau_d = \tau\sqrt{\frac{a^2}{D_{11}}},\ p = p^* E_1\left(\frac{h}{a}\right)^4 \qquad (۳۶)$$

نمودار شکل ۲، فرم کلی منحنی مشخصه پاسخ فرکانسی را برای تشدید اولیه در حالت خاص و در غیاب بستر و به ازای پارامترهای سیستم برابر با $p^* = 2, \tau = 0.02\,\mathrm{p}, \mu = 1\mathrm{nm}^2$ ، نشان می‌دهد. محور افقی بیان‌گر نسبت فرکانس تحریک به اولین فرکانس طبیعی خطی سیستم بوده و محور عمودی نیز بیشینه دامنه بی بعد نوسانات در حالت تشدید است که مربوط به نقطه میانی گرافن است. با افزایش فرکانس تحریک در نسبت های پایین فرکانسی، در نقطه A شاهد افزایش تدریجی دامنه نوسان هستیم، سپس این افزایش دامنه نوسانات تا نقطه بیشینه C با شدت بیشتری ادامه پیدا می‌کند. پس از گذر از این نقطه، پدیده جهش[1] در نمودار اتفاق می‌افتد و دامنه نوسانات پایدار سیستم به نقطه C' منتقل می‌شود (در این‌جا دامنه تشدید به ۴ درصد مقدار آن قبل از جهش کاهش یافته است).

در حالی که با کاهش تدریجی فرکانسی از نسبت فرکانسی نزدیک به ۲ تا نقطهB' شاهد افزایش تدریجی دامنه نوسانات تشدید هستیم ولی در نقطه B' پدیده جهش دامنه به یک مقدار بزرگتر و تا نقطه B ادامه می‌یابد و پس از آن نیز کاهش فرکانس تحریک، کاهش تدریجی دامنه نوسانات را در پی دارد. نکته مهم وجود ناحیه بین دوخط نقطه چین موسوم به ناحیه تشدید- جهش دوگانه در تحلیل تحریک اجباری سیستم غیر خطی است که دوبار تغییر ناگهانی در دامنه نوسان اتفاق می‌افتد. در این ناحیه ۳ جواب تحلیلی وجود دارد. نواحی محصور از منحنی مابین نقاط B تا C و نیز مابین نقاط C' تا B' به ترتیب مربوط به جواب پایدار سیستم به ازای افزایش و کاهش فرکانس تحریک می‌باشد.

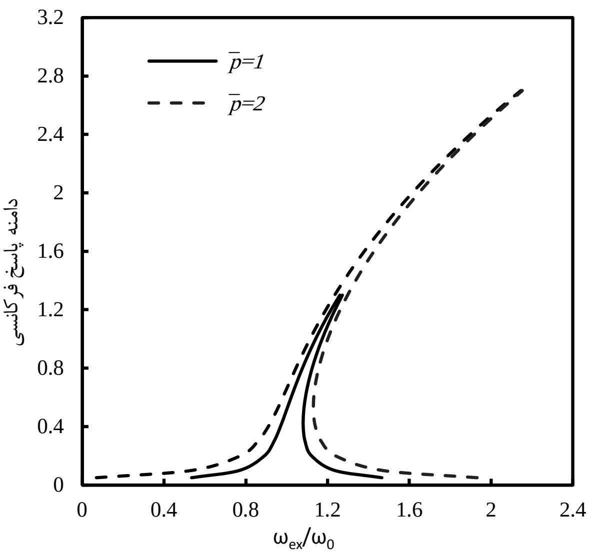


شکل ۲ منحنی رابطه دامنه- فرکانس نیروی تحریک، برای تشریح ناحیه چندجوابی

1. Jump

اما ناحیه منحنی بین نقاط B' تا C جواب ناپایدار سیستم است. نقاط C و B' که در آن به ترتیب دامنه تشدید به ازای افزایش و یا کاهش فرکانس تحریک با پدیده جهش همراه است به نقاط دوشاخگی زینی[2] معروف می‌باشند.

اینکه سیستم ارتعاشی در کدام یک از این نقاط با پدیده جهش مواجه خواهد شد و پاسخ پریودیک سیتم غیرخطی جذب کدام یک از حالت‌های پایدار دوگانه خواهد شد به شرایط اولیه سیستم و جهت تغییرات فرکانس تحریک وابسته می‌باشد. همچنین این منحنی بیان‌گر رفتار هیستریک[3] و از نوع سخت شونده[4] سیستم غیرخطی نوسانی است، به بیان دیگر رفتار غیرخطی سیستم از نوع سخت شونده است، زیرا با افزایش فرکانس تحریک دامنه نوسان نیز زیادتر می‌شود و این موضوع به‌دلیل در نظر گرفتن ترم‌های مرتبه بالاتر و غیرخطی در روابط کرنش- جابه‌جایی است که باعث رخداد پدیده سختی شوندگی در رفتار سازه می‌شود. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف سیستم بر تغییرات منحنی پاسخ بررسی می‌شود. با توجه به نمودار شکل ۳، اگر دامنه تحریک هارمونیک افزایش یابد، علاوه بر اینکه میزان بیشینه دامنه نوسانات و همچنین نسبت فرکانسی متناظر با این بیشینه دامنه افزایش‌یافته، عرض ناحیه تشدید- جهش دوگانه نیز افزایش پیدا می‌کند، و تغییر زیادی در خمیدگی منحنی دیده نمی‌شود. در شکل ۴، برای میرایی بستر ۰/۱، دامنه بی بعد بیشینه برابر ۰/۶۷ در نسبت فرکانسی ۱/۰۸ اتفاق می‌افتد. حال با نصف شدن میزان میرایی محیط، دامنه بیشینه برابر ۱/۳۴ و در نسبت فرکانسی ۱/۲۸ می‌باشد. مطابق نمودارهای ارائه شده در شکل‌های ۴ و ۵، با افزایش پارامتر میرایی در سیستم، علاوه بر اینکه بیشینه نوسان در فرکانس تحریک کمتری و نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی سیستم اتفاق می‌افتد. مقدار بیشینه نوسانات شدیدا کاهش پیدا می کند، و دلیل آن نیز این است که انرژی بیشتری از سیستم اتلاف شده است. نکته دیگر این است که مقادیر میرایی داخلی و خارجی تأثیر بسیار کمی بر میزان خمش این منحنی دارند.



شکل ۳ منحنی های رابطه دامنه _ فرکانس نیروی تحریک به ازای مقادیر مختلف بزرگی نیرو، برای حالت
$\mu = 1\mathrm{nm}^2, \tau = 0.1\mathrm{p}, C = 0.1n, \bar{k} = 10$

2. Saddle-node bifurcation
3. Hysterics
4. Hardening

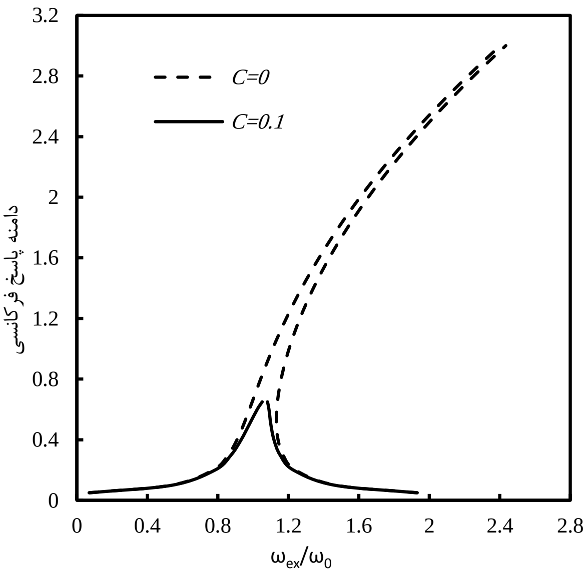
ضمنا بدون درنظرگرفتن میرایی در سیستم این منحنی نامحدود بوده و فاقد نقطه زینی و بازگشتی است. منحنی نقطه چین نیز متناظر با شرایط سیستم کاملا الاستیک و مطابق پاسخ در مرجع [۲۷] می‌باشد.

در شکل ۵ نیز، برای میرایی داخلی ۰/۱، دامنه بی بعد بیشینه برابر ۰/۴۷ در نسبت فرکانسی ۱/۰۵ اتفاق می‌افتد. حال با نصف شدن بزرگی میرایی گرافن، دامنه بی بعد بیشینه تحریک برابر ۰/۹۴ و در نسبت فرکانسی ۱/۱۴ می‌باشد. با توجه به شکل ۶، افزایش پارامتر سختی خطی بستر باعث کاهش شدید دامنه پاسخ می‌شود.

همچنین افزایش سختی بستر باعث خمیده شدن منحنی پاسخ به سمت راست و به حالت قائم شده و در نتیجه ناحیه تشدید- جهش را کاهش می‌دهد. به طوریکه در این حالت خاص از سیستم، برای پارامترهای بی بعد سختی بستر ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰، نسبت فرکانسی متناظر با بیشینه نوسانات تشدید به ترتیب با مقادیر ۲/۷۵، ۲/۴۳، ۱/۳۸ برابر هستند. لذا افزایش سختی بستر علاوه بر افزایش فرکانس خطی سیستم، اثرات غیرخطی[1] سیستم را نیز کاهش می‌دهد. لذا در تحلیل سیستم هایی با محیطی با سختی بالا می‌توان از تحلیل خطی با تقریب مناسبی به جای غیرخطی استفاده نمود.

با توجه به این حقیقت که افزایش پارامترغیرمحلی، عاملی برای کاهش سفتی گرافن بوده، میرایی ارتعاش سیستم را افزوده و منجر به کاهش فرکانس های خطی سیستم می‌شود. در ادامه تأثیر این پارامتر غیرمحلی در تحلیل اجباری غیرخطی بررسی می‌شود.

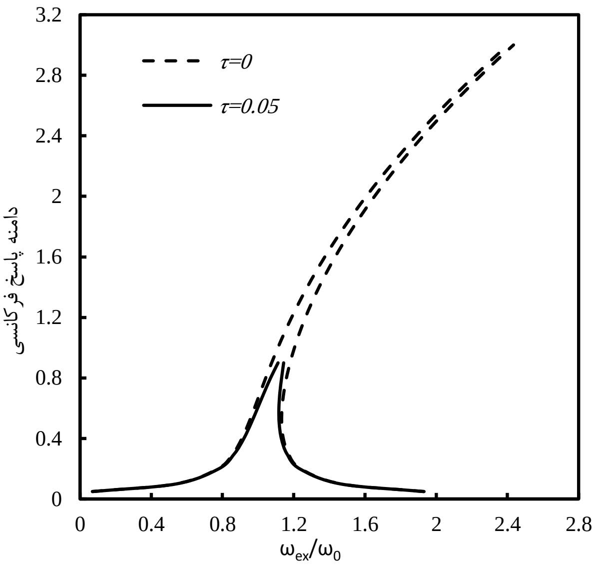
با توجه به شکل ۷، در تحریک اجباری غیرخطی گرافن، منحنی پاسخ فرکانسی دچار خمش بیشتری به سمت چپ می‌شود. اگرچه میزان بیشینه دامنه تغییر چندانی ندارد اما فرکانس متناظر نیز به میزان قابل توجهی افزایش یافته و همچنین عرض ناحیه جواب‌های چندگانه بیشتر می‌شود. این موضوع خود دلیلی بر این است که افزایش پارامترغیرخطی ورق گرافن باعث بیشتر شدن اثرات غیرخطی آن شده است.



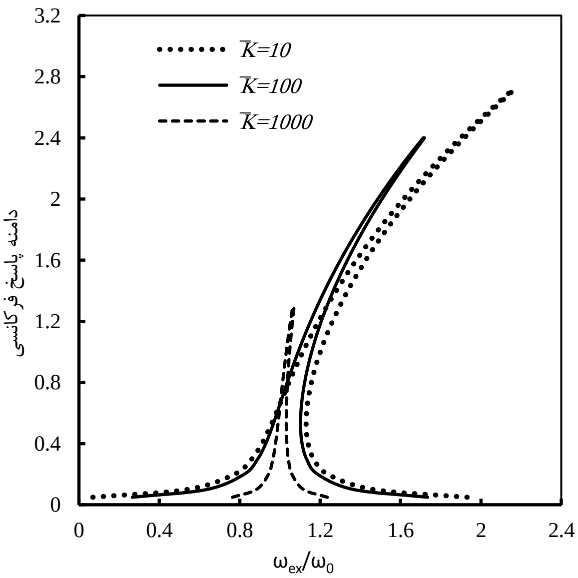
شکل ۴ منحنی های رابطه دامنه- فرکانس نیروی تحریک، به ازای مقادیر مختلف ضرایب میرایی خارجی برای حالت
$\mu=1nm^2, \tau=0.1p, \bar{p}=2, \bar{k}=10$

1. Nonlinearity

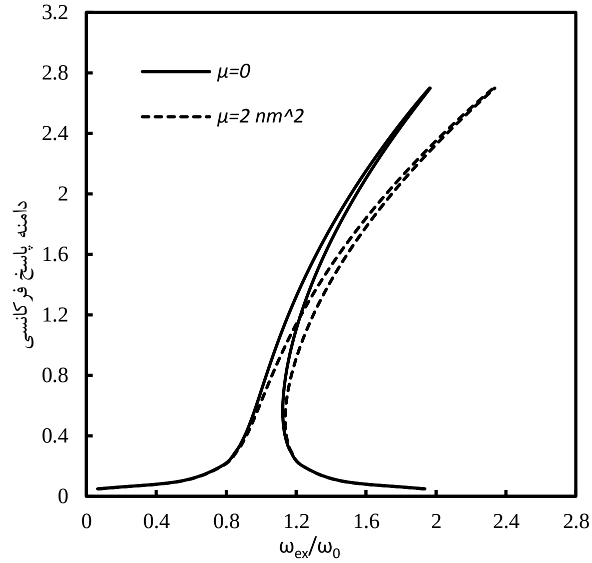
همچنین از شکل ۷ به‌خوبی استنباط می‌شود که با افزایش پارامتر غیرمحلی علاوه بر کاهش دامنه نوسانات، شیب منحنی نسبت به فرکانس تحریک افزایش می‌یابد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که حساسیت پاسخ فرکانسی در مقابل نسبت فرکانسی با افزایش پارامترغیرمحلی افزایش یافته است. در نهایت با توجه به شکل ۸، مقایسه‌ای بین پاسخ فرکانسی یک نانوریبون و یک ورق گرافن مربعی صورت گرفته است. تمایل نانوریبون به افزایش دامنه و همچنین بروز رفتار غیرخطی در حضور تحریک خارجی و با وجود میرایی سازه‌ای و محیطی به وضوح دیده می‌شود. می‌توان به این نتیجه دست یافت که در کاربردهای مربوط به محرک‌های فرکانس بالا در محیط‌هایی که اتلاف انرژی زیادی وجود دارد، استفاده از نانوریبون‌ها ارجحیت پیدا می‌کنند.



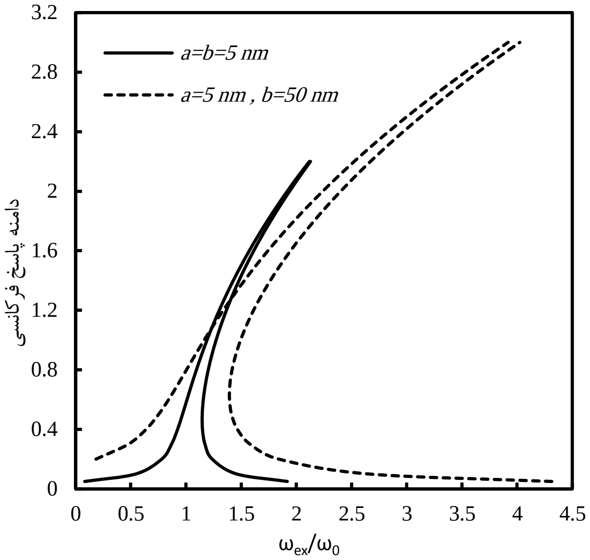
شکل ۵ منحنی های دامنه- فرکانس نیروی تحریک، به ازای مقادیر مختلف ضرایب میرایی ماده برای حالت
$\mu=1nm^2, C=0.1n, \bar{p}=2, \bar{k}=10$



شکل ۶ منحنی های رابطه دامنه- فرکانس نیروی تحریک، به ازای مقادیر مختلف ضرایب سختی بسترخارجی، برای حالت
$\mu=1nm^2, C=0.1n, \bar{p}=2, \tau=0.1p$



شکل ۷ منحنی های رابطه دامنه- فرکانس نیروی تحریک به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی، برای حالت $\bar{k}=10, C=0.1n, \bar{p}=2, \tau=0.1p$



شکل ۸ منحنی های رابطه دامنه- فرکانس نیروی تحریک، به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعادی نانوورق برای حالت $\bar{k}=10, C=0.1n, \bar{p}=2, \tau=0.1p$

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به منظور بررسی پارامترهایی همچون میرایی سازه‌ای و محیطی، سختی بستر و پارامتر غیر محلی بر نوسانات عرضی با دامنه بالای نانوورق گرافن از تئوری کلاسیک ورق‌ها، نظریه غیرمحلی تنش و روابط کرنش- جابه جایی غیرخطی وون- کارمن برای ورق ناهمسان‌گردی که در دو راستای صفحه با سلول کلوین- ویت مدل شده است، استفاده شده است. همچنین این تیر روی یک بستر ویسکولاستیک قرار داده شده و اثرات اتلاف انرژی محیط نیز تأثیرگذار بوده و در معرض نیروی نوسانی خارجی می‌باشد. معادلات ارتعاش غیرخطی این سیستم با استفاده از اصل همیلتون به‌دست آمده و سپس با روش گالرکین به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی بازنویسی شده است. سپس این معادله با نظریه اغتشاش و به‌روش مقیاس‌های زمانی چندگانه که یکی از دقیق‌ترین روش‌های حل معادلات غیرخطی است، به‌صورت تحلیلی و فرم بسته حل شده و پاسخ سیستم به‌دست آمده است.

نتایج به‌دست آمده نشان دهنده پدیده جهش و رفتار سخت‌شوندگی در تحلیل غیر خطی ورق می‌باشد. کاهش میرایی سازه‌ای و محیطی و همچنین کاهش سختی بستر به شکل چشم‌گیری دامنه بیشینه نوسانات در نزدیکی تشدید را افزایش داده و سبب افزایش اثرات غیرخطی در رفتار سازه می‌شود. افزایش پارامترغیرمحلی نیز منجر به رفتار غیرخطی سازه شده و اثر میراکنندگی دارد که با انحراف و خمیدگی بیشتر منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم قابل تشخیص می‌باشد. همچنین نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که نانوریبون‌ها را می‌توان به‌صورت خطی تحلیل نموده و نتایج قابل قبولی از آن‌ها به‌دست آورد.

۷- فهرست علائم

C_D میرایی خارجی بستر $(\mathrm{Pa\cdot sec})$

K_w سختی خارجی بستر (Pa)

علایم یونانی

ρ چگالی $(\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})$

μ پارامتر غیرمحلی $(\mathrm{nm^2})$

زیرنویس‌ها

NL غیرخطی

nl غیرمحلی

۸- پیوست

در معادله (۱۷) روابط (پ۱) و (پ۲) تعریف می‌شوند.

$$D(w_0)=D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}$$
$$M(w_0)=I_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_0-I_2\nabla^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}w_0\right) \qquad \text{(پ۱)}$$
$$L(w_0,\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

A_{ij}^* ها عبارات درایه‌های معکوس ماتریس سفتی کششی ورق هستند.

$$A_{11}^*=\frac{\bar{Q}_{22}}{h\left(\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}-\bar{Q}_{12}{}^2\right)},\ A_{22}^*=\frac{\bar{Q}_{11}}{h\left(\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}-\bar{Q}_{12}{}^2\right)},$$
$$\text{(پ۲)}$$
$$A_{12}^*=-\frac{\bar{Q}_{12}}{h\left(\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}-\bar{Q}_{12}{}^2\right)},\ A_{66}^*=\frac{1}{h\bar{Q}_{22}}$$

همچنین ضرایب معادله (۲۴) با رابطه (پ۳) تعریف می‌شوند.

$$C_1=\frac{-\tau\Phi+C_D\left(1+\mu\left(a^2+b^2\right)\right)}{\left(1+\mu X\right)\left(I_0+I_2X\right)}$$
$$C_2=\frac{-\Phi+K_W\left(1+\mu\left(a^2+b^2\right)\right)}{\left(1+\mu X\right)\left(I_0+I_2X\right)} \qquad \text{(پ۳)}$$
$$C_3=\frac{h\pi^4\left(\bar{Q}_{11}b^4+\bar{Q}_{22}a^4\right)\left(\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}-\bar{Q}_{12}{}^2\right)}{16\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22}\left(I_0+I_2X\right)}$$

که در آن‌ها پارامترهای Φ و X با رابطه (پ۴) به‌دست می‌آیند.

$$\Phi = \frac{h^3 \pi^4 \left(\bar{Q}_{11} b^4 + \bar{Q}_{22} a^4 + 2a^2 b^2 \left(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{33} \right) \right)}{12 a^2 b^2}$$

$$X = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \qquad \text{(پ۴)}$$

۹- مراجع

[1] Liu, Y. Dong, X. and Chen, P., “Biological and Chemical Sensors Based on Graphene Materials,” Chemical Society Reviews, Vol. 41, No. 6, pp. 2283–2307, 2012.

[2] Lee, H.L. Yang, Y.C. and Chang, W.J., “Mass Detection Using a Graphene-Based Nanomechanical Resonator,”Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 52, No. 2, pp. 25-101, 2013.

[3] Jo, G. Choe, M. Lee, S. Park, W. Kahng, Y.H. and Lee, T., “The Application of Graphene as Electrodes in Electrical and Optical Devices.,” Nanotechnology, Vol. 23, No. 11, pp. 11-21, 2012.

[4] Dai, M.D. Kim, C. and Eom, K., “Nonlinear Vibration Behavior of Graphene Resonators and Their Applications in Sensitive Mass Detection,” Nanoscale Res. Lett., Vol. 7, No. 499, pp. 1–10, 2012.

[5] Pradhan, S.C. and Kumar, A., “Vibration Analysis of Orthotropic Graphene Sheets using Nonlocal Elasticity Theory and Differential Quadrature Method,” Composite Structures., Vol. 93, No. 2, pp. 774–779, Jan. 2011.

[6] Amabili, M. and Farhadi, S., “Shear Deformable Versus Classical Theories for Nonlinear Vibrations of Rectangular Isotropic and Laminated Composite Plates,” J. Sound Vib., Vol. 320, No. 3, pp. 649–667, 2009.

[7] Golmakani, M.E.E. and Rezatalab, J., “Nonlinear Bending Analysis of Orthotropic Nanoscale Plates in an Elastic Matrix Based on Nonlocal Continuum Mechanics,” Composite Structures., Vol. 111, pp. 85–97, 2014.

[8] Firouz-Abadi, R.D. Mohammadkhani, H. and Amini, H., “Vibration Analysis of a Graphene Nanoribbon under Harmonic Lorentz Force using a Hybrid Modal-Molecular Dynamics Method,” International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 14, No. 2, pp. 1-16, 2014.

[9] Jiang, S. Gong, X. Guo, X. and Wang, X., “Potential Application of Graphene Nanomechanical Resonator as Pressure Sensor,” Solid State Communications., Vol. 193, pp. 30–33, 2014.

[10] Ansari, R. and Ramezan-Nejad, H., "Nonlinear Vibration Analysis of Embedded Multiwalled Carbon Nanotubes in Thermal Environment," In Persian, Journal of Solid Mechanics in Engineering, Vol. 1, No. 4, pp. 11-18, 2008.

[11] Jalali, A. and Esmaeilzadeh-Khadem, S., "Nonlinear vibration And Dynamic Stability Analysis Of A Nanocomposite Viscoelastic Microplate Under An Electrostatic Actuation," In Persian, Aerospace Mechanics Journal, Vol. 8, No. 3, pp. 51-68, 2012.

[12] Heidari-Rarani, M. Alimirzaei, S. and Torabi, K., “Analytical Solution For Free Vibration Of Functionally Graded Carbon Nanotubes (FG-CNT) reinforced Double-Layered Nano-Plates Resting On Elastic Medium”, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 55-66, 2015.

[13] Fathalilou, M. and Rezaee, M., "A comparison Between Two Approaches For Solving The Governing Nonlinear Equation Of Vibrations Of Electrostatic Micro-Sensors,” In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 6, pp. 101-107, 2016.

[14] Su, Y. Wei, H. Gao, R. Yang, Z. Zhang, J. Zhong, Z. and Zhang, Y., “Exceptional Negative Thermal Expansion and Viscoelastic Properties of Graphene Oxide Paper,” Carbon N. Y., Vol. 50, No. 8, pp. 2804–2809, 2012.

[15] Eichler, A. Moser, J. Chaste, J. Zdrojek, M. Wilson-Rae, I. and Bachtold, A., “Nonlinear Damping in Mechanical Resonators Made from Carbon Nanotubes and Graphene,” Nature Nanotechnology, Vol. 6, No. 6, pp. 339–342, 2011.

[16] Eshmatov, B.K., “Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plates,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 300, No. 3–5, pp. 709–726, 2007.

[17] Sakhaee-Pour, A. Ahmadian, M.T. and Naghdabadi, R., “Vibrational Analysis of Single-Layered Graphene Sheets,” Nanotechnology, Vol. 19, No. 8, pp. 1-7, 2008.

[18] He, X.Q. Wang, J.B. Liu, B. and Liew, K.M., “Analysis of Nonlinear Forced Vibration of Multi-Layered Graphene Sheets,” Computational Materials Science, Vol. 61, pp. 194–199, 2012.

[19] Gilchrist, D. Murmu, T. Mccarthy, M. A. and Adhikari, S., “Nonlocal Modal Analysis for Nanoscale Dynamical Systems,” 4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, 2013.

[20] Pouresmaeeli, S. Ghavanloo, E. and Fazelzadeh, S.A., “Vibration Analysis of Viscoelastic Orthotropic Nanoplates Resting on Viscoelastic Medium,” Composite Structures, Vol. 96, pp. 405–410, Feb. 2013.

[21] Jomehzadeh, E. and Saidi, A.R.R., “A Study on Large Amplitude Vibration of Multilayered Graphene Sheets,” Computational Materials Science, Vol. 50, No. 3, pp. 1043–1051, 2011.

[22] Wang, J., He, X., Kitipornchai, S. and Zhang, H., “Geometrical Nonlinear Free Vibration of Multi-Layered Graphene Sheets,” Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 44, No. 13, pp. 1-9, 2011.

[23] Liew, K.M. He, X.Q. and Kitipornchai, S., “Predicting Nanovibration of Multi-Layered Graphene Sheets Embedded in an Elastic Matrix,” Acta Mater., Vol. 54, No. 16, pp. 4229–4236, 2006.

[24] Shen, H.S., “Nonlocal Plate Model for Nonlinear Analysis of Thin Films on Elastic Foundations in Thermal Environments,” Composite Structures, Vol. 93, No. 3, pp. 1143–1152, 2011.

[25] Lin, S.M., “Analytical Solutions for Thermoelastic Vibrations of Beam Resonators with Viscous Damping in Non-Fourier Model,” International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 87, pp. 26–35, 2014.

[26] Hosseini, S. Mehrabani, H. and Ahmadi-Savadkoohi, A., “Forced Vibration of Nanoplate on Viscoelastic Substrate with Consideration of Structural Damping : An Analytical Solution,” Composite Structures, Vol. 133, pp. 8–15, 2015.

[27] Jomehzadeh, E. Saidi, A.R. Jomehzadeh, Z. Bonaccorso, F. Palermo, V. and Galiotis, C., “Nonlinear Subharmonic Oscillation of Orthotropic Graphene-Matrix Composite,” Computational Materials Science., Vol. 99, pp. 164–172, 2015.

[28] Pourashraf, S.T. Ansari, R. "Nonlinear forced Vibration Analysis Of Functionally Graded Nanobeams In Thermal Environments By Considering Surface Stress And Nonlocal Effects," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 16, pp. 17-26, 2015.

[29] Kaghazian, A. Foruzande, H. Hajnayeb, A. and Mohammad Sedighi, H. "Nonlinear Free Vibrations Analysis Of A Piezoelectric Bimorph Nano Actuator Using Nonlocal Elasticity Theory," In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 55-66, 2016.

[30] Eringen, A.C., Nonlocal Continuum Field Theories. Springer, 2002.

[31] Reddy, J.N., Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Crc Press, 2004.

[32] Drozdov, A.D., Viscoelastic Structures: Mechanics of Growth and Aging. Academic Press, 1998.

[33] Meirovitch, L., Fundamentals Of Vibrations, 2001st Ed. Mc Graw-Hill International Edition.

[34] Poorjamsjidian, M. Sheikhi, J. and MahjoobMoghadas, S., “An analytic Solutio Of Transversal Vibration And Frequency Response Of Quanitic Nonlinear Beam,” In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 13, No. 15, pp. 2-9, 2013.

[35] Rezaee, M. and Jahangiri, R., “Static/Dynamic Instability And Nonlinear Vibrations Of FG Plates Resting On Elastic Foundation Under Parametric Forcing Excitation,” In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 13, pp. 172-182, 2014.

[36] Rezaee, M. and Jahangiri, R., “Nonlinear Vibrations of Sandwich FG Plates Resting on Nonlinear Pasternak Foundation under Primary Resonance Excitation Using Modified FSDT,” In Persian, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 186-198, 2015.