



## تحلیل ارتعاش آزاد ورق مرکب مستطیلی هدفمند با استفاده از تئوری غیر محلی نمایی تغییر شکل برشی در یک محیط حرارتی

کوروش خورشیدی<sup>۱\*</sup>، ابوالفضل فلاح<sup>۲</sup>، علی سیاهپوش<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک

اراک، صندوق پستی ۳۸۱۵۶۸۸۳۴۹، ir.araku@khorshidi.k

### چکیده

### اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۵/۳/۸

پذیرش: ۹۵/۳/۲۲

### کلیدواژگان:

نانو ورق مستطیلی

مواد تابعی هدفمند

تئوری تغییر شکل برشی نمایی

محیط حرارتی

اصل همپلتون

در این مقاله تحلیل ارتعاش آزاد ورق مرکب مستطیلی تابعی هدفمند در محیط حرارتی بررسی شده است. برای به دست آوردن فرکانس طبیعی نانو ورق مرکب از تئوری الاستیسیته‌ی غیر محلی بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی نمایی استفاده شده است. در تئوری تغییر شکل برشی نمایی، تابع نمایی در راستای ضخامت، برای در نظر گرفتن تأثیرات تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی به کار می‌رود. از تئوری الاستیسیته غیر محلی جهت در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول کوچک نانو ورق تابعی هدفمند استفاده شده است. حرارت در سطوح ورق ثابت در نظر گرفته شده است. خواص مواد وابسته به دما و در راستای ضخامت بر اساس قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. معادلات حرکت با بکارگیری اصل همپلتون به دست می‌آیند. به منظور اعتبار سنجی روش حاضر مقایسه‌ای بین نتایج حاصله و نتایج سایر مقالات در دسترس انجام می‌شود. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل پارامتر غیر محلی، ضریب نسبت حجمی توانی، نسبت عرض به طول، نرخ ضخامت به طول و دماهای سطح مختلف بر نانو ورق مستطیلی تابعی هدفمند در محیط حرارتی ارایه شده و جزئیات مورد بحث قرار گرفته‌اند.

## Free vibrations analysis of functionally graded composite rectangular nanoplate based on nonlocal exponential shear deformation theory in thermal environment

Korosh Khorshidi\*, Abolfazl Fallah, Ali Siahpush

Department of Mechanical Engineering, Arak University, Arak, Iran

\* P.O.B. 3815688349, Arak, Iran, k-khorshidi@araku.ac.ir

### Keywords

Nanoplate  
Functionally graded material  
Exponential shear  
deformation theory  
Thermal environment  
Hamilton's principle

### Abstract

In the present study the free vibration analysis of functionally graded composite rectangular nanoplates in thermal environment is investigated. The nonlocal elasticity theory based on the exponential shear deformation theory has been used to obtain the natural frequencies of the nanoplate. In exponential shear deformation theory an exponential functions are used in terms of thickness coordinate to include the effect of transverse shear deformation and rotary inertia. Nonlocal elasticity theory is employed to investigate effect of small scale on natural frequency of the functionally graded rectangular nanoplate. The temperature is assumed to be constant in the plane of the plate and to vary in the thickness direction only. Material properties are assumed to be temperature dependent, and vary continuously through the thickness according to a power law distribution in terms of the volume fraction of the constituents. The governing equations are derived by implementing Hamilton's principle. To show the accuracy of the formulations, present result's in specific cases are compared with available results in literature and good agreement are seen. Finally, the effect of various parameters such as nonlocal parameter, power law indexes, width to length ratio, the thickness to length ratio, and temperature fields on the natural frequencies of rectangular FG nanoplates are presented and discussed in detail.

### ۱- مقدمه

پذیرد. ورق یک عنصر سازه‌ای است که یک بعد آن در مقایسه با دو بعد دیگر، نسبتاً نازک می‌باشد. ورق دارای سفتی خمشی است در حالیکه غشا دارای سفتی خمشی نمی‌باشد. سفتی خمشی از آنجایی ناشی می‌شود که دو

کاربرد وسیع ورق در صنعت و نیز هندسه‌ی جالب توجه آن باعث شده است تا تلاش‌های بسیاری برای حل مسائل استاتیک و دینامیک ورق صورت

### Please cite this article using:

Khorshidi, K. Fallah, A. and Siahpush, A., "Free vibrations analysis of functionally graded composite rectangular na-noplate based on nonlocal exponential shear deformation theory in thermal environment", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 109-120, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی با استفاده از اصل کار مجازی به دست آورده شده و نتایج حاصله با نتایج سایر تئوری های تغییر شکل برشی و حل دقیق موجود در سایر مقالات مقایسه شده است.

بررسی رفتار دینامیکی نانو ورق ها و نانو تیرها امری ضروری برای مهندسان به حساب می رود. سازه ها در مقیاس کوچک رفتار متفاوتی از خود نشان می دهند. از نانو ورق ها در خازن ها، سویچ های قطع و وصل جریان برق، سنسورهای مولکولی، مواد غشا نازک و سیستم های الکتریکی میکرو و نانو استفاده می شود. از تئوری های رایج در زمینه تحلیل نانو ورق ها می توان به تئوری غیر محلی [۸]، تنش کوپل [۹] و گرادیان کرنش [۱۰] اشاره کرد. برای اولین بار یانگ [۱۱] تئوری تنش کوپل اصلاح شده را پیشنهاد کرد. بر اساس آن تانسور تنش کوپل متقارن بوده و تنها شامل یک پارامتر مقیاس طول است. کی و همکاران [۱۲] به بررسی ارتعاش میکرو ورق میندیلین با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداخته اند.

اکسنسر و همکاران [۱۳] ارتعاش و کمانش نانو ورق را با تئوری غیر محلی انجام دادند آقابابایی و همکاران [۱۴] ارتعاش نانو ورق را با تئوری غیر محلی مورد بررسی قرار دادند. نتاراجن و همکاران [۱۵] به بررسی ارتعاش نانو ورق های تابعی هدفمند با استفاده از تئوری الاستیسیته ی غیر محلی پرداخته اند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۶] به بررسی ارتعاش نانو ورق های مستطیلی با بکارگیری تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی پرداختند. زهانگ و همکاران [۱۷] با استفاده از تئوری غیر محلی بر اساس تئوری ورق تغییر شکل مرتبه اول برشی و حل ناویر به بررسی ارتعاش نانو ورق های مستطیلی با تکیه گاه های ساده پرداخته اند.

مواد تابعی هدفمند<sup>۱</sup> کلاس جدیدی از مواد مرکب<sup>۲</sup> هستند که در آنها خصوصیات مواد در یک راستا (مواد تابعی هدفمند یک بعدی) یا در دو راستا (مواد تابعی هدفمند دو بعدی) از جسم، به صورت پیوسته تغییر می کند. مواد تابعی هدفمند در واقع ترکیبی از دو یا چند فاز مادی است و به گونه ای طراحی شده است که نسبت حجمی<sup>۳</sup> آنها در یک یا دو جهت تغییر می نماید. این امر جسم مادی را از دیدگاه میکروسکوپی ناهمگن می سازد، و از دیدگاه ماکروسکوپی خواص مکانیکی را به نرمی و بطور پیوسته تغییر می دهد. این گونه مواد عمدتاً از ترکیب سرامیک با فلز ساخته می شوند و کارایی ماده را در بعضی از زمینه ها از جمله تحت بارهای حرارتی به شدت افزایش می دهند. این مواد نخستین بار توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی و عرضه شدند. برخی از کاربردهای مواد هدفمند عبارتند از: سازه های پوسته ای یا ورقی که در معرض گرادیان حرارتی بالا (مانند سطوح سازه های فضایی که در بازگشت به جو اختلاف دمایی حدود ۲۰۰۰ درجه سانتیگراد را باید تحمل کنند) قرار دارند، سازه های تحت تاثیر بارگذاری های نیروی دینامیکی (تنش های اعمالی سطحی)، سازه هایی که در محیط های خورنده مورد استفاده قرار می گیرند و در نهایت سازه هایی تحت بارگذاری آکوستیکی (مانند موج شوک برخوردی) که در مدل سازی انفجاری نیز مورد استفاده می باشد. استفاده از مواد هدفمند می تواند منجر به بهینه سازی در زمینه ی مقاومت های حرارتی، مکانیکی و عایق سازی حرارتی شود. از دیگر کاربردهای این گونه مواد می توان به سازه های عایق حرارتی<sup>۴</sup>، پرها (سطوح مقاوم در برابر خوردگی و خزش مکانیکی بالا)، راکتورهای همجوش<sup>۵</sup> هسته ای، مخازن

بعد ورق در مقایسه با ابعاد متناظر آن در غشاء به طور قابل ملاحظه ای ضخیم تر است. در طول سالیان طولانی تئوری های حل مسأله ی ورق توسعه ی پیوسته و مستمر داشته است که هم زمان به ساده و دقیق کردن حل مسأله پرداخته شده است. ورق ها عناصر سازه ای مهمی می باشند که در بسیاری از موارد بکار می روند. در مهندسی عمران، پل های مسطح در انواع سازه های فولادی و بتنی موجود است. در صنایع هوافضا برای ساخت هواپیما و موشک و در کشتی سازی برای ساخت انواع زیر دریایی و کشتی بکار برده می شوند. در مهندسی مکانیک ورق ها به عنوان دیسک های چرخان در سیستم های ترمز و قسمت هایی از کلاچ مشاهده می گردند. همچنین به عنوان پل های مسطح در بدنه ی ماشین ها وجود دارند. ورق ها به عنوان محفظه در بسیاری از تجهیزات الکتریکی و الکترونیکی مورد استفاده قرار می گیرند. ورق ها دارای شکل های گوناگون مستطیلی، دایروی، لوزی شکل، مثلثی و دوزنقه ای می باشند. لوح های فشرده در واقع ورق های دایروی می باشند

در سال های اخیر مطالعات وسیعی در خصوص کمانش، خمش و ارتعاش ورق ها صورت گرفته است. از جمله این مطالعات می توان به موارد زیر اشاره نمود. خورشیدی [۱] به بررسی تاثیر فشار هیدرواستاتیکی ارتعاش ورق مستطیلی کوپل با سیال پرداخته است. در این مقاله از ورق ایزوتروپ و تئوری کلاسیک استفاده شده است و فرکانس ورق کوپل با سیال برای شرایط مرزی کامل ساده و کاملاً گیردار به دست آمده است. خورشیدی و فرهادی [۲] به بررسی ارتعاش آزاد ورق کامپوزیت مستطیلی در تماس با سیال محدود پرداخته اند. در این تحقیق از تئوری های کلاسیک، مرتبه اول تغییر شکل برشی و مرتبه سوم تغییر شکل برشی استفاده شده است. دوزیو [۳] بر اساس تئوری مثلثاتی به تحلیل ارتعاش ورق های مستطیلی کیرشرف با استفاده از روش ریلی - ریتز پرداخت. منتاری و سوارز [۴] کمانش ورق های کامپوزیت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی بر پایه ی تئوری های سینوسی و نمایی مورد بررسی قرار دادند و با بکار گیری اصل کار مجازی معادلات تعادل را برای سازه استخراج کردند و نتایج عددی این تحقیق با حل سه بعدی و تئوری تغییر شکل مرتبه ی بالا مقایسه شده است که نشان دهنده ی دقت بالای این روش می باشد. تونسوی و همکاران [۵] به تحلیل کمانش ترمو الاستیک ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل مثلثاتی پرداختند آن ها در این تحقیق به تحلیل تاثیر بار حرارتی در خمش ورق ها پرداختند در این تئوری مولفه های جابجایی با استفاده از سری های مثلثاتی در راستای ضخامت ورق ارائه شده است. صیاد و قوگال [۶] کمانش و ارتعاش آزاد ورق های ضخیم ایزوتروپیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق توابع نمایی در راستای ضخامت بکار گرفته شده و جابجایی شامل تغییر شکل عرضی برشی و اینرسی دورانی است. همچنین شرایط مرزی و معادلات سیستم با استفاده از روش کار مجازی به دست آمده اند و با حل عددی ورق های مربعی و مستطیلی با تکیه گاه ساده روابط جابجایی، تنش و فرکانس ها را مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را با نتایج حاصل از سایر مقالات مقایسه کردند. صیاد تئوری های مختلف تغییر شکل برشی را برای ارتعاشات آزاد تیرهای ضخیم ایزوتروپیک مورد بررسی قرار داد. تئوری ها شامل توابع پارابولیک، سینوسی، هایپربولیکی و نمایی در جهت ضخامت هستند در این تحقیق شرایط مرزی و معادلات دیفرانسیل با استفاده از اصل کار مجازی به دست آورده شده اند و نتایج به دست آمده ی خمش و فرکانس طبیعی را برای تیر با تکیه گاه ساده را با نتایج سایر مقالات مقایسه کرده است. خارو و همکاران [۷] ارتعاشات ورق های ایزوتروپیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل نمایی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق

1. Functionally graded material  
2. Composites  
3. Volume fraction  
4. Thermal Barrier  
5. Fusion

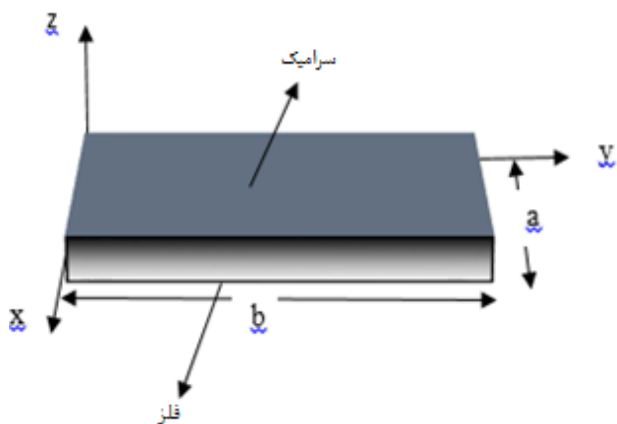
این مقادیر در روی لبه های آزاد  $z = \pm h/2$  صفر است پس مقادیر  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  در داخل ورق صفر در نظر گرفته می شود. همچنین با توجه به کوچک بودن  $h$  و وجود فاکتور  $h^3$  در مقادیر مربوط به انرژی جنبشی دورانی می توان از آن صرف نظر کرد تئوری مبتنی بر این فرضیات به تئوری کلاسیک ورق یا تئوری کریشف<sup>۲</sup> مشهور می باشد بیشتر ورق های مورد استفاده در صنعت از جمله این ورق ها هستند. بر همین اساس تحقیقات بسیار گسترده ای در مورد تحلیل ورق های نازک انجام شده است. چنانچه  $0.05 \leq h/a \leq 0.2$  باشد ورق نسبتاً ضخیم به حساب می آید و در حالتی که  $0.2 \leq h/a$  باشد ورق ضخیم به حساب می آید. در ورق های نسبتاً ضخیم و ورق های ضخیم مقادیر  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{xz}$  قابل توجه بوده و صرف نظر از آن ها خطای بزرگی را در پاسخ به دست آمده وارد می کند همچنین می توان با توجه به بزرگ بودن  $\Omega$  اثرم های انرژی جنبشی دورانی را قابل ملاحظه دانست و در محاسبات وارد کرد، تئوری که بر پایه ی این محاسبات استوار شده است، تئوری ورق های ضخیم نامیده می شوند که از این تئوری ها می توان به تئوری ورق های نسبتاً ضخیم میدلین-ریزنر<sup>۳</sup> و تئوری تغییر شکل برشی نمایی اشاره نمود. نانو ورق مستطیلی هدفمندی به طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  مانند شکل ۱ در نظر گرفته می شود که از ترکیب فلز و سرامیک بین دو سطح بالا و پایین در راستای ضخامت ساخته شده است. توزیع خواص مواد در راستای ضخامت از قانون توانی<sup>۴</sup> پیروی می کنند. در حقیقت سطح بالای فلز  $z = h/2$  از سرامیک خالص ساخته شده و سطح پایین فلز  $z = -h/2$  خالص است.

برای تحلیل ارتعاش وابسته به حرارت، برخی خاصیت های مواد مثل مدول یانگ  $E$ ، ضریب پواسون  $\nu$ ، چگالی  $\rho$ ، و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  را با فرض  $P$ ، خاصیت وابسته به دمای ماده، به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می شود [۲۴].

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (1)$$

که در رابطه بالا  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  ضرایب حرارتی نامیده می شوند، در جدول ۱ مقادیر ضرایب حرارتی  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  مواد مختلف فلز و سرامیک آورده شده است. بر اساس قانون توانی خواص مواد در راستای ضخامت به صورت رابطه (۲) فرض می شود [۲۵].

$$P(z) = (P_c - P_m)V_f(z) + P_m \quad (2)$$



شکل ۱ ورق مستطیلی تابعی مدرج، دستگاه مختصات و جهت ها

تحت فشار (فشار مثبت یا منفی) تحت خوردگی و تنش های حرارتی، مواد مقاوم عایق حرارتی در صنایع هوافضا، صنایع خودروسازی نظیر پیستون و سیلندر، ابزار قالب ریزی و برش های صنعتی، اعضای مصنوعی برای بدن انسان، کارخانه های شیمیایی که با دمای بالا سروکار دارند، قطعات نوری (به منظور به دست آوردن ضرایب شکست متغیر) به طور گسترده صنایع دفاعی اشاره کرد. از جمله تحقیقات انجام گرفته در زمینه رفتار دینامیکی این مواد می توان به موارد زیر اشاره کرد. حسینی هاشمی و همکاران [۱۸]، به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی تابعی هدفمند بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. در این مقاله اثرات وجود بستر الاستیک بر روی فرکانس ورق مستطیلی تابعی هدفمند مورد بحث قرار گرفته است. خورشیدی و فلاح [۱۹]، به بررسی کماتش نانو ورق هدفمند با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی نمایی بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی پرداختند. همچنین خورشیدی و همکاران [۲۰] تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق هدفمند را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی نمایی انجام داده اند. یانگ [۲۱]، تاثیرات محیط حرارتی بر روی ارتعاش ورق تابعی هدفمند را مورد بررسی قرار داد. در همین راستا لی و همکاران [۲۲]، به تحلیل ارتعاش ورق تابعی هدفمند در محیط حرارتی پرداختند. تا کنون در تحقیقات زیادی به بررسی ارتعاش نانو تیرهای تابعی هدفمند پرداختند. اما در زمینه ارتعاش نانو ورق های تابعی هدفمند تحقیقات محدودی وجود دارد که از جمله می توان به تحقیقات نتاراجن و همکاران [۲۳] اشاره نمود که با استفاده از تئوری غیر محلی به تحلیل ارتعاشی نانو ورق تابعی هدفمند پرداختند.

در این مقاله حل ناوبر ارتعاش آزاد نانو ورق های مستطیلی نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری غیر محلی تغییر شکل برشی نمایی در محیط حرارتی برای شرط مرزی چهار طرف ساده برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. برای توصیف تأثیرات مقیاس کوچک بر ارتعاش خارج از صفحه ی نانو ورق مستطیلی از تئوری غیر محلی ارینگن استفاده شده است. معادلات حاکم بر حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. نتایج حاصل از این مقاله با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر اعتبار سنجی شده است. تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نسبت ضخامت به طول، پارامتر مقیاس کوچک، نسبت عرض به طول و اختلاف دمای دو سطح روی پارامتر بی بعد فرکانسی با در نظر گرفتن جزئیات مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

## ۲- معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار ارتعاشی نانو ورق هدفمند در محیط حرارتی

مواد نانو ساختار با دو رویکرد اصلی بالا به پایین<sup>۱</sup> و پایین به بالا ساخته می شوند که در اولی منظور دست کاری ساختار درشت اندازه ی ماده و رساندن آن به ابعاد نانومتری است و در دومی منظور این است که ماده ی بالک را از ابتدا به وسیله ی چینش اتم ها یا اجزای نانو اندازه خلق کنند.

با توجه به نسبت ضخامت ورق ها این سازه ها به سه گروه ورق های نازک، ورق های نسبتاً ضخیم و ورق های ضخیم تقسیم می شوند. اگر ضخامت یک ورق  $h$  و کوچکترین بعد گسترش یافته آن  $a$  باشد و رابطه  $h/a \leq 0.05$  برقرار باشد، در این حالت ورق نازک به حساب می آید و می توان از تغییرات  $\tau_{xz}$  و در جهت ضخامت صرف نظر کرد از آنجا که

1. Top-Down

2. Kirshoff  
3. Mindlin\_Reissener  
4. Power Law

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \psi \quad (11)$$

با چشم پوشی از تأثیر تنش عمودی  $\sigma_{zz}$  نسبت به تنش های  $\sigma_{yy}$  و  $\sigma_{xx}$  و با توجه به روابط خطی هوک بین تنشهای عمودی  $\sigma_{xx}$  و  $\sigma_{yy}$  و کرنش های عمودی  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و روابط تنش های برشی  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  با کرنش های برشی  $\gamma_{xy}$ ،  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  به صورت زیر توسعه می یابند.

$$\sigma_{xx} = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} (\epsilon_x + \vartheta(z, T) \epsilon_y) = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \left[ f(z) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vartheta(z, T) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \vartheta(z, T) \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta(z, T) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} (\epsilon_y + \vartheta(z, T) \epsilon_x) = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \left[ f(z) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vartheta(z, T) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + \vartheta(z, T) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta(z, T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \vartheta(z, T))} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \quad (14)$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \vartheta(z, T))} \left( \frac{df(z)}{dz} \phi \right) \quad (15)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E(z, T)}{2(1 + \vartheta(z, T))} \left( \frac{df(z)}{dz} \psi \right) \quad (16)$$

که در رابطه بالا  $G = \frac{E(z, T)}{2(1 + \vartheta(z, T))}$  مدول برشی نامیده می شود.

### ۱-۲- تئوری الاستیسیته غیر محلی

بر اساس تئوری ارینگن [۲۶] معادله مشخصه غیر محلی از رابطه ی زیر به دست می آید [۱۹].

$$[1 - (ea_0)^2 \nabla^2] \sigma_{kl}^{NI} = \lambda \epsilon_{rr} \delta + 2\mu \epsilon_{kl} \quad (17)$$

در رابطه بالا  $\sigma_{kl}^{NI}$  تانسور تنش غیر محلی،  $\epsilon_{ij}$  تانسور کرنش،  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه می باشند و  $e$  ثابتی متناسب برای هر ماده و  $a_0$  طول مشخصه داخلی در مواد نانو است. در نتیجه، رابطه ساختاری غیر محلی به صورت زیر است [۱۹].

$$\sigma_{xx}^{NI} - \bar{\mu}^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{NI}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{NI}}{\partial y^2} \right) = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \epsilon_{xx} + \frac{\vartheta(z, T) E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \epsilon_{yy} \quad (18)$$

$$\sigma_{yy}^{NI} - \bar{\mu}^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{NI}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{NI}}{\partial y^2} \right) = \frac{\vartheta(z, T) E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \epsilon_{xx} + \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \epsilon_{yy} \quad (19)$$

$$\tau_{xy}^{NI} - \bar{\mu}^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{NI}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{NI}}{\partial y^2} \right) = 2G \epsilon_{xy} \quad (20)$$

$$\tau_{yz}^{NI} - \bar{\mu}^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{yz}^{NI}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}^{NI}}{\partial y^2} \right) = 2G \epsilon_{yz} \quad (21)$$

$$\tau_{xz}^{NI} - \bar{\mu}^2 \left( \frac{\partial^2 \tau_{xz}^{NI}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}^{NI}}{\partial y^2} \right) = 2G \epsilon_{xz} \quad (22)$$

جدول ۱ ضرایب حرارتی وابسته به دما برای مدول یانگ (Gpa)،

ضریب پواسون  $\nu$ ، چگالی  $\rho$  ( $\frac{kg}{m^3}$ )، ضریب انتشار حرارتی  $\alpha$  ( $\frac{1}{K}$ ) و ضریب رسانایی حرارتی  $k$  ( $\frac{W}{mK}$ ) برای تمام خواص  $P_3 = 0$  و  $(P_{-1} = 0)$

خاصیت	ماده	$P_0$	$P_1$	$P_2$
E	Ti6Al4V	۱۲۲/۷۰	$-۴/۶۰۵ \times 10^{-۴}$	.
	ZrO <sub>2</sub>	۱۳۲/۲۰	$-۳/۸۰۵ \times 10^{-۴}$	$-۶/۱۲۷ \times 10^{-۸}$
$\rho$	Ti6Al4V	۴۴۲۰	.	.
	ZrO <sub>2</sub>	۳۶۵۷	.	.
$\alpha$	Ti6Al4V	۴۴۲۰	.	.
	ZrO <sub>2</sub>	۳۶۵۷	.	.
$\nu$	Ti6Al4V	$۷/۴۳ \times 10^{-۴}$	$-۱/۴۲۱ \times 10^{-۴}$	$-۳/۶۲۱ \times 10^{-۷}$
	ZrO <sub>2</sub>	$۷/۴۳ \times 10^{-۴}$	$-۱/۴۲۱ \times 10^{-۴}$	$۹/۵۴۹ \times 10^{-۷}$
k	Ti6Al4V	۶/۱۰	.	.
	ZrO <sub>2</sub>	۱/۷۸	.	.

در رابطه (۲) اندیس m، بیانگر فلز، اندیس c، بیانگر سرامیک،  $P(z)$  خصوصیت وابسته به دمای ماده در راستای ضخامت است و  $V_f(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^g$  ضریب انبساط حجمی است که در آن  $g$  ضریب نسبت حجمی توانی<sup>۱</sup> می باشد.

با توجه به تئوری تغییر شکل برشی نمایی میدان جابجایی به صورت زیر تعریف می گردد [۶].

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + f(z) \phi(x, y, t) \quad (3)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + f(z) \psi(x, y, t) \quad (4)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (5)$$

که تابع  $f(z)$  با توجه به تئوری تغییر شکل برشی نمایی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$f(z) = z \left( e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \right) \quad (6)$$

در روابط مذکور  $t$  بیانگر زمان،  $\phi$  و  $\psi$  شیب ورق ناشی از خمش  $u$  و  $v$  جابجایی های ورق به ترتیب در امتداد محورهای  $x$  و  $y$ ، و  $w$  جابجایی عرضی ورق در راستای محور  $z$  می باشد. همچنین  $U_0$  و  $V_0$  جابجایی های میان صفحه ای ورق به ترتیب در امتداد محورهای  $x$  و  $y$  می باشند. با فرض روابط کرنش-جابجایی خطی، چنانچه کرنش های عمودی ( $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$ ) و کرنش های برشی ( $\gamma_{xy}$ ،  $\gamma_{yz}$  و  $\gamma_{zx}$ ) در نظر گرفته شوند میدان کرنش در دستگاه مختصات کارتزین به صورت روابط (۷) تا (۱۱) خواهد بود.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (9)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \phi \quad (10)$$

1. Power Law index

$$U = U_p + U_T = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \epsilon_{yy} \sigma_{yy} + 2\epsilon_{xy} \sigma_{xy} + 2\epsilon_{xz} \sigma_{xz} + 2\epsilon_{yz} \sigma_{yz}) + \frac{1}{2} \int_V (d_{xx} \sigma_{xx}^T + d_{yy} \sigma_{yy}^T + d_{xy} \sigma_{xy}^T) dv \quad (30)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dv \quad (31)$$

در رابطه (۳۱) بالا نویسنده (.) به معنای مشتق نسبت به زمان است و در رابطه (۳۰)،  $U_p$  انرژی پتانسیل ناشی از تنش و کرنش در ورق، و  $U_T$  انرژی پتانسیل ناشی از حرارت،  $\sigma_{ij}^T$  تنش ناشی از حرارت و  $d_{ij}$  کرنش غیر خطی هستند. که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۷].

$$\sigma_{xx}^T = -(Q_{11} + Q_{12}) \alpha(z, T) \Delta T(z), \quad (32)$$

$$\sigma_{yy}^T = -(Q_{12} + Q_{22}) \alpha(z, T) \Delta T(z), \quad (33)$$

$$\sigma_{xy}^T = 0, \quad (34)$$

که در روابط (۳۲) تا (۳۴)

$$Q_{11} = Q_{11} = \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \quad (35)$$

$$Q_{12} = \frac{\vartheta(z, T) E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2} \quad (36)$$

بعد از جایگذاری روابط (۱۸-۲۲) در روابط (۳۰) و (۳۱) و در نهایت جایگذاری روابط حاصله در رابطه (۲۹) و انتگرال‌گیری جز به جز و سپس فاکتورگیری از ضرایب  $\delta v_0, \delta \psi, \delta w, \delta u_0, \delta v_0$  معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی یک ورق در یک محیط حرارتی به صورت روابط (۳۷) تا (۴۱) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - Y_1 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + Y_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \\ & Y_5 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - Y_6 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - Y_4 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) - \\ & I_1 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - \right. \\ & I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial x^3} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_0 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - \\ & \left. I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^2 \partial y^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial y^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - Y_1 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + Y_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \\ & Y_5 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) - Y_6 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - Y_4 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) - \\ & I_1 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - \right. \\ & I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_0 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - \\ & \left. I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial y^3} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial y^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + Y_7 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & Y_2 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - Y_8 \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) - Y_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & Y_9 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} \right) - Y_5 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - Y_{10} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) - \\ & Y_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \\ & I_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial t^2} \right) - \\ & \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial t^2} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) - \right. \\ & I_2 \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_4 \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^3 \partial t^2} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + \\ & \left. I_0 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial t^2 \partial y^3} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^2 \partial y^2} + \right. \end{aligned} \quad (39)$$

که  $\bar{\mu} = ea_0$  پارامتر غیر محلی می باشد. زمانی که پارامتر غیر محلی صفر باشد رابطه ساختاری محلی (قانون) هوک به دست به دست خواهد آمد که بیانگر این مطلب می باشد که کرنش در هر نقطه تنها تابعی از تنش در همان نقطه خواهد بود.

## ۲-۲- توزیع حرارت غیر خطی در راستای ضخامت

به منظور تحلیل تاثیر حرارت در این قسمت، ابتدا توزیع حرارت غیر خطی در راستای ضخامت آورده شده، و سپس در مورد تاثیر حرارت بر ارتعاش ورق هدفمند بحث خواهد شد. فرض کنید حرارت سطح بالا و پایین به صورت زیر باشد [۲۷].

$$\begin{cases} T = T_0 + T_b \rightarrow x = \frac{h}{2} \\ T = T_0 + T_t \rightarrow x = -\frac{h}{2} \end{cases} \quad (23)$$

که در رابطه بالا  $T_b$  بیانگر دمای سطح پایین،  $T_t$  بیانگر دمای سطح بالا و  $T_0$  بیانگر دمای محیط می باشد. با فرض انتقال حرارت پایدار، به صورت رابطه زیر [۲۷].

$$-\frac{d}{dz} \left[ k(z) \frac{dT}{dx} \right] = 0, \quad (24)$$

که  $k(z)$  ضریب انتقال حرارت می باشد. توزیع حرارت در راستای ضخامت به صورت زیر به دست می آید [۲۷].

$$T = T_0 + T_t + (T_t - T_b) \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{k(z)} dz}, \quad (25)$$

برای ورق های تابعی مدرج رابطه (۲۵)، به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \Delta T(z) = & \frac{1}{C} \left( \left( \frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{g+1} + \right. \\ & \frac{k_{tb}^2}{(p+1)k_b^2} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{2g+1} - \frac{k_{tb}^3}{(p+1)k_b^3} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{3g+1} + \\ & \left. \frac{k_{tb}^4}{(p+1)k_b^4} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{4g+1} - \frac{k_{tb}^5}{(p+1)k_b^5} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{5g+1} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

که در رابطه بالا  $\Delta T(z)$  تغییرات دمای غیر خطی در راستای ضخامت،  $k_t, k_b = k_t - k_b$  ضریب انتقال حرارت سطح بالایی ورق و  $C$  به صورت زیر معرفی می گردد.

$$C = \left( 1 - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{tb}^2}{(p+1)k_b^2} - \frac{k_{tb}^3}{(p+1)k_b^3} + \frac{k_{tb}^4}{(p+1)k_b^4} - \frac{k_{tb}^5}{(p+1)k_b^5} \right). \quad (27)$$

برای یک ورق ایزوتروپیک. توزیع حرارت در راستای ضخامت به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$T = T_0 + \frac{T_t + T_b}{2} + \frac{T_t - T_b}{h} z, \quad (28)$$

با بکار گیری اصل همیلتون بر پایه تئوری الاستیسیته غیر محلی معادلات حرکت نانو ورق تابعی مدرج به دست خواهد آمد [۱۸].

$$\int_0^t (\delta U + \delta \bar{W} - \delta \bar{T}) dt = 0, \quad (29)$$

که در رابطه همیلتون بالا  $\delta$  بیانگر عملگر تغییرات جزئی،  $U$  بیانگر انرژی پتانسیل ورق،  $\bar{W}$  بیانگر کار نیروی خارجی که در مطالعه حاضر برابر صفر در نظر گرفته شده است و  $\bar{T}$  بیانگر انرژی جنبشی ورق می باشد که به صورت روابط (۳۰) و (۳۱) تعریف می شوند.

$$D \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\vartheta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{bmatrix} +$$

$$C \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} =$$

$$A \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\vartheta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{bmatrix} +$$

$$G \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

(۵۰)

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} =$$

$$C \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{bmatrix} - G \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\vartheta) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{bmatrix} +$$

$$S \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \vartheta \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{1-\vartheta}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{bmatrix}$$

(۵۱)

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$$

(S, G, B, A, C, D, F)

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z, T)}{1 - \vartheta(z, T)^2}$$

$$\times \left( 1, z, z^2, zf(z), f(z), f^2(z), \left( \frac{df(z)}{dz} \right)^2 \right) dz$$

(۵۳)

با جایگذاری روابط (۴۲) تا (۵۳) در روابط (۳۷) تا (۴۱) در نهایت معادلات حرکت سیستم بر اساس روابط جابجایی به صورت (۵۴) تا (۵۸) به دست خواهد آمد.

$$\frac{1-\vartheta}{2} \left( S \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \right.$$

$$2G \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + S \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) -$$

$$G \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \vartheta \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - Y_1 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + Y_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) +$$

$$Y_5 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - Y_6 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - Y_4 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) -$$

$$I_1 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - \right.$$

(۵۴)

$$\frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x^2} \Big) + I_4 \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial t^2 \partial y^3} \right)$$

$$\frac{\partial R_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} - Q_x - Y_{11} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) +$$

$$Y_8 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - Y_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + Y_{10} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = I_3 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_3 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial t^2} \right)$$

(۴۰)

$$\frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} - Q_y - Y_{11} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) +$$

$$Y_8 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - Y_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - Y_{10} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = I_3 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_3 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) -$$

$$I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial y^3} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial y^2} \right)$$

(۴۱)

که در روابط (۳۷) تا (۴۱)

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z, T) (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz$$

(۴۲)

$$(R_{xx}, R_{yy}, R_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) f(z) dz$$

(۴۳)

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \left( \frac{df(z)}{dz} \right) dz$$

(۴۴)

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz$$

(۴۵)

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz$$

(۴۶)

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_7, Y_8, Y_{11})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \sigma_{xx}^T dz$$

(۴۷)

$$(Y_4, Y_5, Y_6, Y_9, Y_{10}, Y_{10})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \sigma_{yy}^T dz$$

(۴۸)

در روابط بالا  $N$  و  $R$  نیروها و  $M$  گشتاور وارده به ورق می‌باشند. با جایگذاری روابط (۱۸) تا (۲۲) در روابط (۴۳) تا (۴۶) روابط (۴۹) تا (۵۲) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} R_{xx} \\ R_{yy} \\ R_{xy} \end{bmatrix} =$$

(۴۹)

$$I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial y^3} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial y^2} \right)$$

۲-۳- حل معادلات حرکت به کمک روش ناویر

با توجه به روش حل ناویر، توابع جابجایی و چرخش قابل قبول برای شرایط مرزی چهارطرف تکیه گاه ساده به صورت زیر معرفی می‌گردد.

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) \sin(\lambda_{mn} t) \quad (59)$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) \sin(\lambda_{mn} t) \quad (60)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\gamma x) \sin(\beta y) \sin(\lambda_{mn} t) \quad (61)$$

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \cos(\gamma x) \sin(\beta y) \sin(\lambda_{mn} t) \quad (62)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{mn} \sin(\gamma x) \cos(\beta y) \sin(\lambda_{mn} t) \quad (63)$$

که در روابط (۵۹) تا (۶۳)،  $\beta = m\pi/a$ ،  $\gamma = n\pi/b$ ،  $\lambda_{mn} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$  فرکانس طبیعی سیستم و  $\{u_{mn}, v_{mn}, W_{mn}, \Phi_{mn}, \Psi_{mn}\}$  ضرایب ثابت می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۶۰) تا (۶۴) در روابط (۵۵) تا (۵۹) معادله فرکانسی مقابل به دست خواهد آمد:

$$([K] - \lambda_{mn}^2 [M])[\Delta] = 0 \quad (64)$$

که در رابطه بالا  $[K]$  بیانگر ماتریس سختی و  $[M]$  بیانگر ماتریس جرم و  $[\Delta] = [u_{mn}, v_{mn}, W_{mn}, \Phi_{mn}, \Psi_{mn}]^T$  و نهایت فرکانس طبیعی سیستم از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس  $([K] - \lambda_{mn}^2 [M])$  و به دست آوردن ریشه‌های معادله مشخصه به دست خواهد آمد.

۳- اعتبار سنجی نتایج با مراجع معتبر

با توجه به این که مرجع مشخصی برای صحت سنجی نانو ورق‌های مستطیلی تابعی مدرج بر پایه تئوری الاستیسیته غیر محلی در محیط حرارتی در دسترس نبود، به منظور اعتبار سنجی نتایج ابتدا مسئله را برای ورق مستطیلی تابعی مدرج تحت توزیع حرارت غیر خطی و سپس برای نانو ورق ایزوتروپیک حل و نتایج به صورت جداگانه صحت گذاری می‌گردد.

در جدول ۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد  $(\bar{\omega} = \lambda \left( \frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\rho_m (1 - \vartheta^2) / E_m})$  به دست آمده در دمای محیط  $T_0 = 300K$  برای ورق تابعی مدرج در محیط حرارتی غیر خطی با ترکیب سرامیک و فلز به صورت  $ZrO_2/Ti6Al4V$  که سطح بالا سرامیک خالص و سطح پایین فلز خالص می‌باشد، با نتایج حاصل از مرجع [۲۷] مقایسه شده است. اعتبار سنجی نتایج به ازای خواص مواد به صورت  $T_0 = 300K$ ،  $h = 0.025m$ ،  $a = 0.2m$ ،  $\vartheta = 0.3$  و  $\rho_c = 3000 (kg/m^3)$  و  $\rho_m = 4429 (kg/m^3)$ ،  $7.82 \left( \frac{W}{mk} \right)$  انجام پذیرفته است. برای سرامیک و فلز مقدار مشابه از ضریب پواسون  $\nu$  در نظر گرفته شده است. مدول یانگ  $(E)$  و ضریب انبساط حرارتی  $(\alpha)$ ، وابسته به دما و با توجه به جدول ۱ و رابطه (۱) به دست خواهند آمد. با مقایسه نتایج حاصل از مقاله حاضر با نتایج به دست آمده از مرجع [۲۷] مشاهده می‌شود که نتایج حاصله از دقت بالایی برخوردار هستند.

$$I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial x^3} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_0 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial x \partial t^2 \partial y^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial t^2 \partial y^2} \right)$$

$$\frac{1-\vartheta}{2} \left( S \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - 2G \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - G \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \vartheta \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) + C \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + S \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - Y_1 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + Y_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + Y_5 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) - Y_6 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - Y_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) - I_1 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_0 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - I_1 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial t^2 \partial y^3} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2 \partial y^2} \right) \right) \quad (55)$$

$$G \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \vartheta \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) + A \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) + (1 - \vartheta) \left( G \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \right) + A \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial x} \right) - 2B \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) - A \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \vartheta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + G \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \vartheta \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \right) + A \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \vartheta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) - B \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \vartheta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + Y_7 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + Y_2 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - Y_8 \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) - Y_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + Y_9 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} \right) - Y_5 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - Y_{10} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) - Y_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = I_0 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_4 \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_0 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial x^3 \partial t^2} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_4 \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^3 \partial t^2} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial y \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_0 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2} \right) + I_1 \left( \frac{\partial^5 u_0}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^5 v_0}{\partial t^2 \partial y^3} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial t^2 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x^2} \right) + I_4 \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^5 \psi}{\partial t^2 \partial y^3} \right) \right) \quad (56)$$

$$\frac{(1-\vartheta)}{2} \left( C \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - 2A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \right) + C \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \vartheta \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - F\phi - Y_{11} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + Y_8 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - Y_{12} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + Y_{10} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = I_3 \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_3 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial x^3 \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + I_3 \left( \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^2 \partial y^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y^2 \partial t^2 \partial x} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right) \quad (57)$$

$$C \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{(1-\vartheta)}{2} \left( C \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + D \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) - 2A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - A \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \vartheta \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - H\psi - Y_{11} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - Y_3 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + Y_8 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) - Y_{12} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - Y_{10} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) = I_3 \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) - \bar{\mu}^2 \left( I_3 \left( \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} \right) - I_4 \left( \frac{\partial^5 w}{\partial y \partial t^2} \right) + I_5 \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^2} \right) \right) \quad (58)$$

همچنین  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  سختی خمشی ورق نام دارد. خواص نانو ورق مورد تحلیل برای جداول (۳) تا (۵) به شرح  $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ،  $\nu = 0.3$  و  $E = 210 \text{ GPa}$  است. فرکانس طبیعی بی‌بعد محاسبه شده برای نانو ورق ایزوتروپیک با نتایج حاصله از مرجع [۲۷]، که بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی می‌باشند مقایسه شده است و در جداول ۳ تا ۵ نمایش داده شده است. با مقایسه نتایج حاصل از مقاله حاضر با نتایج به‌دست آمده از مرجع [۲۷] مشاهده می‌شود که نتایج حاصله از دقت خوبی برخوردار هستند.

**۴- بحث و بررسی نتایج عددی**

در جدول ۶ و شکل ۲ تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی بی‌بعد  $(\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}/h)$  نانو ورق مستطیلی تابعی مدرج بدون در نظر گرفتن شرایط مرزی حرارتی نمایش داده شده است. در جدول ۶ و شکل ۲ از آلومینیوم (Al) به عنوان فلز و از زیرکونیا<sup>۱</sup> ( $ZrO_2$ ) به عنوان سرامیک استفاده شده است. خواص نانو ورق تابعی مدرج هدفمند مورد تحلیل برای جدول ۶ و شکل ۲، به‌صورت  $E_{ZrO_2} = 200 \text{ G}$ ،  $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$ ،  $\rho_{ZrO_2} = 5700 \text{ kg/m}^3$  و  $\rho_{Al} = 2707 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است.

**جدول ۶** تاثیر پارامتر غیر محلی  $\bar{\omega}$  و ضریب نسبت حجمی توانی  $(g)$  بر فرکانس طبیعی بی‌بعد  $\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}/h$  (بدون در نظر گرفتن وابستگی حرارتی خواص ورق

g	ضریب نسبت حجمی توانی			h/a	b/a	$\bar{\omega}$
	۵	۱۰	۱۰			
۰	۰/۲۱۱۴	۰/۱۳۵۷	۰/۰۸۵۶	۰/۲	۲	۰/۰
۰/۰۳۶۵	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۳۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۰
۰/۲۳۱۰	۰/۱۳۵۶	۰/۱۳۰۰	۰/۲	۱	۰/۱	۰/۰
۰/۰۵۷۷	۰/۰۳۷۷	۰/۰۳۶۴	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۰
۰/۱۲۹۹	۰/۱۲۳۹	۰/۰۸۰۸	۰/۲	۲	۰/۱	۰/۱
۰/۰۳۴۵	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۱۸	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
۰/۱۹۳۲	۰/۱۲۳۹	۰/۱۱۸۸	۰/۲	۱	۰/۱	۰/۱
۰/۰۵۲۷	۰/۰۳۴۴	۰/۰۳۲۲	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
۰/۱۱۲۷	۰/۰۷۲۸	۰/۰۷۰۰	۰/۲	۲	۰/۲	۰/۲
۰/۰۲۹۹	۰/۰۱۹۶	۰/۰۱۸۹	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
۰/۱۵۸۰	۰/۰۱۰۴	۰/۰۹۷۲	۰/۲	۱	۰/۲	۰/۲
۰/۰۴۳۱	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۷۲	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
۰/۰۹۴۸	۰/۰۶۱۳	۰/۰۵۸۹	۰/۲	۲	۰/۳	۰/۳
۰/۰۲۵۱	۰/۰۱۶۵	۰/۰۱۵۹	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
۰/۱۲۶۹	۰/۰۸۱۴	۰/۰۷۸۰	۰/۲	۱	۰/۲	۰/۲
۰/۰۳۴۶	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۱۸	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۶ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیر محلی فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد، که این امر سبب کاهش سختی و در نهایت کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. به عبارت دیگر مواد نانو دارای ساختار نرمتر و منعطفتر نسبت به مواد غیر نانو هستند. همچنین از جدول ۶ مشاهده می‌شود با افزایش نسبت عرض به طول  $(b/a)$ ، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. از آنجایی که ورق مورد تحلیل در این بخش دارای چهار تکیه‌گاه ساده است، با کاهش طول در عرض

**جدول ۲** فرکانس طبیعی بی‌بعد  $\bar{\omega} = \lambda \left(\frac{a^2}{h}\right) \sqrt{\rho_m(1 - \nu^2)/E_m}$  برای ورق مربعی تابعی مدرج با شرایط مرزی کاملاً ساده تحت توزیع حرارت غیر یکنواخت در راستای ضخامت ( $ZrO_2/TiAl_64V$ )، و با فرض  $T_b = 300K$

g	روش	$T_t = 300K$	$T_t = 400K$	$T_t = 600K$
۰	روش حاضر	۸/۲۸۴	۷/۴۱۵	۵/۱۶۷
	مرجع [۲۷]	۸/۳۳۳	۷/۶۱۴	۵/۴۶۹
۱	روش حاضر	۶/۶۶۱	۶/۱۲۸	۴/۷۸۷
	مرجع [۲۷]	۶/۷۰۰	۶/۲۸۱	۵/۱۶۷
۲	روش حاضر	۶/۲۹۱	۵/۷۸۸	۴/۹۸۸
	مرجع [۲۷]	۶/۳۳۳	۵/۹۹۲	۵/۱۳۹

در جداول ۳ تا ۵ سه فرکانس اول بی‌بعد  $(\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}})$  و نسبت فرکانسی FR (نسبت فرکانس طبیعی بی‌بعد غیر محلی به فرکانس طبیعی بی‌بعد محلی) را برای نانو ورق ایزوتروپیک با شرایط مرزی چهارطرف تکیه‌گاه ساده با مقادیر مختلف طول به عرض ورق  $(\eta = b/a)$ ، مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد غیر محلی  $(\xi = \bar{\omega}/a)$ ، نسبت ضخامت به طول  $(\delta = \frac{h}{a} = 0.1)$  و مودهای ارتعاشی  $(m=1, n=1)$ ،  $(m=2, n=1)$  و  $(m=2, n=2)$  نمایش داده شده است.

**جدول ۳** تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد محلی  $(\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho h/D})$  و نسبت فرکانسی FR برای نانو ورق مستطیلی برای شکل مود ارتعاشی  $(m=1, n=1)$

b/a	روش	FR = $\bar{\omega}^{NL}/\bar{\omega}^L$			
		$\xi = 0.2$	$\xi = 0.4$	$\xi = 0.6$	$\xi = 0.8$
۰/۶	روش حاضر	۰/۶۳۳۵	۰/۳۷۸۹	۰/۲۶۳۳	۰/۲۰۰۵
	مرجع [۱۶]	۰/۶۳۳۵	۰/۳۷۸۹	۰/۲۶۳۳	۰/۲۰۰۵
۰/۸	روش حاضر	۰/۷۰۵۱	۰/۴۴۵۱	۰/۳۱۴۶	۰/۲۴۱۲
	مرجع [۱۶]	۰/۷۰۵۰	۰/۴۴۵۱	۰/۳۱۴۶	۰/۲۴۱۲
۱	روش حاضر	۰/۷۴۷۵	۰/۲۹۰۴	۰/۳۵۱۲	۰/۲۷۰۸
	مرجع [۱۶]	۰/۷۴۷۵	۰/۲۹۰۴	۰/۳۵۱۲	۰/۲۷۰۸

**جدول ۴** تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد محلی  $(\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho h/D})$  و نسبت فرکانسی FR برای نانو ورق مستطیلی برای شکل مود ارتعاشی  $(m=2, n=1)$

b/a	روش	FR = $\bar{\omega}^{NL}/\bar{\omega}^L$			
		$\xi = 0.2$	$\xi = 0.4$	$\xi = 0.6$	$\xi = 0.8$
۰/۶	روش حاضر	۰/۵۲۱۶	۰/۲۹۲۳	۰/۱۹۹۷	۰/۱۵۱۱
	مرجع [۱۶]	۰/۵۲۱۶	۰/۲۹۲۳	۰/۱۹۹۷	۰/۱۵۱۱
۰/۸	روش حاضر	۰/۵۵۹۴	۰/۳۱۹۷	۰/۲۱۹۴	۰/۱۶۶۳
	مرجع [۱۶]	۰/۵۵۹۴	۰/۳۱۹۷	۰/۲۱۹۴	۰/۱۶۶۴
۱	روش حاضر	۰/۵۷۹۹	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۸	۰/۱۷۵۲
	مرجع [۱۶]	۰/۵۷۹۹	۰/۳۳۵۳	۰/۲۳۰۸	۰/۱۷۵۲

**جدول ۵** تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد محلی  $(\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho h/D})$  و نسبت فرکانسی FR برای نانو ورق مستطیلی برای شکل مود ارتعاشی  $(m=2, n=2)$

b/a	روش	FR = $\bar{\omega}^{NL}/\bar{\omega}^L$			
		$\xi = 0.2$	$\xi = 0.4$	$\xi = 0.6$	$\xi = 0.8$
۰/۶	روش حاضر	۰/۳۷۸۹	۰/۲۰۰۵	۰/۱۳۵۲	۰/۱۰۱۸
	مرجع [۱۶]	۰/۳۷۸۹	۰/۲۰۰۶	۰/۱۳۵۲	۰/۱۰۱۸
۰/۸	روش حاضر	۰/۴۴۵۱	۰/۲۴۱۲	۰/۱۶۳۵	۰/۱۲۳۳
	مرجع [۱۶]	۰/۴۴۵۱	۰/۲۴۱۲	۰/۱۶۳۵	۰/۱۲۳۳
۱	روش حاضر	۰/۲۹۰۴	۰/۲۷۰۸	۰/۱۸۴۳	۰/۱۳۹۳
	مرجع [۱۶]	۰/۲۹۰۴	۰/۲۷۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۳۹۳

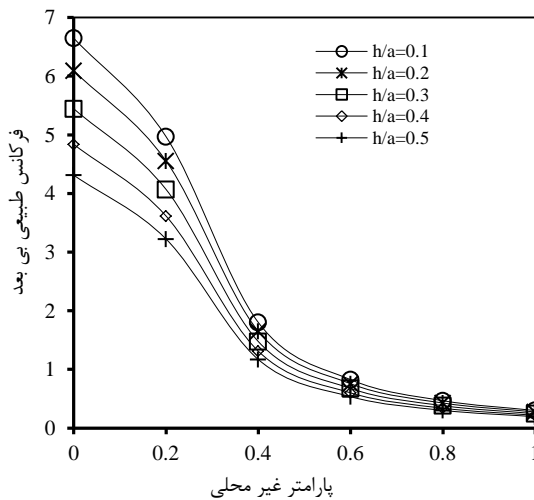
<sup>1</sup>Zirconia



جدول ۷ فرکانس طبیعی بی بعد  $\bar{\omega} = \lambda \left(\frac{a^2}{h}\right) \sqrt{\rho_m(1-\theta^2)/E_m}$  برای نانو ورق تابعی مدرج با شرایط مرزی کاملاً ساده تحت توزیع حرارت غیر یکنواخت در راستای ضخامت  $ZrO_2/Ti6Al4V$ ,  $b/a=1$ ,  $h/a=0.1$ ,  $T_0=300K$  و  $T_b=300K$

$\bar{\omega}$			g	$\bar{\mu}$
$T_t = 300K$	$T_t = 400K$	$T_t = 600K$		
۸/۴۳۷	۸/۲۲۵	۷/۸۹۲	۰	۰/۰
۶/۷۸۳	۶/۶۴۷	۶/۴۲۸	۱	
۵/۸۷۶	۵/۷۷۴	۵/۵۹۷	۱۰	
۶/۳۰۷	۶/۱۴۸	۵/۸۹۹	۰	۰/۲
۵/۰۷۱	۴/۹۶۹	۴/۸۰۵	۱	
۴/۳۹۳	۴/۳۱۷	۴/۱۸۴	۱۰	
۲/۲۸۵	۲/۲۲۸	۲/۱۳۷	۰	۰/۴
۱/۸۳۷	۱/۸۰۰	۱/۷۴۱	۱	
۱/۵۹۱	۱/۵۶۴	۱/۵۱۶	۱۰	
۱/۵۸۷	۱/۵۴۷	۱/۴۸۴	۰	۰/۶
۰/۸۴۲	۰/۸۲۵	۰/۷۹۸	۱	
۰/۷۲۹	۰/۷۱۶	۰/۶۹۴	۱۰	

شکل ۳ نمودار تغییرات فرکانس نانو ورق تابعی مدرج ( $ZrO_2/Ti6Al4V$ ) بر حسب تغییرات ضخامت به طول و پارامتر غیر محلی ( $\bar{\mu}$ ) در محیطی با دمای  $T_0 = 300K$ ، دمای سطح بالای  $T_t = 400K$  و دمای سطح پایین  $T_b = 300K$  نمایش داده شده است در این نمودار نسبت اضلاع  $b/a=1$  و ضریب نسبت حجمی توانی  $g=1$  فرض شده‌اند.



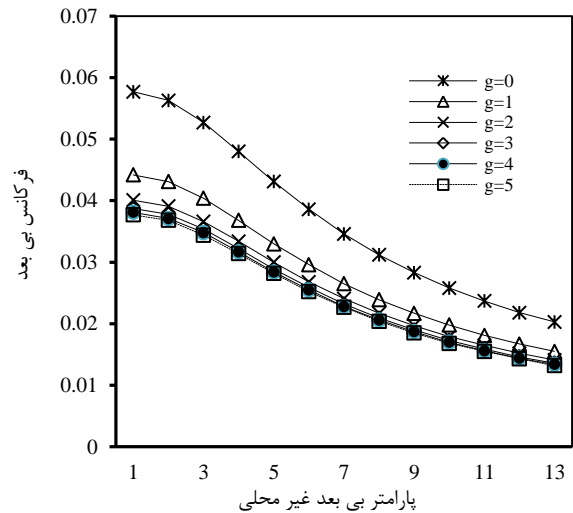
شکل ۳ تاثیر پارامتر غیر محلی  $\bar{\mu}$  و نسبت ضخامت به طول  $h/a$  بر فرکانس طبیعی بی بعد  $\bar{\omega} = \lambda \left(\frac{a^2}{h}\right) \sqrt{\rho_m(1-\theta^2)/E_m}$ ,  $(m=1, n=1, b/a=1)$

با توجه به نتایج ارائه شده در شکل ۳ مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق فرکانس ورق کاهش می‌یابد.

شکل ۴ نمودار تغییرات فرکانس نانو ورق تابعی مدرج ( $ZrO_2/Ti6Al4V$ ) بر حسب تغییرات ضریب نسبت حجمی توانی و دماهای سطح بالا ( $T_t$ ) مختلف در محیطی با دمای  $T_0 = 300K$  و دمای سطح پایین  $T_b = 300K$  نمایش داده شده است در این نمودار نسبت اضلاع  $b/a=1$ ، نسبت ضخامت  $h/a = 0.1$  و پارامتر بی بعد غیر محلی  $\xi = 0.2$  در نظر گرفته شده است.

ثابت درجه آزادی ورق کاهش می‌یابد که این امر سبب افزایش سختی و در نتیجه سبب افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

با توجه به شکل ۲ مشاهده می‌شود برای ضریب نسبت حجمی توانی ( $g$ ) پایین‌تر، فرکانس طبیعی سیستم بیشتر است. همچنین برای ضریب نسبت حجمی توانی ( $g$ ) پایین‌تر، تاثیر تغییرات پارامتر بی بعد محلی مشهودتر و با افزایش ضریب نسبت حجمی توانی تاثیر تغییرات پارامتر بی بعد محلی کاهش می‌یابد. زیرا با افزایش در ضریب نسبت حجمی توانی، خواص ورق به خواص فلز نزدیکتر می‌شود و سختی کاهش می‌یابد، این امر سبب کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.



شکل ۴ تاثیر پارامتر بی بعد غیر محلی  $\xi$  و ضریب نسبت حجمی توانی ( $g$ ) بر فرکانس طبیعی بی بعد  $\bar{\omega} = \lambda a^2 \sqrt{\rho_c/E_c/h}$ ,  $(m=1, n=1, b/a=1, h/a=0.1)$

در جدول ۷ و شکل‌های ۳ تا ۵ تاثیر پارامترهای گوناگون مانند نسبت طول به عرض ورق، نسبت طول به ضخامت ورق، ضریب نسبت حجمی توانی  $g$  و پارامتر بی بعد غیر محلی  $\xi$  در محیط‌های حرارتی با دماهای مختلف بر فرکانس طبیعی بی بعد  $\bar{\omega} = \lambda \left(\frac{a^2}{h}\right) \sqrt{\rho_m(1-\theta^2)/E_m}$  ناشی از ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی تابعی مدرج ( $ZrO_2/Ti6Al4V$ ) با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده تحت توزیع حرارت غیر خطی به دست آمده است.

خواص نانو ورق تابعی مدرج هدفمند مورد تحلیل برای جدول ۷ و شکل‌های ۳ تا ۵ به صورت  $\kappa_m = 7.82 \text{ W/m}$ ،  $\kappa_c = 1.80 \text{ W/mK}$ ،  $\rho_m = 4429 \text{ kg/m}^3$ ،  $\rho_c = 3000 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu = 0.3$  گرفته شده است. همچنین مدول یانگ ( $E$ ) و ضریب انبساط حرارتی ( $\alpha$ ) وابسته به دما و با توجه به جدول ۱ و رابطه ۱ به دست خواهند آمد.

جدول ۷ مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد ناشی از ارتعاش آزاد نانو ورق مستطیلی تابعی مدرج ( $ZrO_2/Ti6Al4V$ ) در محیط حرارتی به ازای پارامترهای غیر محلی  $\bar{\mu}$  و ضریب نسبت حجمی توانی ( $g$ ) در دماهای مختلف سطح بالا  $T_t$  را نمایش می‌دهد.

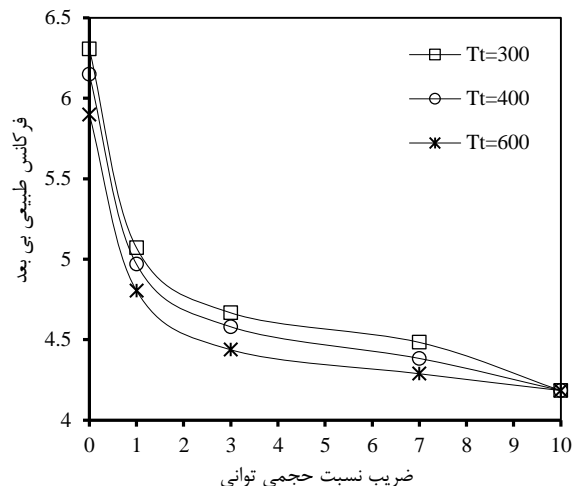
در جدول ۷ فرکانس طبیعی برای سرامیک خالص بیشتر از فلز خالص است. با افزایش اختلاف دما بین سطوح پایین و بالا فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد زیرا با افزایش حرارت مدول الاستیسیته‌ی ورق کاهش می‌یابد. به طور کلی تاثیر ضریب نسبت حجمی توانی در دماهای بالا بیشتر از دماهای پایین می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله حل ناوبر ارتعاش آزاد نانو ورق های مستطیلی هدفمند نسبتا ضخیم تحت محیط حرارتی با استفاده از تئوری غیر محلی تغییر شکل برشی نمایی برای شرط مرزی کاملا ساده برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. در تئوری تغییر شکل برشی نمایی همانند تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، تنش های برشی عرضی در سطوح آزاد بالا و پایین صفر می گردد حال آنکه در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دلیل عدم کنترل تنش برشی در سطوح بالا و پایین ورق نیاز به ضریب اصلاح می باشد بنابراین می توان نتیجه گرفت که تئوری اصلاح شده ی نمایی نسبت به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بهتر می تواند رفتار ارتعاشی ورق را شبیه سازی کند و جواب های حاصله از آن دارای دقت بیشتری می باشند. در خصوص تاثیرات پارامترهای هندسی ورق و حرارت سطوح بر روی فرکانس طبیعی سیستم می توان گفت: با افزایش نسبت عرض به طول ورق مقدار فرکانس پایه ارتعاش کم خواهد شد. با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق مقدار فرکانس طبیعی کاهش می یابد. با افزایش ضریب نسبت حجمی فرکانس سیستم کاهش می یابد. همچنین با افزایش اختلاف دمای سطوح بالا و پایین فرکانس ورق کاهش می یابد و با افزایش پارامتر غیر محلی فرکانس طبیعی کاهش می یابد.

۶- مراجع

- [1] Khorshidi, K., "Effect of Hydrostatic Pressure and Depth of Fluid on the Vibrating Rectangular Plates Partially in Contact with Fluid", Applied Mechanics and Materials, Vol. 110, pp. 927-935, 2011.
- [2] Khorshidi, K. and Farhadi, S., "Free Vibration Analysis Of A Laminated Composite Rectangular Plate In Contact With A Bounded Fluid", Composite structures, Vol. 104, No.45, pp. 176-186, 2013.
- [3] Dozio, L., "On The Use Of The Trigonometric Ritz Method For General Vibration Analysis Of Rectangular Kirchhoff Plates", Thin-Walled Structures, Vol. 49, No. 1, pp. 129-144, 2011.
- [4] Mantari, J.L. and Soares, C.G., "A Trigonometric Plate Theory With Unknowns And Stretching Effect For Advanced Composite Plates", Composite Structures, Vol. 107, No. 5, pp. 396-405, 2014.
- [5] Tounsi, A. Houari, M.S.A. Benyoucef, S. and Bedia, E.A. A., "A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory For Thermoelastic Bending Of Functionally Graded Sandwich Plates", Aerospace science and technology, Vol. 24, No. 1, pp. 209-220, 2013.
- [6] Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M., "Bending And Free Vibration Analysis Of Thick Isotropic Plates By Using Exponential Shear Deformation Theory", Applied and Computational mechanics, Vol. 100, No. 2, pp. 290-299, 2012.
- [7] Kharde, S.B. Mahale, A.K. Bhosale, K.C. and Thorat, S.R., "Flexural Vibration Of Thick Isotropic Plates By Using Exponential Shear Deformation Theory", International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, Vol. 3, No. 1, pp. 369-374, 2013.
- [8] Yang, Y. and Lim, C.W., "Wave Propagation In Double-Walled Carbon Nanotubes On A Novel Analytically Nonlocal Timoshenko-Beam Model", Journal of Sound and Vibration, Vol. 8, No. 330, pp. 1704-1717, 2011.
- [9] Ke, L.L. and Wang, Y.S., "Flow-Induced Vibration And Instability Of Embedded Double-Walled Carbon Nanotubes Based On A Modified Couple Stress Theory", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 5, No. 43, pp. 1031-1039, 2011.
- [10] Wang, L., "Wave Propagation Of Fluid-Conveying Single-Walled Carbon Nanotubes Via Gradient Elasticity Theory", Computational Materials Science, Vol. 49, No. 4, pp. 761-766, 2010.
- [11] Yang, F. Chong, A.C.M. Lam, D.C.C. and Tong, P., "Couple Stress Based Strain Gradient Theory For Elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 10, pp 235-243, 2002.
- [12] Ke, L.L. Wang, Y.S. Yang, J. and Kitipornchai, S., "Free Vibration Of Size-Dependent Mindlin Microplates Based On The Modified Couple Stress Theory", Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, No. 1, pp. 94-106, 2012.
- [13] Aksencer, T. and Aydogdu, M., "Levy Type Solution Method For Vibration And Buckling Of Nanoplates Using Nonlocal Elasticity Theory", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 4, No. 43, pp. 954-959, 2011.

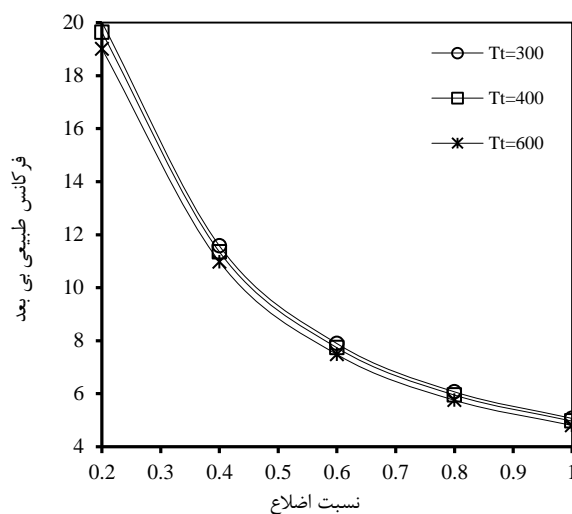


شکل ۴ تاثیر دماهای مختلف سطح بالا و ضریب نسبت حجمی توانی (g)، بر فرکانس طبیعی بی بعد  $m=1, b/a=1, \frac{h}{a}=0.1, \bar{\omega} = \lambda \left( \frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\rho_m(1-\vartheta^2)/E_m}$  (n=1)

با توجه نتایج ارائه شده در شکل ۴ مشاهده می شود با افزایش حرارت در سطح بالای ورق فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می یابد زیرا افزایش حرارت باعث کاهش مدول الاستیسیته و در نتیجه باعث کاهش سختی و فرکانس طبیعی سیستم می شود.

شکل ۵ نمودار تغییرات فرکانس نانو ورق تابعی مدرج (ZrO<sub>2</sub>/Ti6Al4V) بر حسب تغییرات نسبت عرض به طول b/a و دماهای سطح بالا T<sub>t</sub> مختلف در محیطی با دمای T<sub>0</sub> = 300K و دمای سطح پایین T<sub>b</sub> = 300K را نمایش داده است در این نمودار نسبت ضخامت  $\frac{h}{a} = 0.1$  پارامتر غیر محلی  $\bar{m} = 0.2$  و ضریب نسبت حجمی توانی  $g = 1$  فرض شده است.

همانگونه که در شکل ۵ نیز مشاهده می شود، افزایش در اختلاف حرارت سطوح باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می شود. همچنین افزایش عرض سیستم در طول ثابت باعث افزایش درجه آزادی سیستم و در نتیجه کاهش سختی و کاهش فرکانس طبیعی سیستم شده است.



شکل ۵ تاثیر دماهای مختلف سطح و نسبت عرض به طول، بر فرکانس طبیعی بی بعد  $m=1, n=1, h/a=0.1, g=1, \bar{\omega} = \lambda \left( \frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\rho_m(1-\vartheta^2)/E_m}$

- [14] Aghababaei, R. and Reddy, J., "Nonlocal Third-Order Shear Deformation Plate Theory With Application To Bending And Vibration Of Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, No. 326, pp. 277-289, 2009.
- [15] Natarajan, S. Chakraborty, S. Thangavel, M. Bordas, S. and Rabczuk, T., "Size-Dependent Free Flexural Vibration Behavior Of Functionally Graded Nanoplates", *Computational Materials Science*, Vol. 65, No. 30, pp. 74-80, 2012.
- [16] Hosseini-Hashemi, Sh. Zare, M. and Nazemnezhad, R., "An Exact Analytical Approach For Free Vibration Of Mindlin Rectangular Nano-Plates Via Nonlocal Elasticity", *Composite Structures*, Vol. 100, No. 2, pp. 290-299, 2013.
- [17] Zhang, P.Q. Lee, H.P. Wang, C.M. and Reddy, J.N., "Non-Local Elastic Plate Theories," *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 463, No. 2088, pp. 32-40, 2007.
- [18] Hosseini-Hashemi, Sh. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan, H. and Omid, M., "Free Vibration Of Functionally Graded Rectangular Plates Using First-Order Shear Deformation Plate Theory". *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No 5, pp 1276-1291, 2010.
- [19] Khorshidi, K. and Fallah, A., "Buckling Analysis Of Functionally Graded Rectangular Nano-Plate Based On Nonlocal Exponential Shear Deformation Theory". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 113, pp. 94-104, 2016.
- [20] Khorshidi, K. Asgari, T. and Fallah, A. "Free Vibrations Analysis Of Functionally Graded Rectangular Nano-Plates Based On Nonlocal Exponential Shear Deformation Theory". *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2016.
- [21] Kim, Y.W., "Temperature Dependent Vibration Analysis Of Functionally graded rectangular Plates", *Journal of sound and vibration*, Vol. 284, No. 3-5, pp.531-549, 2005.
- [22] Li, Q. Lu, V.P. and Kou, K.P., "Three-Dimensional Vibration Analysis Of Functionally Graded Material In Thermal Environment", *Journal of sound and vibration*, Vol. 324, No. 3-5, pp.733-750, 2009.
- [23] Natarajan, S. Chakraborty, S. Thangavel, M. Bordas, S. and Rabczuk, T., "Size Dependent Free Flexural Vibration Behavior Of Functionally Graded Nanoplates", *Computational Materials Science*, Vol. 65, pp. 74-80, 2012.
- [24] Shen, S.H., "Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis Of Plates And Shells", CRC Press Taylor Francis Group, 2009.
- [25] Thai, H.T. and Choi, D.H., "Size-Dependent Functionally Graded Kirchhoff And Mindlin Plate Models Based On A Modified Couple Stress Theory", *Composite Structures*, Vol.95, pp. 142-153, 2013.
- [26] Eringen, A.C. and Edelen, D., "On Nonlocal Elasticity. *International Journal Of Engineering Science*", Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972 .
- [27] Shahrjerdi, A. Mustapha, F. Bayat, M. and Majid, D. L. A., "Free Vibration Analysis Of Solar Functionally Graded Plates With Temperature-Dependent Material Properties Using Second Order Shear Deformation Theory", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 25, No. 9, pp. 2195-2209, 2011.

