



## تحلیل ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین لایه‌های چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن تحت بارگذاری استاتیکی به روش خرابی چندمقیاسی

بیژن محمدی<sup>۱\*</sup>، سمیه اصل کامکار<sup>۲</sup>، امین فرخ آبادی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، bijan\_mohammadi@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
دریافت: ۹۵/۱/۱۷	در این تحقیق، خرابی ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی در چندلایه‌های متعامد $[0_n/90_m]_s$ و زاویه‌ای $[\theta/-\theta]_s$ تحت بارگذاری کششی و برشی با روش خرابی تک لایه بررسی شده است. میدان تنش و جابجایی با استفاده از فرضیات و شرایط مورد نظر و با به کارگیری روش بهبود لایه‌ای تعیین می‌شوند. همچنین، با استفاده از فرض بسته شدن ترک لایه حاوی خرابی، روابط درونی مابین خواص لایه حاوی خرابی و لایه سالم استخراج شد. با به کارگیری روابط درونی و میدان تنش و کرنش به دست آمده خواص لایه حاوی خرابی پیش‌بینی شده و با استفاده از نتایج افت سفتی، نرخ‌های انرژی کرنشی ناشی از خرابی‌های ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌ای محاسبه شد. نتایج به دست آمده، با روش حساب تغییرات، روش اجزاء محدود و مشاهدات و نتایج آزمایشگاهی مقایسه شدند. هماهنگی خوبی بین نتایج افت خواص مکانیکی روش تک‌لایه با روش‌های حساب تغییرات، روش اجزاء محدود و مشاهدات و نتایج آزمایشگاهی مشاهده شد. با مقایسه نتایج نرخ‌های انرژی روش تک لایه و روش‌های حساب تغییرات و روش اجزاء محدود مشاهده شد که نتایج روش تک‌لایه به دلیل اختلاف در شیب تغییرات سفتی همراه با خطا است. در نهایت، دقت و صحت روش میکرومکانیکی تک‌لایه در پیش‌بینی خواص چندلایه حاوی خرابی و عدم دقت نتایج نرخ‌های انرژی حاصله اثبات شد.
پذیرش: ۹۵/۴/۹	
کلیدواژگان:	
ترک خوردگی ماتریسی	
جدایی بین لایه‌ای القایی	
افت خواص مکانیک	
نرخ‌های انرژی	
روش چندمقیاسی	

## Matrix cracking and induced delamination in symmetrically laminated composites subjected to static loading by using multi scale damage mechanics

Bijan Mohammadi<sup>1\*</sup>, Somayeh Asl Kamkar<sup>1</sup>, Amin Farrokhhabadi<sup>2</sup>

1- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\*P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran, bijan\_mohammadi@iust.ac.ir

### Keywords

Matrix cracking  
Induced delamination  
Reduced mechanical properties  
Energy release rate  
Multi scale damage modeling

### Abstract

Matrix Cracking and induced delamination in symmetric cross-ply,  $[0_m/90_n]_s$ , and angle-ply,  $[\theta/-\theta]_s$ , laminated composites under axial and shear loading are studied by multi-scale micro-meso approach. The stress transfer model is implemented to predict the stress and displacement distribution incorporated with the ply-refinement technique in laminates. By considering crack closure condition, a series of useful inter-relationships between thermo-elastic constants for damaged and corresponding undamaged laminates are derived. By using both of stress and displacement fields and these inter-relationships the properties of damaged laminated structure are achieved. These obtained properties are used to calculate the energy release rate in load control condition for the initiation and growth of matrix cracking and induced delamination in cross-ply symmetric laminates with  $[0_m/90_n]_s$  layout. The obtained results of mechanical properties degradation show a good agreement with the results of experiments, variational approach and finite element methods (FEM) existed in literature. By comparing the results of the energy release rate of single-layer method with variational approach and finite element methods, it was observed that the results of proposed single-layer have a considerable error due to differences in slope of stiffness versus crack density. Finally, the accuracy of single-layer micromechanical approach in predicting the mechanical properties and inaccuracies in predicting of energy release rate was confirmed.

### Please cite this article using:

Mohammadi, B. Asl Kamkar, S. and Farrokhhabadi, A., "Matrix cracking and induced delamination in symmetrically laminated composites subjected to static loading by using multi scale damage mechanics", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 9-24, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

## ۱- مقدمه

در چند دهه گذشته سازه‌های کامپوزیتی زمینه پلیمری تقویت شده با الیاف پیوسته به دلیل دارا بودن وزن کم، سفتی خاص و مقاومت بالا، در زمینه‌های مختلف مهندسی مکانیک، حمل و نقل و هوافضا استفاده شده‌اند. یکی از نقاط ضعف کامپوزیت‌ها به دلیل ساختار چندفازی وجود انواع مختلف خرابی در مقیاس‌های مختلف از میکرو تا ماکرو می‌باشد [۱].

چهار مکانیزم شکست اولیه در کامپوزیت‌های زمینه پلیمری ترک ماتریس، جدایی الیاف و ماتریس، شکست الیاف و جدایی بین لایه‌های می‌باشند. ترک‌های ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از آن از آسیب‌های اولیه و مکانیزم‌های خرابی رایج در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد و زاویه‌ای می‌باشند. اتصال بین ماتریس و الیاف تاثیر قابل توجهی بر استحکام مکانیکی مواد دارد و بررسی این اتصال از ابتدای ساخت این مواد مطرح بوده است [۲]. به‌طور کلی، خرابی در کامپوزیت‌ها به معنی اثر تجمعی چند مکانیزم ظاهر شده در سطح چندلایه (مقیاس ماکرو)، در سطح لایه‌ای (مقیاس مزو)، در سطح الیاف یا ماتریس اطراف (مقیاس میکرو) می‌باشد. از این رو، مهم‌ترین موضوع در بررسی خرابی در کامپوزیت‌ها، انتخاب مقیاسی است که کامپوزیت در آن مطالعه می‌شود. سه مقیاس مهمی که در آن‌ها به مطالعه رفتار کامپوزیت پرداخته می‌شود، عبارتند از مقیاس ماکرو، مزو و میکرو [۳]. روش‌ها و مقیاس‌های مختلف خرابی را می‌توان در مدل‌های ماکرومکانیک، مزو مکانیک، میکرومکانیک، مکانیک خرابی پیوسته و روش‌های چندمقیاسی خلاصه نمود.

## ۱-۱- ماکرومکانیک

در تحلیل مقیاس ماکرو، خواص موثر ماده همگن شده توسط نرم افزارهای ساختاری برای یافتن تغییرشکل‌هایی که در تعادل با بارگذاری خارجی هستند، استفاده می‌شوند. هم‌چنین، برای پیش بینی خرابی پیشرونده و شکست نهایی نیز خواص موثر به‌کار گرفته می‌شوند [۴].

## ۱-۲- مکانیک خرابی پیوسته در مقیاس مزو

تئوری خرابی کلی که به عنوان پایه برای این مدل عمل می‌کند، اولین بار توسط لادوز<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۳ [۵] به کمک تئوری مکانیک خرابی پیوسته ارائه شده است. در مدل‌سازی مزو با توجه به مقیاس، برخی مکانیزم‌های خرابی که شامل ترک‌های عرضی و جدایی بین لایه‌های هستند، در نظر گرفته می‌شوند و برای هر حالت خرابی، پارامتر خرابی مرتبط با افت سفتی در نظر گرفته می‌شود [۵]. مکانیک خرابی پیوسته<sup>۲</sup> تئوری خرابی تک محوره کلاسیک که مفاهیم اساسی مکانیک خرابی را بیان می‌کند، از اندازه‌گیری ساده خرابی به وسیله اندازه‌گیری مجموع سطوح خرابی‌ها به‌دست می‌آید. در مکانیک خرابی پیوسته ابتدا تانسور خرابی کلی در نظر گرفته شده و براساس آن تانسورهای تنش موثر و کرنش موثر به‌دست می‌آید. در این روش، شکست نهایی از تخریب تدریجی ماده ناشی می‌شود.

## ۱-۳- مایکرومکانیک

روش دیگر برای تحلیل خرابی در مواد مرکب رویکرد مایکرو، مطالعه خرابی در مقیاس تشکیل ترک‌ها می‌باشد. المان حجمی نمونه<sup>۳</sup> یا تکنیک سلول واحد تکراری<sup>۴</sup> بسته به هندسه و شرایط بارگذاری کامپوزیت ساخته می‌شود تا رفتار کلی کامپوزیت و خواص آن از طریق تحلیل المان حجمی نمونه یا

سلول واحد با روش‌های تحلیلی یا عددی تعیین شوند. این روش شامل دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول تحلیل تنش برای تعیین توزیع تنش در چندلایه حاوی خرابی (ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های القایی) انجام می‌گیرد و بعد از یافتن اثر خرابی بر تنش‌ها، خواص موثر ماده تخمین زده می‌شود. در مرحله دوم بعد از بیان معیار خرابی، شرایطی که منجر به شروع و رشد خرابی می‌گردد پیش‌بینی خواهد شد. در بین روش‌های مایکرومکانیک، پرکاربردترین روش‌ها، روش تاخیر برشی، اصول تغییرات و روش کرنش صفحه‌ای عمومی می‌باشند.

## ۱-۳-۱- تاخیر برشی

این مدل برای اولین بار توسط کوخ<sup>۵</sup> [۶] با استفاده از مجموعه تقریب‌های تئوری الاستیسیته و برای توصیف انتقال تنش بین الیاف و ماتریس برای کامپوزیت‌های الیاف ناپیوسته با در نظرگیری مدل متقارن الیاف منفرد جاسازی شده در ماتریس، به‌کار رفته است. همه تحلیل‌های تاخیر برشی مبتنی بر مفهوم اساسی زیر است: در صفحه ترک عرضی لایه عرضی بار محوری را انتقال نمی‌دهد در حالی‌که دور از ترک قسمتی از این بار توسط برش محوری در سطح تماس لایه‌های عرضی ترک خورده و سالم مجاور به لایه عرضی منتقل می‌شود. همه مطالعات انجام شده ترک عرضی تحلیل شده با روش تاخیر برشی در آخر به معادله (۱) رسیده‌اند و تفاوت آن‌ها تنها در تعیین پارامتر تاخیر برشی  $\phi$  می‌باشد.

$$d \quad (1)$$

$\Delta\sigma$  نشان‌دهنده‌ی تنش کلی منتقل شده از لایه ۹۰ درجه به ۰ درجه می‌باشد. این پارامترها ناشناخته بوده و از نتایج تجربی به‌دست می‌آیند. بر اساس مطالعات گسترده تجربی ترک‌ها توسط الیاف اسمیت<sup>۷</sup> و رایف اشناپدر<sup>۸</sup> [۷]، مشاهده شد که تغییر شکل برشی لایه محدود به ناحیه نازکی نزدیک سطح مشترک لایه‌های مجاور است. لیم<sup>۹</sup> و هنگ<sup>۱۰</sup> (۱۹۸۹) [۸] روش تاخیر برشی اصلاح شده را برای چندلایه متعامد اعمال کردند و اثر لایه برشی داخل لایه‌های و کرنش‌های حرارتی و اثر پواسون را با مسئله ترک خوردگی ماتریس ترکیب کردند. تحلیل تنش در مدل‌های تاخیر برشی چندان دقیق نبوده و توانایی توصیف انتقال تنش در سطح مشترک با تنش برشی موجب مفید بودن این مدل در تحلیل ترک خوردگی بوده است [۱۰،۹،۳].

## ۱-۳-۲- روش حساب تغییرات

مطالعه‌ی چندلایه‌های متعامد ترک خورده با رویکرد تغییرات اولین بار توسط هشین<sup>۱۱</sup> در سال ۱۹۸۵ انجام شد [۱۱]. تحلیل تنش دو بعدی تحلیل تغییرات هشین، با استفاده از اصل انرژی مکمل مینیمم اعمال شده بر حجم چندلایه ترک خورده بهبود یافته است. تغییرات تنش‌های محوری لایه‌ی ۰ و ۹۰ درجه در طول ضخامت لایه‌ها ثابت می‌ماند. تغییرات تنش‌های  $\sigma_{xy}$ ،  $\sigma_{yy}$  و  $\sigma_{yz}$  صفر فرض شده است. تغییرات تنش‌های محوری با استفاده از توابع اغتشاش ناشناخته‌ای به تنش‌های محوری چندلایه بدون ترک مرتبط می‌شود. با به‌دست آوردن توابع تغییرات، میدان تنش محاسبه می‌شود و در نهایت، ضرایب سفتی موثر برای چندلایه ترک خورده با محاسبه تنش‌ها و کرنش‌های متوسط به‌دست می‌آید [۹،۳].

5. Cox  
6. A.L.Highsmith  
7. K.L.Reifsnider  
8. S. G. Lim  
9. C. S. Hong  
10. Hashin

1. Ladeveze  
2. Continuum Damage Mechanic  
3. Representative Volume Element  
4. Repetitious Unit Cell

## ۱-۳-۳- روش کرنش صفحه ای عمومی

شده است. هم‌چنین، برای محاسبه نرخ رهایی انرژی از روش نابرن استفاده شده و برای اولین بار نمودار تغییرات نرخ رهایی انرژی بر حسب چگالی ترک ماتریسی در روش مک کارنتی ترسیم خواهد شد. انتقال تنش بین لایه‌های هم‌جوار در چندلایه‌های متقارن که ترک‌هایی به فواصل یکسان از هم در لایه‌های ۹۰ آن تشکیل شده‌اند، قابل پیش بینی است. از آن‌جایی که شرایط کرنش صفحه‌ای برای تغییر شکل‌های صفحه‌ای که تحت تاثیر اثرات انتقال تنش لایه‌ای نیستند، معتبر است این شرایط فرض شده است. تغییر شکل کرنش صفحه‌ای، مسئله را به یک مسئله دو بعدی کاهش داده که در آن اثرات بارگذاری صفحه‌ای دو محوری و بارگذاری برشی صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

از آن‌جایی که تغییرات مؤلفه‌ی در جهت ضخامت تنش و جابجایی دارای اهمیت زیادی است، روش تفکیک لایه‌ای استفاده می‌شود. در این روش هر لایه از چندلایه به زیرلایه‌هایی با خواص یکسان تفکیک می‌شود. هم‌چنین، مؤلفه‌ی در جهت ضخامت تنش‌های برشی بصورت توابع خطی از مختصه ضخامت هر لایه در نظر گرفته شده است. به خاطر این فرض، مجهولاتی بصورت توابعی از مختصه محوری معرفی می‌شوند که نشان‌گر تنش‌های برشی در فصل مشترک بین لایه‌ها است. در نتیجه، تنش محوری هر لایه مستقل از مختصه ضخامت به‌دست آمده است. معادلات تعادل برای تعیین توزیع دیگر مؤلفه‌های تنش استفاده شده است. شش معادله‌ی مستقل تنش-کرنش برای تعیین میدان جابجایی متناسب با میدان تنش به‌کارگرفته شده است. سه معادله تنش-کرنش به منظور استخراج معادلات دستگاه دیفرانسیلی مرتبه چهار به حالت مقدار میانگین‌گیری در جهت مختصه ضخامت استفاده می‌شوند. با حل این دستگاه معادلات، توابع مجهول میدان جابجایی و تنش معلوم می‌شود. هم‌چنین در این روش امکان پیش بینی تمام ثوابت ترمو الاستیک وجود دارد. برای استخراج روابط داخلی بین ثوابت، فرض بسته‌شدن ترک مجازی در نظر گرفته شده است. فرضیاتی که برای مدل‌سازی انتقال تنش و پیش‌بینی خواص لایه‌ی ترک‌خورده در نظر گرفته شده‌اند به شرح زیر هستند:

- چندلایه نسبت به صفحه‌ی میانی  $y=0$  و  $x=0$  متقارن فرض می‌شود.
- لایه‌ها ارتوتروپیک فرض می‌شوند، بنابراین برای مشخصه‌سازی رفتار خطی نیاز به ۱۵ ثابت ترموالاستیک است.
- ترک‌ها به طور یکنواخت و با فواصل یکسان از هم تشکیل می‌شوند. ترک‌ها در صفحات  $y=\pm L$  رشد می‌کنند.
- برقراری شرایط کرنش صفحه‌ای عمومی
- وجود پیوند قوی و کامل بین لایه‌ها و زیر لایه‌ها در چندلایه
- استقلال تنش محوری هر لایه از مختصه‌ی ضخامت.
- سطوح خارجی چندلایه‌ی سالم تحت بارگذاری  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma_{xz} = 0$  و  $\sigma_{xx} = \sigma_t$  است.
- فرض تنش‌های برشی اغتشاشی  $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_{xy}$  در لایه‌ی حاوی ترک به‌صورت توابع تکه‌ای خطی در راستای ضخامت
- میدان تنش چندلایه‌ی ترک‌خورده، مستقل از مختصه‌ی عرضی است.
- فرض بسته‌شدن ترک حاوی ترک برای استخراج روابط داخلی بین خواص لایه‌ی ترک‌خورده و سالم

مدل مک کارنتی<sup>۱</sup> در تحلیل‌های تنش توسعه یافته مبتنی بر مدل‌های خرابی در چندلایه‌های حاوی ترک استفاده می‌شود. با در نظرگیری شرایط کرنش صفحه‌ای کلی در چندلایه‌های متعامد ترک‌خورده وابستگی به جهت میدان تنش سه بعدی در چندلایه کاهش می‌یابد. در این روش با فرض تنش‌های برشی اغتشاشی  $\sigma_{xz}$  و  $\sigma_{xy}$  به‌صورت توابع تکه‌ای خطی در راستای ضخامت امکان استخراج روش تحلیلی برای تعیین توزیع میدان تنش و جابجایی چندلایه‌ی متقارن عمومی حاوی توزیع یکنواخت ترک‌ها در چندلایه که معادلات تعادل، سازگاری، ۴ معادله از روابط تنش-کرنش و معادلات پیوستگی فصل‌مشترک‌ها را ارضا می‌کنند، فراهم می‌سازد. با ارضای ۲ معادله‌ی باقی مانده‌ی تنش-کرنش در حالت مقدار میانگین متغیرها در راستای ضخامت هر لایه، مسئله انتقال تنش به‌صورت حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی مرتبه ۴ کاهش می‌یابد که با تکنیک‌های استاندارد عددی قابل حل هستند. شرایط مرزی و فرضیات میدان تنش در این مدل عبارتند از:

- متقارن نسبت به صفحه میانی
- متقارن نسبت به صفحه موازی با ترک‌ها که بین دو ترک مجاور قرار گرفته است.
- پیوستگی تنش در سطح مشترک لایه‌های ۰ درجه و ۹۰ درجه
- توزیع یکنواخت و به فاصله یکسان از هم ترک‌ها
- عدم کشش در سطوح ترک و سطوح خارجی لایه‌های بیرونی [۳].

## ۱-۴- روش‌های چندمقیاسی

نقطه ضعف روش مکانیک خرابی پیوسته، دشواری در به‌دست آوردن پارامترهای مدل از داده‌های تجربی می‌باشد. برای حذف این مشکل روش ماکرومکانیک را با روش‌های دیگر مانند مایکرومکانیک و یا مزو ترکیب می‌کنند. هم‌چنین، می‌توان برای کاهش هزینه‌ها در به‌دست آوردن پارامترها برای لایه‌چینی‌های مختلف در روش مزو، این روش را با روش مایکرومکانیک ترکیب کرده و قانون رشد خرابی برحسب پارامترهای مایکرومکانیک به‌دست آورد.

## ۱-۵- روش تجربی [۱۲]

کیفیت کامپوزیت‌ها قبل از تست‌های آزمایشگاهی باید بررسی شود. بررسی کیفیت اطلاعاتی در رابطه با کیفیت پیوند الیاف و ماتریس هم‌چنین وجود حفره‌ها، الیاف شکسته شده، ترک‌های ماتریس و تورق ارائه می‌کند. روش میکروسکوپی، بازرسی فراصوتی و استفاده از اشعه ایکس تعدادی از روش‌های تجربی بررسی کیفیت مواد هستند.

## ۲- روش تک لایه

فرخ آبادی و همکاران [۱۳] با استفاده از روش انتقال تنش مک کارنتی [۱۴] روش تک لایه را برای تحلیل چندلایه‌های کامپوزیتی پیاده کرد. در این روش به جای تقسیم تمام لایه‌های چندلایه به زیرلایه‌هایی با ضخامت کمتر، تنها لایه‌ی حاوی خرابی در تحلیل تنش دخالت داشته و با استفاده از روش بهبود لایه ای، لایه حاوی ترک ماتریسی، به زیرلایه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شود. آخرین زیر لایه، زیرلایه‌ی سالم با ضخامت بسیار ناچیز می‌باشد. در این مقاله، نتایج سه روش تک لایه فرخ‌آبادی، چند لایه مک کارنتی و حساب تغییرات هم‌زمان باهم مقایسه شده و مزایا و معایب روش‌ها مشخص

1. L.N.McCartney

۳- هندسه و معادلات اصلی

المان حجمی نمونه چندلایه‌ی متقارن متشکل از  $2+2N$  لایه‌ی اورتوتروپیک با  $-L < y < L$ ،  $-h < x < h$  و  $-w < z < w$  مشخص شده است. با توجه به فرض متقارن بودن چندلایه‌ی مورد نظر نسبت به صفحه‌ی میانی، قسمت راست چندلایه تحلیل می‌شود. محور  $y$  جهت طولی و محوری، محور  $z$  جهت عرضی و محور  $x$  جهت ضخامت را نشان می‌دهد. چندلایه طوری بایستی قرار گیرد که حداقل یکی از لایه‌ها فایبرشان در جهت  $z$  باشد. محورهای لایه‌ی حاوی ترک ماتریسی باید طوری دوران کنند که صفحات ترک موازی با محور  $z$  باشد و تنش‌های اعمالی به جهات جدید منتقل شوند در لایه‌های حاوی خرابی فرض می‌شود که ترک‌های ماتریسی به طور یکنواخت و با فاصله‌ی یکسان از هم فقط در صفحات  $y = \pm L$  تشکیل می‌شود. لایه‌ی ۹۰ درجه حاوی ترک ماتریسی به زیر لایه‌هایی با خواص یکسان تقسیم می‌شود. شرایط بارگذاری با توجه به دوران محورها به سطوح خارجی لایه ۹۰ درجه منتقل می‌شود [۱۳]. معادلات تعادل مربوط به مختصات کلی لایه ۹۰ درجه که بایستی ارضا شوند، به صورت روابط (۲) تا (۴) هستند:

$$(۲) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$(۳) \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$(۴) \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

همچنین معادلات تنش- کرنش زیر لایه‌های ۹۰ درجه در مختصات

کلی عبارتند از:

می‌آیند.

$$(۱۲) \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_2$$

با توجه به فرض اساسی کرنش صفحه‌ای میدان جابجایی به فرم زیر به دست می‌آید.

$$(۱۳) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = f(x, y) + \varepsilon_c z$$

در این روابط  $\varepsilon_c = \varepsilon^*$  کرنش عرضی چندلایه است که برای تمامی لایه‌ها مقدار ثابتی دارد. با توجه به رابطه بالایی، تنش عرضی به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$(۱۴)$$

$$(۱۵)$$

معادلات تنش- کرنش بعد از جاگذاری رابطه‌ی (۱۵) به جای تنش عرضی به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$(۱۹) \quad H_1 = \frac{g_{13}}{g_{33}}$$

$$(۲۰) \quad H_2 = \frac{g_{23}}{g_{33}}$$

$$(۲۱) \quad H_3 = \frac{g_{34}}{g_{33}}$$

$$(۲۲) \quad \bar{g}_{11} = g_{11} - \frac{g_{13}^2}{g_{33}}$$

$$(۲۳) \quad \bar{g}_{12} = g_{12} - \frac{g_{13}g_{23}}{g_{33}}$$

$$(۲۴) \quad \bar{g}_{14} = g_{14} - \frac{g_{13}g_{34}}{g_{33}}$$

$$(۲۵) \quad \bar{g}_{22} = g_{22} - \frac{g_{23}^2}{g_{33}}$$

$$(۲۶) \quad \bar{g}_{24} = g_{24} - \frac{g_{23}g_{34}}{g_{33}}$$

$$(۲۷) \quad \bar{g}_{44} = g_{44} - \frac{g_{34}^2}{g_{33}}$$

$$(۲۸) \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 - \frac{g_{13}}{g_{33}} \alpha_3$$

$$(۲۹) \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 - \frac{g_{23}}{g_{33}} \alpha_3$$

$$(۳۰) \quad \bar{\alpha}_4 = \alpha_4 - \frac{g_{34}}{g_{33}} \alpha_3$$

۴- بررسی چندلایه سالم

سطوح بیرونی چندلایه تحت بارگذاری زیر فرض می‌شود.

$$(۱۱) \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3$$

با جاگذاری تنش‌های اعمالی در معادلات تنش- کرنش کرنش‌های رابطه

(۱۲) صفر می‌شوند.

$$\sigma_{xz}^i = q'_i(y) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} - q'_{i-1}(y) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (42)$$

توابع مجهول  $p$  و  $q$  فقط وابسته به  $y$  بوده و برای لایه‌ی سالم مقدارشان صفر است. همچنین، مشتق اول این توابع با توجه به روابط ارائه شده معرف تنش‌های برشی  $\sigma_{xy}$  و  $\sigma_{xz}$  در فصل مشترک لایه‌ها هستند. با جایگذاری تنش‌های برشی فرض شده در معادلات تعادل تنش‌های باقی مانده به دست می‌آیند. معادلات تعادل برای هر میدان تنش به دست آمده‌ی توابع  $p$  و  $q$  ارضا می‌شود. با توجه به میدان تنش به دست آمده و شرایط کرنش صفحه‌ای و با استفاده از معادلات تنش-کرنش مؤلفه‌ی جابجایی در جهت ضخامت  $u$  به دست می‌آیند. همچنین دیگر مؤلفه‌های جابجایی با استفاده از میدان تنش و تابع  $u$  به دست آمده تعریف می‌شوند.

$v$

روابط تنش را به ترتیب بر حسب  $\sigma_{yz}$  و  $\sigma_{yy}$  نوشته و سپس معادله مربوط به تنش محوری در رابطه تنش برشی و برعکس جاگذاری می‌شود. بدین ترتیب تنش‌های محوری و برشی بر حسب کرنش‌های محوری، عرضی و برشی نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \sigma = & [\bar{g}_{44}\varepsilon - \bar{g}_{24}\gamma + (\bar{g}_{24} \\ & - \bar{g}_{44}\bar{g}_{12})\sigma_t + (H_3\bar{g}_{24} - H_2\bar{g}_{44})\varepsilon^* \\ & + (\bar{g}_{24}\bar{\alpha}_4 - \bar{g}_{44}\bar{\alpha}_2)\Delta T] / [\bar{g}_{22}\bar{g}_{44} - \bar{g}_{24}^2] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = \tau = & [-\bar{g}_{24}\varepsilon - \bar{g}_{22}\gamma + (\bar{g}_{24}\bar{g}_{12} \\ & - \bar{g}_{22}\bar{g}_{14})\sigma_t + (H_2\bar{g}_{24} - H_3\bar{g}_{22})\varepsilon^* \\ & + (\bar{g}_{24}\bar{\alpha}_2 - \bar{g}_{22}\bar{\alpha}_4)\Delta T] / [\bar{g}_{22}\bar{g}_{44} - \bar{g}_{24}^2] \end{aligned} \quad (32)$$

تنش‌های اعمالی مؤثر محوری، عرضی و برشی و کرنش مؤثر در جهت ضخامت به ترتیب زیر قابل محاسبه هستند.

$$\sigma_{yy} = \sigma = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \sigma_i \quad (33)$$

$$= A\varepsilon + B\varepsilon^* + F\sigma_t + D\gamma - P\Delta T$$

$$\sigma_{zz} = \sigma^* = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \sigma_i^* \quad (34)$$

$$= B\varepsilon + C\varepsilon^* + G\sigma_t + E\gamma - Q\Delta T$$

$$\sigma_{yz} = \tau = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \tau_i \quad (35)$$

$$= D\varepsilon + E\varepsilon^* + Z\sigma_t + H\gamma - R\Delta T$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \varepsilon_t^i = a\varepsilon + b\varepsilon^* + d\sigma_t + c\gamma + e\Delta T \quad (36)$$

ماتریس نرمی لایه‌ی ۹۰ درجه که از مجموع خواص معادل زیر لایه‌ها تشکیل می‌شود، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_T \\ \sigma_t \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \frac{a * F}{d} & B - \frac{b * F}{d} & \frac{F}{d} & D - \frac{c * F}{d} \\ B - \frac{a * G}{d} & c - \frac{b * G}{d} & \frac{G}{d} & E - \frac{c * G}{d} \\ \frac{-a}{d} & \frac{-b}{d} & \frac{1}{d} & \frac{-c}{d} \\ D - \frac{a * Z}{d} & E - \frac{b * Z}{d} & \frac{Z}{d} & H - \frac{c * Z}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_t \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (37)$$

#### ۵- لایه حاوی ترک ماتریسی

با توجه به فرض شرایط کرنش صفحه‌ای میدان تنش مستقل از محور عرضی است. در نتیجه معادلات تعادل لایه‌ی ترک خورده به فرم زیر نوشته می‌شوند.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

مؤلفه‌های تنش برشی  $\sigma_{xy}$  و  $\sigma_{xz}$  با فرض تکه‌ای خطی بودن آن‌ها به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\sigma_{xy}^i = p'_i(y) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} - p'_{i-1}(y) \frac{x - x_i}{h_i} \quad (41)$$

#### ۶- شرایط مرزی و پیوستگی

با توجه به تقارن لایه نسبت به صفحات  $x=0$  و  $y=0$  فقط ناحیه‌ی  $0 < x < h$  و  $0 < y < L$  تحلیل می‌شود. تقارن نسبت به  $x=0$  ارضای شرایط زیر را موجب می‌شود.

$$\sigma_{xy}^i = 0, \sigma_{xz}^i = 0, u_i = 0 \quad \text{on } x=0 \quad (45)$$

با در نظرگیری وجود پیوند قوی در فصل مشترک لایه‌ها برقراری شرط زیر ضروری است.

$$\sigma_{xy}^i = \sigma_{xy}^{i+1}, \sigma_{xz}^i = \sigma_{xz}^{i+1}, \sigma_{xx}^i = \sigma_{xx}^{i+1} \quad \text{on } x = x_i \quad (46)$$

$$u_i = u_{i+1}, v_i = v_{i+1}, w_i = w_{i+1} \quad \text{on } x = x_i \quad (47)$$

لایه خارجی چندلایه تحت بارگذاری زیر است.

$$\sigma_{xy}^{N+1} = 0, \sigma_{xz}^{N+1} = 0, \sigma_{xx}^{N+1} = \sigma_t \quad (48)$$

$$\text{on } x = x_{N+1} = h$$

هر سطح سالمی در صفحات  $y=\pm L$  در معرض شرایط زیر است.

$$v_i(x, \pm L) = \pm \varepsilon_c L \quad (49)$$

$$w_i(x, \pm L, z) = \pm \gamma_c L + \varepsilon_c^* z \quad \text{for all } x, z$$

$$\varepsilon_c^* = -\frac{v_A^c}{E_A^c} \sigma + \frac{1}{E_T^c} \sigma_T - \frac{v_t^c}{E_T^c} \sigma_t - \frac{\lambda_T^c}{E_A^c} \tau + \alpha_T^c \Delta T \quad (58)$$

$$\varepsilon_t^c = -\frac{v_A^c}{E_A^c} \sigma - \frac{v_t^c}{E_T^c} \sigma_T + \frac{1}{E_T^c} \sigma_t - \frac{\lambda_T^c}{E_A^c} \tau + \alpha_t^c \Delta T \quad (59)$$

$$\gamma_c = -\frac{\lambda_A^c}{E_A^c} \sigma - \frac{\lambda_T^c}{E_A^c} \sigma_T - \frac{\lambda_t^c}{E_A^c} \sigma_t + \frac{\tau}{\mu_A^c} + \alpha_s^c \Delta T \quad (60)$$

پارامترهای  $\lambda_A^c$ ،  $\lambda_T^c$  و  $\lambda_t^c$  نسبت‌هایی هستند که نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی کوپلینگ برشی میباشند. با در نظرگیری فرض مقید بودن لایه حاوی ترک  $\gamma_c$  صفر است. از رابطه‌ی مربوط به کرنش برشی، تنش برشی محاسبه می‌شود. مقید بودن و صفر بودن کرنش برشی، منجر به وضعیتی می‌شود که در آن ترک‌های زیرلایه‌های ۹۰ درجه‌ی ترک خورده بسته فرض می‌شوند. سطوح ترک هیچ‌گونه جابجایی ناپیوسته در عرض ترک نداشته و انتقال تنش توسط آن‌ها صورت نمی‌گیرد. اکنون لایه سالم با تنش‌های اعمالی  $\sigma_T = \sigma_t = \gamma = 0$  در نظر گرفته و  $\sigma_y$  به‌دست می‌آید. برای لایه‌های ۹۰ با توجه به ثوابت با صفر بودن کرنش برشی، تنش برشی نیز صفر می‌شود.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E_A^c} \sigma + \tilde{\alpha}_A^c \Delta T \quad (61)$$

$$\varepsilon_c^* = -\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} \sigma + \tilde{\alpha}_T^c \Delta T \quad (62)$$

$$\varepsilon_t^c = -\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} \sigma + \tilde{\alpha}_t^c \Delta T \quad (63)$$

با تساوی کرنش‌های دو حالت  $\sigma_y$  به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma = -\frac{\tilde{\alpha}_t^c - \tilde{\alpha}_T^c}{\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} - \frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c}} \Delta T = -\frac{\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A^c}{\frac{1}{E_A^c} - \frac{1}{E_A^c}} \Delta T$$

$$= -\frac{\tilde{\alpha}_T^c - \tilde{\alpha}_T^c}{\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} - \frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c}} \Delta T \quad (64)$$

$$\sigma = -k_1 \Delta T \quad (65)$$

برای بار دیگر لایه سالم با تنش‌های اعمالی  $\sigma_y = \sigma_t = \gamma = 0$  در نظر گرفته و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon = -\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_A^c \Delta T \quad (66)$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{E_T^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_T^c \Delta T \quad (67)$$

$$\varepsilon_t = -\frac{\tilde{v}_t^c}{E_T^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_t^c \Delta T \quad (68)$$

لایه‌ی حاوی خرابی نیز با فرض بسته شدن مجازی ترک و بارگذاری فشاری تک محوره‌ی مقید  $\sigma_y = \sigma_t = \gamma = 0$  در نظر گرفته و معادلات تنش - کرنش زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_c = -\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_A^c \Delta T \quad (69)$$

$$\varepsilon_c^* = +\frac{1}{E_T^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_T^c \Delta T \quad (70)$$

$$\varepsilon_t^c = -\frac{\tilde{v}_t^c}{E_T^c} \sigma_T + \tilde{\alpha}_t^c \Delta T \quad (71)$$

با تساوی کرنش‌های دو حالت  $\sigma_T$  به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_T = -\frac{\tilde{\alpha}_t^c - \tilde{\alpha}_T^c}{\frac{\tilde{v}_t^c}{E_T^c} - \frac{\tilde{v}_T^c}{E_T^c}} \Delta T = -\frac{\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A^c}{\frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c} - \frac{\tilde{v}_A^c}{E_A^c}} \Delta T$$

$\varepsilon_c^*$ ،  $\varepsilon_c$  و  $\gamma_c$  به ترتیب کرنش مؤثر محوری، عرضی و برشی چندلایه‌ی حاوی خرابی هستند. هر سطح حاوی خرابی در صفحات  $y = \pm L$  تنش آزاد است.

$$\sigma_{xy}^i(x, \pm L) = 0 \quad \sigma_{yy}^i(x, \pm L) = 0$$

$$\sigma_{yz}^i(x, \pm L) = 0 \text{ for all } x \quad (50)$$

با توجه به شرایط و روابط تنش برشی فرض شده و صفر بودن مقدار  $p_i(y)$  و  $q_i(y)$  برای لایه سالم، مقدار این توابع در  $x = x_0$  و  $x = x_{N+1}$  برای لایه حاوی خرابی صفر است.

$$p_0(y) \equiv 0 \quad q_0(y) \equiv 0 \quad (51)$$

$$p_{N+1}(y) \equiv 0 \quad q_{N+1}(y) \equiv 0 \quad (52)$$

معادلات تعادل و سازگاری برای روابط استخراج شده‌ی مؤلفه‌های جابجایی و تنش برای هر تابع  $p$  و  $q$  ارضا می‌شود. شرایط پیوستگی و مرزی برای میدان تنش و جابجایی برقرار است. برای ارضای روابط کرنش محوری و برشی درون صفحه‌ای از مقدار میانگین متغیرهای معادلات در جهت ضخامت استفاده می‌شود. با استفاده از تکنیک بهبود لایه‌ای، ضخامت هر لایه به اندازه‌ی کافی کوچک می‌شود تا حداقل خطا به هنگام جاگذاری مقدار واقعی با مقدار میانگین ایجاد شود. با جایگذاری مقدار متوسط در جهت ضخامت تنش‌ها در رابطه تنش - کرنش و انتگرال‌گیری نسبت به  $y$  رابطه‌ی  $\bar{v}_i(y)$  و  $\bar{w}_i(y)$  متوسط میدان جابجایی به‌دست خواهد آمد.

#### ۷- تنش‌های مؤثر در لایه‌ی حاوی خرابی

با در نظرگیری لایه‌ای به عرض  $2w$  تنش‌های مؤثر در طول مابین دو ترک با توجه به این‌که  $q_0(y) \equiv 0$ ،  $q_{N+1}(y) \equiv 0$ ،  $p_{N+1}(y) \equiv 0$ ،  $p_0(y) \equiv 0$  فرم زیر محاسبه می‌شوند. هم‌چنین، از آن‌جایی‌که  $\sigma_{xy}$  در صفحات  $y = \pm L$  صفر است، با توجه به معادلات  $p_i'(L) = 0$  صفر می‌شود.

$$\sigma^c = \frac{1}{2hw} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}-W}^{x_i} \int_{-W}^W \sigma_{yy}^i(x, L, z) dz dx$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \sigma_i = \sigma \quad (53)$$

$$\tau^c = \frac{1}{2hw} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}-W}^{x_i} \int_{-W}^W \tau_{yz}^i(x, L, z) dz dx$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N+1} h_i \tau_i = \tau \quad (54)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2hL} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}-L}^{x_i} \int_{-L}^L \sigma_{xx}^i(x, L, z) dy dz = \sigma_t \quad (55)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2hL} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-1}-L}^{x_i} \int_{-L}^L \sigma_{zz}^i(x, y, w) dy dx \quad (56)$$

#### ۸- محاسبه ثوابت ترموالاستیک

با توجه به فرض الاستیسیته‌ی خطی پارامترهای  $\varepsilon_c$ ،  $\sigma_t$  و  $\gamma_c$  به‌طور خطی به پارامترهای  $\sigma$ ،  $\tau$  و  $\varepsilon_c^*$  برای لایه‌ی حاوی خرابی روابط تنش - کرنش به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E_A^c} \sigma - \frac{v_A^c}{E_A^c} \sigma_T - \frac{v_t^c}{E_A^c} \sigma_t - \frac{\lambda_A^c}{E_A^c} \tau + \alpha_A^c \Delta T \quad (57)$$

$$\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} \quad (۸۷) \quad = -\frac{\tilde{\alpha}_T^c - \tilde{\alpha}_T}{\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_T^c}} \Delta T \quad (۷۲)$$

$$\frac{1}{\tilde{E}_t^c} - \frac{1}{\tilde{E}_t} = k'^2 \frac{D}{\tilde{E}_A} \quad (۸۸)$$

$$\sigma_T = -k_2 \Delta T \quad (۷۳)$$

با تقسیم دو ثابت  $k_1$  و  $k_2$  ضریب ثابت  $k$  تعریف می‌شود.

$$\frac{1}{\tilde{E}_T^c} - \frac{1}{\tilde{E}_T} = k^2 \frac{D}{\tilde{E}_A} \quad (۸۹)$$

$$k = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{\tilde{\nu}_t - \tilde{\nu}_t^c}{\tilde{E}_T - \tilde{E}_T^c}}{\frac{\tilde{\nu}_a - \tilde{\nu}_a^c}{\tilde{E}_A - \tilde{E}_A^c}} = \frac{\frac{1}{\tilde{E}_T^c} - \frac{1}{\tilde{E}_T}}{\frac{1}{\tilde{E}_A^c} - \frac{1}{\tilde{E}_A}} = \frac{\tilde{\alpha}_T^c - \tilde{\alpha}_T}{\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A} \quad (۷۴)$$

$$\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A = k_1 \frac{D}{\tilde{E}_A} \quad (۹۰)$$

$$\tilde{\alpha}_t^c - \tilde{\alpha}_t = k_1 k' \frac{D}{\tilde{E}_A} \quad (۹۱)$$

$$\tilde{\alpha}_T^c - \tilde{\alpha}_T = k_1 k \frac{D}{\tilde{E}_A} \quad (۹۲)$$

حالت بعدی بارگذاری فشاری برای لایه‌های سالم و حاوی خرابی با فرض مقید بودن و بسته شدن ترک مجازی  $\sigma_y = \sigma_T = \gamma = 0, \sigma_t \neq 0$  است.

با استفاده از این روابط داخلی ثابت مؤثر لایه‌ی حاوی خرابی براساس پارامترهای تعریف شده  $k, D, k'$  و ثابت متناظرشان در لایه سالم به دست می‌آیند. با جایگذاری این ثابت در ماتریس نرمی و با استفاده از روابط تنش‌ها و کرنش‌های مؤثر و حل دستگاه معادلات پارامترهای  $k, D$  و محاسبه می‌شوند. با محاسبه‌ی این پارامترها ثابت چندلایه‌ی حاوی ترک به دست می‌آیند.

$$\varepsilon = -\frac{\tilde{\nu}_a}{\tilde{E}_A} \sigma_t + \tilde{\alpha}_A \Delta T \quad (۷۵)$$

$$\varepsilon^* = -\frac{\tilde{\nu}_t}{\tilde{E}_T} \sigma_t + \tilde{\alpha}_T \Delta T \quad (۷۶)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\tilde{E}_t} \sigma_t + \tilde{\alpha}_t \Delta T \quad (۷۷)$$

$$\varepsilon_c = -\frac{\tilde{\nu}_a^c}{\tilde{E}_A^c} \sigma_t + \tilde{\alpha}_A^c \Delta T \quad (۷۸)$$

$$\varepsilon_c^* = -\frac{\tilde{\nu}_t^c}{\tilde{E}_T^c} \sigma_t + \tilde{\alpha}_T^c \Delta T \quad (۷۹)$$

$$\varepsilon_t^c = \frac{1}{\tilde{E}_t^c} \sigma_t + \tilde{\alpha}_t^c \Delta T \quad (۸۰)$$

با تساوی کرنش‌های دو حالت  $\sigma_t$  به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_t = -\frac{\tilde{\alpha}_t^c - \tilde{\alpha}_t}{\frac{1}{\tilde{E}_t^c} - \frac{1}{\tilde{E}_t}} \Delta T = -\frac{\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A}{\frac{\tilde{\nu}_a}{\tilde{E}_A} - \frac{\tilde{\nu}_a^c}{\tilde{E}_A^c}} \Delta T = -\frac{\tilde{\alpha}_T^c - \tilde{\alpha}_T}{\frac{\tilde{\nu}_t}{\tilde{E}_T} - \frac{\tilde{\nu}_t^c}{\tilde{E}_T^c}} \Delta T \quad (۸۱)$$

$$\sigma_t = -k_3 \Delta T \quad (۸۲)$$

با تقسیم دو ثابت  $k_1$  و  $k_3$  ضریب ثابت  $k$  تعریف می‌شود.

$$\tilde{E} \quad (۹۵)$$

$$k' = \frac{k_1}{k_3} = \frac{\frac{\tilde{\nu}_t - \tilde{\nu}_t^c}{\tilde{E}_T - \tilde{E}_T^c}}{\frac{\tilde{\nu}_a - \tilde{\nu}_a^c}{\tilde{E}_A - \tilde{E}_A^c}} = \frac{\frac{1}{\tilde{E}_T^c} - \frac{1}{\tilde{E}_T}}{\frac{1}{\tilde{E}_A^c} - \frac{1}{\tilde{E}_A}} = \frac{\tilde{\alpha}_t^c - \tilde{\alpha}_t}{\tilde{\alpha}_A^c - \tilde{\alpha}_A} \quad (۸۳)$$

$$\tilde{E} \quad (۹۶)$$

$$\tilde{E} \quad (۹۷)$$

$$\tilde{\nu} \quad (۹۸)$$

$$\tilde{\nu} \quad (۹۹)$$

$$\tilde{\nu} \quad (۱۰۰)$$

ثابت  $k'$  و  $k$  فقط به هندسه و خواص لایه‌ها در چندلایه بستگی دارند و مستقل از ضریب انبساط حرارتی هستند. پارامتر دیگر  $D$  به عنوان پارامتر خرابی ماکروسکوپیکی تعریف شده که از روش مکانیک خرابی پیوسته به دست می‌آید. پارامتر  $D$  دیگر ثابت چندلایه مستقل از پارامتر خرابی است. با استفاده از این پارامتر روابط داخلی زیر حاصل می‌شود.

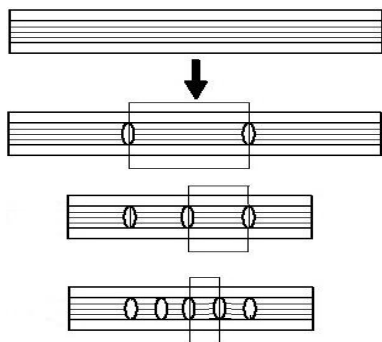
$$D \quad (۸۴)$$

$$\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{E}} \quad (۸۵)$$

$$\frac{\tilde{\nu}_t}{\tilde{E}_t} \quad (۸۶)$$

هم‌چنین، با ثابت ماندن تنش برشی  $\tau$  و با معلوم بودن  $G_c, \gamma_c$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\tau = \tau^c \quad \mu_A^c = \frac{\gamma}{\gamma_c} \mu_A \quad (۱۰۱)$$



شکل ۱ نمایش روند ایجاد ترک‌های ماتریسی به فاصله‌ی یکسان از هم در لایه‌های ۹۰ درجه چندلایه  $[0_n/90_m]_s$

نرخ رهایی انرژی بر اساس تغییرات خواص مکانیکی در شرایط بار ثابت با استفاده از فرمول‌های زیر محاسبه شده و در نهایت بهترین حالت ممکن انتخاب شد.

چندلایه موردنظر به عنوان سلول واحد انتخاب شده و در رابطه، تنش وارد بر چندلایه و سفتی محاسبه شده با ماتریس  $[A]$  چندلایه جاگذاری می‌شود.

$$G_m = \frac{dU}{dA} \Big|_{F=constant} \quad (102)$$

در رابطه بالا  $U$  انرژی کرنشی و  $A$  سطوح ترک‌های ماتریسی تشکیل یافته است.

$$A = N * W * h_{90} \quad (103)$$

در این ایتم  $N$  تعداد ترک‌های ماتریسی، پارامتر  $W$  عرض چندلایه و  $h_{90}$  ضخامت لایه‌های ۹۰ درجه حاوی ترک ماتریس است. انرژی کرنشی از فرمول زیر قابل محاسبه است.

$$U = \int \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dV = \frac{1}{2} * \sigma * \varepsilon * V = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E_A} V \quad (104)$$

در این رابطه  $E_A$  مدول الاستیک طولی چندلایه حاوی خرابی،  $\sigma$  تنش اعمالی بر چندلایه و  $V$  حجم سلول واحد انتخاب شده است.

$$V = 2L * W * h \quad (105)$$

در این رابطه  $2L$  فاصله‌ی مابین دو ترک ماتریسی مجاور،  $w$  عرض سلول واحد که یک فرض شده و  $h$  ضخامت کلی چندلایه است. با جاگذاری روابط بالا در فرمول نرخ رهایی انرژی کرنشی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$G_m = \frac{dU}{dA} \Big|_{F=constant} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E_A} * 2L * W * h\right)}{d(N * W * h_{90})} = \frac{2Lh\sigma^2 d\left(\frac{1}{E_A}\right)}{2h_{90} d(N)} \quad (106)$$

چگالی ترک ماتریس  $\rho$ ، به صورت نسبت تعداد ترک‌های ماتریسی تشکیل شده در طول سلول واحد انتخاب شده به طول سلول واحد تعریف می‌شود. چگالی ترک ماتریسی در سلول واحدی به طول  $2L$  به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\rho = \frac{N}{2L} \quad (107)$$

با ترکیب روابط بالا  $G$  در نهایت به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$G_m = \frac{1}{2} \frac{h\sigma^2 2L d\left(\frac{1}{E_A}\right)}{h_{90} 2L d(\rho)} = \frac{1}{2} \frac{h}{h_{90}} \sigma^2 \frac{\left(\frac{1}{E_A(\rho 2)} - \frac{1}{E_A(\rho 1)}\right)}{\rho 2 - \rho 1} \quad (108)$$

بعد از محاسبه‌ی خواص لایه‌ی ترک خورده برای تعیین خواص چندلایه‌ی حاوی خرابی، خواص جدید لایه‌ی ۹۰ درجه جایگزین خواص قبلی آن شده و خواص معادل چندلایه از ماتریس نرمی به دست می‌آید. خواص همه‌ی چندلایه‌ها و چندلایه‌ی زاویه‌ای دارای ترک ماتریس نیز با همین روش به دست می‌آید. بدین صورت که هر لایه‌ای که دارای ترک ماتریس باشد، در مختصات محلی به فرم زاویه‌ی ۹۰ در می‌آید و بعد از محاسبه‌ی خواص آن لایه با این روش، خواص جدید جایگزین خواص محلی لایه می‌شود. بدین ترتیب با داشتن خواص جدید لایه و زاویه‌ی لایه با جهت اصلی چندلایه، سپس خواص کلی چندلایه به دست می‌آید.

### ۹- جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریس

خرابی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی به دلیل مقدار زیاد تنش در نوک ترک ماتریسی ایجاد می‌شود. باتوجه به رقابت مودهای خرابی از یک چگالی خاص به بعد (چگالی ترک بحرانی) مود خرابی غالب جدایی بین لایه‌ی است.

سلول واحد به طول فاصله‌ی مابین دو ترک ماتریس مجاور  $2L$  در لایه‌های میانی ۹۰ درجه چندلایه‌ی  $[0_n/90_m]_s$  انتخاب می‌شود. بعد از تشکیل خرابی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریس سلول واحد به سه ناحیه تقسیم می‌شود. ناحیه‌ی اول ناحیه‌ی مابین طول‌های جدایش مشابه سلول واحد لایه‌ی ۹۰ درجه حاوی ترک‌های ماتریسی به طول  $2(L-L_d)$  تحلیل می‌شود. نواحی حاوی طول جدایش  $L-L_d < y < L$  و  $-L < y < -(L-L_d)$  نواحی سطح آزادی هستند که حامل هیچ باری نیستند و مقدار تنش در این نواحی صفر است. تنش‌های مربوطه به لایه‌های مجاورشان منتقل شده و این نواحی مرده از سلول واحد حذف می‌شوند.

### ۱۰- محاسبه خواص چندلایه زاویه‌ای $[\theta/-\theta]_s$

افت سفتی چندلایه‌های زاویه‌ای  $[\theta/-\theta]_s$  حاوی ترک ماتریسی با چگالی یکسان در هر دو لایه با استفاده از این روش قابل محاسبه است. بعد از دوران مختصات محلی، خواص لایه‌ی حاوی خرابی مانند لایه‌ی ۹۰ درجه و باتوجه به ضخامت ترک با استفاده از روش فوق محاسبه شده و سپس خواص چندلایه‌ی عمومی با استفاده از ماتریس‌های  $[A]$ ،  $[B]$  و  $[D]$  به دست می‌آید. از آنجایی که چندلایه‌های مورد نظر متقارن و مقدار ممّان‌های اعمالی صفر هستند، تنها با استفاده از ماتریس  $[A]$  خواص چندلایه در مختصات مرجع معلوم می‌شود.

### ۱۱- محاسبه‌ی نرخ رهایی انرژی

هدف از محاسبه‌ی نرخ رهایی انرژی برای چندلایه‌ها، تحلیل خرابی این سازه‌های کامپوزیتی با فرض ایجاد ترک‌های ماتریسی در لایه‌های ۹۰ درجه به عنوان اولین مد خرابی است. نرخ رهایی انرژی کرنشی  $G$  براساس تغییرات میدان تنش با افزایش چگالی ترک و یا با استفاده از محاسبه‌ی تغییرات مدول الاستیک چندلایه محاسبه می‌شوند.

### ۱۱-۱- نرخ رهایی انرژی چندلایه $[0_m/90_n]_s$ حاوی ترک ماتریس

با توجه به شکل ۱ سلول واحد به طول فاصله‌ی مابین دو ترک ماتریس مجاور  $2L$  در لایه‌های میانی ۹۰ درجه چندلایه‌ی  $[0_n/90_m]_s$  انتخاب می‌شود. با افزایش چگالی ترک ماتریس و با توجه به رابطه‌ی عکس آن با طول سلول واحد، طول سلول واحد در هر مرحله‌ی تحلیل نسبت به حالت قبل کوچک‌تر می‌شود.



$$\begin{aligned} \Delta U^0 &= U_2 - U_1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_2)^2}{E_A^0} V - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_1)^2}{E_A^0} V \\ &= \frac{1}{2} * \frac{L_d * h_0}{E_A^0} (\sigma_2)^2 - (\sigma_1)^2 \end{aligned} \quad (113)$$

$$\Delta U^0 = \frac{(L_d * h_0)}{2} \frac{(\sigma_0 + \frac{h_{90}}{h_0} \sigma_{90})^2}{E_A^0} - (\sigma_0)^2 \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \Delta U^{90} &= U_2 - U_1 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{90})^2}{E_A^{90} (L_d + \rho)} V_2 - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{90})^2}{E_A^{90} (\rho)} V_1 \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \Delta U^{90} &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{90})^2}{E_A^{90} (L_d + \rho)} (2L' * h_{90}) \\ &- \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{90})^2}{E_A^{90} (\rho)} (2L * h_{90}) \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \Delta U^{90} &= \frac{1}{2} h_{90} (\sigma_{90})^2 \\ &* \left( \frac{L'}{E_A^{90} (L_d + \rho)} - \frac{L}{E_A^{90} (L_d + \rho)} \right) \end{aligned} \quad (117)$$

تغییرات مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} dA &= A_2 - A_1 \\ &= (2 * h_{90} * w + 4L_d * w) - (2 * h_{90} * w) \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} G_{delamination} &= G_0 + G_{90} = 4 \frac{\Delta U^0}{\Delta A} + \frac{\Delta U^{90}}{\Delta A} \\ &= \frac{1}{4L_d} \left[ 4 * \frac{(L_d, h_0)}{2} \frac{(\sigma_0 + \frac{h_{90}}{h_0} \sigma_{90})^2}{E_A^0} - (\sigma_0)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{4L_d} \left[ \frac{2h_{90} (\sigma_{90})^2}{2} \left( \frac{2L'}{E_A^{90} (L_d + \rho)} - \frac{2L}{E_A^{90} (\rho)} \right) \right] \end{aligned} \quad (119)$$

در روابط فوق،  $\Delta U$  اختلاف انرژی کرنشی بین دو حالت،  $L_d$  طول جدایش بین لایه‌های،  $\rho$  چگالی ترک ماتریسی،  $h_{90}$  ضخامت لایه ۹۰ درجه،  $h_0$  ضخامت لایه ۰ درجه است. بقیه پارامترها در بخش قبل تعریف شده‌اند.

### ۱۲- نتایج و بحث

لایه‌های حاوی ترک با توجه به مقایسه‌های انجام شده برای نسبت‌های مختلف، با نسبت  $\frac{h_{damage}}{h_{lamina}}$  موجود در جدول ۱ به زیر لایه‌ی نازک و ضخیم تفکیک شده‌اند. در ابتدا برای هر یک از لایه‌چینی‌های  $[0_n/90_m]_s$  تحت بارگذاری کششی و برشی نمودارهای افت سفتی ناشی از ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی، بر حسب چگالی ترک ماتریسی و طول جدایی گوناگون رسم می‌شود و با نتایج روش حساب تغییرات کشمیری [۱۵]، نتایج تحلیل اجزاء محدود رشتیانی [۱۶] و نتایج آزمایشگاهی موجود در منابع مقایسه می‌شود. در ادامه، توابع نرخ رهایی انرژی ناشی از ترک خوردگی ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از آن برای هر یک از لایه‌چینی‌های  $[0_n/90_m]_s$  تحت بارگذاری کششی بر حسب چگالی ترک رسم شده و با نمودارهای روش حساب تغییرات و تحلیل اجزاء محدود مقایسه و اعتبارسنجی می‌شود.

با توجه به فرض تشکیل ترک‌های ماتریسی مابین ترک‌های اولیه، تغییرات مدول الاستیک طولی در حالت اولیه  $\rho$  و حالت ثانویه  $2\rho$  بررسی می‌شود.

لایه‌های ۹۰ درجه به عنوان سلول واحد در نظر گرفته شده و نرخ رهایی انرژی لایه ۹۰ درجه با استفاده از سفتی و تنش اعمالی بر لایه‌های ۹۰ درجه در هر چگالی ترک محاسبه می‌شود. با کاهش سفتی لایه‌های ۹۰ درجه تحمل بار این لایه‌ها کم شده و در نتیجه سهم تحمل تنش لایه‌های ۰ درجه در هر چگالی ترک افزایش می‌یابد. در نهایت نرخ رهایی انرژی چندلایه از مجموع نرخ رهایی انرژی لایه‌های صفر و نود درجه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$G_{mt} = G_m^0 + G_m^{90} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} G_{mt} &= \frac{1}{2} * 2L * \sigma_0^2 \left( \frac{1}{E_A^0} \right) + \\ &\frac{1}{2} * 2L * \sigma_{90}^2 \left( \frac{1}{E_A^{90} (\rho 2)} - \frac{1}{E_A^{90} (\rho 1)} \right) \end{aligned} \quad (110)$$

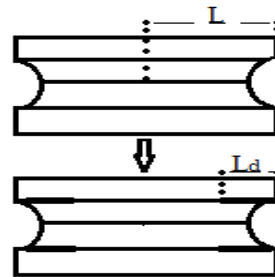
لایه‌های ۹۰ درجه به عنوان سلول واحد در نظر گرفته شده و نرخ رهایی انرژی با استفاده از سفتی و تنش اعمالی بر لایه‌های ۹۰ درجه محاسبه می‌شود. در این روش نرخ رهایی انرژی لایه‌های ۰ درجه صفر فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} G_{mt} &= G_m^0 + G_m^{90} \\ &= \frac{1}{2} * 2L * \sigma_0^2 \left( \frac{1}{E_A^{90} (\rho 2)} - \frac{1}{E_A^{90} (\rho 1)} \right) \end{aligned} \quad (111)$$

در نهایت نرخ رهایی انرژی از مجموع نرخ رهایی انرژی لایه‌های ۰ و ۹۰ درجه به دست می‌آید.

### ۱۱-۲- نرخ رهایی انرژی چندلایه $[0_n/90_m]_s$ حاوی جدایی بین لایه‌های

در حالت جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، ابتدا فرض می‌شود ترک‌های ماتریسی با چگالی خاص ایجاد شده و سپس در حالت بعدی جدایی بین لایه‌های با طول معینی ایجاد می‌شود. در نتیجه در محاسبه نرخ رهایی انرژی کرنشی چندلایه‌ی حاوی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی، مدول الاستیک لایه‌های ۹۰ درجه ابتدا در حالت حاوی ترک‌های ماتریسی مجاور هم و سپس حالت دوم تشکیل جدایی بین لایه‌های به طول جدایی معین به دست می‌آید. نواحی دارای طول جدایی بین لایه‌های قادر به تحمل تنش نمی‌باشند و در نتیجه تنش به لایه‌ی بالایی منتقل می‌شود.



شکل ۲ شماتیک تحلیل چندلایه حاوی جدایی بین لایه‌ای

نرخ رهایی انرژی ناشی از جدایی بین لایه‌های از مجموع تغییرات انرژی کرنشی لایه‌های ۹۰ و ۰ درجه بین دو حالت بدون جدایی بین لایه‌های و حاوی خرابی در یک چگالی ترک ثابت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

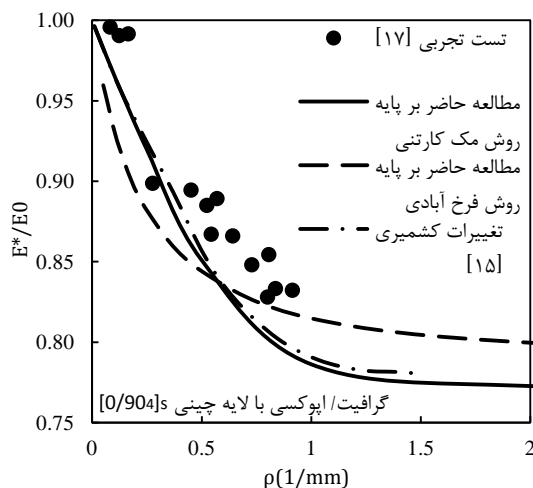
$$G_{delamination} = \frac{d(U)}{d(A)} \quad (112)$$

جدول ۱ خواص مکانیکی مواد بکار رفته در تحلیل

مواد	$\frac{h_1}{l}$	ضخامت mm	$E_A$ (MPa)	$E_T$ (MPa)	$G_A$ (MPa)	$G_T$ (MPa)	$v_A$	$v_T$
گرافیت-اپوکسی	۰/۰۸	۰/۱۲۷	۱۳۰۰۰	۹۷۲۰	۵۳۹۰	۳۳۶۰	۰/۳۱	۰/۴۹
گلس-اپوکسی	۰/۰۷	۰/۲۰۳	۴۱۷۰۰	۱۳۰۰۰	۳۴۰۰	۴۵۸۰	۰/۳	۰/۴۲
کربن-اپوکسی	۰/۰۸	۰/۱۴	۱۲۸۰۰۰	۷۲۰۰	۴۰۰۰	۲۴۰۰	۰/۳	۰/۵

افت سفتی بر حسب چگالی ترک ماتریس در لایه‌ی ۹۰ درجه برای چندلایه‌ی کامپوزیتی متعامد گرافیت-اپوکسی تحت بارگذاری کششی توسط های تسای و دنیل انجام شده است [۱۷].

شکل ۴ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میان نتایج آنالیز تحلیلی، روش حساب تغییرات و نتایج آزمایشگاهی افت سفتی ناشی از بارگذاری کششی تک محوره در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گرافیت-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90_4]_s$  و با ضخامت  $t=0.127$  mm برای هر تک لایه است. همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود، هماهنگی خوبی بین نتایج روش‌ها مشاهده می‌شود.



شکل ۴ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی

چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گلس-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90]_s$  و با ضخامت  $t=0.203$  mm برای هر تک لایه است. همان‌طور که در شکل ۵ نشان دیده می‌شود، هماهنگی بین نتایج روش‌ها مشهود است. شکل ۵ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میان نتایج آنالیز تحلیلی، روش حساب تغییرات و نتایج المان محدود افت سفتی ناشی از بارگذاری برشی خالص در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گلس-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90]_s$  و با ضخامت  $t=0.203$  mm برای هر تک لایه است. همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود، هماهنگی بین نتایج روش‌ها مشهود است. شکل ۶ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میان نتایج آنالیز تحلیلی، روش حساب تغییرات افت سفتی و روش اجزاء محدود ناشی از بارگذاری برشی خالص در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گرافیت-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90_2]_s$  و با ضخامت  $t=0.127$  mm برای هر تک لایه است. همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود، هماهنگی بین نتایج روش‌ها مشهود است. همچنین، شکل ۷ نشان دهنده‌ی مقایسه میان افت سفتی محوری و مدول برشی چندلایه‌های کامپوزیتی گلس-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90_3]_s$  با ضخامت  $t=0.203$  mm برای هر تک لایه است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که اثر تخریبی ترک‌های ماتریسی بر مدول برشی بیشتر از مدول محوری است.

هم‌چنین، برای چندلایه‌های زاویه‌ای  $[\theta_n/\theta_m]_s$  تحت بارگذاری کششی نیز، نمودارهای افت سفتی ناشی از ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی، بر حسب چگالی ترک ماتریس و طول جدایش گوناگون رسم می‌شود و با نتایج تحلیل اجزاء محدود رشتیانی مقایسه می‌شود.

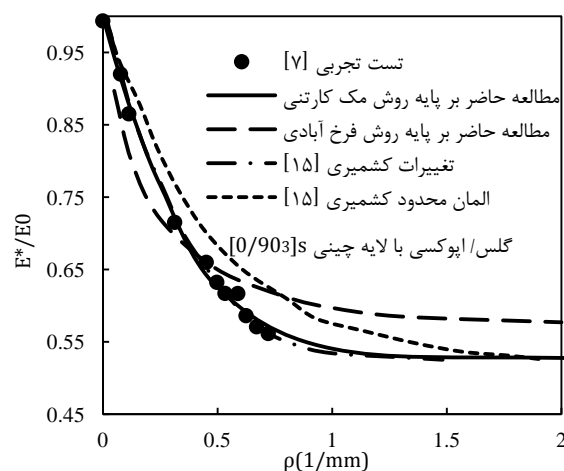
#### ۱۲-۱- چندلایه‌های کامپوزیتی $[0_n/90_m]_s$

در این بخش، به تفسیر و اعتبارسنجی نتایج آنالیز چندلایه‌های کامپوزیتی  $[0_n/90_m]_s$  تحت بارگذاری‌های محوری و برشی پرداخته می‌شود. ابتدا افت سفتی ناشی از ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های و بعد از آن تحلیل خرابی‌ها بر مبنای انرژی ارائه می‌شود.

با مقایسه‌ی نتایج افت سفتی برای تعداد تقسیمات مختلف لایه ۹۰ درجه (n های مختلف) زیرلایه‌ی حاوی خرابی لایه‌ی ۹۰ درجه با فرض ثابت ماندن ضخامت زیرلایه‌ی سالم نتایج n مساوی ۴ نتایج دقیق‌تری نسبت به n های کمتر است.

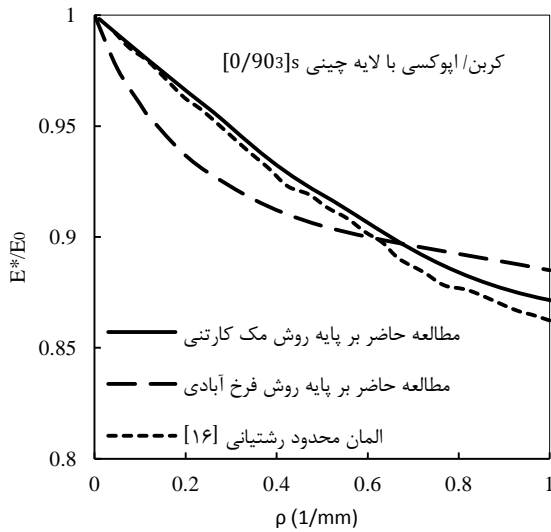
#### ۱۲-۱-۱ تغییرات خواص مکانیکی $[0_n/90_m]_s$ حاوی ترک ماتریس

برای آنالیز افت سفتی ناشی از ترک ماتریسی چندلایه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی و برشی از روش بیان شده در فصل قبل استفاده می‌شود. نتایج محاسبات با نتایج روش حساب تغییرات و نتایج آزمایشگاهی مقایسه می‌شود. میزان افت سفتی بر حسب چگالی ترک ماتریس در لایه‌ی ۹۰ درجه برای چندلایه‌ی کامپوزیتی متعامد گلس-اپوکسی تحت بارگذاری کششی توسط های اسمیت و رایف اشنایدرا انجام شده است [۷]. شکل ۳ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میان نتایج آنالیز تحلیلی، اجزاء محدود، روش حساب تغییرات و نتایج آزمایشگاهی افت سفتی ناشی از بارگذاری کششی تک محوره در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گلس-اپوکسی با لایه‌چینی  $[0/90_3]_s$  و با ضخامت  $t=0.203$  mm برای هر تک لایه است. همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود، هماهنگی خوبی بین نتایج روش‌ها مشاهده می‌شود.



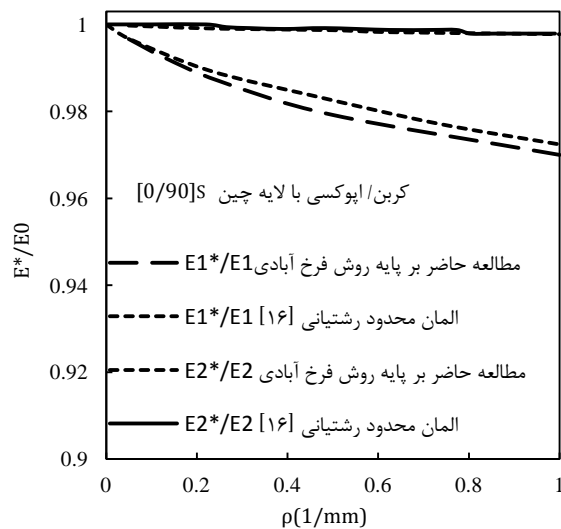
شکل ۵ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی چندلایه تحت بارگذاری کششی

در شکل ۸ نتایج آنالیز با نتایج اجزاء محدود مقایسه می‌شود. همان‌طور که از شکل پیداست، تطابق خوبی بین نتایج روش‌ها وجود دارد.



شکل ۸ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی

شکل ۹ نشان‌دهنده مقایسه‌ی میان افت سفتی عرضی و افت سفتی طولی نتایج تحلیل و نتایج اجزاء محدود است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، کاهش مدول یانگ عرضی در چندلایه‌های متعامد تحت بارگذاری کششی محوری نسبت به مدول یانگ طولی خیلی کمتر است.

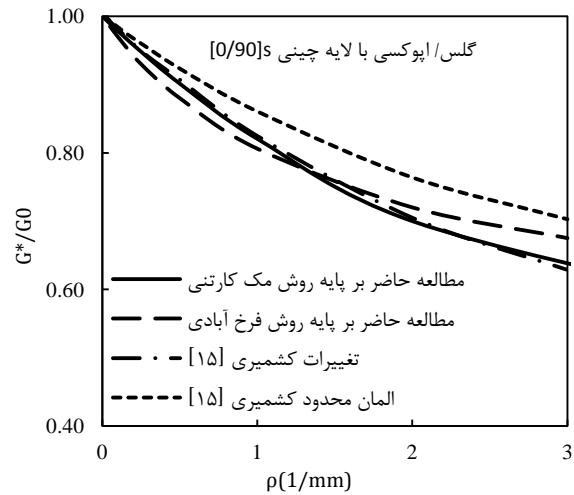


شکل ۹ مقایسه افت سفتی محوری و عرضی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی

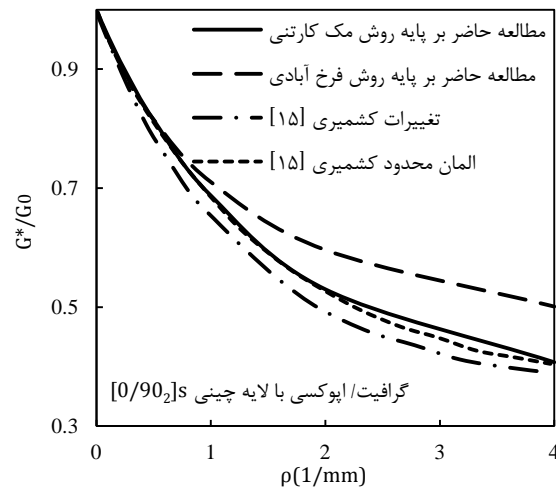
با افزایش چگالی ترک ماتریسی علاوه بر سفتی، ضریب پواسون نیز کاهش می‌یابد. شکل ۱۰ نشان‌دهنده مقایسه‌ی نتایج روش تحلیلی مایکرومکانیک با روش المان محدود در چندلایه‌ی کربن- اپوکسی با لایه چینی 0/90s است.

### ۱۲-۲- تغییرات خواص مکانیکی 0n/90m حاوی جدایی بین لایه‌ای

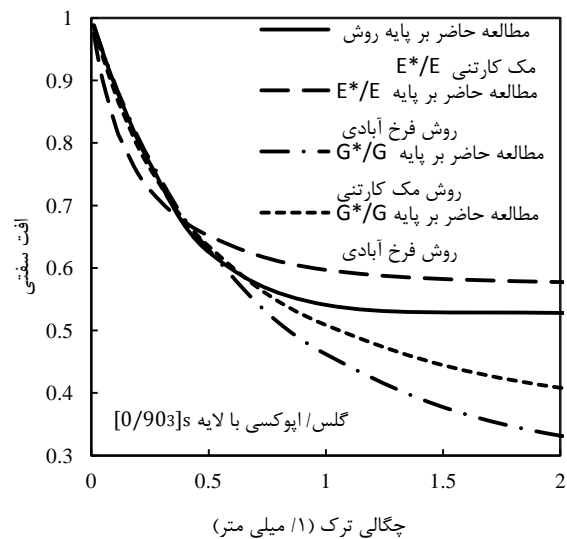
خواص و افت سفتی لایه‌ی کامپوزیتی حاوی جدایی بین لایه‌ای ناشی از ترک ماتریسی با توجه به روند نشان داده شده در شکل ۱۱ بدین صورت بررسی



شکل ۵ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری برشی



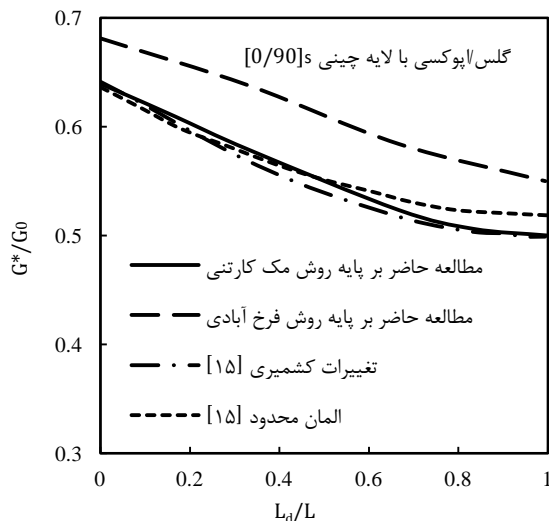
شکل ۶ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری برشی



شکل ۷ مقایسه افت سفتی محوری و برشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی

آنالیز افت سفتی بر حسب نسبت طول جدایی بین لایه‌های کامپوزیتی  $0$  و  $90$  درجه به طول مابین ترک‌های ماتریس  $L=1\text{mm}$  برای چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گلس/اپوکسی با لایه چینی  $[0/90]_s$  تحت بارگذاری کششی در شکل ۱۲ نشان داده شده است. نتایج با نتایج تحلیل اجزاء محدود و نتایج روش حساب تغییرات مقایسه شده است. با توجه به شکل هماهنگی خوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. خواص مکانیکی چندلایه‌های متعامد حاوی جدایی بین لایه‌های ناشی از ترک ماتریسی، با افزایش طول جدایش و یا نسبت  $L_d/L$  کاهش می‌یابد.

شکل ۱۳ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میان افت سفتی بر حسب نسبت طول جدایش بین لایه‌های کامپوزیتی  $0$  و  $90$  درجه به طول مابین ترک‌های ماتریس  $L=0.18\text{mm}$  نتایج تحلیل با نتایج اجزاء محدود و نتایج روش حساب تغییرات برای چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد گلس-اپوکسی با لایه چینی  $[0/90]_s$  تحت بارگذاری برشی است. تناسب خوبی در شکل بین نتایج مشاهده می‌شود.



شکل ۱۳ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از نسبت طول جدایی به طول مابین ترک ماتریس  $L=0.18\text{mm}$  در چندلایه تحت بارگذاری برشی

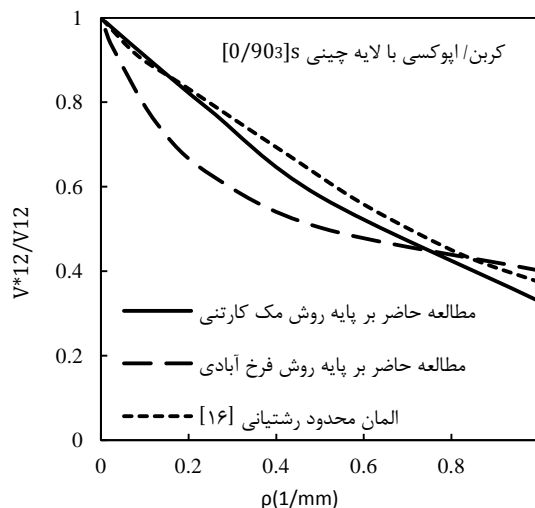
### ۱۲-۳- تغییرات نرخ رهایی انرژی $[0_n/90_m]_s$ حاوی ترک ماتریس

از آنجایی که افزایش چگالی ترک در هر مرحله نسبت به مرحله‌ی قبلی به اندازه‌ی یک ترک ماتریس است، در نتیجه تغییرات مساحت ترک ماتریس مساوی مساحت دو طرف سطح جانبی ترک ماتریس جدید می‌شود. بنابراین، نرخ رهایی انرژی کرنشی برابر با تغییرات انرژی کرنشی ذخیره شده در چندلایه نسبت به تغییر مساحت ترک است.

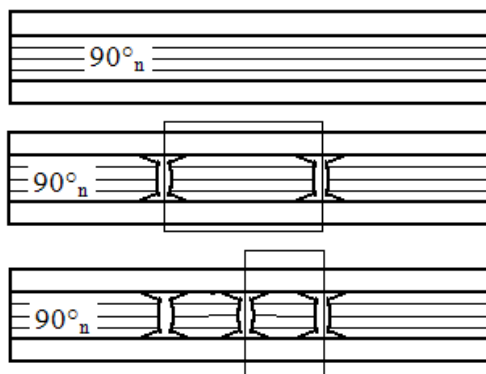
شکل ۱۴ و ۱۵ به ترتیب نشان دهنده‌ی تغییرات نرخ رهایی انرژی کرنشی بر حسب چگالی ترک ماتریسی چندلایه‌ی کربن-اپوکسی با ضخامت  $t_{ply}=0.154\text{mm}$  و لایه چینی  $[0/90]_s$  و  $[0_2/90_4]_s$  تحت بارگذاری کششی و مقایسه نتایج تحلیل و نتایج روش حساب تغییرات است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، نمودار روش تحلیلی در چگالی ترک ماتریسی کم ثابت بوده و بعد از یک پرش، کاهش می‌یابد.

شکل‌های ۱۶ الی ۱۸ نشان دهنده‌ی تغییرات نرخ رهایی انرژی کرنشی بر حسب چگالی ترک ماتریسی چندلایه‌های  $[0/90]_s$  و مقایسه‌ی نتایج تحلیل و نتایج اجزاء محدود است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نرخ رهایی انرژی از یک چگالی خاص به بعد، با افزایش چگالی ترک سیر نزولی دارد.

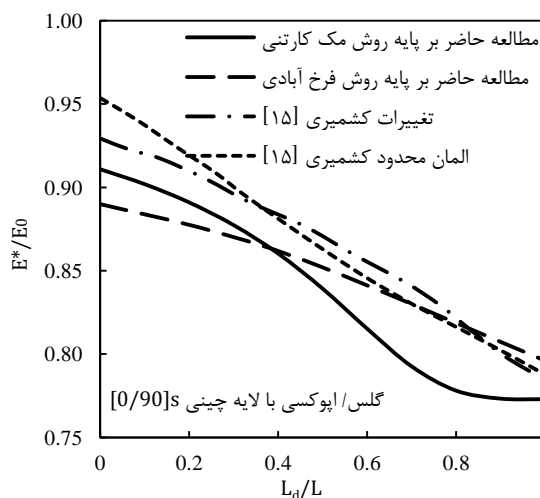
می‌شود که ابتدا طول جدایی بین لایه‌های را از طول مابین دو ترک ماتریس کم کرده و سپس سلول واحد همانند سلول واحد حاوی ترک‌های ماتریسی به فاصله‌ی  $2(L-L_d)$  تحلیل می‌شود. افت سفتی این لایه بر حسب چگالی ترک ماتریسی با نسبت طول جدایش به طول مابین دو ترک  $L_d/L$  بررسی می‌شود.



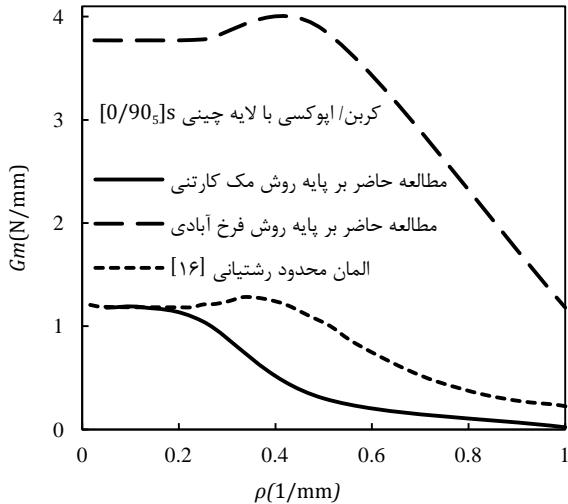
شکل ۱۰ مقایسه کاهش ضریب پواسون به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی تحت بارگذاری کششی



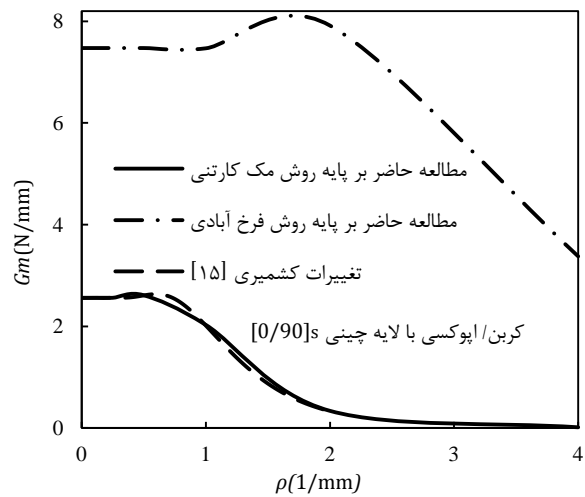
شکل ۱۱ نمایش روند ایجاد ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌ی ناشی از آن



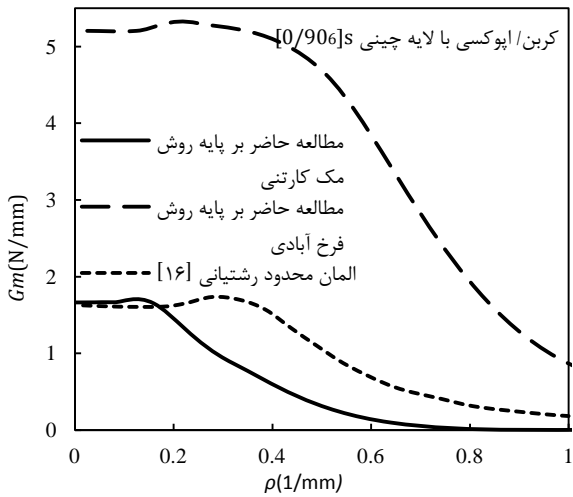
شکل ۱۲ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از نسبت طول جدایی به طول مابین ترک ماتریس  $L=1\text{mm}$  در چندلایه تحت بارگذاری کششی



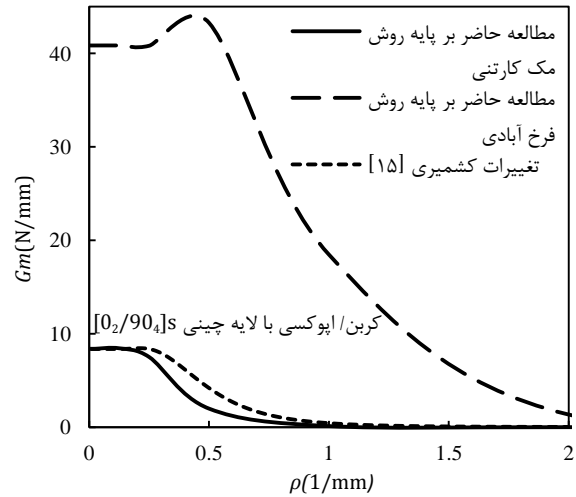
شکل ۱۷ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی چندلایه تحت بارگذاری کششی



شکل ۱۴ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی



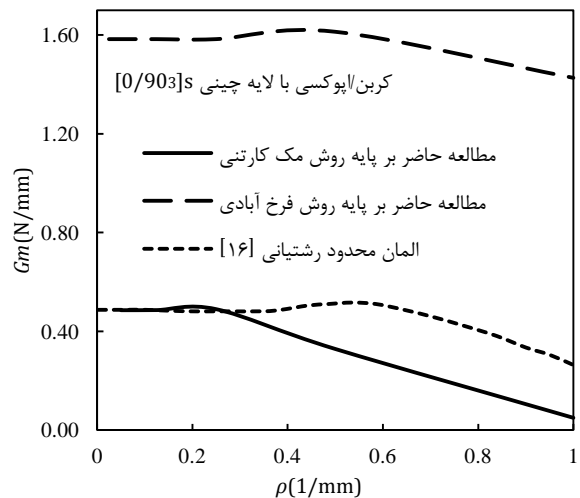
شکل ۱۸ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی چندلایه تحت بارگذاری کششی



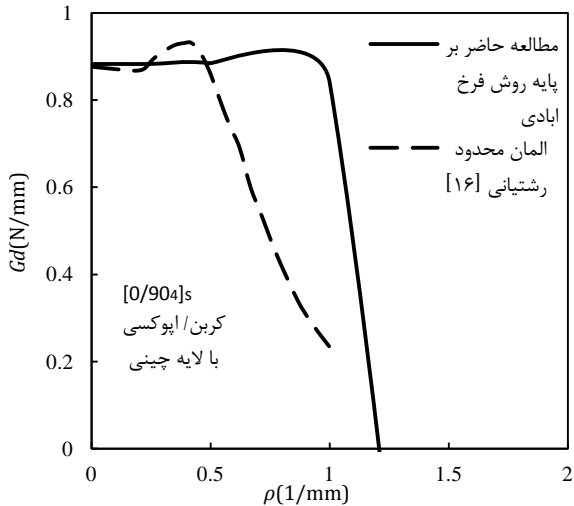
شکل ۱۵ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی در چندلایه تحت بارگذاری کششی

همان‌طور که در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد لایه‌های میانی ۹۰ درجه با فرض ثابت ماندن لایه‌ی بیرونی ۰ درجه کاهش نرخ رهایی انرژی کرنشی سریع‌تر و با شیب بیشتری انجام گرفته و به صفر نزدیک می‌شود. در چگالی ترک کم، نرخ رهایی انرژی با افزایش لایه‌های میانی ۹۰ درجه افزایش می‌یابد در نتیجه تمایل به ایجاد ترک‌های ماتریس با افزایش لایه‌های ۹۰ درجه بیشتر می‌شود. این درحالی‌است که با افزایش لایه‌های میانی تغییرات نرخ رهایی انرژی کرنشی با شیب قابل توجهی کاهش یافته و احتمال بوجود آمدن جدایی بین لایه‌های در نواحی دارای ترک ماتریس افزایش می‌یابد. در چگالی ترک‌های بزرگ تمایل به ایجاد ترک ماتریسی در  $[0/90_3]_s$  بیشتر از  $[0/90_6]_s$  است.

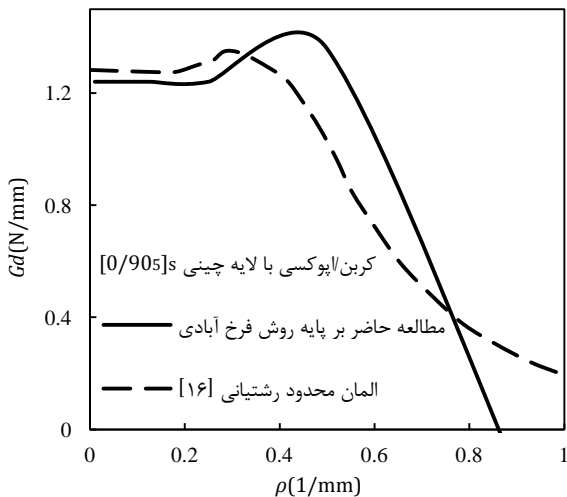
۱۲-۴-۱- تغییرات نرخ رهایی انرژی  $[0_n/90_m]_s$  حاوی جدایی بین لایه‌های در حالت خرابی ترک ماتریس و جدایی بین لایه‌های ناشی از آن، سلول واحد به طول فاصله میان دو ترک ماتریسی مجاور  $2L$  در لایه‌ی میانی ۹۰ درجه انتخاب می‌شود.



شکل ۱۶ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریسی چندلایه تحت بارگذاری کششی



شکل ۲۲ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی ناشی از جدایی بین لایه ای به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس در چندلایه حاوی جدایی بین لایه ای و ترک ماتریسی تحت بارگذاری کششی با نسبت  $\frac{L_d}{L} = 0.1$

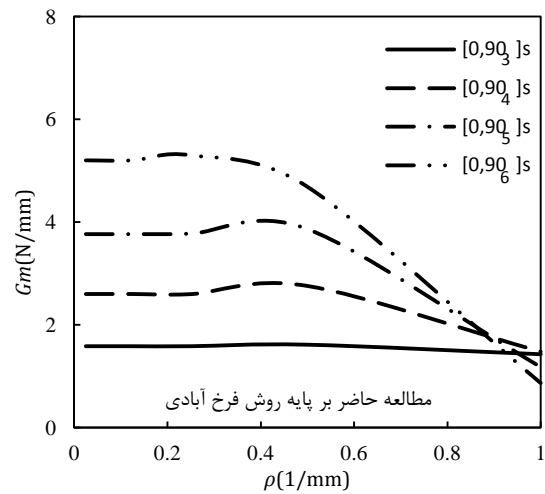


شکل ۲۳ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی ناشی از جدایی بین لایه ای به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس در چندلایه حاوی جدایی بین لایه ای و ترک ماتریسی تحت بارگذاری کششی با نسبت  $\frac{L_d}{L} = 0.1$

۱۲-۲- چندلایه‌های کامپوزیتی  $[\theta_n/\theta_m]_s$

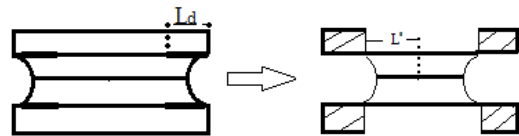
در این بخش افت سفتی چندلایه‌های زاویه‌ای  $[\theta/\theta]$  حاوی ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌ای با توجه به روش ارائه شده در فصل قبل بررسی شده است. با معلوم بودن خواص لایه‌ی حاوی خرابی در مختصات محلی، خواص چندلایه‌ی عمومی با استفاده از ماتریس‌های  $[A]$ ،  $[B]$  و  $[D]$  قابل محاسبه است. از آنجایی که چندلایه‌های مورد نظر متقارن و مقدار ممان‌های اعمالی صفر هستند، تنها با استفاده از ماتریس  $[A]$  خواص چندلایه به دست می‌آید. در چندلایه‌های زاویه‌ای  $[\theta/\theta]$  دارای ترک ماتریسی همانند چندلایه‌های متعامد  $[0_n/90_m]_s$  با افزایش چگالی ترک ماتریسی مدول الاستیک طولی کاهش می‌یابد.

شکل ۲۴ نشان دهنده‌ی مقایسه‌ی میزان افت سفتی چندلایه‌های زاویه‌ای  $[\theta/\theta]$  غیر هم محور با راستای بارگذاری نتایج تحلیل و نتایج روش اجزاء محدود هستند.



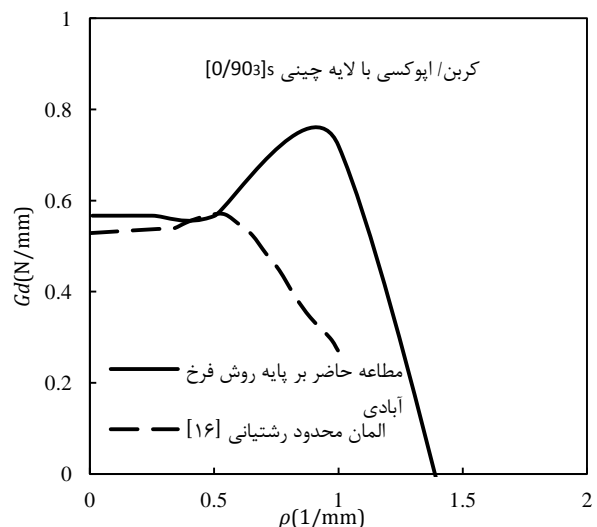
شکل ۱۹ نمایش تاثیر افزایش m بر تغییرات نرخ رهایی انرژی کرنشی ناشی از ترک ماتریسی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس در چندلایه کربن-اپوکسی با لایه چینی  $[0/90_m]_s$  تحت بارگذاری کششی

با افزایش چگالی ترک و با توجه به رابطه‌ی عکس آن با طول سلول واحد، طول آن در هر مرحله کوچک‌تر از مرحله قبل می‌شود. چنانچه افزایش چگالی ترک ماتریس همراه با جدایی بین لایه‌ای در هر مرحله نسبت به مرحله‌ی قبلی به اندازه‌ی جدایی بین لایه‌ای باشد، تغییرات مساحت ترک ماتریسی همراه با جدایی بین لایه‌ای مساوی با مساحت نواحی جدایش نشان داده شده در شکل ۲۰ می‌باشد.



شکل ۲۰ سلول واحد انتخاب شده لایه ی حاوی ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌ای ناشی از آن

شکل‌های ۲۱ الی ۲۳ نشان دهنده تغییرات نرخ رهایی انرژی کرنشی بر حسب چگالی ترک ماتریسی چندلایه‌های متعامد با نسبت  $\frac{L_d}{L} = 0.1$  هستند.



شکل ۲۱ مقایسه نرخ رهایی انرژی کرنشی ناشی از جدایی بین لایه ای به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس در چندلایه حاوی جدایی بین لایه ای و ترک ماتریسی تحت بارگذاری کششی با نسبت  $\frac{L_d}{L} = 0.1$

تنها لایه‌های حاوی ترک در تحلیل تنش در نظر گرفته می‌شوند و لایه‌های مجاور هیچ دخالتی در روند تحلیل ندارند، نتایج نرخ رهایی انرژی همراه با خطای قابل توجه خواهد بود.

#### ۱۴- پیوست الف

ثوابت روابط تنش- کرنش فوق که حاصل انتقال روابط از محورهای محلی به مرجع هستند، از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$g_{11} = \frac{1}{E_t} \quad \text{(الف-۱)}$$

$$g_{12} = -n^2 \frac{v_t}{E_T} - m^2 \frac{v_a}{E_A} \quad \text{(الف-۲)}$$

$$g_{13} = -m^2 \frac{v_t}{E_T} - n^2 \frac{v_a}{E_A} \quad \text{(الف-۳)}$$

$$g_{14} = 2mn \left( -\frac{v_t}{E_T} + \frac{v_a}{E_A} \right) \quad \text{(الف-۴)}$$

$$g_{22} = m^2 n^2 \left( \frac{1}{\mu_A} - 2 \frac{v_A}{E_A} \right) + \frac{n^4}{E_T} + \frac{m^4}{E_A} \quad \text{(الف-۵)}$$

$$g_{23} = m^2 n^2 \left( -\frac{1}{\mu_A} + \frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_T} \right) - n^4 \frac{v_A}{E_A} - m^4 \frac{v_A}{E_A} \quad \text{(الف-۶)}$$

$$g_{24} = mn \left[ (m^2 - n^2) \left( \frac{1}{\mu_A} - 2 \frac{v_A}{E_A} \right) + \frac{2n^2}{E_T} - \frac{2m^2}{E_A} \right] \quad \text{(الف-۷)}$$

$$g_{33} = m^2 n^2 \left( \frac{1}{\mu_A} - 2 \frac{v_A}{E_A} \right) + \frac{m^4}{E_T} + \frac{n^4}{E_A} \quad \text{(الف-۸)}$$

$$g_{34} = mn \left[ (m^2 - n^2) \left( -\frac{1}{\mu_A} + 2 \frac{v_A}{E_A} \right) + \frac{2m^2}{E_T} - \frac{2n^2}{E_A} \right] \quad \text{(الف-۹)}$$

$$g_{44} = \frac{(m^2 - n^2)^2}{\mu_A} + 4m^2 n^2 \left( 2 \frac{v_A}{E_A} + \frac{1}{E_A} + \frac{1}{E_T} \right) \quad \text{(الف-۱۰)}$$

$$\alpha_1 = \alpha_t \quad \text{(الف-۱۱)}$$

$$\alpha_2 = m^2 \alpha_A + n^2 \alpha_T \quad \text{(الف-۱۲)}$$

$$\alpha_3 = n^2 \alpha_A + m^2 \alpha_T \quad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\alpha_4 = 2mn(\alpha_T - \alpha_A) \quad \text{(الف-۱۴)}$$

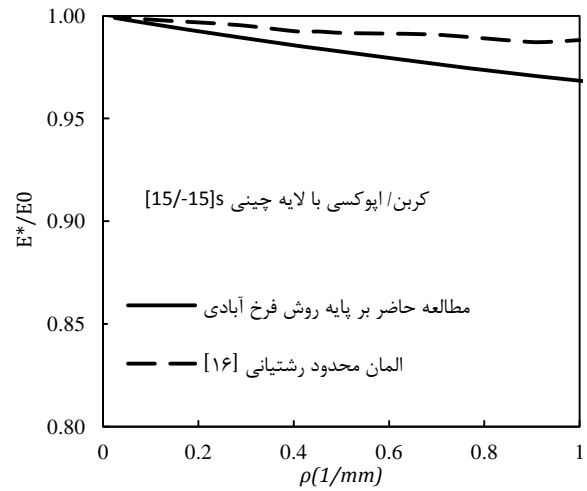
$$a_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2}{\mu_t} + \frac{m^2}{\mu_a} \right) \quad \text{(الف-۱۵)}$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} mn \left( \frac{1}{\mu_t} - \frac{1}{\mu_a} \right) \quad \text{(الف-۱۶)}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{\mu_t} + \frac{n^2}{\mu_a} \right) \quad \text{(الف-۱۷)}$$

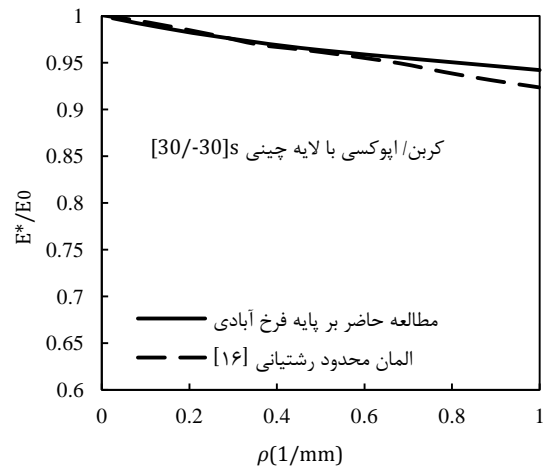
#### ۱۵- فهرست علائم

چگالی ترک (1/mm)	$\rho$
نسبت سفتی محوری حاوی ترک به سفتی اولیه	$E^*/E_0$
نسبت سفتی برشی حاوی ترک به سفتی اولیه	$G^*/G_0$
نسبت طول ناحیه جدایش به نصف طول دو ترک	$L_d/L$
نرخ رهایی انرژی چندلایه حاوی ترک ماتریسی	$G_m$
نرخ رهایی انرژی چندلایه حاوی ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از آن	$G_d$



شکل ۲۴ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس

شکل ۲۵ نشان‌دهنده مقایسه میزان افت سفتی چندلایه‌های زاویه‌ای 30/30 غیر هم‌محور با راستای بارگذاری نتایج تحلیل و نتایج روش اجزاء محدود هستند. میزان افت سفتی در چندلایه‌های زاویه‌ای با افزایش زاویه‌ی لایه‌ها و نزدیک شدن به زاویه‌ی ۹۰ درجه افزایش می‌یابد.



شکل ۲۵ مقایسه افت سفتی به صورت تابعی از چگالی ترک ماتریس

#### ۱۳- نتیجه گیری

روش تحلیلی تک لایه برای بررسی و تحلیل خرابی ترک ماتریسی و جدایی بین لایه‌های ناشی از آن در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد  $[0_n/90_m]_s$  و زاویه‌ای  $[\theta/\theta]_s$  تحت بارگذاری کششی ارائه شد. همچنین صحت روش ارائه شده با نتایج تجربی، روش حساب تغییرات و روش المان محدود در چندلایه‌های متعامد و زاویه‌ای با روش حساب تغییرات کشمیری و المان محدود رشتیانی مقایسه شد و هماهنگی خوبی بین نتایج مشاهده شد. مقایسه‌ی نتایج افت سفتی روش با دیگر روش‌ها، صحت نتایج روش تک لایه در مورد افت سفتی را تایید کرد. در مقایسه‌ی نتایج نرخ رهایی انرژی کرنشی این روش با دیگر روش‌ها مشاهده شد که به دلیل نادرست بودن روند تغییر سفتی‌ها در چگالی‌های مختلف و با توجه به وابستگی نرخ رهایی انرژی به شیب افت سفتی، تابع نرخ رهایی انرژی کرنشی منطبق بر نتایج دیگر روش‌ها نمی‌باشد. در نهایت می‌توان چنین نتیجه گرفت از آنجایی که در این روش

## ۱۶- مراجع

- [1] FarrokhAbadi, A. and Naghdi Nasab, M., "Micromechanical Study Of Fibre-Matrix Debonding And Matrix Cracking Using Cohesive Zone Model And Extended Finite Element Method," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 21-30, 2016.
- [2] Tahaye Abadi, M., "Micromechanical Fracture Modeling Of Unidirectional Composite Material Under Transverse Loading", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 93-106, 2016.
- [3] Talreja, R. Chandra Veer Singh, "Damage and Failure of Composite Material", Cambridge University Press, United States of America, pp. 134-141, 2012.
- [4] Ghayour, M.H., Hosseini-Toudeshky, H., Jalalvand, M., and Barbero, E.J., "Micro/Macro Approach for Prediction of Matrix Cracking Evolution in Laminated Composites", Journal of Composite Materials, Vol. 50, No. 19, pp. 2647-2659, 2016.
- [5] Allix, O. and Ladeveze, P., "Interlaminar Interface Modelling for the Prediction of Delamination", Journal of Composite Structure, Vol. 22, pp. 235-242, 1992.
- [6] Cox, H.L., "The Elasticity and Strength of Paper and other Fibrous Material", British Journal of Applied Physics, Vol. 1, pp. 72-79, 1952.
- [7] Highsmith, A.L. and Reifsnider, K.L., "Stiffness Reduction Mechanisms in Composite Laminates", Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K. L. Reifsnider ed., Philadelphia, pp. 103-117, 1982.
- [8] Lim, S.G. and Hong, C.S., "Prediction of Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Cross-ply Laminate Composites", Journal of Composite Materials, Vol. 23, pp. 695-713, 1989.
- [9] Isometsa, J. and Lahtinen, H., "Criteria for Matrix Failure in Continuous FRP-Composites A Literature Study. Part I: Matrix Cracking", Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 29, No. 1, pp. 3-28, 1996.
- [10] Johnson, P., and Chnag, F.K., "Characterization of Matrix Crack-Induced Laminate Failure-Part II: Analysis and Verification", Journal of Composite Materials, Vol. 35, No. 22, pp. 2037-2074, 2001.
- [11] Hashin, Z., "Analysis Of Cracked Laminates: A Variational Approach", Mechanics of Materials, Vol. 4, pp. 121-136, 1985.
- [12] Herakovich, Carl, T., "Mechanics of Fibrous Composites", John Wiley and sons Inc, University of Virginia, United States of America, pp. 185-190, 1998.
- [13] FarrokhAbadi, A. Hoseini-Toudeshky, H. and Mohammadi, B., "Damage analysis of laminated composites using a new coupled micro-meso approach", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 33, pp. 420-435, 2010.
- [14] McCartney, L.N., "Model to predict effects of tixial loading on ply cracking in general symmetric laminates", J. Composite Science and Technology, Vol. 60, pp. 2255-2279, 2000.
- [15] Keshmiri, A., "Matrix Microcracking and Induced Delamination in Cross-Ply Symmetrically-Laminated Composites Subjected to Multi-axial In-Plane Static Loading by using Multi-Scale Damage Mechanics", In Persian, MSc Thesis, Iran University of Science and Technology, Iran, 2015.
- [16] Rashtiani, H.A., "Matrix Crack and Delamination Analyses in Composite Laminates by FEM Based Micromechanical Approach", In Persian, MSC Thesis, Amirkabir University of Technology, Iran, 2011.
- [17] Daniel, I.M., and Tsai, C.L., "Analytical/Experimental Study of Cracking in Composite Laminates under Biaxial Loading", Composites Engineering, Vol. 1, pp. 355-362, 1991.