



بررسی ارتعاش استهلاکی وابسته به فرکانس تیر ساندویچی مرکب با هسته‌ی ویسکوالاستیک و انعطاف‌پذیر جانبی بر مبنای روش GHM

مجتبی صفری^۱، حسن بیگلری^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

* hbiglari@tabrizu.ac.ir، ۵۱۶۶۱۴۷۶۶

چکیده	اطلاعات مقاله
در این مقاله، پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب با هسته‌ی ویسکوالاستیک و انعطاف‌پذیر جانبی با شرایط تکیه‌گاهی ساده به صورت تحلیلی بررسی شده است. برای تحلیل تیر ثنوری سه لایه ساندویچی به کار رفته است. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. به دلیل عدم توانایی مدل‌های کلاسیک در توصیف جامع عملکرد دینامیکی مواد ویسکوالاستیک، از مدل GHM برای مدل‌سازی هسته‌ی ویسکوالاستیک استفاده شده است. مزیت این مدل در برگرفتن وابستگی خواص مادی به فرکانس در مواد ویسکوالاستیک می‌باشد. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر تیر با استفاده از روش جمع آثار مُدها به معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر با زمان تبدیل می‌شوند. حل معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت عددی با استفاده از روش نیومارک انجام شده است. نتایج تحلیل دینامیکی با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحه‌گذاری شده است. نوآوری مقاله حاضر، در نظر گرفتن خواص مادی وابسته به فرکانس هسته‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از مدل GHM و انعطاف‌پذیری هسته با به کارگیری ثنوری سه لایه ساندویچی در تحلیل دینامیکی تیر ساندویچی مرکب می‌باشد. هدف مقاله، بررسی پاسخ دینامیکی تیر با هسته‌ی ویسکوالاستیک طبق مدل GHM و بیان مزیت این مدل نسبت به مدل کلاسیک کلونین-ویت می‌باشد. همچنین به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضخامت، چگالی هسته و سفتی رویه‌های تیر ساندویچی مرکب بر فرکانس و نرخ میرایی پاسخ دینامیکی تیر پرداخته شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد، مدل GHM با در نظر گرفتن خواص مادی وابسته به فرکانس مواد ویسکوالاستیک نسبت به مدل کلونین-ویت توصیف دقیق‌تری از پاسخ دینامیکی تیر با هسته‌ی ویسکوالاستیک دارد.	دریافت: ۹۵/۲/۱۴ پذیرش: ۹۵/۴/۷ کلیدواژگان: تیر ساندویچی ماده ویسکوالاستیک هسته انعطاف‌پذیر پاسخ دینامیکی روش GHM

Frequency dependent damped vibration of composite sandwich beam with viscoelastic and transverse flexible core based on GHM method

Mojtaba Safari, Hasan Biglari*

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

*P.O.B. 5166614766, Tabriz, Iran, hbiglari@tabrizu.ac.ir

Keywords

Sandwich beam
Viscoelastic material
Flexible core
Dynamic response
GHM method

Abstract

In this paper, dynamic response of simply-supported composite sandwich beam with viscoelastic and transverse flexible core is investigated, analytically. Three-layered sandwich panel theory is used to analyze the beam. Hamilton's principle is employed to obtain governing equations of motion. In this paper, GHM method is used to model the viscoelastic core of the beam. Advantage of GHM model in according to classical models is including the frequency dependent characteristic of viscoelastic materials. Modal superposition method is used to convert partial differential equations of motion to ordinary differential equations with time varying coefficients. Newmark method is applied to solve the ODE with a numerical approach. Results of the present model are validated by analytical results published in the literatures. Innovation of this paper is considering frequency dependency of material property in viscoelastic core with using GHM model and utilizing three-layered sandwich panel theory in dynamic analysis of composite sandwich beam. The article investigates the dynamic response of beam with viscoelastic core by using GHM model to illustrate advantages of the GHM model over the Kelvin-Voigt model. As well as, a parametric study is also included in this paper to investigate the effect of different parameters such as thickness and density of core and stiffness of composite sandwich beam face sheets on the beam frequency and damping rate of beam dynamic response. The obtained results show that GHM model by considering the frequency dependency behavior of viscoelastic material presents a more accurate description of dynamic response of the beam with viscoelastic core.

Please cite this article using:

Safari, M. and Biglari, H., "Frequency dependent damped vibration of composite sandwich beam with viscoelastic and transverse flexible core based on GHM method", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 4, pp. 397-408, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

۱- مقدمه

پنل‌های ساندویچی به علت دارا بودن نسبت بالای سفتی خمشی به وزن و همچنین قابلیت تغییر در پارامترهای اساسی تشکیل‌دهنده‌ی سازه جهت ارضاء کردن نیازهای طراحی، دارای محبوبیت زیادی در کاربردهای صنعتی خصوصاً خودروسازی، کشتی‌سازی، ساختمان‌سازی و پل‌سازی می‌باشند.

پنل‌های ساندویچی معمولاً از سه لایه تشکیل می‌شوند که عبارت‌اند از رویه بالایی، رویه پایینی و هسته‌ای که در بین رویه‌ها قرار می‌گیرد. رویه‌ها از مواد با استحکام بالا ساخته می‌شوند. در حالیکه، هسته از مواد سبک با چگالی پایین ساخته می‌شود که وظیفه‌ی آن تحمل بار برشی جانبی می‌باشد. به دلیل وجود هسته‌ی ضخیم و انعطاف‌پذیر نسبت به رویه‌ها، این سازه‌ها رفتارهای منحصر به فردی نسبت به چندلایه‌های کامپوزیتی دارا می‌باشند. به عنوان مثال، اغماض از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی هسته، خطای زیادی در محاسبه پاسخ تیرهای ساندویچی ایجاد می‌کند.

در تحلیل پنل‌های ساندویچی دو دسته تئوری عمده وجود دارد [۱]: تئوری‌های تک‌لایه معادل^۱ و تئوری لایه‌ای^۲. در تئوری تک‌لایه معادل، میدان جابه‌جایی به شکل توابعی پیوسته از ضخامت مدل می‌شوند. هرچند که این تئوری در تخمین جابه‌جایی‌ها خوب عمل می‌نماید، اما در تعیین ناپیوستگی میدان جابه‌جایی و کرنش عرضی در سطح مشترک بین رویه‌ها و هسته با سختی‌های متفاوت ناتوان است. این تئوری، حالت تنش و کرنش را در نزدیکی ناپیوستگی‌های هندسی، مادی و در مجاورت بارگذاری‌های شدید نقطه‌ای به‌درستی مدل نمی‌کند. بنابراین، نیاز به استفاده از تئوری‌های لایه‌ای ایجاد می‌گردد. در این تئوری‌ها، میدان جابه‌جایی یکتا برای هر لایه که شرایط پیوستگی بین لایه‌ها را ارضاء می‌نماید، به صورت جدا در نظر گرفته می‌شود. مولفه‌های جابه‌جایی در راستای ضخامت لایه‌ها پیوسته هستند، اما مشتقاتشان در بعضی نقاط ممکن است ناپیوسته باشد. این موضوع این امکان را می‌دهد تا بتوان پیوستگی تنش برشی جانبی در فصل مشترک بین لایه‌ها را در نظر گرفت.

پنل‌های ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک به دلیل خواص میرایی مناسب هنگام بارگذاری، یکی از پرکاربردترین پنل‌ها در صنعت می‌باشند. دو رویکرد در مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک وجود دارد: مدل‌های ساختاری دیفرانسیلی و انتگرالی. از جمله مدل‌های دیفرانسیلی می‌توان به مدل‌های کلاسیک ماکسول، کلون-ویت، زنر و غیره اشاره داشت. استفاده از این مدل‌ها برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی وابسته به فرکانس بارگذاری مواد ویسکوالاستیک بسیار مشکل است. لذا مدل‌های انتگرالی همچون مدل‌های GHM^۳، دیفرانسیل مرتبه کسری و غیره برای جبران این نقیصه توسعه یافتند [۲]. در این مقاله، برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک هسته از مدل GHM استفاده می‌شود.

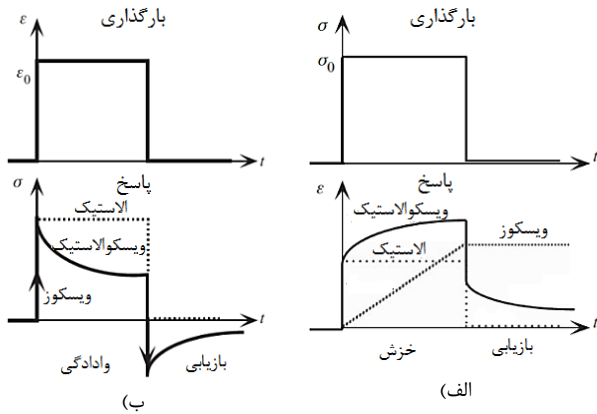
در سال ۲۰۰۰، ترینداد و همکاران [۲] پاسخ ارتعاشی گذرا و رفتار میرایی تیر یکسر گیردار با لایه‌های مجزای ویسکوالاستیک مجهز به عملگرهای پیزوالکتریک را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق از دو مدل ویسکوالاستیک با رویکرد انتگرالی بنام‌های GHM^۴ و ADF^۴ که وابستگی ویژگی‌های مادی مواد ویسکوالاستیک به فرکانس را در نظر می‌گیرند، کمک گرفتند. مونیر و شنوی [۳] در سال ۲۰۰۱ به تحلیل دینامیکی ورقه‌های ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک با

بهره‌گیری از اصل الاستیک-ویسکوالاستیک در شرایط نوسانی پایا پرداخته‌اند. فرکانس‌های طبیعی و ضرایب اتلاف برای ورق ساندویچی تحت دماهای مختلف بررسی شده است که از نتایج حاصله می‌توان به این نکته اشاره کرد که وقتی ضخامت هسته کاهش یابد، فرکانس طبیعی افزایش و ضریب اتلاف کاهش می‌یابد. در سال ۲۰۰۳، مونیر و شنوی [۴] به بررسی تحلیلی پاسخ اجباری ورقه‌های ساندویچی FRP^۵ با هسته‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری تک لایه معادل پرداختند (هسته صلب در جهت جانبی). رفتار ویسکوالاستیک هسته بر اساس روش GHM و بدون محدود کردن حرکت به پایا بودن مدل‌سازی شده است. باربوسا و باتیستا [۵] در سال ۲۰۰۴ به تحلیل دینامیکی تیر با هسته‌ی ویسکوالاستیک و دو سر تکیه‌گاه ساده بر پایه المان محدود پرداختند. این تیر تحت بار ضربه قرار گرفته است و پاسخ دینامیکی حاصل از روش GHM با نتایج تجربی مقایسه شده است. در سال ۲۰۰۹، حامد و رابینویچ [۶] رفتار دینامیکی تیر ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک انعطاف‌پذیر تحت انواع بارگذاری‌های دینامیکی را به‌صورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. برای مدل‌سازی هسته‌ی ویسکوالاستیک از دو مدل کلون-ویت و ماکسول استفاده شده است و نتایج این دو مدل با هم مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل کلون-ویت در ارائه‌ی پاسخ دینامیکی بهتر از مدل ماکسول عمل می‌کند. در سال ۲۰۱۲، مارنیوسکی [۷] به تحلیل دینامیکی تیر ساندویچی متحرک طولی با هسته‌ی ویسکوالاستیک پرداخته است. برای مدل‌سازی هسته‌ی تیر از مدل کلون-ویت استفاده شده است. در نهایت تأثیر سرعت حرکت، ضخامت هسته و میزان میرایی داخلی ماده‌ی ویسکوالاستیک بر رفتار دینامیکی تیر بررسی شده است. محمودخانی و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۲ به تحلیل ارتعاشات اتفاقی آزاد و اجباری ورقه‌های ساندویچی با هسته ویسکوالاستیک با بکارگیری مدل GHM پرداخته است. معادلات حرکت با استفاده از روش مُدهای نرمال حل شده و سرانجام برای یک ورق با تکیه‌گاه‌های ساده تأثیر پارامترهای هندسی و مُدهای خمشی ورق بر فرکانس‌ها، نسبت میرایی و غیره بررسی شده است. ون و همکاران [۹] در سال ۲۰۱۳، به تحلیل دینامیکی تیر ساندویچی سه لایه با هسته ویسکوالاستیک تحت بارگذاری دینامیکی با استفاده از روش المان محدود پرداخته است. در این تحقیق، پاسخ فرکانسی تیر یکسر گیردار و تیر یکسر گیردار-یکسر ساده با هسته‌ی ویسکوالاستیک، به ازای مشخصات هندسی متفاوت بررسی شده است. در سال ۲۰۱۴، فیلهو و باربوسا [۱۰] تحلیل دینامیکی تیر یکسر گیردار که لایه‌های ویسکوالاستیک به‌عنوان میراگر ارتعاشی روی صفحات رومی و زیرین تیر نصب شده‌اند، را بررسی کردند. در یک تیر یکسر گیردار، پاسخ فرکانسی انتهای آزاد تیر با استفاده از دو مدل GHM و ADF با مدل‌های کلاسیک، بر پایه المان محدود مقایسه شده است. همچنین، نرخ میرایی تیر یکسر گیردار برای چهار حالت مختلف در نحوه قرارگیری لایه ویسکوالاستیک باهم مقایسه شده است. در سال ۲۰۱۵، ژغال و همکاران [۱۱] با استفاده از روش المان محدود به تحلیل پاسخ فرکانسی تیر با هسته‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از مدل GHM پرداختند. آن‌ها در این بررسی از روش‌های مختلف کاهش مرتبه اعم از روش کاهش مرتبه دینامیکی، روش کاهش مرتبه گویان و روش کاهش مرتبه مودال استفاده کردند.

در اکثر مقالاتی که تا به امروز ارائه شده‌اند، در بررسی دینامیکی سازه‌های متشکل از مواد ویسکوالاستیک ویژگی وابستگی خواص مادی به

1. Equivalent single layer
2. Layer wise Theory
3. Golla-Hughes-Mctavish
4. Anelastic displacement fields

5. Fiber reinforced plastic



شکل ۱ الف) نمودار خزش مواد الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک (ب) نمودار وادادگی مواد الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک [۱۲]

برای مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک دو رویکرد کلی وجود دارد. در رویکرد اول که دیفرانسیلی است، ارتباط تنش-کرنش با یک معادله دیفرانسیل بیان می‌شود. در مدل‌های کلاسیک میرایی اعم از کلونین-ویت، ماکسول، زینر و غیره از این رویکرد بهره گرفته شده است [۱۳]. در رویکرد دوم که انتگرالی است، ارتباط تنش-کرنش با یک رابطه‌ی انتگرالی تعریف شده است. از آنجایی که مواد ویسکوالاستیک موادی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها وابسته به زمان بوده و حافظه‌دار هستند، برای توصیف دقیق‌تر ویژگی‌های این مواد بهتر است از مدل‌هایی استفاده شود که از رویکرد انتگرالی بهره گرفته‌اند.

مدل GHM یکی از انواع مدل‌های انتگرالی است. در این مدل، از یک مختصه‌ی میرایی به‌عنوان متغیر حالت اضافی استفاده می‌شود تا وابستگی خواص مادی به فرکانس را در مواد ویسکوالاستیک پوشش می‌دهد. از جمله ویژگی‌های مهم ساختاری مواد ویسکوالاستیک، وابستگی خواص مادی این مواد به دما و فرکانس می‌باشد که این ویژگی‌ها با ارائه‌ی مدول یانگ و برشی مواد ویسکوالاستیک به صورت اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۲، وابستگی مدول ذخیره برشی و ضریب اتلاف متناظر به فرکانس در دمای ۳۰ و ۹۰ درجه سانتی‌گراد برای ماده‌ی ویسکوالاستیک HEREX C70.130 ارائه شده است [۳]. مطابق شکل در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد، وابستگی مدول‌های ذخیره و ضرایب اتلاف متناظر به فرکانس ناچیز است. ولی در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد، مدول‌های ذخیره و ضرایب اتلاف وابسته به فرکانس‌اند. البته این وابستگی با افزایش فرکانس کاسته می‌شود.

۳- تئوری سه لایه ساندویچی

مطابق شکل ۳، یک تیر ساندویچی را در نظر بگیرید که متشکل از یک هسته‌ی ویسکوالاستیک و انعطاف‌پذیر جانبی از جنس HEREX C70.130 و دو رویه‌ی کامپوزیتی از جنس GFRP^۴ باشد. برای تحلیل تیر از تئوری سه لایه‌ی ساندویچی استفاده شده است. در این تئوری، برای رویه‌های بالا و پایین از تئوری کلاسیک و برای هسته از میدان جابجایی خطی بهره گرفته شده است. میدان جابجایی تئوری کلاسیک برای رویه‌های بالا و پایین به‌صورت رابطه (۲) است.

$$\begin{cases} u_i(x, z_i, t) = u_{oi}(x, t) - z_i w_{i,x}(x, t) \\ w_i(x, z_i, t) = w_i(x, t) \end{cases}, i = t, b \quad (2)$$

فرکانس بارگذاری در نظر گرفته نشده است. در تحقیق حاضر، سعی بر این است که با بهره‌گیری از مدل GHM به بررسی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی دارای رویه‌های کامپوزیتی و هسته‌ی انعطاف‌پذیر جانبی و ویسکوالاستیک به‌صورت تحلیلی پرداخته شود. در این بررسی، از تئوری سه لایه پل ساندویچی استفاده شده است. هدف تحقیق حاضر، بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری و خواص مادی وابسته به فرکانس هسته جهت دستیابی به پاسخ دینامیکی مناسب می‌باشد. تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضخامت و چگالی هسته‌ی ویسکوالاستیک و سفتی رویه‌های تیر مرکب بر فرکانس تیر و نرخ میرایی پاسخ دینامیکی تیر بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود که مدل GHM نسبت به مدل کلونین-ویت در توصیف خواص وابسته به فرکانس مواد ویسکوالاستیک دقت بالاتری دارد.

نوآوری کار حاضر در بررسی تحلیلی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب با در نظر گرفتن خواص مادی وابسته به فرکانس هسته‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از مدل GHM می‌باشد. همچنین، استفاده از تئوری سه لایه ساندویچی باعث شده که انعطاف‌پذیری جانبی هسته در نظر گرفته شود. این انعطاف‌پذیری باعث می‌گردد تا در راستای ضخامت هسته کرنش وجود داشته باشد و خیز رویه بالایی و پایینی تیر ساندویچی یکسان نباشند.

۲- مواد ویسکوالاستیک

مواد ویسکوالاستیک دارای ویژگی الاستیک و ویژگی ویسکوز هم‌زمان باهم می‌باشند. این مواد در برابر نیروهای خارجی واکنش‌هایی بین رفتار مواد جامد الاستیک و سیال ویسکوز دارند. در حالت کلی، رفتار مواد ویسکوالاستیک وابسته به زمان می‌باشد و دچار تغییر شکل دائمی می‌شوند. ویژگی‌های اصلی مواد ویسکوالاستیک در سه آزمایش تعیین می‌شوند: الف) آزمایش خزش؛ ب) آزمایش وادادگی تنش؛ ج) پاسخ دینامیکی به بارهای پایای سینوسی.

به دلیل وجود خواص ویسکوز و الاستیک به‌صورت هم‌زمان در مواد ویسکوالاستیک، این مواد ویژگی‌های منحصر به فردی به شرح زیر دارند [۱۲]:

۱. خزش: اگر تنش ثابت نگه داشته شود، کرنش با زمان افزایش می‌یابد.
 ۲. وادادگی تنش: اگر کرنش ثابت نگه داشته شود، تنش با زمان کاهش می‌یابد.
 ۳. سفتی مؤثر به سرعت بارگذاری بستگی دارد.
 ۴. با اعمال بار تناوبی پایا، هیستریزس (تأخیر فاز) اتفاق می‌افتد که منجر به میرایی انرژی مکانیکی می‌گردد.
 ۵. بعد از بار ضربه به‌طور کامل به حالت اولیه باز نمی‌گردد.
- در شکل ۱، نمودار خزش و وادادگی تنش مواد ویسکوالاستیک ارائه شده است. در مواد ویسکوالاستیک خطی، رابطه‌ی بین تنش-کرنش به‌صورت اصل بر هم نهش بولتزمن بیان می‌شود [۱۲].

$$\sigma(t) = G(t) \varepsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1)$$

کرنش را برای زمان $t < 0$ برابر صفر در نظر می‌گیرند و $G(t)$ تابع وادادگی^۳ در ماده ویسکوالاستیک می‌باشد.

1. Creep test
2. Stress relaxation test
3. Relaxation function

4. Graphite fiber reinforced plastic

لذا در کل، متغیرهای وابسته عبارتند از دو متغیر (u_{ob}, w_t) در رویه بالایی و دو متغیر (u_{ob}, w_b) در رویه پایینی. برای به‌دست آوردن روابط حاکم بر مسئله از اصل هامیلتون استفاده شده است.

$$\int_0^t (T - U - V) dt = 0 \quad (6)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و V انرژی پتانسیل مطابق روابط زیر هستند.

$$\int_0^t \delta T dt = - \int_0^t \left\{ \int_{v_t} \rho_t (\ddot{u}_t \delta u_t + \ddot{w}_t \delta w_t) dv_t + \int_{v_b} \rho_b (\ddot{u}_b \delta u_b + \ddot{w}_b \delta w_b) dv_b + \int_{v_c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{w}_c \delta w_c) dv_c \right\} dt \quad (7)$$

$$\int_0^t \delta U dt = \int_0^t \left\{ \int_{v_t} \sigma_{xx}^t \delta \varepsilon_{xx}^t dv_t + \int_{v_b} \sigma_{xx}^b \delta \varepsilon_{xx}^b dv_b + \int_{v_c} (\sigma_{zz}^c \delta \varepsilon_{zz}^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c) dv_c \right\} dt \quad (8)$$

$$\int_0^t \delta V dt = - \int_0^t \left(\int_0^L f_t \delta w_t dx \right) dt \quad (9)$$

با در نظر گرفتن تئوری هسته‌ی ضعیف، می‌توان از تنش‌های داخل صفحه‌ای هسته نسبت به تنش‌های رویه‌های بالا و پایین صرف‌نظر کرد. با جایگذاری میدان‌های جابجایی هسته و رویه‌ها، بکارگیری روابط کرنش-جابجایی و روابط ساختاری تنش-کرنش در اصل هامیلتون و پس از انتگرال‌گیری جزء به جزء و انجام یک سری عملیات جبری، معادلات حاکم بر تیر ساندویچی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

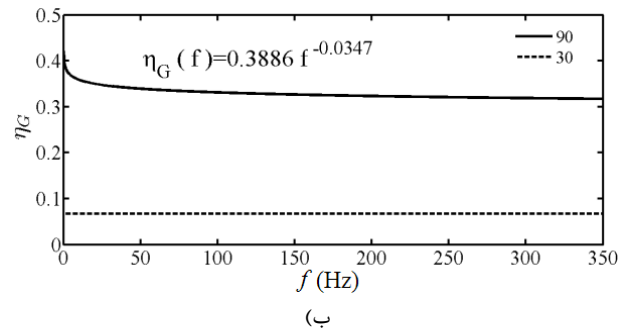
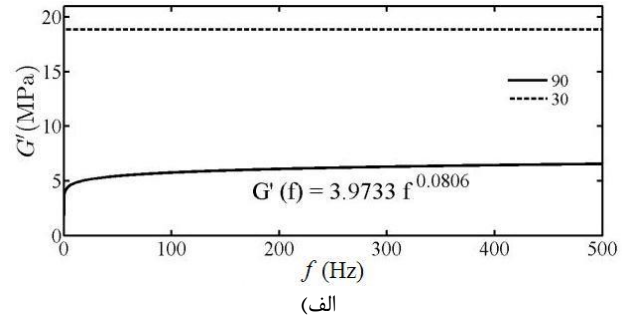
$$N_{xx,x}^t + \frac{1}{h_c} N^c - m_t \ddot{u}_{ot} + \frac{m_c h_t}{6} \ddot{w}_{t,x} - \frac{m_c h_b}{12} \ddot{w}_{b,x} - \frac{m_c}{3} \ddot{u}_{ot} - \frac{m_c}{6} \ddot{u}_{ob} = 0 \quad (10)$$

$$N_{xx,x}^b - \frac{1}{h_c} N^c - m_b \ddot{u}_{ob} + \frac{m_c h_t}{12} \ddot{w}_{t,x} - \frac{m_c h_b}{6} \ddot{w}_{b,x} - \frac{m_c}{3} \ddot{u}_{ot} - \frac{m_c}{6} \ddot{u}_{ob} = 0 \quad (11)$$

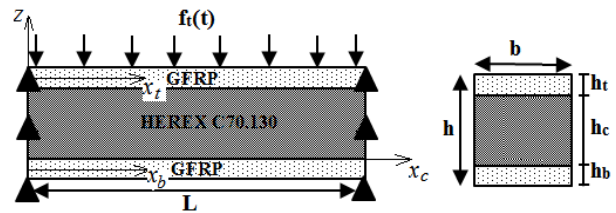
$$M_{xx,xx}^t - \frac{1}{h_c} \left(-\left(\frac{h_t}{2} + h_c\right) N_x^c + M_x^c - S^c \right) - m_t \ddot{w}_t + \rho_t I_t \ddot{w}_{t,xx} - \frac{m_c h_t}{12} \left(\frac{2\ddot{w}_b + 4\ddot{w}_t}{h_t} - h_t \ddot{w}_{t,xx} + \frac{h_b}{2} \ddot{w}_{b,xx} + 2\ddot{u}_{ot,x} + \ddot{u}_{ob,x} \right) + f_t = 0 \quad (12)$$

$$M_{xx,xx}^b - \frac{1}{h_c} \left(-\frac{h_b}{2} N_x^c - M_x^c + S^c \right) - m_b \ddot{w}_b + \rho_b I_b \ddot{w}_{b,xx} - \frac{m_c h_b}{12} \left(\frac{2\ddot{w}_t + 4\ddot{w}_b}{h_b} - h_b \ddot{w}_{b,xx} + \frac{h_t}{2} \ddot{w}_{t,xx} - 2\ddot{u}_{ob,x} - \ddot{u}_{ot,x} \right) = 0 \quad (13)$$

در روابط بالا، جرم واحد طول رویه‌ها به‌صورت $m_i = b\rho_i h_i$ ($i = t, b$) در روابط بالا، جرم واحد طول رویه‌ها به‌صورت $m_i = b\rho_i h_i$ ($i = t, b$) تعریف می‌شود. روابط مربوط به ممان‌های اینرسی رویه‌ها I_i ($i = t, b$) و منتجه‌های تنش رویه‌ها M_{xx}^t, N_{xx}^t و منتجه‌های تنش هسته S^c, M^c, N^c در پیوست درج شده است.



شکل ۲ الف) وابستگی مدول ذخیره برشی به فرکانس؛ ب) وابستگی ضریب اتلاف برشی به فرکانس در ماده ویسکوالاستیک HEREX C70.130 [۳]



شکل ۳ نمای طولی و جانبی تیر ساندویچی و مشخصات هندسی آن

و میدان جابجایی خطی هسته انعطاف‌پذیر به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} u_c(x, z_c, t) = u_{oc}(x, t) + z_c u_{1c}(x, t) \\ w_c(x, z_c, t) = w_{oc}(x, t) + z_c w_{1c}(x, t) \end{cases} \quad (3)$$

در روابط بالا، u جابجایی در جهت مختصات x و w جابجایی در جهت مختصات z است. شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در وجه مشترک رویه‌ها با هسته عبارتند از:

$$\begin{cases} w_c(x, z_c = 0, t) = w_b(x, t) \\ u_c(x, z_c = 0, t) = u_{ob}(x, t) + \frac{h_b}{2} w_{b,x}(x, t) \\ w_c(x, z_c = h_c, t) = w_t(x, t) \\ u_c(x, z_c = h_c, t) = u_{ot}(x, t) - \frac{h_t}{2} w_{t,x}(x, t) \end{cases} \quad (4)$$

با اعمال شرایط پیوستگی میدان جابجایی هسته بر حسب متغیرهای رویه‌های بالا و پایین به‌صورت رابطه (۵) حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} u_c(x, z_c, t) = \frac{u_{ob} - u_{ot} + \frac{1}{2}(h_b w_{b,x} + h_t w_{t,x})}{h_c} z_c + \left(u_{ot} - \frac{h_t}{2} w_{t,x} \right) \\ v_c(x, z_c, t) = 0 \\ w_c(x, z_c, t) = \frac{w_b - w_t}{h_c} z_c + w_t \end{cases} \quad (5)$$

برای این منظور، توابع مدول در فضای لاپلاس به صورت یک سری از ترم‌های ریزنوسانگر^۳ به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$sG_i(s) = \hat{G}_i^0 \left(1 + \sum_{p=1}^k \hat{\alpha}_i^p \frac{[s^2 + 2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p s]}{[s^2 + 2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p s + (\hat{\omega}_i^p)^2]} \right) \quad (18)$$

که ξ_i ، α_i ، G_i و ω_i پارامترهای مدل GHM هستند که تعداد آنها (k) بسته به دقت مورد نیاز برای برازش منحنی مدول مختلط بر حسب فرکانس دارد. هر کدام از اعضای ماتریس سفتی در رابطه (۱۷) توابعی هستند که شامل حداقل یک مدول مختلط می‌باشند. به منظور اعمال روش GHM، ماتریس سفتی $[sK(s)]$ بر حسب توابع مدول به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$[sK(s)] = \sum_i [sK(s)]_i = \sum_i s G_i(s) [\bar{K}]_i \quad (19)$$

پس از جانشانی رابطه (۱۹) در معادله (۱۷)، معادله‌ی حرکت در فضای لاپلاس به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$s^2 [M] \{q(s)\} + \sum_i (s G_i(s) [\bar{K}]_i) \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (20)$$

هر کدام از توابع مدول i ام در رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت ریز نوسانگرهای معادله (۱۸) بسط داد. سپس، مختصات میرایی کمکی (\hat{z}) به صورت یک بردار ستونی مطابق رابطه (۲۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\{\bar{z}^p(s)\}_i = \frac{(\hat{\omega}_i^p)^2}{[s^2 + 2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p s + (\hat{\omega}_i^p)^2]} \{q(s)\} \quad (21)$$

در نتیجه، معادلات حرکت در فضای لاپلاس به صورت رابطه (۲۲) حاصل می‌شود.

$$\left\{ s^2 \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_{\bar{z}}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_{\bar{z}}] \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\bar{z}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_q] & [K_{q\bar{z}}] \\ [K_{q\bar{z}}]^T & [K_{\bar{z}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\bar{z}\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

مولفه‌های زیرماتریس‌های جرم M ، سفتی و میرایی در پیوست بیان شده است. ماتریس جرم همواره مثبت معین است. یعنی تمام مقادیر ویژه‌اش مثبت می‌باشند. اما ماتریس سفتی K معمولاً مثبت نیمه معین است. یعنی امکان دارد که یک یا چند مقدار ویژه صفر داشته باشد که نشان‌دهنده حرکت جسم صلب است. برای حذف مدهای صلب، ماتریس سفتی الاستیک K به صورت زیر تجزیه طیفی می‌شود.

$$[\bar{K}]_i = [\bar{R}]_i [\bar{\Lambda}]_i [\bar{R}]_i^T \quad (23)$$

که در آن، $\bar{\Lambda}$ یک ماتریس قطری است که مولفه‌های آن از مقادیر ویژه غیر صفر (لزوماً مثبت) ماتریس \bar{K} تشکیل شده است. \bar{R} ماتریس متعامد متشکل از بردارهای ویژه متناظر می‌باشد. قابل ذکر است که این تجزیه طیفی باعث تفکیک مدهای صلب (صفر) و مدهای الاستیک (غیر صفر) می‌شود. برای رسیدن به تعداد مختصه‌های میرایی کمتر (\hat{z}) و دستیابی به ماتریس جرم مثبت معین، هر یک از ماتریس‌های قطری $\bar{\Lambda}$ در مدول تعادل متناظر \hat{G}_i^0 ضرب می‌شود.

$$[\bar{\Lambda}]_i = \hat{G}_i^0 [\bar{\Lambda}]_i \quad (24)$$

سپس تعاریف جدید طبق رابطه (۲۵) در معادله (۲۲) جانشانی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \{z\} \\ \{\bar{z}\} \end{Bmatrix}_i = [\bar{R}]_i^T \{q\}_i \quad (25)$$

$$[R]_i = [\bar{R}]_i [\bar{\Lambda}]_i$$

فرم نهایی معادله حرکت در فضای لاپلاس به صورت رابطه (۲۶) به دست می‌آید.

چهار معادله حاکم بر مساله، به صورت معادلات دیفرانسیل کوپل از نوع مرتبه دوم می‌باشند که برای حل آن از روش جمع آثار مودها^۴ استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} u_{ot}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_t(t) \cos(\alpha x) & \alpha = \frac{n\pi}{l} \\ u_{ob}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_b(t) \cos(\alpha x) \\ w_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_t(t) \sin(\alpha x) \\ w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_b(t) \sin(\alpha x) \end{cases} \quad (14)$$

بعد از جایگذاری روابط (۱۴) در معادلات حاکم بر مساله، دسته معادلات PDE به دسته معادلات ODE به فرم زیر تبدیل می‌شوند.

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (15)$$

این معادلات ODE در حوزه‌ی زمان با استفاده از روش عددی نیومارک^۴ حل می‌شوند.

۴- مدل سازی مواد ویسکوالاستیک

۴-۱-۴ مدل GHM [۴]

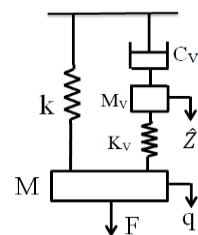
مدل GHM سازگاری خوبی با معادلات مرتبه دو در سیستم‌های دینامیکی دارد [۱۴]. مدل مکانیکی روش GHM مطابق شکل ۴ می‌باشد. جرم نوسانگر معادل در مدل GHM (M_v)، نشان‌دهنده‌ی جرم واقعی در سیستم سازه‌ای نیست و در انرژی جنبشی تأثیری ندارد. تأثیر جرم M_v در مدل GHM کمک به بررسی تغییرات جزئی مدول برشی مختلط در برابر فرکانس است. به همین دلیل مدل GHM نسبت به مدل‌های کلاسیک، مدل دقیق‌تری است. معادله حرکت تیر ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک طبق تئوری سه لایه به فرم زیر ارائه می‌شود [۴].

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + \int_0^t [K(t-\tau)] \{q(\tau)\} d\tau = \{F(t)\} \quad (16)$$

این معادلات را به صورت زیر می‌توان به فضای لاپلاس انتقال داد.

$$s^2 [M] \{q(s)\} + [sK(s)] \{q(s)\} = \{F(s)\} \quad (17)$$

که در آن، $[M]$ ماتریس جرم و $[sK(s)]$ ماتریس سفتی در فضای لاپلاس می‌باشد که برای محاسبه‌ی ضرایب آن، از روش GHM استفاده می‌شود. به این صورت که در مدل ویسکوالاستیک GHM، مختصه‌های میرایی کمکی (\hat{z}) به سیستم اضافه می‌شوند. وظیفه‌ی این مختصه‌های اضافی، در نظر گرفتن ویژگی‌های میرایی و همچنین توصیف مشخصه‌ی وابستگی به فرکانس مواد ویسکوالاستیک می‌باشد.



شکل ۴ مدل مکانیکی روش GHM [۱۴]

1. Modal superposition method
2. Newmark method

جدول ۱ مشخصات مادی لایه‌های تیر ساندویچی در دمای ۳۰ درجه

سانتیگراد							ماده
E' (MPa)	E'' (MPa)	η_E	G' (MPa)	G'' (MPa)	η_G	ρ ($\frac{Kg}{m^3}$)	
۱۱۳/۵	۳/۲۷	۰/۰۲۸۸	۱۸/۸۶	۱/۲۶	۰/۰۶۷	۱۳۰	HEREX C70.130
۱۸۰۰۰	---	---	---	---	---	۲۰۰۰	GFRP

ذکر این نکته ضروری است که علت انتخاب مدل کلون-ویت برای صحنه‌گذاری آن است که در بررسی پاسخ دینامیکی مواد ویسکوالاستیک توسط حامد و رابینویچ [۶]، پاسخ بهتر مدل کلون-ویت نسبت به مدل ماکسول اثبات شده است.

پارامترهای هندسی تیر مرکب با هسته‌ی ویسکوالاستیک در شکل ۳ ارائه شده است. نسبت طول به کل ضخامت تیر L/h برابر ۱۰ و نسبت ضخامت هسته به کل ضخامت تیر h_c/h برابر ۰/۹۴ فرض شده است. در این اعتبارسنجی، خواص مادی HEREX C70.130 در دمای ثابت ۳۰ درجه‌ی سانتی‌گراد مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شده است. پارامترهای مدل GHM با استفاده از روش برازش منحنی به دست می‌آیند.

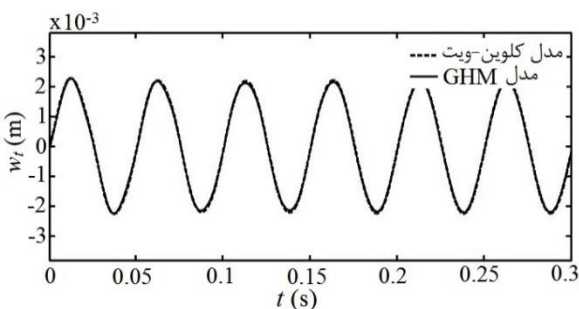
در شکل ۵، پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری هارمونیک پایا طبق دو مدل کلون-ویت و GHM مقایسه گشته است. در این شکل، روی بالایی تیر تحت تحریک هارمونیک پایا به صورت رابطه زیر قرار گرفته است.

$$f_i(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (31)$$

که در آن، f_0 دامنه نیروی تحریک برابر 10^4 نیوتون بر مترمربع و ω فرکانس تحریک برابر 40π رادیان بر ثانیه می‌باشد. مطابق شکل، بخش پایایی پاسخ دینامیکی تیر طبق مدل کلون-ویت و GHM از لحاظ فرکانس و دامنه در تطابق کامل با یکدیگر می‌باشند.

در شکل ۶، خیز دینامیکی نقطه‌ی میانی تیر ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک (رویه بالا) تحت بارگذاری ضربه، طبق دو مدل کلون-ویت و GHM ارائه و مقایسه شده است. نتایج نسبت به خیز استاتیکی نرمالیزه شده است. مدت زمان اعمال بار ضربه ۰/۱ دوره تناوب اول تیر در نظر گرفته شده است. این امر به منظور تحریک فرکانس‌های طبیعی بالای تیر در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو مدل، از نظر دامنه، نرخ میرایی و فرکانس، در تطابق بسیار خوبی با یکدیگر هستند.

در شکل ۷، تغییرات تنش برشی هسته‌ی ویسکوالاستیک نسبت به زمان، تحت بارگذاری ضربه ارائه شده است. بررسی پاسخ تنش برشی جانبی تیر در نقطه‌ای به طول $x=26$ mm در مجاورت تکیه‌گاه ساده انجام شده است.



شکل ۵ خیز جانبی تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری هارمونیک پایا

$$\begin{Bmatrix} s^2 [M] & [0] \\ [0] & [M_z] \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_z] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [K_q] & [K_{qz}] \\ [K_{qz}]^T & [K_z] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

رابطه (۲۶) را می‌توان به صورت رابطه (۲۷) خلاصه‌تر بیان کرد.

$$(s^2 [M_v] + s[D_v] + [K_v])\{q_v\} = \{F_v\} \quad (27)$$

رابطه (۲۷) به ترتیب ماتریس‌های ویسکوالاستیک جرم، میرایی و سختی می‌باشند. تمامی مولفه‌های این ماتریس‌ها تابعی از پارامترهای ریزونانسر روش GHM می‌باشند که در پیوست ارائه شده است. پس از لاپلاس معکوس گرفتن از رابطه (۲۷)، معادله حرکت مرتبه دو در حوزه‌ی زمان به صورت رابطه (۲۸) حاصل می‌شود.

$$[M_v]\{\ddot{q}_v(t)\} + [D_v]\{\dot{q}_v(t)\} + [K_v]\{q_v(t)\} = \{F_v(t)\} \quad (28)$$

برای حل معادله (۲۸) و دستیابی به پاسخ سازه‌ی تحت بارگذاری، از روش عددی نیومارک بهره گرفته می‌شود.

۲-۴- تعیین پارامترهای ریزونانسر مدل GHM

پارامترهای مدل GHM در رابطه (۱۸) مشخصه‌ی رفتار ساختاری وابسته به فرکانس مواد ویسکوالاستیک را بیان می‌کنند. برای به دست آوردن این پارامترها، پس از تعیین تعداد ترم‌های مورد نیاز k (در این مقاله سه ترم در نظر گرفته شده است)، با برازش منحنی مدول مختلط بر حسب فرکانس با استفاده از برنامه متلب و دستور Lscurvefit (که همان روش حداقل مربع خطا می‌باشد) حاصل می‌شوند. با جانشانی عبارت $s = j\omega$ در تابع مدول رابطه (۱۸)، مدول ذخیره و مدول اتلاف بر حسب فرکانس بارگذاری ماده ویسکوالاستیک به صورت روابط (۲۹) و (۳۰) تفکیک می‌شوند.

$$G_i'(\omega) = \hat{G}_i^0 \left(1 + \omega^2 \sum_{p=1}^k \hat{\alpha}_i^p \frac{(\omega^2 - (\hat{\omega}_i^p)^2) + (2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p)^2}{(\omega^2 - (\hat{\omega}_i^p)^2)^2 + \omega^2 (2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p)^2} \right) \quad (29)$$

$$G_i''(\omega) = \hat{G}_i^0 \left(\omega \sum_{p=1}^k \hat{\alpha}_i^p \frac{(\hat{\omega}_i^p)^2 (2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p)}{(\omega^2 - (\hat{\omega}_i^p)^2)^2 + \omega^2 (2\xi_i^p \hat{\omega}_i^p)^2} \right) \quad (30)$$

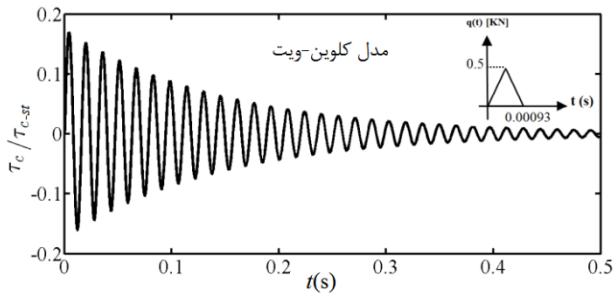
برای یافتن پارامترهای مدل GHM باید برازش منحنی مدول یانگ و مدول برشی ماده‌ی ویسکوالاستیک در دمای خاص و بازه‌ی فرکانسی مورد نظر انجام شود. با افزایش گستره‌ی بازه فرکانسی باید تعداد جملات بیشتری از سری انتخاب شود تا دقت محاسبات کاهش نیابد.

۵- بحث و بررسی نتایج

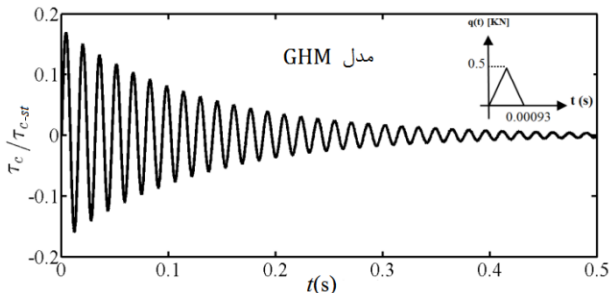
رویه‌های بالایی و پایینی تیر ساندویچی مرکب مورد بررسی از ماده‌ی کامپوزیتی GFRP تشکیل شده است. هسته‌ی تیر از جنس ماده‌ی ویسکوالاستیک HEREX C70.130 می‌باشد. مشخصات مادی این ماده‌ی ویسکوالاستیک در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد به همراه مشخصات مادی رویه‌های تیر در جدول ۱ ارائه شده است.

۵-۱- اعتبارسنجی

در این بخش، با مقایسه نتایج حاصل از کار حاضر طبق مدل GHM و نتایج به دست آمده از حامد و رابینویچ [۶] طبق مدل کلون-ویت، به اعتبارسنجی مدل ارائه شده پرداخته می‌شود.

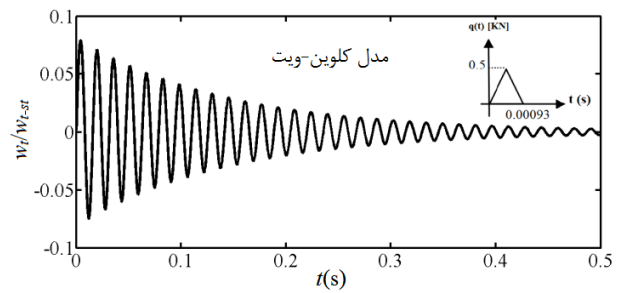


(الف)

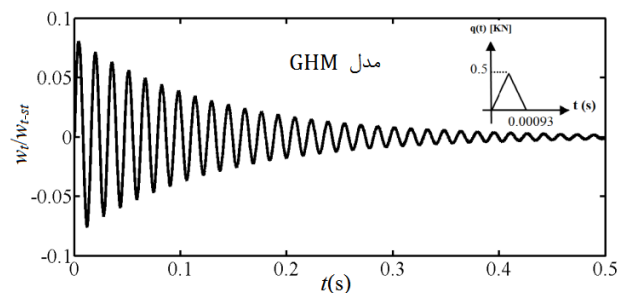


(ب)

شکل ۷ تنش برشی هسته‌ی تیر ساندویچی مرکب با دو سر تکیه‌گاه ساده تحت بار ضربه الف) مدل GHM، ب) مدل کلونین-ویت



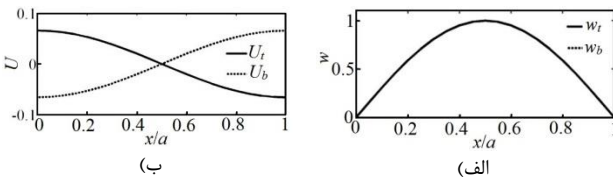
(الف)



(ب)

شکل ۸ خیز دینامیکی نقطه میانی تیر ساندویچی مرکب دو سر تکیه‌گاه ساده تحت بار ضربه الف) مدل کلونین-ویت، ب) مدل GHM

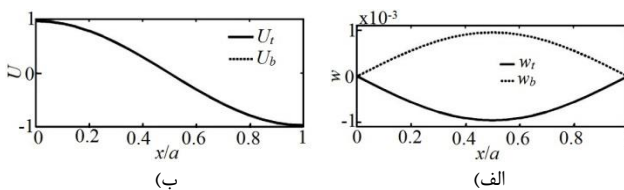
در شکل ۸، جابجایی طولی رویه‌های بالا و پایین نسبت به هم متقارن می‌باشند. ولی جابجایی عرضی رویه‌های بالا و پایین بر هم منطبق هستند. به این مد، مد پاد متقارن گویند. بطور عکس در شکل ۹، جابجایی عرضی رویه‌های بالا و پایین نسبت به هم متقارن و جابجایی طولی رویه‌های بالا و پایین بر هم منطبق هستند. به این مد، مد متقارن گویند. مد پادمتقارن به علت انعطاف‌پذیری هسته در جهت جانبی بوجود می‌آید. امکان تحریک مد ارتعاشی پادمتقارن در بارگذاری‌های دینامیکی تیر ساندویچی وجود دارد. این موضوع در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در نمودار شکل ۱۰، خیز دینامیکی رویه بالا و پایینی تیر ساندویچی تحت بارگذاری ضربه نشان داده شده است. متقارن بودن پاسخ دینامیکی رویه بالا و پایین کاملاً در شکل مشخص است.



(ب)

(الف)

شکل ۹ الف) شکل مد جابجایی جانبی ب) شکل مد جابجایی طولی تیر ساندویچی به ازای فرکانس طبیعی اول مد اول با شرایط هندسی $h_c/h=0.94$ و $L/h=10$



(ب)

(الف)

شکل ۱۰ الف) شکل مد جابجایی جانبی ب) شکل مد جابجایی طولی تیر ساندویچی به ازای فرکانس طبیعی دوم مد اول با شرایط هندسی $h_c/h=0.94$ و $L/h=10$

نتایج شکل ۷-الف و ۷-ب به ترتیب، طبق مدل کلونین-ویت و مدل GHM می‌باشد. نتایج هر دو نمودار نسبت به تنش برشی جانبی استاتیکی نرمالیزه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو مدل، از نظر دامنه، نرخ میرایی و فرکانس در تطابق بسیار خوبی هستند می‌شوند. برای بررسی دقیق‌تر میزان میرایی پاسخ دینامیکی طبق نتایج دو مدل نرخ میرایی^۱ پاسخ ارتعاشی طبق رابطه (۳۲) محاسبه شده است.

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{W_{n+N}}{W_n} \right) \quad (32)$$

این نرخ به عنوان کاهش لگاریتمی به صورت نسبت دامنه سیکل n ام به دامنه سیکل $n+N$ ام بیان می‌شود [۴]. N تعداد سیکل‌های مد نظر برای محاسبه‌ی کاهش لگاریتمی می‌باشد. کاهش لگاریتمی در پاسخ خیز دینامیکی و تنش برشی طبق مدل کلونین-ویت برابر 0.108 و طبق مدل GHM برابر 0.120 می‌رسد. لذا، سرعت میرایی در مدل GHM مقداری از مدل کلونین-ویت بیشتر است.

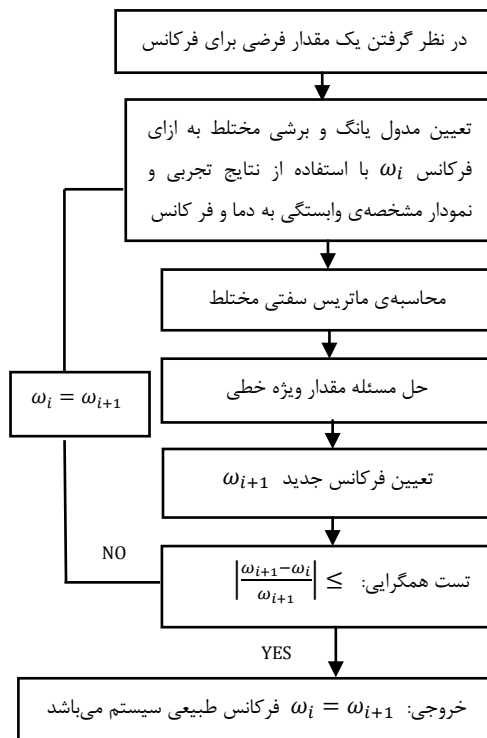
۵-۲- نتایج تحقیق حاضر

در این بخش، نتایج جدیدی برای ارتعاش آزاد، پاسخ دینامیکی پایا و پاسخ دینامیکی گذرای تیر ساندویچی مرکب با هسته ویسکوالاستیک، طبق مدل GHM با مشخصات مادی جدول ۱ و ابعاد هندسی $L/h=10$ و $h_c/h=0.94$ ارائه می‌شود.

۵-۲-۱- شکل مد ارتعاش تیر ساندویچی

در شکل ۸ و ۹، شکل مدهای ارتعاش طبیعی اول برای جابجایی طولی (u) و جانبی (w) رویه‌ی بالا و پایین تیر ساندویچی مرکب نشان داده شده است. شکل ۸ متناظر با فرکانس طبیعی اول مد اول و شکل ۹ متناظر با فرکانس دوم مد اول ارتعاش آزاد تیر می‌باشد.

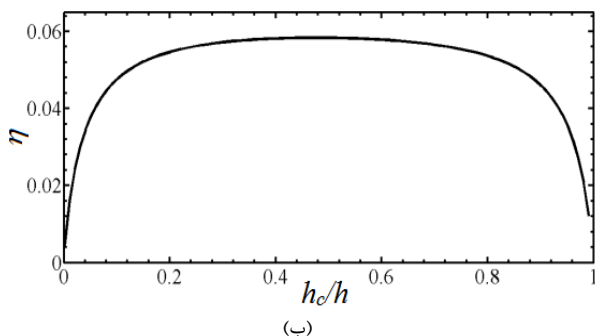
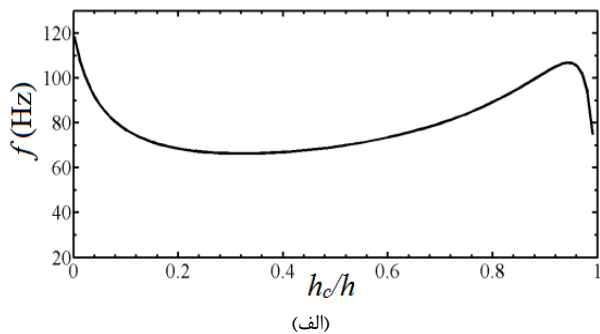
1. Damping ratio



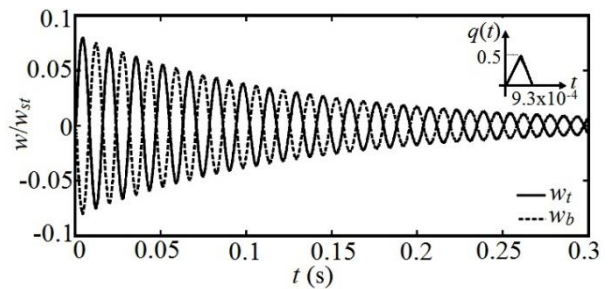
شکل ۱۱ دیاگرام تعیین فرکانس طبیعی در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد

جدول ۳ فرکانس طبیعی و ضرایب اتلاف متناظر برای تیر ساندویچی دو سر تکیه‌گاه ساده در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد با نسبت $L/h=10$

h_c/h	۰/۹۸	۰/۹۴	۰/۸۵	۰/۷۵	۰/۶۵	۰/۵۵
f (Hz)	۷۲/۵	۶۹/۹	۴۸/۳	۳۹/۹	۳۷/۲	۴۱/۷
η	۰/۱۹	۰/۲۶	۰/۳۱۸	۰/۳۲۶	۰/۳۲۷	۰/۳۱



شکل ۱۲ الف) تغییرات فرکانس طبیعی ب) تغییرات ضرایب اتلاف تیر ساندویچی بر حسب ضخامت هسته با ضریب لاغری $L/h=10$ در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد



شکل ۱۰ خیز دینامیکی نقطه میانی رویه بالا و پایین تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر جانی تحت بار ضربه با شرایط هندسی $h_c/h=0.94$ و $L/h=10$

۵-۲-۲- فرکانس طبیعی تیر و ضریب اتلاف متناظر

در این بخش، تحلیل فرکانسی تیر ساندویچی مرکب با استفاده از تئوری سه لایه ساندویچی ارائه می‌شود. در جداول ۲ و ۳، فرکانس طبیعی اول و ضریب اتلاف متناظر برای تیر ساندویچی با نسبت ضخامت‌های هسته متفاوت (h_c/h) به ترتیب در دمای ۳۰ و ۹۰ درجه سانتی‌گراد ارائه شده است. از آنجایی که در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد، مؤلفه‌های ماتریس سختی تیر وابسته به فرکانس هستند (شکل ۲)، لذا برای تعیین فرکانس طبیعی باید از یک فرایند تکرار مطابق شکل ۱۱، استفاده شود.

در شکل ۱۲ و ۱۳، تأثیر ضخامت هسته بر فرکانس طبیعی اول و ضریب اتلاف تیر ساندویچی به ترتیب در دمای ۳۰ و ۹۰ درجه سانتی‌گراد نشان داده شده است. مطابق شکل ۱۲ در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد، فرکانس طبیعی تیر با افزایش ضخامت تا حدود $h_c/h=0.4$ کاهش یافته، سپس تا حدود $h_c/h=0.95$ افزایش یافته و در انتها مجدداً کاهش می‌یابد. مشابه این رفتار در شکل ۱۳ برای فرکانس طبیعی تیر در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد نیز مشاهده می‌شود. بازه‌ی تغییرات فرکانس در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد تقریباً بین ۶۵ تا ۱۲۰ هرتز و در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد بین ۳۵ تا ۱۱۵ هرتز می‌باشد.

ضریب اتلاف تیر در دمای ۳۰ و ۹۰ درجه سانتی‌گراد، تا نسبت ضخامت $h_c/h=0.4$ افزایش یافته و تا نسبت $h_c/h=0.8$ تقریباً ثابت می‌ماند. سپس شروع به کاهش می‌کند. حداکثر ضریب اتلاف در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد ناچیز و تقریباً ۰/۰۶ است. در حالیکه، در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد حداکثر ضریب اتلاف برابر ۰/۳ است. علت این موضوع در شکل ۲-ب مشخص است.

۵-۲-۳- مزیت مدل GHM نسبت به مدل کلونین-ویت

همان‌گونه که در بخش‌های قبلی ذکر گردید، رفتار مواد ویسکوالاستیک وابسته به فرکانس و دما می‌باشد. به عبارت دیگر با تغییر فرکانس تحریک سازه خواص مادی از جمله مدول مختلط یانگ و مدول برشی مادی ویسکوالاستیک تغییر می‌کند. لذا در مواد ویسکوالاستیک، برای هر فرکانس تحریک باید مدول ذخیره و اتلاف همان فرکانس در نظر گرفته شود.

در مدل کلونین-ویت، خواص میرایی ماده ویسکوالاستیک توسط ثوابت ویسکوز نرمال و برشی به فرکانس طبیعی سازه مربوط می‌شوند [۶].

$$a_1^{\sigma} = \frac{\eta\sigma}{\omega}, a_1^{\tau} = \frac{\eta\tau}{\omega} \quad (33)$$

جدول ۲ فرکانس طبیعی و ضرایب اتلاف متناظر برای تیر ساندویچی دو سر تکیه‌گاه

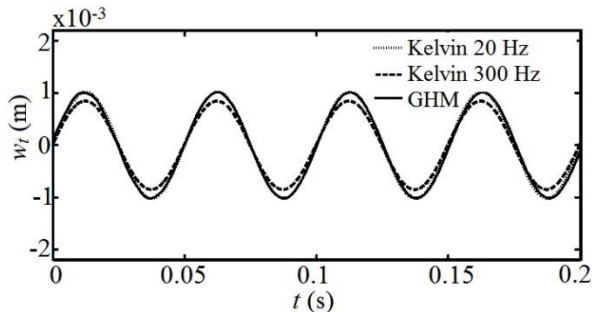
h_c/h	۰/۹۸	۰/۹۴	۰/۸۵	۰/۷۵	۰/۶۵	۰/۵۵
f (Hz)	۹۴/۹	۱۰۶/۷	۸۴/۰	۷۱/۲	۶۶/۴	۷۱/۴
η	۰/۲۱	۰/۳۸	۰/۵۵	۰/۵۸	۰/۵۷	۰/۵۲

جدول ۴ مشخصات مادی دینامیکی HEREX C70.130 در دمای ۹۰ درجه

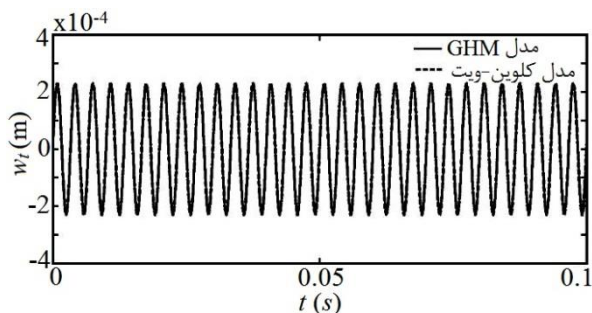
سانتی‌گراد				
f (Hz)	E' (MPa)	η_E	G' (MPa)	η_G
۲۰	۴۷/۲۵	۰/۱۷	۵/۰۶	۰/۳۵
۳۰۰	۶۰/۷۳	۰/۱۳۶	۶/۳	۰/۳۱۸

مدل کلون-ویت در ارائه‌ی خواص مادی در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد ناتوان است. زیرا طبق این مدل، ضرایب اتلاف نرمال و برشی طبق رابطه (۳۳) فقط برای یک فرکانس می‌توانند تنظیم شوند. لذا چنانچه فرکانس بارگذاری تغییر کند، پاسخ دینامیکی سازه با خواص مادی فرکانس قبلی به دست می‌آید.

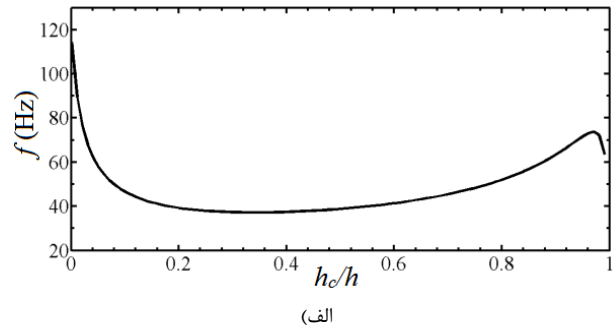
برای روشن شدن این موضوع، در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت بارگذاری هارمونیک پایای $q(x,t) = 10^4 \cos(2\pi ft)$ در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد، طبق دو مدل کلون-ویت و GHM ارائه شده است. نتایج در فرکانس تحریک $f=20$ Hz ترسیم شده است. در مدل کلون-ویت، خواص مادی یکبار برای فرکانس ۲۰ هرتز و بار دیگر برای فرکانس ۳۰۰ هرتز تنظیم شده است. پارامترهای ریز نوسانگر مدل GHM نیز برای بازه‌ی فرکانسی ۰ تا ۳۰۰ هرتز تنظیم شده است. مطابق شکل مشاهده می‌شود، پاسخ دینامیکی مدل کلون-ویت با ضرایب مادی فرکانس ۲۰ هرتز دامنه بزرگتری نسبت به پاسخ دینامیکی مدل کلون-ویت با ضرایب مادی فرکانس ۳۰۰ هرتز دارد. این موضوع نشان می‌دهد چنانچه در طی بارگذاری دینامیکی، فرکانس تحریک ماده ویسکوالاستیک تغییر یابد، پاسخ حاصل از مدل کلون-ویت صحیح نمی‌باشد. مطابق شکل، نتایج مدل GHM دقیقاً بر نمودار مدل کلون-ویت با ضرایب مادی فرکانس ۲۰ هرتز منطبق است.



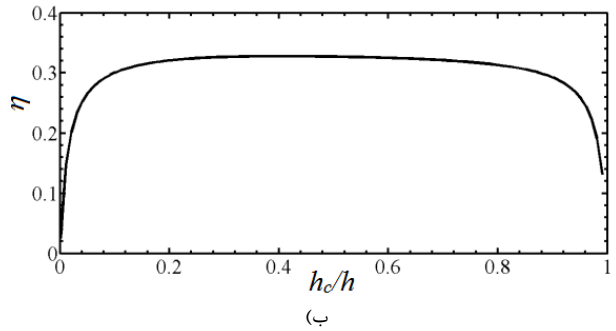
شکل ۱۴ خیز دینامیکی رویه بالایی تیر ساندویچی تحت بار هارمونیک پایای ۲۰ هرتز طبق مدل‌های کلون-ویت و GHM با شرایط $h_c/h=0.94$ و $L/h=10$



شکل ۱۵ خیز دینامیکی رویه بالایی تیر ساندویچی تحت بار هارمونیک پایای ۳۰۰ هرتز طبق مدل‌های کلون-ویت و GHM با شرایط $h_c/h=0.94$ و $L/h=10$



الف



ب

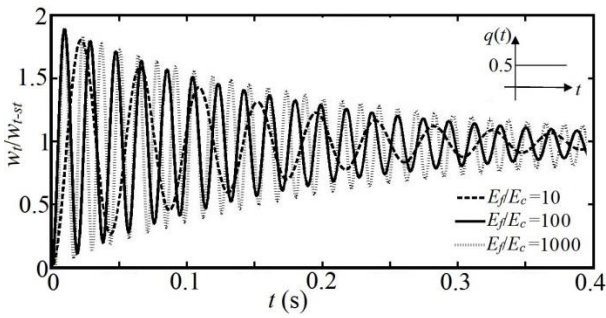
شکل ۱۳ الف) تغییرات فرکانس طبیعی ب) تغییرات ضریب اتلاف تیر ساندویچی برحسب ضخامت هسته با ضریب لاغری $L/h=10$ در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد

η_n ، ضریب اتلاف نرمال^۱ ماده ویسکوالاستیک و η_s ضریب اتلاف برشی^۲ می‌باشد. ω فرکانس طبیعی سازه می‌باشد که تحریک شده است. در مدل GHM، خواص میرایی ماده ویسکوالاستیک توسط پارامترهای ریز نوسانگر به فرکانس تحریک مربوط می‌شود. تعداد پارامترهای مورد نیاز در مدل GHM برای ایجاد این ارتباط، بستگی به محدوده فرکانس سازه‌ای دارد. هر چه بازه فرکانسی بزرگتر باشد، تعداد پارامترهای GHM باید بیشتر شود تا از دقت مدل کاسته نشود. در مدل‌های تحلیلی، حداکثر از سه عبارت ($k=3$) در رابطه (۱۸) استفاده می‌شود. اما در مدل‌های المان محدود، تعداد این ترم‌ها بسته به تعداد درجه آزادی مدل افزایش می‌یابد.

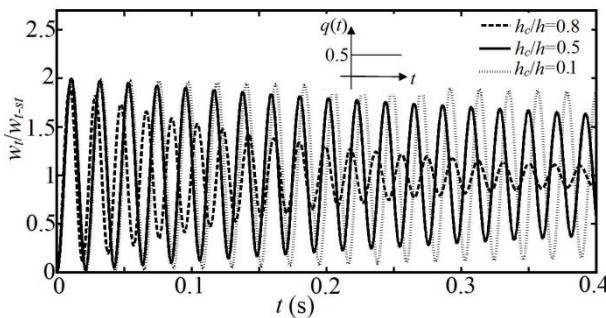
از معایب مدل کلون-ویت آن است که چنانچه بارگذاری دینامیکی بگونه‌ای باشد که فرکانس تحریک سازه در طی پاسخ گذرای آن تغییر یابد، امکان تغییر ضرایب اتلاف نرمال و برشی در حین حل وجود ندارد. در مدل کلون-ویت، این ضرایب معمولاً یک بار برای فرکانس طبیعی غالب سازه تنظیم می‌شوند. از مزایای مدل GHM نسبت به مدل کلون-ویت آن است که با تغییر فرکانس پاسخ سازه، ضرایب اتلاف نرمال و برشی به صورت خودکار در حین حل تغییر می‌یابند. زیرا اساساً، این ضرایب برای یک بازه فرکانسی تنظیم شده‌اند.

همانطور که در شکل ۲ نشان داده شد، در دمای ۳۰ درجه سانتی‌گراد و در بازه فرکانسی صفر تا ۳۵۰ هرتز، مدول‌های ذخیره و ضرایب اتلاف ماده‌ی C70.130 ثابت است. اما در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد، مدول مختلط و برشی ماده ویسکوالاستیک وابسته به فرکانس بارگذاری است. شدت تغییرات این خواص در فرکانس‌های پایین بیشتر از فرکانس‌های بالا می‌باشد. در جدول ۴، مدول ذخیره‌ی یانگ، برشی و ضرایب اتلاف متناظر آنها در فرکانس ۲۰ و ۳۰۰ هرتز به ازای دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد ارائه شده است.

1. Normal loss factor
2. Shear loss factor



شکل ۱۷ تأثیر سفتی هسته بر روی نرخ میرایی پاسخ دینامیکی تیر تحت بار پله با شرایط $h_c/h=0.8$ و $\rho_c/\rho_f=0.1$



شکل ۱۸ تأثیر ضخامت هسته بر روی نرخ میرایی پاسخ دینامیکی تیر تحت بار پله با شرایط $E_f/E_c=100$ و $\rho_c/\rho_f=0.1$

یعنی هنگامی که نسبت مدول یانگ رویه‌ها به مدول یانگ هسته کم شود، کاهش لگاریتمی تیر افزایش می‌یابد. البته این افزایش نرخ میرایی چشم‌گیر نمی‌باشد. بگونه‌ای که با افزایش ۱۰ برابری نسبت مدول یانگ از مقدار ۱۰ به مقدار ۱۰۰، نرخ میرایی ۲/۱ برابر و با افزایش ۱۰۰ برابری نسبت مدول یانگ از مقدار ۱۰ به مقدار ۱۰۰۰، نرخ میرایی به میزان ۳/۲ برابر افزایش می‌یابد. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، با کاهش نسبت مدول یانگ رویه‌ها به هسته، سفتی کل تیر کاهش یافته و در نتیجه فرکانس ارتعاش تیر نیز کم می‌شود. فرکانس پاسخ‌های دینامیکی تیر به ازای $E_f/E_c=10$ برابر ۲۳ هرتز، به ازای $E_f/E_c=100$ برابر ۵۳ هرتز و به ازای $E_f/E_c=1000$ برابر ۷۳ هرتز می‌باشد. در شکل ۱۸، با ثابت در نظر گرفتن ضخامت کل تیر و تغییر ضخامت هسته‌ی ویسکوالاستیک، به بررسی تأثیر ضخامت هسته بر فرکانس و نرخ میرایی تیر پرداخته شده است. مطابق شکل، کاهش لگاریتمی تیر به ازای $h_c/h=0.1$ برابر ۰/۰۰۴، به ازای $h_c/h=0.5$ برابر ۰/۰۱۲ و به ازای $h_c/h=0.8$ برابر ۰/۰۴۸ می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت هسته نرخ میرایی تیر به شدت افزایش می‌یابد. به‌گونه‌ای که با افزایش ۵ برابری نسبت ضخامت از مقدار ۰/۱ به مقدار ۰/۵، نرخ میرایی ۳ برابر و با افزایش ۸ برابری نسبت ضخامت از مقدار ۰/۱ به ۰/۸، نرخ میرایی به میزان ۱۲ برابر افزایش می‌یابد. این بدان معنی است که برای افزایش نرخ میرایی دامنه ارتعاش دینامیکی تیر، افزایش ضخامت لایه ویسکوالاستیک بسیار موثرتر از افزایش نسبت مدول الاستیک مختلط هسته است.

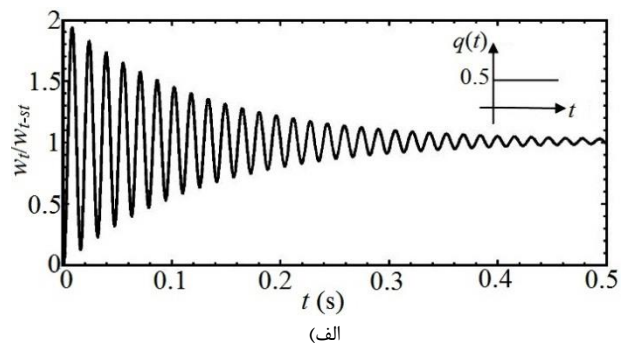
با افزایش ضخامت هسته، سفتی خمشی تیر و جرم تیر هر دو کاهش می‌یابد. ولی میزان کاهش جرم تیر بر میزان کاهش سفتی تیر غلبه کرده و باعث افزایش فرکانس می‌شود (شکل ۱۳-الف). فرکانس پاسخ دینامیکی تیر

در شکل ۱۵، پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت بارگذاری هارمونیک پایا با فرکانس ۳۰۰ هرتز طبق دو مدل کلوین-ویت و GHM ترسیم شده است. در مدل کلوین-ویت خواص مادی برای فرکانس ۳۰۰ هرتز تنظیم شده است. اما پارامترهای ریز نوسانگر مدل GHM همان ضرایب بکار گرفته شده در شکل ۱۴ هستند. مشاهده می‌شود با آنکه خواص مادی در مدل کلوین-ویت نسبت به شکل ۱۴ تغییر یافته است، مدل GHM به درستی توانسته ضرایب مادی خود را در فرکانس ۳۰۰ هرتز تطبیق دهد و نتایج حاصل از هر دو مدل کاملاً بر هم منطبق هستند.

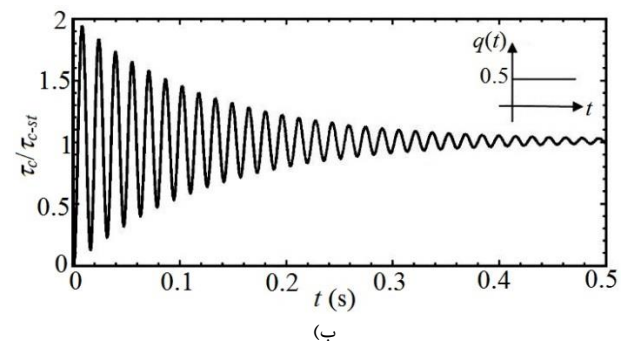
۵-۲-۴- بررسی پارامتری پاسخ دینامیکی تحت بار پله

در شکل ۱۶، خیز دینامیکی و تنش برشی هسته‌ی ویسکوالاستیک تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری پله طبق مدل GHM نشان شده است. نسبت طول به ضخامت کل تیر (L/h) برابر ۱۰ و نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل تیر (h_c/h) برابر ۰/۹۴ می‌باشد. کاهش لگاریتمی دامنه ارتعاش خیز دینامیکی و تنش برشی تیر یکسان و برابر ۰/۰۴ می‌باشد. ذکر این نکته ضروری است که برخی از مدل‌های کلاسیک (مثل مدل ماکسول) در مدل کردن دینامیکی جابجایی‌ها موفق، ولی در مدل کردن دینامیکی تنش‌ها ناموفق عمل می‌کنند [۶]. مشاهده می‌شود مدل GHM در مدل کردن دینامیکی جابجایی‌ها و تنش‌ها بخوبی عمل می‌کند.

در شکل‌های ۱۷، ۱۸ و ۱۹، به بررسی نحوه تغییرات فرکانس و کاهش لگاریتمی تیر به ازای تغییر نسبت مدول یانگ رویه‌ها به هسته، نسبت ضخامت هسته به کل تیر و نسبت چگالی هسته به چگالی رویه‌ها طبق مدل GHM پرداخته می‌شود. در شکل ۱۷، با ثابت نگه‌داشتن مدول یانگ رویه‌ها و تغییر مدول هسته، اثر مدول الاستیک هسته بر روی استهلاک ارتعاش خیز دینامیکی تیر ساندویچی بررسی شده است.



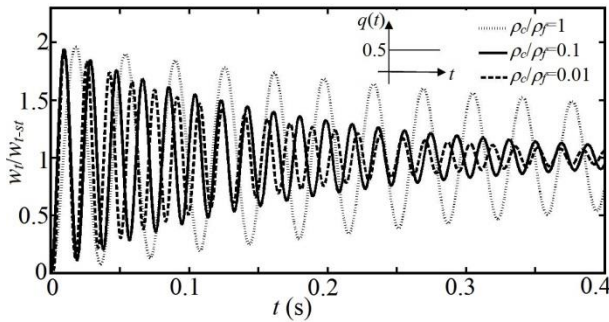
(الف)



(ب)

شکل ۱۶ خیز دینامیکی (ب) تنش برشی هسته‌ی تیر ساندویچی با دو سر تکیه‌گاه ساده تحت بارگذاری پله طبق مدل GHM

کاهش لگاریتمی دامنه ارتعاش تیر به ازای $E_f/E_c=10$ برابر ۰/۰۹۶، به ازای $E_f/E_c=100$ برابر ۰/۰۴۶ و به ازای $E_f/E_c=1000$ برابر ۰/۰۳۰ می‌باشد.



شکل ۱۹ تأثیر چگالی هسته بر روی نرخ میرایی پاسخ دینامیکی تیر تحت بار پله با شرایط $E_f/E_c=100$ و $h_c/h=0.8$

این در حالی است که با افزایش ۸ برابر برابری نسبت ضخامت از مقدار ۰/۱ به ۰/۸، نرخ میرایی به میزان ۱۲ برابر افزایش می‌یابد.

۷- پیوست‌ها

ممان اینرسی رویه‌های تیر در روابط (۱۲) و (۱۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_i = b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i^2 dz_i \quad (الف-۱)$$

که b عرض تیر ساندویچی می‌باشد. منته‌های تنش رویه‌های تیر در روابط 10-13 به‌صورت رابطه (الف-۲) تعریف می‌شود.

$$N_{xx}^i(x, t) = b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{xx}^i dz_i$$

$$M_{xx}^i(x, t) = b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} z_i \sigma_{xx}^i dz_i \quad (الف-۲)$$

منتجه‌های تنش هسته‌ی ویسکوالاستیک تیر در روابط (۱۰-۱۳) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N^c(x, t) = b \int_0^{h_c} \tau_{xz}^c dz$$

$$M^c(x, t) = b \int_0^{h_c} z \tau_{xz}^c dz$$

$$S^c(x, t) = b \int_0^{h_c} \sigma_{zz}^c dz \quad (الف-۳)$$

زیر ماتریس جرم در رابطه (۲۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[M_z] = \begin{bmatrix} [M_z]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [M_z]_n \end{bmatrix}$$

$$[M_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 \frac{1}{(\hat{\omega}_i^1)^2} [\bar{K}]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k \frac{1}{(\hat{\omega}_i^k)^2} [\bar{K}]_i \end{bmatrix} \quad (الف-۴)$$

زیر ماتریس میرایی در رابطه (۲۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[D_z] = \begin{bmatrix} [D_z]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [D_z]_n \end{bmatrix} \quad (الف-۵)$$

به ازای $h_c/h=0.1$ برابر $46/3$ هرتز، به ازای $h_c/h=0.5$ برابر 47 هرتز و به ازای $h_c/h=0.8$ برابر 53 هرتز می‌باشد.

در شکل ۱۹، با ثابت در نظر گرفتن چگالی رویه‌ها و تغییر چگالی هسته‌ی ویسکوالاستیک، به بررسی تأثیر چگالی هسته بر فرکانس و نرخ میرایی تیر پرداخته شده است. مطابق شکل، کاهش لگاریتمی تیر به ازای $\rho_c/\rho_f = 0.01$ برابر 0.50 ، به ازای $\rho_c/\rho_f = 0.1$ برابر 0.46 و به ازای $\rho_c/\rho_f = 1$ برابر 0.30 می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی هسته، نرخ میرایی تیر کاهش می‌یابد. با افزایش ۱۰ برابری نسبت چگالی از مقدار 0.1 به مقدار 0.8 ، نرخ میرایی $7/8$ و با افزایش ۱۰۰ برابری نسبت ضخامت از مقدار 0.1 به مقدار 1 ، نرخ میرایی به میزان $7/66$ افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش چگالی هسته، جرم تیر افزایش یافته و در نتیجه فرکانس ارتعاش تیر کاهش می‌یابد. به اینصورت که فرکانس پاسخ دینامیکی تیر به ازای $\rho_c/\rho_f = 0.01$ برابر 61 هرتز، به ازای 0.1 برابر 53 هرتز و به ازای $\rho_c/\rho_f = 1$ برابر 28 هرتز می‌باشد.

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، به بررسی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی با هسته‌ی انعطاف‌پذیر جانبی و ویسکوالاستیک پرداخته شده است. این تحلیل با استفاده از تئوری سه لایه ساندویچی صورت گرفته است که در آن برای رویه‌های از تئوری کلاسیک و برای هسته از میدان جابجایی خطی استفاده شده است. وجود انعطاف‌پذیری هسته باعث اختلاف میان خیز رویه‌های بالا و پایین تیر می‌شود. برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک وابسته به فرکانس هسته از مدل GHM بهره گرفته شده است.

در مواد ویسکوالاستیک، مدول ذخیره و اتلاف تابعی از دما و فرکانس می‌باشند. نشان داده شد که مدل کلونین-ویت در ارائه‌ی وابستگی خواص مواد ویسکوالاستیک به فرکانس بارگذاری در پاسخ دینامیکی ناتوان است. در مدل GHM، با اضافه کردن یک مختصات کمکی، زمینه‌ای فراهم می‌شود که پاسخ دینامیکی تیر با در نظر گرفتن وابستگی خواص مادی به فرکانس بارگذاری بررسی شوند. در واقع، پارامترهای ریز نوسانگر مدل GHM خاصیت وابستگی به فرکانس را در بردارند و با تغییر فرکانس تحریک‌شده‌ی تیر، این پارامترها تغییر خواص مادی ماده‌ی ویسکوالاستیک را در نظر می‌گیرند.

در این تحقیق، نحوه‌ی تغییرات فرکانس طبیعی و ضریب اتلاف متناظر تیر ساندویچی مرکب به ازای ضخامت هسته‌ی متفاوت از جنس HEREX C70.130 در دمای ۳۰ و ۹۰ درجه سانتی‌گراد ارائه شده است. مقادیر فرکانس طبیعی در دمای ۳۰ درجه بیشتر از ۹۰ درجه سانتی‌گراد و ضرایب اتلاف در دمای ۳۰ درجه کمتر از دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد می‌باشد. در ضمن در دمای ۹۰ درجه سانتی‌گراد، وابستگی مؤلفه‌های ماتریس سختی تیر به فرکانس چشم‌گیر است.

بررسی‌های پارامتری صورت گرفته در تحقیق حاضر نشان داد که تغییرات مقدار ضخامت، چگالی و مدول یانگ هسته ویسکوالاستیک در نرخ میرایی ارتعاشات تیر ساندویچی مرکب تأثیرگذار است. البته، افزایش ضخامت هسته ویسکوالاستیک بیش از تأثیر افزایش چگالی و مدول یانگ، بر افزایش نرخ میرایی موثر است.

بدین صورت که با افزایش ۱۰۰ برابری نسبت مدول یانگ از مقدار ۱۰ به مقدار ۱۰۰۰، نرخ میرایی تنها به میزان $3/2$ برابر افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش ۱۰۰ برابری نسبت چگالی از مقدار 0.1 به مقدار 1 ، نرخ میرایی تنها به میزان $1/7$ برابر افزایش می‌یابد.

[4] Meunier, M. and Shenoj, R.A., "Forced Response of FRP Sandwich Panels with Viscoelastic Materials", Journal of sound and vibration, Vol. 263, No. 1, pp. 131-151, 2003.

[5] Barbosa, F.S. and Battista, R.C., "A Computational Modeling Of Sandwich Viscoelastic Dampers", Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 2004.

[6] Hamed, E. and Rabinovitch, O., "Modeling and Dynamic of Sandwich Beams with a Viscoelastic Soft Core", AIAA Journal, Vol. 47, No. 9, pp. 2194-2211, 2009.

[7] Marynowski, K., "Dynamic Analysis of an Axially Moving Sandwich Beam with Viscoelastic Core", Composite structures, Vol. 94, No. 9, pp. 2931-2936, 2012.

[8] Mahmoudkhani, S. Haddadpour, H. and Mavazi, H.M., "Free and Forced Random Vibration Analysis of Sandwich Plates with Thick Viscoelastic Cores", Journal of vibration and Controll, Vol. 19, No. 14, pp. 2223-2240, 2013.

[9] Won, S.G. Bae, S.H. and Cho, J.R., "Three-Layered Damped Beam Element for Forced Vibration Analysis of Symmetric Sandwich Structures with a Viscoelastic Core", Journal of Finite Element in Analysis and Design, Vol. 68, pp. 39-51, 2013.

[10] Filho, W.F. and Barbosa, F.S., "Comparisons of Numerical and Experimental Evaluation of Viscoelastic Sandwich Beams", Journal of Mechanical Computational, Vol. 33, pp. 1543-1555, 2014.

[11] Zghal, S. and Bouazizi, M.L., "Model Reduction Method for Viscoelastic Sandwich Structures in Frequency and Time Domains", Journal of Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 93, pp. 12-29, 2015.

[12] Lakes, R., "Viscoelastic Material", Cambridge University Press, University Of Wisconsin-Madison, 2009.

[13] Severino, P.C. M. and Guillermo, J. C., "Computational Viscoelasticity", Computational Mechanics, Federal university of Alagoas, Brazil, 2012.

[14] Mctavish, D.J. and Hughes, P.C., "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structure", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, No. 109, pp. 103-110, 1993.

$$[D_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 \frac{2\xi_i^1}{(\hat{\omega}_i^1)^2} [\bar{K}]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k \frac{2\xi_i^k}{(\hat{\omega}_i^k)^2} [\bar{K}]_i \end{bmatrix}$$

زیر ماتریس سفتی در رابطه (۲۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[K_z] = \begin{bmatrix} [K_z]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & [K_z]_n \end{bmatrix}$$

$$[K_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 [\bar{K}]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k [\bar{K}]_i \end{bmatrix}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K]_i = \sum_{i=1}^n \hat{G}_i^0 [\bar{K}]_i$$

$$[K_q] = [K] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i^j [K]_i$$

$$[K_{qz}] = [-\hat{\alpha}_1^1 [\bar{K}]_1 \dots -\hat{\alpha}_n^k [\bar{K}]_n], [K_{qz}] = [K_{qz}]^T \quad (\text{الف-۶})$$

ماتریس ویسکوالاستیک جرم در رابطه (۲۷) به صورت (الف-۷) تعریف می‌شود.

$$[M_v] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M_z] \end{bmatrix}$$

$$[M_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 \frac{1}{(\hat{\omega}_i^1)^2} [\wedge]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k \frac{1}{(\hat{\omega}_i^k)^2} [\wedge]_i \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۷})$$

ماتریس ویسکوالاستیک میرایی در رابطه (۲۷) به صورت زیر است.

$$[D_v] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [D_z] \end{bmatrix}$$

$$[D_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 \frac{2\xi_i^1}{(\hat{\omega}_i^1)^2} [\wedge]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k \frac{2\xi_i^k}{(\hat{\omega}_i^k)^2} [\wedge]_i \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۸})$$

ماتریس ویسکوالاستیک سفتی در رابطه (۲۷) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[K_v] = \begin{bmatrix} [K_q] & [K_{qz}] \\ [K_{qz}]^T & [K_z] \end{bmatrix}$$

$$[K_q] = [K] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i^j [K]_i$$

$$[K_{qz}] = [-\hat{\alpha}_1^1 [R]_1 \dots -\hat{\alpha}_n^k [R]_n]$$

$$[K_{zq}] = [K_{qz}]^T$$

$$[K_z]_i = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_i^1 [\wedge]_i & [0] & \dots & [0] \\ [0] & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & [0] \\ [0] & \dots & [0] & \hat{\alpha}_i^k [\wedge]_i \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۹})$$

۸- مراجع

[1] Reddy, J.N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis", CRC press, 2004.

[2] Trindade, M.A. and Benjeddou, A., "Modeling of Frequency-Dependent Viscoelastic Materials for Active-Passive Vibration Damping", Journal of vibration and acoustics, Vol. 122, No. 2, pp. 169-174, 2000.

[3] Meunier, M. and Shenoj, R.A., "Dynamic Analysis of Composite Sandwich Plates with Damping Modelled Using High-Order Shear Deformation Theory", Composite structure, Vol. 59, No. 2-3, pp. 243-254, 2001.