



تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی مشبک

مهدی زارعی^۱، غلامحسین رحیمی^{۲*}

۱- دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۱۱-۱۴۱۱۵، rahimi_gh@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۹/۲

پذیرش: ۹۵/۱/۱۴

کلیدواژگان:

ارتعاشات آزاد

مخروط مشبک

روش معادل سازی

ژئودزیک

چکیده

سازه‌های مخروطی کامپوزیتی به‌عنوان اجزای تشکیل دهنده سازه‌ای در صنایع هوافضا و دریایی و مهندسی عمران استفاده می‌شوند. در این تحقیق ارتعاشات آزاد مخروط کامپوزیتی مشبک با تکیه‌گاه ساده مطالعه شده است. تاکنون مطالعه روی آنالیز ارتعاشی این گونه از سازه‌ها انجام نشده است. از روش تحلیلی- تقریبی معادل‌سازی برای معادل کردن سختی تقویت کننده‌ها استفاده شده که در آن تقویت کننده‌ها به‌صورت تیر در نظر گرفته شدند. این تقویت کننده‌ها قادر به تحمل نیروهای برشی و ممان خمشی نسبت به بارمخوری وارده می‌باشند. مسیر ژئودزیک برای تقویت کننده‌ها انتخاب و معادلات مربوط به آنالیز ارتعاشی بر مبنای تئوری دائل استخراج شده‌اند. از روش ریتز برای حل معادلات و استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده شد. یک مدل سه بعدی در نرم افزار آباکوس تهیه و نتایج حاصل از تحلیل با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس مقایسه شد. مقایسه‌ها توافق خوبی را نشان دادند. اثر تغییر پارامترهای هندسی و تغییر در زاویه بین تقویت کننده‌ها روی فرکانس ارتعاشات بررسی شد. نتایج حاضر جدید بوده و می‌تواند به عنوان مبنایی برای مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد.

Free vibration analysis of grid stiffened composite conical shells

Mehdi Zarei, Gholam Hossien Rahimi*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, rahimi_gh@modares.ac.ir

Keywords

Free vibrations
 Grid stiffened
 Smeared method
 Geodesic

Abstract

Laminated composite conical shells are used as components of aerospace, marine industries and civil engineering structures. In this research free vibration of grid stiffened composite conical shell with simply support boundary condition is studied. No study has yet been done on vibration analysis of these structures. Smeared method is employed to superimpose the stiffness contribution of the stiffeners with those of shell in order to obtain the equivalent stiffness parameters of the whole structure. The stiffeners are considered as a beam and support shear loads and bending moments in addition to the axial loads. Geodesic path is applied to the stiffeners. Equations were derived using classical shell theory of Donnell type and were solved using energy functional with the Rayleigh-Ritz method. A 3D finite element model was built using ABAQUS software. Results were compared and validated for grid stiffened structure with ABAQUS software. Comparisons and validations revealed good agreements. The effects of shell geometrical parameters and variations in the cross stiffeners angle on the natural frequencies were investigated. Results given are novel and can be used as a benchmark for further studies.

۱- مقدمه

مطالعه قرار دادند آنان از روش معادل سازی برای دست آوردن ماتریس سختی استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که روش معادل سازی در مقایسه با روش های دیگر روش موثرتر و دقیق تری می‌باشد [۱]. همت نژاد و همکاران ارتعاشات آزاد استوانه تقویت شده کامپوزیتی را بر مبنای تئوری تنش برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرار دادند. و به این نتیجه رسیدند که فرکانس ارتعاشات سازه تقویت نشده بیشتر است و ضخامت اثر مهمی روی فرکانس طبیعی دارد. و برای یک ضخامت مشخص حضور تقویت کننده اثر چندانی روی فرکانس ندارد [۲]. رحیمی و همکاران رفتار ارتعاشی استوانه تقویت شده را مورد بررسی قرار دادند و برای شرایط تکیه گاهی مختلف

سازه‌های مشبک به لحاظ ظاهری مشابه سازه‌های شبکه بندی شده با تیرها یا قاب‌ها می‌باشند. سازه های مشبک کامپوزیتی به طور همزمان قابلیت های سازه های کامپوزیتی ساده و سازه‌های مشبک را دارند پوسته‌های مشبک کامپوزیتی پوسته‌های مشبک مخروطی به دلیل استفاده در صنایع مختلف یکی از سازه‌های کاربردی و اقتصادی در رشته های مختلف مهندسی محسوب می‌شوند. آن چه که باعث استفاده گسترده این نوع سازه‌ها شده نسبت استحکام به وزن بالا و قابلیت باربری در وزن محدود می‌باشد. جم و همکاران آنالیز ارتعاشی استوانه تقویت شده را برای تکیه گاه آزاد مورد

Please cite this article using:

Zarei, M. and Rahimi, G. H., "Free vibration analysis of grid stiffened composite conical shells", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 4, No. 1, pp. 1-8, 2017.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ll} \\ \epsilon_{tt} \\ \epsilon_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که ϵ_{ll} و ϵ_{tt} و ϵ_{lt} به ترتیب کرنش در راستای تقویت‌کننده، کرنش عمود بر محور تقویت‌کننده و کرنش برشی هستند و $c = \cos \theta$ و $s = \sin \theta$ زاویه تقویت‌کننده نسبت به محور استوانه است

۳- تحلیل نیروها و ممان‌ها در صفحه تقویت‌کننده

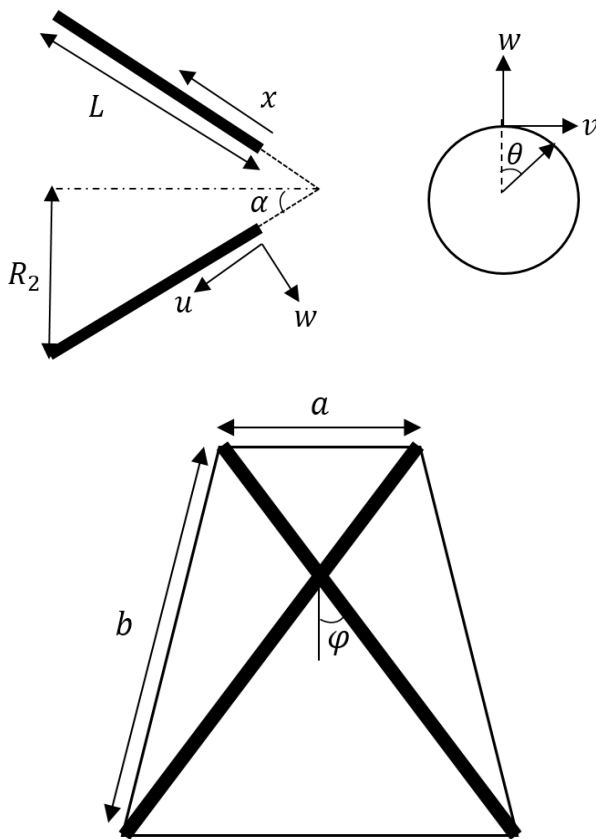
شکل ۲ نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه ۲ نیروی محوری تقویت‌کننده‌ها بدست می‌آید. در این رابطه A و E_l به ترتیب کرنش‌های محوری، سطح مقطع و مدول الاستیسیته محوری هر تقویت‌کننده هستند.

$$\begin{aligned} F_1 &= A_l E_l \epsilon_{l1} = A_l E_l (c^2 \epsilon_{xx} + s^2 \epsilon_{\theta\theta} - sc \epsilon_{x\theta}) \\ F_2 &= A_l E_l \epsilon_{l2} = A_l E_l (c^2 \epsilon_{xx} + s^2 \epsilon_{\theta\theta} + sc \epsilon_{x\theta}) \end{aligned} \quad (3)$$

نیروی برشی با جمع اجزای نیرو در یک طرف سلول به دست می‌آید. با محاسبه نیروهای محوری و برشی جمع کردن نیروهای در یک سلول واحد در راستای θ و x رابطه (۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F_x &= (F_1 + F_2)c \\ F_\theta &= (F_1 + F_2)s \\ F_{x\theta} &= (F_1 - F_2)c \end{aligned} \quad (4)$$

با جایگذاری معادلات ۱ در معادلات ۳ و استفاده از معادلات ۴ و با تقسیم نیروهای به دست آمده بر واحد طول هریک از لبه‌ها نیروها بر واحد طول سلول به دست می‌آیند.



شکل ۱ سلول واحد و سیستم مختصات برای پوسته مخروطی تقویت شده

فرکانس طبیعی سازه به دست آوردند و به این نتیجه رسیدند که زاویه ریب‌ها در فرکانس‌های بالاتر تاثیر بسزایی دارد [۳]. همت نژاد و همکاران آنالیز تحلیلی، تجربی و عددی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه تقویت شده را مورد مطالعه قرار دادند و تغییرا ضخامت و شرایط تکیه گاهی را مورد بررسی قرار دادند [۴]. بلوم و همکاران با توجه به تعریف مسیرهای قرار گیری الیاف پوسته مخروطی را بر مبنای آنالیز فرکانسی بهینه سازی کردند [۵].

قاسمی و همکاران پارامترهای موثر بر پوسته مخروطی مشبک را بر مبنای تئوری تنش برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند [۶]. ساموئل کیدانه و همکاران در با استفاده از روش معادل سازی بار کمانش استوانه مشبک را به دست آوردند و نتایج حاصل از تحلیل را با نتایج تجربی مقایسه کردند [۷]. طالبی توتی و همکاران ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی مشبک با ریب‌های افقی و عمود با استفاده از روش مجزا انجام دادند [۸،۹]. در رابطه با تقویت پوسته‌های استوانه ای مقالات زیادی وجود دارد [۱۰-۱۲]. یزدانی و رحیمی بررسی تجربی روی استوانه‌های کامپوزیتی تقویت شده انجام دادند [۱۳]. آنها همچنین تاثیر تعداد ریب و نوع شبکه روی کمانش سازه‌های استوانه‌ای مشبک مورد بررسی قرار دادند [۱۴،۱۵]. رحیمی و همکاران همچنین اثر تغییر سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها را روی کمانش استوانه مشبک انجام دادند [۱۶]. نادری و همکاران اثر زاویه الیاف را بر روی کمانش پوسته مخروطی بررسی کردند [۱۷]. آنها همچنین کمانش پوسته مخروطی تقویت شده [۱۸] و همچنین آنالیز کمانش پوسته مخروطی تقویت شده با نانو کلی را انجام دادند [۱۹]. در زمینه تحلیل ارتعاشی استوانه‌های مشبک کارهای زیادی انجام شده و در زمینه تحلیل ارتعاشی مخروط مشبک، آنالیز ارتعاشی تنها با تقویت‌کننده‌های عمودی و افقی انجام پذیرفته است. در زمینه تقویت‌کننده‌های با ریب‌های ضربدری و مایل تاکنون روشی ارائه نشده است. در این مقاله رفتار ارتعاشی پوسته‌های مخروطی تقویت شده با باریک‌های مایل و شرایط تکیه گاهی ساده مورد بررسی قرار گرفته است و اثر پارامترهای مختلف هندسی و زاویه الیاف و همچنین زاویه بین تقویت‌کننده‌ها مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲- معادل سازی سفتی

برای به دست آوردن مدل تحلیلی یک سلول واحد را مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم و در عمل کل سازه مشبک از تکرار این سلول به دست می‌آید. با فرض ناچیز بودن کرنش‌های عمود بر راستای طولی و عمود بر راستای طولی تقویت‌کننده‌ها در هر نقطه‌ای تنها کرنش سطح بالایی تقویت‌کننده‌ها در هر نقطه‌ای از رابطه (۱) محاسبه می‌شود [۲۰].

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{xx}^0 + \kappa_x \frac{t}{2} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \epsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_\theta \frac{t}{2} \\ \epsilon_{x\theta} &= \epsilon_{x\theta}^0 + \kappa_{x\theta} \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

که ϵ_{xx}^0 و $\epsilon_{\theta\theta}^0$ و $\epsilon_{x\theta}^0$ کرنش‌های صفحه میانی می‌باشند. این کرنش‌ها همان کرنش‌های متوسط تقویت‌کننده‌ها می‌باشند از آنجا که کرنش‌های محاسبه شده بالا از رابطه بالا، کرنش‌های سطح بالایی تقویت‌کننده‌ها در دستگاه هندسی می‌باشد بنابراین بایستی آنها را به کرنش‌هایی در دستگاه موازی با راستای طولی تقویت‌کننده‌ها تبدیل نمود. با تبدیل انتقال رابطه (۲) این امر میسر می‌شود [۲۱].

$$\begin{bmatrix} N^{st} \\ M^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{st} & B^{st} \\ B^{st} & D^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (10)$$

نهایتاً ماتریس سفتی تقویت کننده‌ها به صورت رابطه (۱۱) بدست می‌آید.

$$[A^{st}] = 2AE_l \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$[B^{st}] = AE_l t \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$[D^{st}] = \frac{AE_l t^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (11)$$

و سفتی‌های پوسته از رابطه (۱۲) به دست می‌آید.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (12)$$

منتجه نیروها و ممانهای پوسته از رابطه (۱۳) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} N^{sh} \\ M^{sh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{sh} & B^{sh} \\ B^{sh} & D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (13)$$

قانون ترکیب حجمی نیروها و ممان به میزان کسر حجمی به صورت رابطه (۱۴) است.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st} A^{st} + V_{sh} A^{sh} & V_{st} B^{st} + V_{sh} B^{sh} \\ V_{st} B^{st} + V_{sh} B^{sh} & V_{st} D^{st} + V_{sh} D^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (14)$$

۴- آنالیز ارتعاشی با استفاده از روش ریلی ریتز

پوسته مخروطی مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود که در آن x راستای یال مخروط و θ در راستای محیط و z در راستای ضخامت پوسته می‌باشد. با توجه به شکل ۱ روابط کرنش و جابه‌جایی براساس تئوری دانتل [۲۱] به صورت رابطه (۱۵) است.

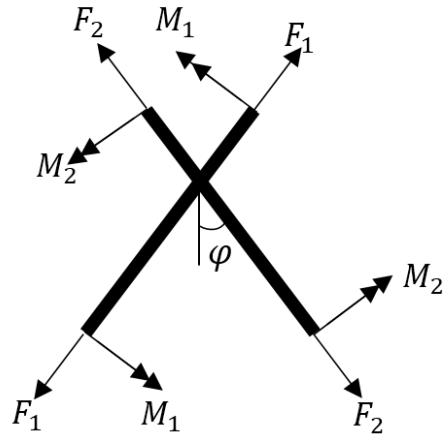
$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{u \sin \alpha - w \cos \alpha}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v \sin \alpha}{R} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_\theta = -\frac{\sin \alpha}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \kappa_{x\theta} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (15)$$

u و v و w جابه‌جایی طولی محیطی و جانبی پوسته مخروطی است. از روش ریتز برای محاسبه فرکانس ارتعاشات آزاد استفاده شده است. مزیت این روش آن است که توابع حدس زده کافی است که شرایط مرزی را ارضا نماید



شکل ۲ نمودار آزاد نیروها و ممان‌ها برای یک سلول واحد

$$N_x = \frac{AE_l}{a} \left(2c^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2c^3 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_{xx}^0 + 2cs^2 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$N_\theta = \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2s^3 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$N_{x\theta} = \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \quad (5)$$

به همین ترتیب برای تعادل ممان‌ها می‌توان نوشت

$$M_x = (M_1 + M_2)C$$

$$M_\theta = (M_1 + M_2)S$$

$$M_{x\theta} = (M_1 - M_2)C \quad (6)$$

نیروهای به دست آمده برای تقویت کننده‌ها بایستی به صفحه میانی پوسته منتقل شوند به همین جهت به دلیل فاصله نقطه اثر نیرو ممان‌هایی تولید می‌شوند که در شکل ۲ نشان داده شده است. با ضرب نیروها در فاصله انتقال نیرو به صفحه میانی پوسته، مقادیر ممان‌ها به دست می‌آید.

$$M_i = F_i \frac{t}{2} \quad (7)$$

$$M_x = \frac{AE_l t}{2a} \left(2c^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2c^3 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2cs^2 \varepsilon_{xx}^0 + 2cs^2 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$M_y = \frac{AE_l t}{2b} \left(2sc^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + 2s^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2s^3 \kappa_\theta \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$M_{xy} = \frac{AE_l t}{2b} \left(2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \quad (8)$$

که مقدار a و b از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$a = \frac{2\pi R(x)}{N}, \quad b = \frac{2\pi R(x)}{N \tan \varphi} \quad (9)$$

N برابر با نصف تعداد ریب‌ها و $R(x)$ با رابطه $R(x) = a + x \sin \alpha$ معرفی می‌شود. منتجه‌های نیرو و گشتاور که در روابط (۵) و (۸) بدست آمدند طبق معادله (۸) با کرنش و انحنای لایه میانی پوسته در ارتباط هستند:

علت نازکی پوسته حالت تنش صفحه‌ای برقرار است و پوسته به صورت یک لمینیت مدل شده است. تقویت‌کننده‌ها نیز به صورت یک جسم سه‌بعدی مدل شده‌اند. برای تخصیص خواص به تقویت‌کننده یک دستگاه مختصات محلی به گونه‌ای تعریف شده است که محور اصلی آن در امتداد مارپیچ تقویت‌کننده باشد و با چرخش تقویت‌کننده، محوره‌های دستگاه مختصات نیز دوران نمایند. تقویت‌کننده‌ها به پوسته مخروطی مقید شده و بنابراین تقویت‌کننده و پوسته یکپارچه شدند. از المان هشت گرهی برای پوسته و المان کانتینیوم سه بعدی برای تقویت‌کننده استفاده شد و پوسته به صورت ۴ لایه $[+30^\circ, -30^\circ]$ مدل شد که هر لایه دارای ضخامت 0.25 میلی‌متر می‌باشد. تکیه‌گاه ساده برای این آنالیز در نظر گرفته شد. مشخصات هندسی و مکانیکی پوسته و تقویت‌کننده در جداول ۱ و ۲ آورده شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی پوسته و تقویت‌کننده‌ها

مقدار	خواص
10.34, 10.34, 181	مدول کششی (GPa) E_{33}, E_{22}, E_{11}
7.2, 7.2, 7.2	مدول برشی (GPa) G_{12}, G_{13}, G_{23}
0.28, 0.28, 0.28	ضریب پواسون $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
1389.23	چگالی (Kg/m ³) ρ

جدول ۲ مشخصات هندسی مدل حاضر

مقدار	کمیت
200	ارتفاع مخروط (mm)
100	شعاع کوچک (mm)
26.5	زاویه راس
1	ضخامت (mm)
30	زاویه تقویت‌کننده
4x4	مقطع تقویت‌کننده (mm ²)
12	تعداد تقویت‌کننده



شکل ۲ مدل سه بعدی استفاده شده در کار حاضر

۶- نتایج

نتایج حاصل از تحلیل سازه مخروطی بدون تقویت‌کننده برای فرکانس بی بعد $\omega\sqrt{\rho h/A_{11}}$ مقایسه شده و در جدول ۳ آورده شده است. همچنین نتایج با نرم افزار آباکوس مقایسه شد (شکل ۴). همانطور که دیده می‌شود روند هر دو آنالیز با هم توافق خوبی دارند و اختلاف بین آنالیزها به دلیل فرضیات ساده‌سازی است که در روش تحلیل در نظر گرفته شده است مانند این که از اثر خمش تقویت‌کننده‌ها در هنگام محاسبه ماتریس سفتی صرفه‌نظر شده است شکل ۵ مودهای مختلف برای مدل شبیه‌سازی شده برای تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهد گرچه تقریب ریب‌ها با پوسته معادل خطا در تحلیل ایجاد می‌کند ولی می‌تواند به خوبی روند تغییرات را پیش بینی کند. در ادامه به بررسی اثر پارامترهای هندسی بر روی تغییرات فرکانس طبیعی پرداخته می‌شود.

و به همین دلیل در بسیاری از موارد به کار می‌رود. شرایط مرزی در این مقاله تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌شوند.
 $v = w = 0, N_x = M_x = 0 \text{ at } x = 0, L$

توابع جابه‌جایی نیز به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin(n\theta + \omega t)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos(n\theta + \omega t)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin(n\theta + \omega t)$$

(۱۶)

به ترتیب عدد موج محیطی و طولی بر حسب هرتز می‌باشد و $m\omega$ و n که فرکانس ارتعاش پوسته بر حسب هرتز می‌باشد. انرژی پتانسیل کل برابر است با مجموع انرژی کرنشی و انرژی جنبشی که به ترتیب در روابط (۱۶) و (۱۷) آورده شده‌اند [۸].

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \int_0^{2\pi} N_x \varepsilon_{xx}^0 + N_{\theta} \varepsilon_{\theta\theta}^0 + N_{x\theta} \gamma_{x\theta}^0 + M_x \kappa_x + M_{\theta} \kappa_{\theta} + M_{x\theta} \kappa_{x\theta} R dx d\theta$$

(۱۷)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \int_0^{2\pi} \rho_t (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) R dx d\theta$$

(۱۸)

$$\rho_t = \int_{-t/2}^{t/2} \rho dz$$

(۱۹)

$$\Pi = U - T$$

(۲۰)

با جایگذاری روابط کرنش بر حسب جابه‌جایی تابع پتانسیل کل بر حسب ضرایب مجهول به دست می‌آید. برای محاسبه ارتعاشات آزاد در ابتدا با محاسبه مشتق Π نسبت به هر یک از a_{mn} و b_{mn} و c_{mn} و محاسبه ضرایب هر کدام از این عناصر در عبارت حاصله و جایگذاری آنها در یک ماتریس، یک ماتریس مربعی به دست می‌آید که در رابطه ۲۱ آورده شده است. با محاسبه دترمینان این ماتریس و مساوی قرار دادن با صفر، معادله ۲۲ حاصل می‌گردد. با حل معادله مذکور و استخراج مقادیر فرکانس‌ها، کوچکترین مقدار به عنوان فرکانس طبیعی ارتعاشات سازه در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \\ c_{mn} \end{Bmatrix} = 0$$

(۲۱)

$$\lambda_1 \omega^6 + \lambda_2 \omega^4 + \lambda_3 \omega^2 + \lambda_0 = 0$$

(۲۲)

۵- آنالیز ارتعاشی با استفاده از روش ریلی ریتز

یک مدل سه بعدی برای از پوسته مخروطی مشبک با استفاده از نرم افزار آباکوس ساخته شد (شکل ۳) که تقویت‌کننده‌ها متشکل از ۱۲ ریب بر مبنای مسیر ژئودزیک که با زاویه 30° و -30° نسبت به راستای طولی می‌باشند. به

جدول ۳ مقایسه پارامتر فرکانس $\omega\sqrt{\rho h/A_{11}}$ برای مخروط ایزوتروپیک با تکیه گاه ساده در دو انتها و مقادیر $(L\sin\alpha/R_2=0/25)$ و $(t/R_2=0/1)$ و $(m=1)$

	$\alpha = 60$		$\alpha = 45$		$\alpha = 30$		$\alpha = 30$		n
	present	[22]	present	[22]	present	[22]	[23]	[23]	
0.6314	0.5722	0.6348	0.7624	0.6879	0.7655	0.8400	0.7910	0.8420	۰
0.6172	0.6001	0.6238	0.7169	0.6973	0.7212	0.7360	0.7284	0.7376	۲
0.6029	0.6054	0.6145	0.6670	0.6664	0.6739	0.6336	0.6352	0.6362	۳
0.5929	0.6077	0.6111	0.6213	0.6304	0.6323	0.5477	0.5531	0.5528	۴
0.5909	0.6159	0.6171	0.5866	0.6032	0.6035	0.4860	0.4949	0.4950	۵
0.5998	0.6343	0.6350	0.5680	0.5918	0.5921	0.4521	0.4653	0.4661	۶
0.6215	0.6650	0.6660	0.5683	0.5992	0.6001	0.4467	0.4654	0.4660	۷
0.6565	0.7084	0.7101	0.5881	0.6257	0.6273	0.4677	0.4892	0.4916	۸
									۹

۳-۶- اثر ضخامت پوسته بر روی فرکانس

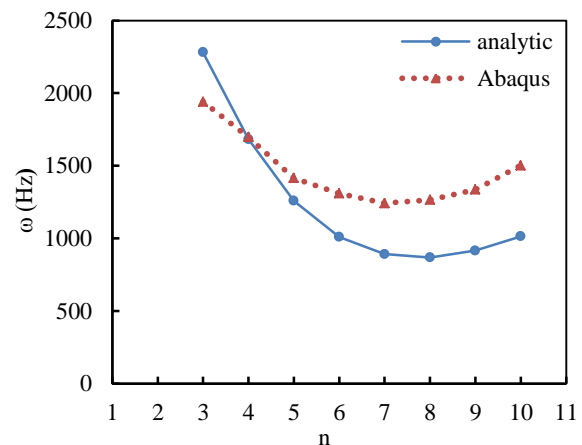
برای تغییرات فرکانس طبیعی با عدد موج برای پوسته مخروطی مشبک در شکل ۹ نشان داده شده و نتایج با پوسته بدون تقویت کننده مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود برای ضخامت های پایین فرکانس سازه تقویت شده بیشتر است ولی برای ضخامت های بیشتر از $0/2$ میلی متر فرکانس سازه تقویت نشده بیشتر است. دلیل این امر این است که در ضخامت پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از سرعت افزایش جرم می باشد. تغییرات بین دو نمودار با افزایش ضخامت کم می شود و این بدان معنی است که برای ضخامت های بالاتر حضور تقویت کننده تاثیری زیادی روی فرکانس ندارد و فرکانس سازه تقویت شده به فرکانس سازه بدون تقویت کننده همگرا می شود.

۴-۶- اثر زاویه راس مخروط بر روی فرکانس

شکل های ۱۰ و ۱۱ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی را بر حسب زاویه راس پوسته برای دو ضخامت مختلف نشان می دهد. برای ضخامت $0/2$ میلی متر همانطور که از شکل ۱۰ پیداست برای زاویه راس کمتر از 10 درجه مود دوم بیشترین فرکانس طبیعی را داراست و برای زاویه راس بیشتر از 10 درجه مود سوم بیشترین فرکانس را دارد. برای ضخامت 1 میلی متر همانطور که در شکل ۱۱ دیده می شود برای تمام زاویه های راس، مود اول بیشترین فرکانس را دارا می باشد همچنین برای زاویه راس بیشتر از 50 درجه فرکانس طبیعی مودهای اول و دوم همگرا می شوند.

۵-۶- اثر ارتفاع مخروط بر روی فرکانس

تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش ارتفاع پوسته مخروطی برای دو ضخامت برای مود اول مورد بررسی قرار گرفت. همانطور که گفته شد در ضخامت های پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از افزایش جرم است در شکل ۱۲ مشاهده می شود در ضخامت پایین برای مقادیر کمتر ارتفاع از یک مقدار مشخص سازه تقویت شده فرکانس بیشتری دارد ولی برای مقادیر بیشتر از آن به دلیل آنکه سرعت افزایش جرم بیشتر می شود بنابراین سازه تقویت نشده فرکانس طبیعی بالاتری را داراست. در ضخامت های بالا اثر تقویت کننده روی افزایش جرم بیشتر است و همانطور که در شکل ۱۳ می بینیم همین جهت با افزایش ارتفاع سازه تقویت نشده عملکرد بهتری را دارد و فرکانس طبیعی آن نسبت به سازه تقویت شده بیشتر است.



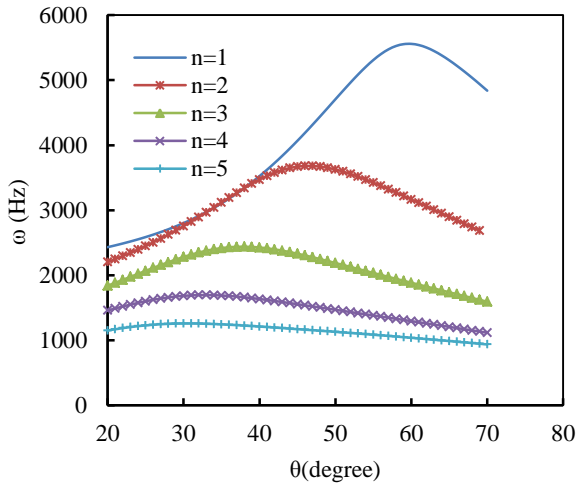
شکل ۴ مودهای ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی مشبک

۱-۶- اثر زاویه بین الیاف بر روی فرکانس

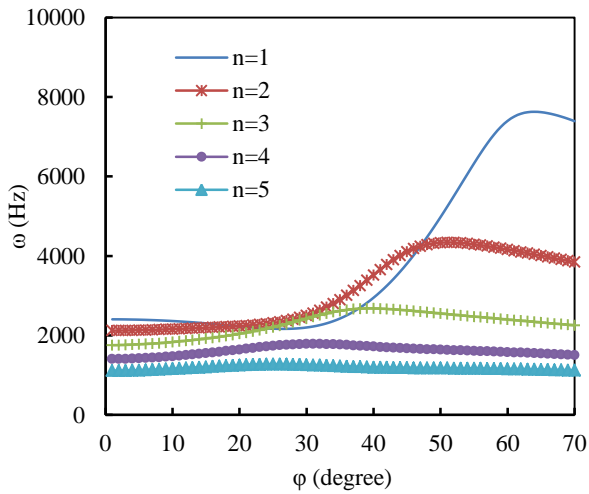
شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی را بر حسب زاویه های مختلف الیاف و برای مودهای اول تا پنجم پوسته را نشان می دهد. همانطور که دیده می شود با افزایش مودها میزان وابستگی فرکانس به زاویه الیاف کاهش می یابد و همچنین برای مودهای بالاتر بیشترین فرکانس ارتعاش در زاویه های پایین تر رخ می دهد. بیشترین فرکانس طبیعی سازه در مود اول و زاویه الیاف 60 درجه اتفاق می افتد.

۲-۶- اثر زاویه تقویت کننده بر روی فرکانس

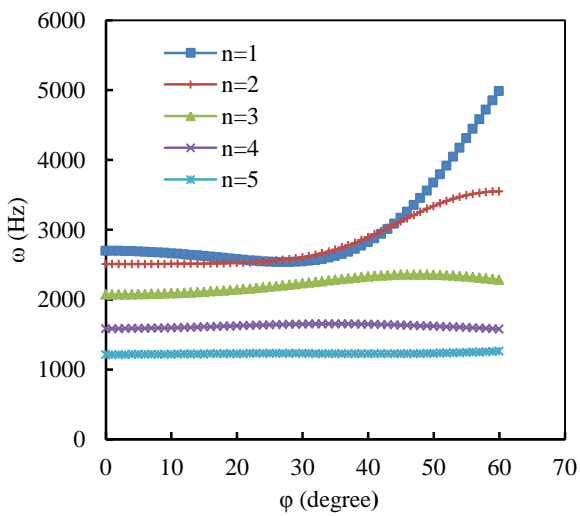
شکل های ۷ و ۸ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی را برای زاویه های مختلف و دو ضخامت متفاوت را نشان می دهد. در ضخامت های پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از افزایش جرم است به همین دلیل است که با افزایش زاویه بین تقویت کننده ها طول تقویت کننده ها افزایش می یابد و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش می یابد ولی برای یک زاویه مشخص به علت افزایش طول تقویت کننده و به تبع آن افزایش جرم آن، سرعت افزایش جرم بیشتر از سرعت افزایش سفتی می گردد و در نتیجه فرکانس طبیعی کاهش می یابد. همانطور که مشاهده می شود با افزایش ضخامت تاثیر تقویت کننده ها روی فرکانس طبیعی کاهش می یابد و تغییر زاویه تاثیر کمی بر روی فرکانس طبیعی دارد.



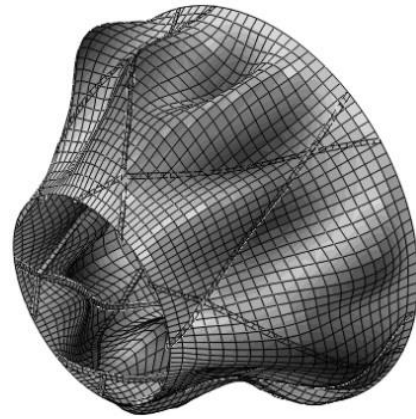
شکل ۶ اثر زاویه الیاف روی فرکانس طبیعی



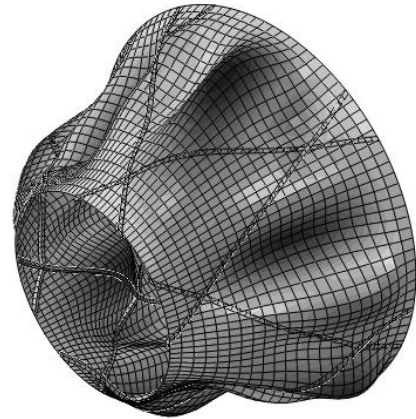
شکل ۷ اثر زاویه تقویت کننده بر روی فرکانس برای ضخامت ۰/۲ میلیمتر



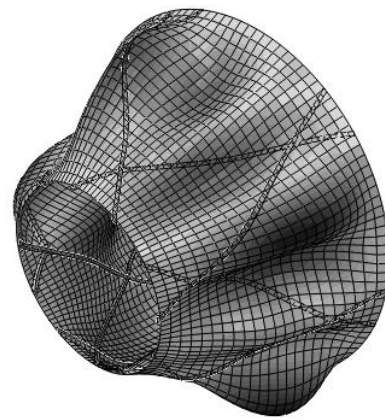
شکل ۸ اثر زاویه تقویت کننده بر روی فرکانس برای ضخامت ۱ میلیمتر



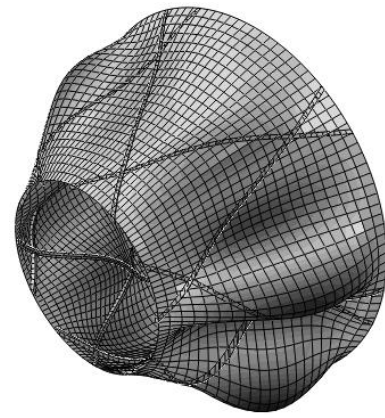
n=۳



n=۴

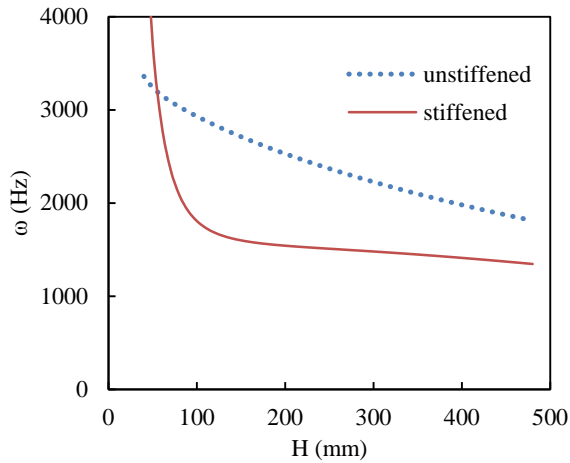


n=۵

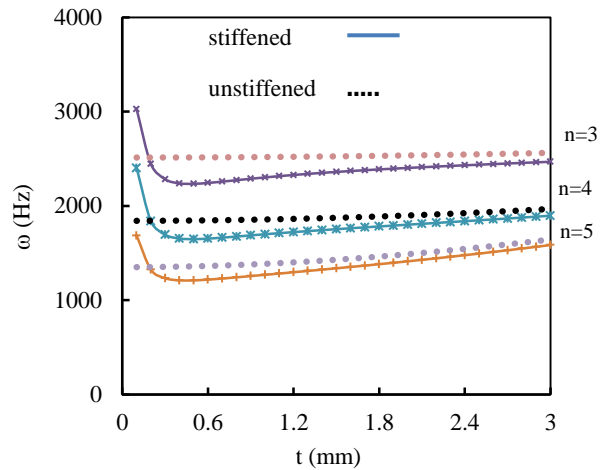


n=۶

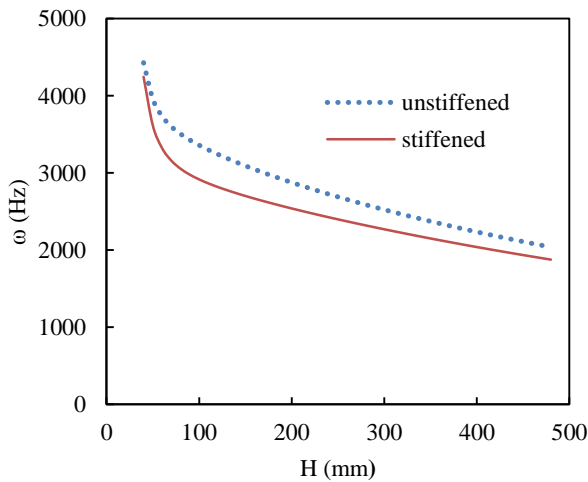
شکل ۵ مدهای ارتعاشی پوسته مخروطی کامپوزیتی مشبک



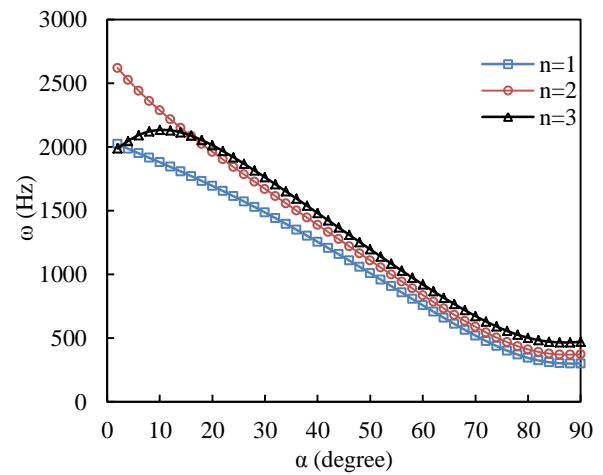
شکل ۱۲ اثر ارتفاع مخروط بر روی فرکانس طبیعی برای ضخامت 0.2 میلی‌متر و زاویه راس $\alpha = 26/5$



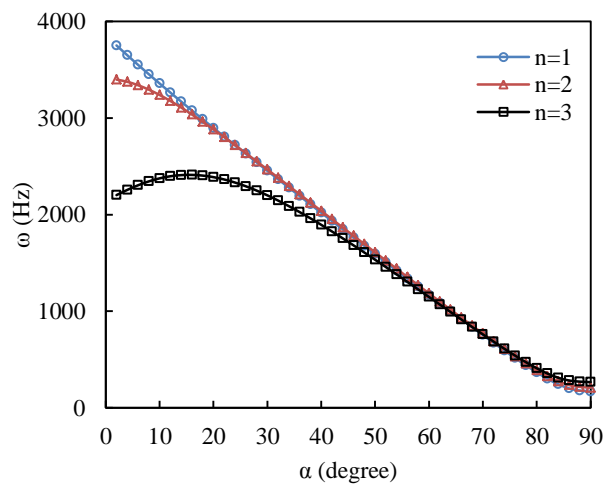
شکل ۹ اثر ضخامت پوسته بر روی فرکانس طبیعی



شکل ۱۳ اثر ارتفاع مخروط بر روی فرکانس طبیعی برای ضخامت 1 میلی‌متر و زاویه راس $\alpha = 26/5$



شکل ۱۰ اثر زاویه مخروط بر روی فرکانس طبیعی برای ضخامت 0.2 میلی‌متر و $L/R_1 = 2$



شکل ۱۱ اثر زاویه مخروط بر روی فرکانس طبیعی برای ضخامت 1 میلی‌متر و $L/R_1 = 2$

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق ارتعاشات آزاد پوسته مشبک مخروطی مورد بررسی قرار گرفت سفتی معادل پوسته تقویت شده ارائه شد. برای اعتبارسنجی نتایج از مدل سه بعدی در نرم افزار آباکوس بهره برده شد. نتایج نشان داد که روش تحلیلی می‌تواند به خوبی روند تغییرات را پیش بینی کند. همچنین نتایج نشان داد که برای ضخامت‌های پایین فرکانس طبیعی سازه تقویت شده نسبت به سازه بدون تقویت کننده بیشتر است زیرا در ضخامت‌های پایین سرعت افزایش سفتی بیشتر از سرعت افزایش جرم سازه می‌باشد. اثر تغییرزاویه تقویت کننده‌ها برای مودهای پایین بیشتر و همچنین تغییر زاویه الیاف برای مودهای پایین تاثیرگذارتر می‌باشد. در ضخامت‌های پایین برای مقادیر ارتفاع کمتر از یک مقدار مشخص سازه تقویت شده دارای فرکانس طبیعی بیشتری می‌باشد. در ضخامت‌های بیشتر به دلیل اینکه اثر اضافه شدن تقویت کننده بر روی افزایش جرم بیشتر از افزایش سختی است بنابراین برای هر ارتفاع مخروط سازه تقویت نشده فرکانس بالاتری دارد.

- [17] Naderi, A. A. Rahimi, GH. and Arefi, M., "Influence of fiber paths on buckling load of tailored conical shells," *Steel and Composite Structures*, Vol. 16, No. 4, pp. 375-387, 2014.
- [18] Naderi, A. A. and Rahimi, GH., "Buckling analysis of grid stiffened composite conical shell", The 12th Iranian Aerospace Society Conference Amir Kabir University of Technology, 2013.
- [19] Naderi, A. A. and Rahimi, GH., "Buckling analysis of glass fiber reinforced epoxy/clay conical shells subjected to axial loading," The 12th Iranian Aerospace Society Conference Amir Kabir University of Technology, Tehran, Iran, 2013.
- [20] Shanshan, Shi, Sun, Zhi, Mingfa, R. Chen, a. and Xiaozhi, Hub., "Buckling resistance of grid-stiffened carbon-fiber thin-shell structures," *Composites: Part B*, Vol. 44, pp. 888-896, 2013.
- [21] Kidane, S. Li, G. Helms, J. and Pang, S.S. Woldesenbet, E., "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders," *Composites Part B: Engineering*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-9, 2003
- [22] Irie, T. Yamada, G. and Tanaka, K., "Natural frequencies of truncated conical shells," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, No. 3, pp. 447-453. 1984.
- [23] Lam, K.Y. and Li, H., "On free vibration of a rotating truncated circular orthotropic conical shell," *Composites, Part B Vol 30, No. 2*, pp. 135-144, March 1999.

۸- فهرست علائم

a	طول سلول
b	ارتفاع سلول
H	ارتفاع مخروط
L	طول مخروط
n	عدد موج
N	نصف تعداد تقویت کننده ها
R_2	شعاع قاعده بزرگ مخروط
R_1	شعاع قاعده کوچک مخروط

علائم یونانی

α	زاویه راس مخروط
θ	زاویه بین الیاف
Π	زاویه بین تقویت کننده ها
φ	فرکانس طبیعی
ω	انرژی پتانسیل کل

۹- مراجع

- [1] Jam, M. Yusef Zadeh, H. and Taghavian, B., "Vibration Analysis of Grid-Stiffened Circular/Cylindrical Shells with Full Free Edges," *Polish Maritime Research*, Vol. 18, pp. 23-27, 2011
- [2] Hemmatnezhad, M. Rahimi, G. H. and Ansari, R., "On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells", *Acta Mech*, Vol. 225, pp. 609-623, 2014.
- [3] Rahimi, G. H. Hemmatnezhad, M. and Ansari, R., "Prediction of Vibrational Behavior of Grid-Stiffened Cylindrical Shells," *Advances in Acoustics and Vibration*, Vol. 2014, Article ID 242573, 10 pages, 2014.
- [4] Hemmatnezhad, M. Rahimi, G.H. Tajik, M. and Pellicano, F., "Experimental, numerical and analytical investigation of free vibrational behavior of GFRP-stiffened composite cylindrical shells" *Composite Structures*, Vol. 120, pp. 509-518, 2015.
- [5] Blom, A. W. Setoodeh, S. Jan, M. A. Hol, M. and Gurdal, Z., "Design of Variable-Stiffness Conical Shells for Maximum Fundamental Eigenfrequency". *Computers and Structure* Vol. 86, No. 9, pp 870-878, 2008.
- [6] GHasemi, M. A. Yazdani, M. and Hoseini, S.M., "Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory", In *Persian, Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 51-61, 2013
- [7] Kidane, S.G. Li, J. Helms Pang, S.S. and Woldesenbet, E. "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders," *Composites part B*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-9, 2003.
- [8] Talebitooti, M. Ghayour, M. Ziaei-Rad, S. and Talebitooti, R., "Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners," *Archive of Applied Mechanics*, Vol 80, No. 3, pp 201-215, 2010.
- [9] Talebitooti, M. Daneshjou, K. and Talebitooti, R., "Vibration and Critical Speed of Orthogonally Stiffened Rotating FG Cylindrical Shell Under Thermo-Mechanical Loads Using Differential Quadrature Method," *Journal of Thermal Stresses*, Vol 36, No.2, pp 160-188, 2013.
- [10] Mead, DJ. and Bardell, NS., "Free vibration of thin cylindrical shell with periodic circumferential stiffeners". *J Sound Vib* Vol 115, No. 3, pp. 499-520, 1987.
- [11] Bardell, NS. and Mead, DJ., "Free vibration of an orthogonally stiffened cylindrical shell", Part I: discrete line simple supports. *J Sound Vib* Vol 134, No. 1, pp. 29-54, 1989.
- [12] Bardell, NS. and Mead, DJ., "Free vibration of an orthogonally stiffened cylindrical shell," Part II: discrete line simple supports. *J Sound Vib* Vol 134, Issue 1, pp. 55-72, No. 8, 1989.
- [13] Yazdani, M. Rahimi, GH. Afaghi Khatibi, A. and Hamzeh, S., "An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading," *Sci Res Essay*, No. ol 4, No. 9, pp. 914-920, 2009.
- [14] Yazdani, M. and Rahimi, GH., "The effects of helical ribs' number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading," *J Reinf Plast Compos*, Vol 29, No. 17, pp. 2568-2575, 2010
- [15] Yazdani, M. and Rahimi, GH., "The behavior of GFRP-stiffened and -unstiffened shells under cyclic axial loading and unloading", *J Reinf Plast Compos*, Vol 30, No. 5, pp. 440-445, 2011
- [16] Rahimi, GH. Zandi, M. and Rasouli, SF., "Analysis of the effect of stiffener profile on buckling strength in composite isogrid stiffened shell under axial loading". *Aerosp Sci Technol*, Vol 24, No. 1, pp. 198-203, 2013