



## حل دقیق هدایت حرارت غیرخطی دایم در پوسته‌های جدار ضخیم استوانه‌ای و کروی مدرج تابعی نمایی و خواص مواد تابع دما

امین موسائی<sup>۱\*</sup>، حامد پناهی کالوس<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج  
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج  
\*moosaie@yu.ac.ir، ۷۵۹۱۸-۷۴۹۳۴، صندوق پستی

### چکیده

در این مقاله یک راه حل تحلیلی دقیق برای هدایت گرمایی درون یک ماده مدرج تابعی که خواص مواد آن دارای تابعیت نمایی نسبت به مکان و تابعیت خطی نسبت به دما داشته باشد، ارائه شده است. به دلیل وابستگی خواص مواد به دما، معادله حاکم غیر خطی شده و نمی‌توان آن را به‌طور مستقیم حل کرد. اساس روش حل تحلیلی پیشنهاد شده استفاده از یک تبدیل انتگرالی می‌باشد، که این تبدیل معادله میدان دمای غیرخطی را به یک معادله خطی تبدیل می‌کند. همچنین لازم است شرایط مرزی مناسب توسط تبدیل به‌کار رفته، استفاده شود. سپس معادله خطی شده حل و سپس میدان دمای تبدیل یافته به‌دست می‌آید. پس از آن از یک تبدیل معکوس استفاده می‌شود تا میدان دمای فیزیکی به‌دست آید. در نهایت از این روش دو مسئله هدایت درون یک استوانه یک بعدی در جهت شعاع و مسئله هدایت درون پوسته کروی حل می‌شود. برای اعتبارسنجی و اطمینان از حل ریاضی انجام شده، نتایج با حل عددی مسئله مقایسه و تطابق کاملی مشاهده شد.

### اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۱۱/۶

پذیرش: ۹۵/۲/۲۸

### کلیدواژگان:

هدایت حرارت غیر خطی  
ضریب هدایت وابسته به دما  
ماده مدرج نمایی  
استوانه توخالی  
کره توخالی

## Exact solution of steady nonlinear heat conduction in exponentially graded cylindrical and spherical shells with temperature-dependent properties

Amin Moosaie<sup>\*</sup>, Hamed Panahi Kalus

Department of Mechanical Engineering, Yasouj University, Yasouj, Iran  
\*P.O.B. 75918-74934, Tehran, Iran, khallili@kntu.ac.ir

### Keywords

Nonlinear heat conduction  
Temperature-dependent heat conductivity  
Exponentially graded material  
Hollow cylinder  
Hollow sphere

### Abstract

In this study, an exact analytical solution of steady heat conduction problem in exponentially graded inhomogeneous materials with temperature-dependent heat conductivity is presented. The FGM properties are assumed to depend exponentially on spatial coordinates whereas the temperature dependency is taken to be a linear function. The proposed method is based on an integral transformation of the temperature field, which transforms the nonlinear heat equation into a linear one for the transformed temperature. The boundary conditions are to be transformed as well. Once the linear equation is solved and the transformed temperature is obtained, the inverse transform is used to calculate the physical temperature field. The boundary conditions are enforced on the transformed temperature. Finally, in order to demonstrate the application of the proposed method, two numerical examples are worked out, i.e. nonlinear heat conduction in the radial direction of cylindrical and spherical thick-walled shells. In order to check the validity of the proposed solution scheme, a numerical solution of the problems has been performed and an excellent agreement has been established.

### ۱- مقدمه

کاربردهای متنوع، اما مواد کامپوزیت نیز دارای محدودیت‌ها و کاستی‌هایی می‌باشند. برای مثال کامپوزیت‌ها به خاطر ناپیوستگی و لایه لایه‌ای بودن در معرض تمرکز تنش می‌باشند. استفاده از یک دسته از مواد پیشرفته کامپوزیت که به آنها مواد مدرج تابعی (FGM) گفته می‌شود، یک ایده برای حل این مشکل می‌باشد. این مواد معمولاً همسانگرد ولی همیشه ناهمگن می‌باشند.

مواد همگن ساده از جمله فلز، در عمل نمی‌تواند تمام نیازهای مهندسی که در حال رشد می‌باشد را برآورده کند. این محدودیت را می‌توان در طراحی‌های مهندسی تا حدی بوسیله کامپوزیت‌های لایه‌ای ناهمسانگرد یا کامپوزیت‌های تقویت شده به وسیله فیبر بر طرف کرد. با وجود سودمندی در

### Please cite this article using:

Moosaie, A. and Panahi Kalus, H., "Exact solution of steady nonlinear heat conduction in exponentially graded cylindrical and spherical shells with temperature-dependent properties", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 3, pp. 301-306, 2016.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

اوباتا و نودا [۵] با استفاده از روش اغتشاشات، تنش‌های حرارتی درون یک استوانه و کره‌ی تو خالی یک بعدی را تجزیه و تحلیل کردند. اتو و همکاران [۶] تنش‌های حرارتی گذرا درون یک استوانه توخالی دارای یک منبع حرارتی که در جهت محوری در حال حرکت می‌باشد را تجزیه و تحلیل کردند. لوتز و زیمرمان [۸،۷] یک راه حل تحلیلی برای تنش‌های حرارتی درون پوسته‌های استوانه‌ای و کره‌ی جدار ضخیم در جهت شعاعی به دست آوردند. تانگاکاوا و همکاران [۹] یک بررسی تحلیلی برای تنش‌های حرارتی درون جسم نیمه بی‌نهایت مدرج تابعی با تابع توانی، در جهت ضخامت ارائه دادند. آواجی و سیواکومار [۱۰] توزیع دما و تنش را در یک ماده مدرج تابعی ارائه کردند. کیم و نودا [۱۱] با روش تابع گرین، تنش‌های حرارتی گذرا درون یک استوانه توخالی نامحدود ساخته شده از مواد مدرج تابعی را به دست آوردند. جباری و همکاران [۱۳،۱۲] استوانه‌ای توخالی مدرج تابعی با تابع توانی در جهت شعاعی در نظر گرفتند و یک حل تحلیلی برای تنش‌های حرارتی برای حالت یک بعدی و دو بعدی به دست آوردند. لیو و همکاران [۱۴] مسئله تحلیل ترموالاستیک برای یک استوانه توخالی مدرج تابعی را ارائه دادند. یو و همکاران [۱۵] حل تحلیلی برای تنش‌های الاستیک درون یک مخزن کره‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی به دست آوردند. آنها لایه‌های بیرونی و داخلی پوسته را همگن و بین آنها را یک ماده مدرج تابعی در نظر گرفتند. ژائو و همکاران [۱۶] میدان دمای گذرای در چندین شکل مختلف از مواد مدرج تابعی تحت شرط مرزی جابه‌جایی را مورد مطالعه‌ی تحلیلی قرار دادند. چن و لین [۱۷] تجزیه و تحلیل الاستیک درون یک پوسته‌ی استوانه‌ای مدرج تابعی که دارای تابعی نمایی در جهت شعاعی می‌باشد را انجام دادند. عسکری و اخلاقی [۱۸] با مطالعه‌ی هدایت حرارتی گذرای دو بعدی درون یک استوانه‌ی توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی با طول محدود یک راه تحلیلی به دست آوردند. پنگ و لی [۱۹] یک روش برای حل تنش‌های حرارتی درون یک استوانه‌ی توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی که خواص فیزیکی آن تابعی از شعاع می‌باشد، ارائه دادند. وانگ [۲۰] یک روش تحلیلی برای تجزیه و تحلیل هدایت حرارت گذرا درون استوانه‌ی توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه داد. پرکوفسکی [۲۱] یک حل تحلیلی برای مسئله هدایت حرارت که مبنی بر روش تبدیل هانکل برای مواد مدرج تابعی با زیر لایه همگن به دست آورد.

## ۲- فرمول بندی مسئله

در این قسمت معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله هدایت حرارتی با خواص تابع دما و ساخته شده از مواد مدرج تابعی برای پوسته‌های استوانه‌ای و کره‌ی به دست آورده می‌شود. این معادلات برای به دست آوردن میدان دما در سراسر ضخامت پوسته، حل می‌شوند. شعاع داخلی و خارجی پوسته با  $R_0$  و  $R_i$  نمایش داده می‌شود.

وقتی هدایت حرارت دائم در نظر گرفته شود، تنها خاصیت مواد که در معادلات ظاهر می‌شود، ضریب هدایت حرارت است، که با  $\lambda$  نمایش داده می‌شود. برای موادی که ضریب هدایت حرارتی آنها تابعیتی از دما نداشته باشد و ماده نیز همگن باشد،  $\lambda$  ثابت می‌باشد. ولی برای مواد همگن که ضریب هدایت حرارتی آن تابعی از دما می‌باشد،  $\lambda$  یک تابعی از میدان دما  $\theta$  است، یعنی می‌توان نوشت  $\lambda = \lambda(\theta)$ . به طور مشابه برای مواد مدرج تابعی،  $\lambda$  می‌تواند دو حالت داشته باشد. در حالت اول، خواص مواد مدرج تابعی تابع دما نباشد، یعنی ضریب هدایت حرارت فقط تابعی از فضا باشد  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ . در حالت دوم، که در این پژوهش ارائه شده، برای مواد مدرج تابعی، خواص

خواص این مواد دارای تابعیت پیوسته از مکان می‌باشد که در بعضی از طراحی‌ها و اهداف خاص می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. برای مثال سطح داخلی مخازن و لوله‌های تحت فشار می‌تواند از سرامیک ساخته شود، در حالی که برای سطح خارجی از فلزی شبیه فولاد استفاده شده است. چنین طراحی می‌تواند هنگامی که سطح داخلی تحت بارهای شدید حرارتی و در عین حال سازه تحت بارهای مکانیکی قرار گرفته است از خود مقاومت بیشتری نشان بدهد. چنین موادی انتخاب‌های زیادی برای استفاده صنعتی در اختیار ما قرار می‌دهد. با این حال برای مواد مدرج تابعی ترکیب بین سرامیک و فلز، تابعی پیوسته و هموار در فضا می‌باشد.

از ویژگی‌های مهم مواد مدرج تابعی مقاومت در برابر دماهای بالا و همچنین تنش‌های حرارتی زیاد ناشی از دماهای بالا می‌باشد. بنابراین در مواد مدرج تابعی، تجزیه و تحلیل دما و ترموالاستیسیته از بیشترین اهمیت برخوردار می‌باشد. اولین گام برای تحلیل، به دست آوردن معادله‌ی هدایت گرمایی حاکم بر مواد در دستگاه مختصات مناسب می‌باشد و از حل آن میدان دما به دست می‌آید. با مشخص بودن میدان دما می‌توان در گام بعدی تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های حرارتی را نیز به دست آورد. با به دست آوردن این اطلاعات می‌توان از آنها برای طراحی مخازن تحت فشار یا هر ساختار دیگری جهت تحمل بارهای شدید حرارتی استفاده کرد.

بدیهی است در دنیای مهندسی واقعی ما با مواد واقعی سر و کار داریم. بنابراین بسیاری از ساده‌سازی‌ها، فرضیات و ایده‌آل‌سازی‌ها که روزانه در عمل انجام می‌دهیم می‌توانند سوال برانگیز باشند. با پیشرفت تکنولوژی و افزایش نیازها و با توجه به طراحی‌های اقتصادی که قابل صرفه باشند، به ضریب اطمینان کمتری نیاز داریم که نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر مسئله حرارتی و مکانیکی می‌باشد. به عنوان مثال خواص مواد مستقل از دما یک فرض با شک و تردید می‌باشد. بطور مشخص، این فرض زمانی نامناسب است که ماده تحت اختلاف دمای شدیدی قرار گرفته باشد. بنابراین برای افزایش دقت منطقی است که خواص مواد را تابعی از دما در نظر گرفت.

در این پژوهش یک راه حل تحلیلی برای مسئله هدایت گرمایی پایا برای مواد مدرج نمایی با خواص مواد تابع دما، ارائه شده است. این حل از آن نظر جالب است که یک حل تحلیلی برای میدان دما زمانی که خواص مواد تابع دما باشد ارائه می‌دهد و می‌توان از این میدان دما جهت بررسی میدان تنش‌ی که خواص آن نیز تابع دما باشد، استفاده کرد. تابعیت خواص مواد از دما باعث غیر خطی شدن معادلات حاکم می‌شود.

میدان دمای متقارن محوری ناشی از هدایت گرمایی درون پوسته‌ی جدار ضخیم کره‌ی مدت زیادی است که کاملاً شناخته شده می‌باشد. با این حال، تحلیل میدان دما و میدان تنش در مخازن تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی از جمله زمینه‌های تحقیقاتی روز می‌باشد. تقریباً تمام مقالات منتشر شده در این زمینه برای موادی هستند که خواص آنها مستقل از دما می‌باشد. با این حال ژانگ و همکاران [۱] یک روش تحلیلی برای حل هدایت گرمایی گذرا زمانی که ضریب هدایت تابع دما باشد ارائه دادند که روش آنها بر اساس روش تابع گرین می‌باشد. موسائی [۲] با استفاده از روش اغتشاش میدان دما درون استوانه توخالی ساخته شده از FGM با خواص تابع دما را بررسی نمود. همچنین وی به حل میدان دما و تنش در استوانه توخالی FGM الاستیک برای حالت ماده تراکم ناپذیر با خواص تابع دما پرداخت [۳]. همچنین مطالعه عددی نیز برای اثر دما بر روی خواص انجام شده است [۴]. در ادامه به بررسی چند کار تحلیلی پرداخته می‌شود.

که می‌توان تابع غیر صفر  $f$  را حذف کرد. پس از حذف  $f$ ، دو سمت معادله (۱۰) بر عبارت ثابت غیر صفر  $\lambda_0$  تقسیم شده و روابط (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آید.

$$(1 - \varepsilon\theta) \frac{1}{R_0} \nabla\theta \cdot \mathbf{e}_r - \varepsilon \nabla\theta \cdot \nabla\theta + (1 - \varepsilon\theta) \nabla\theta = 0 \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (12)$$

معادله (۱۱) غیرخطی است و حل تحلیلی آن در همه‌ی حالات بسیار سخت است. در قسمت بعدی یک تبدیل دما معرفی می‌شود. معادلات خطی می‌شوند و حل تحلیلی انجام می‌شود.

### ۳- تبدیل معادلات حاکم

در این بخش یک تغییر متغیر در نظر گرفته می‌شود که معادله غیرخطی حرارت (۱۱) را به معادله دیفرانسیل جزئی خطی تبدیل می‌کند و معادله تبدیل دما به دست می‌آید. در مرحله‌ی اول این معادله دیفرانسیل جزئی خطی، حل شده سپس تبدیل معکوس اعمال می‌شود تا دمای فیزیکی به دست آید. این ایده‌ی تغییر متغیر ریشه در تبدیل انتگرالی کیرشهف دارد، که این تبدیل زمانی که ماده همگن و خواص آن تابع دما باشد یک راه حل تحلیلی برای حل معادله هدایت حرارت حاکم بر مسئله می‌دهد. تغییر متغیر به شکل زیر می‌باشد [۲۲].

$$\theta(\vartheta) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta} (1 - \varepsilon\vartheta) d\vartheta = \vartheta - \frac{1}{2} \varepsilon \vartheta^2 \quad (13)$$

که این یک تبدیل غیرخطی از میدان دمای فیزیکی  $\theta$  به میدان دمای تبدیل یافته  $\vartheta$  است. معادله (۱۳) رهیافتی است، برای محاسبه دمای تبدیل یافته  $\vartheta$  در صورتی که میدان دمای فیزیکی مشخص باشد. همچنین برای محاسبه  $\vartheta$  به تابع  $\theta$  نیاز است. تبدیل معکوس از حل معادله درجه دو (۱۳) به دست می‌آید. معادله درجه دو ریشه دارد. با این حال، یکی از جواب‌ها میدان دمای فیزیکی را می‌دهد [۲۲].

$$\vartheta = \frac{1}{\varepsilon} (1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon\theta}) \quad (14)$$

تبدیل معکوس (۱۴) زمانی صادق است که  $2\varepsilon\theta \leq 1$  باشد. اما، از آنجایی که پارامتر  $\varepsilon$  برای بیشتر مواد مهندسی کوچک است، این قید معمولاً محدودیتی ایجاد نمی‌کند و این شرط برای بسیاری از نمونه‌های عملی برقرار است، حتی در دماهای بالا نیز برقرار می‌باشد، به [۲۲] رجوع شود.

می‌توان از تبدیل (۱۳) دیفرانسیل گیری کرد که روابط زیر حاصل شود.

$$\nabla\theta = (1 - 2\varepsilon\theta) \nabla\vartheta \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \nabla\theta = \Delta\theta = -\varepsilon \nabla\vartheta \cdot \nabla\vartheta + (1 - \varepsilon\theta) \Delta\vartheta \quad (16)$$

با جایگذاری دو رابطه بالا در معادله (۱۱) معادله دمای تبدیل یافته  $\theta$  به دست می‌آید.

$$\frac{1}{R_0} \nabla\theta \cdot \mathbf{e}_r + \Delta\theta = 0 \quad (17)$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی است. بنابراین، با کمک تبدیل ارائه شده ما قادر به تبدیل معادله حاکم غیرخطی (۱۱) به معادله خطی هستیم. ماهیت غیرخطی مسئله اکنون در معادله (۱۳) حفظ شده است و معادله دیفرانسیل حاکم (۱۷) خطی می‌باشد. این روند کمک بزرگی برای حل تحلیلی می‌باشد. همچنین باید شرایط مرزی فیزیکی نیز توسط معادله (۱۳) تبدیل یابند. برای مثال اگر در مرز دما  $\bar{\theta}$  باشد، مقدار تبدیل یافته آن با توجه به معادله (۱۳) به شکل  $\bar{\theta} = \bar{\theta} - \varepsilon \bar{\theta}^2 / 2$  می‌باشد. در نهایت،

تابع دما باشد، یعنی  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \vartheta)$ . برای حالتی که  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \vartheta)$  باشد، فرض می‌شود  $\lambda$  تابعی جداپذیر از  $\mathbf{x}$  و  $\vartheta$  است (رابطه (۱)).

$$\lambda(\mathbf{x}, \vartheta) = f(\mathbf{x})g(\vartheta) \quad (1)$$

که  $f(\mathbf{x})$  بخش تابع مدرج  $\lambda$  است، در حالی که  $g(\vartheta)$  بخشی از  $\lambda$  است که تابع دما می‌باشد. در این کار، تابع مدرج  $f$  تابعی نمایی از شعاع فرض می‌شود.

$$f(\mathbf{x}) = f(r) = \exp\left(\frac{r}{R_0}\right) \quad (2)$$

در ادامه‌ی مدل‌سازی، برای بخشی از  $\lambda$  که تابعیت از دما داشت، فرض می‌شود.

$$g(\vartheta) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta \quad (3)$$

$\lambda_0$  و  $\lambda_1$  ثابت‌های فیزیکی هستند که رفتار ماده را مشخص می‌کنند. معادله (۳) برای ماده‌ای است که ضریب هدایت حرارت آن تابعیتی خطی از دما داشته باشد. که  $\lambda$  با افزایش دما، کاهش پیدا می‌کند اگر  $\lambda_1 > 0$  باشد و بالعکس. حالت  $\lambda_1 = 0$ ، حالت ساده‌ای است که وقتی ضریب هدایت حرارت تابع دما نباشد را توصیف می‌کند. معمولاً  $\lambda_1$  در مقایسه با  $\lambda_0$  خیلی کوچک است. پس  $\lambda$  دارای دو بخش است؛ یک قسمت پایه  $\lambda_0 f(r)$  در دمای مرجع و یک بخش اغتشاشی  $-\lambda_1 \vartheta f(r)$  که وقتی دما از حالت مرجع دور می‌شود بوجود می‌آید. معادله دیفرانسیل حاکم برای به دست آوردن میدان دما از قانون بقای انرژی حاصل می‌شود. معادله ساختاری فوریه برای هدایت حرارت وقتی که ضریب هدایت حرارت تابع میدان دما و مکان باشد برقرار است. پس از قانون بقای انرژی در حالت پایا و بدون منبع حرارتی شروع می‌کنیم.

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (4)$$

که  $\nabla$  و  $\mathbf{q}$  به ترتیب عمگر نابلا و بردار شار حرارت می‌باشند. معادله (۴) برای هدایت حرارت پایا و بدون منبع حرارتی می‌باشد.

معادله (۴) یک معادله اسکالر می‌باشد که دارای سه مجهول است. این مجهول‌ها همان مؤلفه‌های بردار شار حرارت هستند. پس این معادله بسته نیست و باید به فرم بسته نوشته شود تا قابل حل باشد. برای این منظور در این پژوهش از رابطه‌ی قانون کلاسیک هدایت حرارت فوریه برای ماده همگن و خواص تابع دما، استفاده می‌شود.

$$\mathbf{q} = -\lambda(r, \vartheta) \nabla\vartheta \quad (5)$$

با جایگذاری معادله ساختاری فوریه (۵) در معادله بقای انرژی (۴)، معادله میدان دما به دست می‌آید.

$$\nabla \cdot [\lambda(r, \vartheta) \nabla\vartheta] = \nabla\lambda \cdot \nabla\vartheta + \lambda \nabla\vartheta = 0 \quad (6)$$

که  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  عملگر لاپلاسیان است. با استفاده از قاعده مشتق حاصلضرب خواهیم داشت.

$$\nabla\lambda = \nabla[f(r)g(\vartheta)] = g \nabla f \cdot f \nabla g \quad (7)$$

برای هدایت یک بعدی در جهت شعاعی  $r$ ،  $\nabla f$  به دست می‌آید.

$$\nabla f = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r = \frac{1}{R_0} \exp\left(\frac{r}{R_0}\right) \mathbf{e}_r = \frac{1}{R_0} f(r) \mathbf{e}_r \quad (8)$$

که  $\mathbf{e}_r$  بردار یکه در جهت شعاع است. به علاوه، می‌توان از قاعده مشتق زنجیره‌ای استفاده کرد.

$$\nabla g = \frac{dg}{d\vartheta} \nabla\vartheta = -\lambda_1 \nabla\vartheta \quad (9)$$

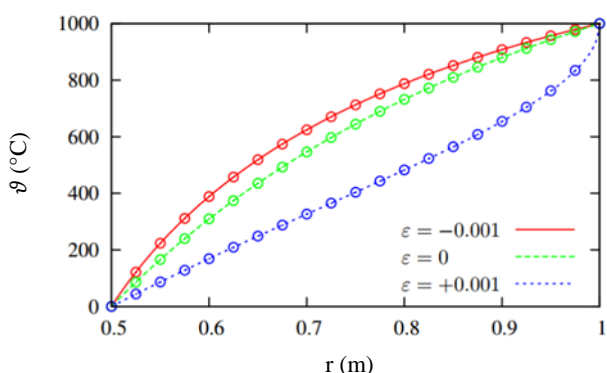
که از معادله (۳)،  $\frac{dg}{d\vartheta} = -\lambda_1$  به دست می‌آید. اکنون می‌توان معادله (۶) را به صورت رابطه (۱۰) نوشت.

$$(\lambda_0 - \lambda_1 \vartheta) \frac{1}{R_0} \nabla\vartheta \cdot \mathbf{e}_r - \lambda_1 f \nabla\vartheta \cdot \nabla\vartheta + (\lambda_0 - \lambda_1 \vartheta) f \nabla\vartheta = 0 \quad (10)$$

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_o - \bar{\theta}_i}{\ln \frac{R_o}{R_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - (-R_i/R_o)^n}{n \times n!}} \quad (30)$$

$$C_2 = \bar{\theta}_i - C_1 \left[ \ln R_i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times n!} \left( -\frac{R_i}{R_o} \right)^n \right] \quad (31)$$

اکنون، می‌توان میدان دمای فیزیکی را با استفاده از تبدیل معکوس در رابطه (۱۴) به‌دست آورد. شکل ۱ پروفیل دما برای  $\vartheta = 1000^\circ\text{C}$  و  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$  و نیز  $R_i = 0.5\text{m}$  و  $R_o = 1\text{m}$  را نشان می‌دهد. در اینجا سه مقدار برای  $\varepsilon$  در نظر گرفته شده یعنی،  $0$ ،  $-0.001$  و  $0.001$  که  $\varepsilon = 0$  اشاره به هدایت حرارت مستقل از دما دارد. به منظور بررسی راه‌حل پیشنهاد شده، یک حل عددی از مسئله بر روی یک شبکه مناسب با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی مرتبه دو انجام شده است. نتایج عددی در شکل ۱ نشان داده شده است که تطابق بسیار عالی بین حل تحلیلی و عددی ایجاد شده است.



شکل ۱ پروفیل دما در استوانه توخالی، نقاط نشان دهنده حل عددی هستند.

#### ۵- هدایت حرارت در کره‌ی توخالی

در این بخش یک حل تحلیلی دقیق از معادله (۱۷) برای هدایت حرارتی در جهت شعاعی از یک کره‌ی توخالی ارائه شده است. با استفاده از معادله (۱۳) روابط زیر برای ترم‌های ظاهر شده در معادله (۱۷) به‌دست آمده‌اند.

$$\nabla\theta = \frac{d\theta}{dr} e_r, \quad \Delta\theta = \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} \quad (32)$$

جایگذاری این رابطه در معادله (۱۷) منجر به معادله دیفرانسیل زیر برای معادله دمای تبدیل یافته  $\theta$  می‌شود.

$$r \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left( 2 + \frac{r}{R_o} \right) \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (33)$$

شرایط مرزی میدان دما  $\vartheta$  در داخل پوسته کره‌ی به شکل زیر فرض شده است:

$$\vartheta(r = R_i) = \bar{\vartheta}_i, \quad \vartheta(r = R_o) = \bar{\vartheta}_o \quad (34)$$

این شرایط مرزی باید با استفاده از معادله (۱۳) تبدیل شود.

$$\theta(r = R_i) = \bar{\theta}_i = \bar{\vartheta}_i - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\theta}_i^2 \quad (35)$$

$$\theta(r = R_o) = \bar{\theta}_o = \bar{\vartheta}_o - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\theta}_o^2 \quad (36)$$

به منظور حل معادله (۳۳)، فرض می‌کنیم که  $u = d\theta/dr$ . با این تغییر متغیر معادله (۳۳) به رابطه (۳۷) تبدیل می‌شود.

$$r \frac{du}{dr} + \left( 2 + \frac{r}{R_o} \right) u = 0 \quad (37)$$

که حل عمومی این معادله به صورت رابطه (۳۸) است.

$$u(r) = \frac{d\theta}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{R_o}\right) \quad (38)$$

معادله (۱۷) برای به‌دست آوردن میدان دما در پوسته‌های کره‌ی و استوانه‌ای حل تحلیلی می‌شود.

#### ۴- هدایت حرارت در استوانه‌ی توخالی

در این بخش یک حل تحلیلی دقیق از معادله (۱۷) برای هدایت گرمایی در جهت شعاعی از یک استوانه تو خالی ارائه شده است. با استفاده از معادله (۱۳) روابط زیر برای ترم‌های ظاهر شده در معادله (۱۷) به‌دست آمده‌اند.

$$\nabla\theta = \frac{d\theta}{dr} e_r, \quad \Delta\theta = \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} \quad (18)$$

جایگذاری این رابطه در معادله (۱۷) منجر به معادله دیفرانسیل زیر برای میدان دمای تبدیل یافته  $\theta$  می‌شود.

$$r \frac{d^2\theta}{dr^2} + \left( 1 + \frac{r}{R_o} \right) \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (19)$$

شرایط مرزی میدان دما  $\vartheta$  در داخل پوسته استوانه‌ای به شکل زیر فرض

شده است.

$$\vartheta(r = R_i) = \bar{\vartheta}_i, \quad \vartheta(r = R_o) = \bar{\vartheta}_o \quad (20)$$

این شرایط مرزی باید با استفاده از معادله (۱۳) تبدیل شود.

$$\theta(r = R_i) = \bar{\theta}_i = \bar{\vartheta}_i - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\theta}_i^2 \quad (21)$$

$$\theta(r = R_o) = \bar{\theta}_o = \bar{\vartheta}_o - \frac{1}{2} \varepsilon \bar{\theta}_o^2 \quad (22)$$

به منظور حل معادله (۱۹)، فرض می‌کنیم که  $u = d\theta/dr$ . با این

تغییر متغیر معادله (۱۹) به رابطه (۲۳) تبدیل می‌شود.

$$r \frac{du}{dr} + \left( 1 + \frac{r}{R_o} \right) u = 0 \quad (23)$$

که حل عمومی این معادله به صورت زیر است.

$$u(r) = \frac{d\theta}{dr} = \frac{C_1}{r} \exp\left(-\frac{r}{R_o}\right) \quad (24)$$

با انتگرال گیری از معادله (۲۴) یک حل عمومی برای  $\theta(r)$  حاصل

می‌شود.

$$\theta(r) = C_1 \int \frac{\exp(-r/R_o)}{r} dr + C_2 \quad (25)$$

به منظور محاسبه انتگرال، عبارت تحت انتگرال باید توسط یک سری توانی بسط داده شود.

$$\frac{\exp(-r/R_o)}{r} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{r} \left( -\frac{r}{R_o} \right)^n \quad (26)$$

بنابراین،  $\theta(r)$  به صورت یک سری توانی بیان شده است.

$$\begin{aligned} \theta(r) &= C_1 \int \left[ \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{r} \left( -\frac{r}{R_o} \right)^n \right] dr + C_2 \\ &= C_1 \left[ \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times n!} \left( -\frac{r}{R_o} \right)^n \right] + C_2 \end{aligned} \quad (27)$$

ثوابت انتگرالی  $C_1$  و  $C_2$  با استفاده از شرایط مرزی در روابط (۲۱) و (۲۲)

محاسبه شده است.

$$\theta(r = R_i) = C_1 \left[ \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times n!} \left( -\frac{r}{R_o} \right)^n \right] + C_2 = \bar{\theta}_i, \quad (28)$$

$$\theta(r = R_o) = C_1 \left[ \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times n!} \left( -\frac{r}{R_o} \right)^n \right] + C_2 = \bar{\theta}_o \quad (29)$$

حل این معادلات برای مجهولات  $C_1$  و  $C_2$  نتیجه می‌دهد (رابطه ۳۰) و (۳۱).

## ۶- نتیجه‌گیری

در این کار، یک روش تحلیلی دقیق برای حل مسائل هدایت حرارت مواد مدرج نمایی با ضریب هدایت حرارت تابع دما ارائه شد. این روش مبنی بر یک تبدیل غیرخطی برای میدان دما که معادله‌ی حرارت غیرخطی تبدیل به یک معادله‌ی خطی می‌شود. معادله‌ی خطی را می‌توان با روش‌های تحلیلی، حل دقیق کرد. در نهایت، تبدیل معکوس برای به‌دست آوردن میدان دمای فیزیکی استفاده می‌شود. به این دلیل، روش ارائه شده برای دو مسئله هدایت حرارت در پوسته‌های کروی و استوانه‌ای کارآمد می‌باشد. این روش می‌تواند راه را برای حل مسائل مخازن تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی که خواص آن تابع دما می‌باشد، را هموار کند. همچنین زمانی که مسئله‌ی غیرخطی با روشی عددی حل شد، می‌توان از این روش برای اعتبار سنجی روش‌های عددی مورد نظر استفاده کرد.

## ۷- مراجع

- [1] Zhang, H. Kan, W. and Hu, X., "Green's Function Approach To The Nonlinear Transient Heat Transfer Analysis Of Functionally Graded Materials", Int. J. Therm. Sci., Vol. 71, pp. 292-301, 2013.
- [2] Moosaie, A., "Axisymmetric Steady Temperature Field In FGM Cylindrical Shells With Temperature-Dependent Heat Conductivity And Arbitrary Linear Boundary Conditions", Arch. Mech, Vol. 67, pp. 233-251, 2015.
- [3] Moosaie, A., "A Nonlinear Analysis Of Thermal Stresses In An Incompressible Functionally Graded Hollow Cylinder With Temperature-Dependent Material Properties", Eur. J. Mech. A/Solids, Vol. 55, pp. 212-220, 2016.
- [4] Azadi, M. and Azadi, M., "Nonlinear Transient Heat Transfer And Thermoelastic Analysis Of Thick-Walled FGM Cylinder With Temperature-Dependent Material Properties Using Hermitian Transfinite Element", J. Mech. Sci. Tech., Vol. 23, pp. 2635-2644, 2009.
- [5] Obato, Y. and Noda, N., "Thermal Stress In Hollow Circular Cylinder And A Hollow Sphere Of A Functionally Graded Material", J. Thermal Stresses, Vol. 14, pp. 471-487, 1994.
- [6] Ootao, Y. Akai, T. and Tanigawa, Y., "Three-Dimensional Transient Thermal Stress Analysis Of A Nonhomogeneous Hollow Circular Cylinder Due To A Moving Heat Source In The Axial Direction", J. Thermal Stresses, Vol. 18, pp. 497-512, 1995.
- [7] Lutz, M. P. and Zimmerman, R. W., "Thermal Stresses And Effective Thermal Expansion Coefficient Of A Functionally Graded Sphere", J. Thermal Stresses, Vol. 19, pp. 39-54, 1996.
- [8] Zimmerman, R. W. and Lutz, M. P., "Thermal Stress And Effective Thermal Expansion In A Uniformly Heated Functionally Graded Cylinder", J. Thermal Stresses, Vol. 22, pp. 177-188, 1999.
- [9] Tanigawa, Y. Morishita, H. and Ogaki, S., "Derivation Of System Of Fundamental Equations For A Three-Dimensional Thermoelastic field With Nonhomogeneous Material Properties And Its Application To A Semi-Infinite Body", J. Thermal Stresses, Vol. 22, pp. 689-711, 1999.
- [10] Awaji, H. and Sivakumar, R., "Temperature And Stress Distributions In A Hollow Cylinder Of Functionally Graded Material: The Case Of Temperature-Dependent Material Properties", J. Am. Ceram. Soc., Vol. 84, pp. 1059-1065, 2001.
- [11] Kim, K. S. and Noda, N., "Green's Function Approach To Unsteady Thermal Stresses In An Infinite Hollow Cylinder Of Functionally Graded Material", Acta Mech. Vol. 156, pp. 145-161, 2002.
- [12] Jabbari, M. Sohrabpour, S. and Eslami, M. R., "Mechanical And Thermal Stresses In Functionally Graded Hollow Cylinder Due To Radially Symmetric Loads", Int. J. Pressure Vessels Piping, Vol. 79, pp. 493-497, 2002.
- [13] Jabbari, M. Sohrabpour, S. and Eslami, M. R., "General Solution For Mechanical And Thermal Stresses In A Functionally Graded Hollow Cylinder Due To Nonaxisymmetric Steady-State Loads", ASME J. Appl. Mech., Vol. 70, pp. 111-118, 2003.
- [14] Liew, K. M. Kitipornchai, S. Zhang, X. Z. and Lim, C. W., "Analysis Of The Thermal Stress Behaviour Of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders", Int. J. Solids Structures, Vol. 40, pp. 2355-2380, 2003.
- [15] You, L. H. Zhang, J. J. and You, X. Y., "Elastic Analysis Of Internally Pressurized Thick-Walled Spherical Pressure Vessel Of Functionally Graded Materials", Int. J. Pressure Vessels Piping, Vol. 82, pp. 347-354, 2005.
- [16] Zhao, J. Ai, X. and Li, Y. Z., "Transient Temperature fields In Functionally Graded Materials With Different Shapes Under Convective Boundary Conditions", Heat Mass Transfer, Vol. 43, pp. 1227-1232, 2007.

با انتگرال گیری از معادله (۳۸) یک حل عمومی برای  $\theta(r)$  حاصل می‌شود (رابطه (۳۹)).

$$\theta(r) = C_1 \int \frac{\exp(-r/R_0)}{r^2} dr + C_2 \quad (39)$$

به منظور محاسبه انتگرال، عبارت تحت انتگرال باید به شکل یک سری توانی بسط داده شود.

$$\frac{\exp(-r/R_0)}{r^2} = \frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{r^2} \left(-\frac{r}{R_0}\right)^n \quad (40)$$

بنابراین،  $\theta(r)$  به صورت یک سری توانی بیان شده است.

$$\theta(r) = C_1 \left[ \frac{1}{r} + \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_0 n \times (n+1)!} \left(-\frac{r}{R_0}\right)^n \right] + C_2 \quad (41)$$

ثوابت انتگرالی  $C_1$  و  $C_2$  با استفاده از شرایط مرزی در روابط (۳۵) و (۳۶) محاسبه شده است.

$$\theta(r = R_i) = C_1 \left[ \frac{1}{R_i} + \ln R_i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_0 n \times (n+1)!} \left(-\frac{R_i}{R_0}\right)^n \right] + C_2 \quad (42)$$

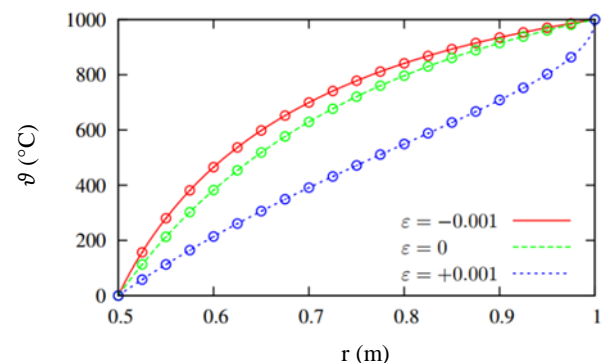
$$\theta(r = R_o) = C_1 \left[ \frac{1}{R_o} + \ln R_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{R_0 n \times (n+1)!} \right] + C_2 \quad (43)$$

حل این معادلات برای مجهولات  $C_1$  و  $C_2$  به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$C_1 = \frac{\bar{\theta}_o - \bar{\theta}_i}{\frac{R_i - R_o}{R_i R_o} + \frac{1}{R_o} \ln \frac{R_o}{R_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-R_o)^n - (-R_i)^n}{R_o^{n+1} n \times (n+1)!}} \quad (44)$$

$$C_2 = \bar{\theta}_i - C_1 \left[ \frac{1}{R_i} + \ln R_i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_0 n \times (n+1)!} \left(-\frac{R_i}{R_o}\right)^n \right] \quad (45)$$

اکنون، می‌توان میدان دمای فیزیکی را با استفاده از تبدیل معکوس در رابطه (۱۴) به‌دست آورد. شکل ۲ پروفیل دما برای  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ ،  $\vartheta = 1000^\circ\text{C}$  و نیز  $R_i = 0.5\text{m}$  و  $R_o = 1\text{m}$  را نشان می‌دهد. در اینجا سه مقدار  $\varepsilon$  در نظر گرفته شده یعنی،  $-0.001$ ،  $0$  و  $0.001$  که  $\varepsilon = 0$  اشاره به هدایت حرارت مستقل از دما دارد. به منظور بررسی راه‌حل پیشنهاد شده، یک حل عددی از مسئله بر روی یک شبکه مناسب با استفاده از روش تفاضل محدود مرکزی مرتبه دو انجام شده است. نتایج عددی در شکل ۲ نشان داده شده است که تطابق بسیار عالی بین حل تحلیلی و عددی ایجاد شده است.



شکل ۲ پروفیل دما در کره توخالی (نقاط نشان دهنده حل عددی هستند)

- [17] Chen, Y. Z. and Lin, X. Y., "Elastic Analysis For Thick Cylinders And Spherical Pressure Vessels Made Of Functionally Graded Materials", *Comput. Mater. Sci.*, Vol. 44, pp. 581-587, 2008.
- [18] Asgari, M. and Akhlaghi, M., "Transient Heat Conduction In Two-Dimensional Functionally Graded Hollow Cylinder With finite Length", *Heat Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1383-1392, 2009.
- [19] Peng, X. L. and Li, X. F., "Thermo-Elastic Analysis Of A Cylindrical Vessel Of Functionally Graded Materials", *Int. J. Pressure Vessels Piping*, Vol. 87, pp. 203-210, 2010.
- [20] Wang, H. M., "An Effective Approach For Transient Thermal Analysis In A Functionally Graded Hollow Cylinder", *Int. J. Heat Mass Transf.*, Vol. 67, pp. 499-505, 2013.
- [21] Perkowski, D. M., "On Axisymmetric Heat Conduction Problem For FGM Layer On Homogeneous Substrate", *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, Vol. 57, pp. 157-162, 2014.
- [22] Moosaie, A., "Steady Symmetrical Temperature field In A Hollow Spherical Particle With Temperature-Dependent Thermal Conductivity", *Arch. Mech.*, Vol. 64, pp. 405-422, 2012.