



نشریه علمی پژوهشی  
**کامپوزیت**  
علوم و فناوری  
<http://jstc.iust.ac.ir>



## تحلیل پاسخ الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با خواص مواد تابعی تحت میدان مغناطیسی و حرارتی

محمد حسینی<sup>۱\*</sup>، عباس زندی باغچه مریم<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان  
۲- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان  
hosseini@sirjantech.ac.ir، ۷۸۱۳۷۳۳۳۸۵

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>در این مقاله رفتار الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی و حرارتی بررسی شده است. در این بررسی تمام خصوصیات مکانیکی، مغناطیسی، الکتریکی و حرارتی ماده پیزوالکتریک به صورت تابع توانی که در راستای شعاع تغییر می کند، در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادله انتقال حرارت در یک بعد و با در نظر گرفتن شرط متقارن بودن سیلندر، می توان تغییرات دما در حالت پایا را به دست آورد. با بهره گیری از معادلات الکترودینامیکی ماکسول و در نظر گرفتن میدان مغناطیسی اولیه هم راستا با محور سیلندر، نیروی ناشی از آن برای حالت ناهمگن به دست می آید. با استفاده از معادلات توزیع دما در جداره سیلندر تحت شرایط مرزی در نظر گرفته شده و به کارگیری از روابط تعادل الکترومکانیک و با به دست آوردن نیروی ناشی از میدان مغناطیسی، معادله دیفرانسیل غیرهمگنی استخراج می شود که با روش تحلیلی حل شده است. همچنین در این مطالعه تحلیل ترمومکانیک یک سیلندر پیزوالکتریک با خواص تابعی نیز با استفاده از نرم افزار المان محدود انسیس (ANSYS) انجام شده است. با بهره گیری از روش تحلیلی و عددی و با ارائه مثال های عددی، تأثیر پارامتر مختلف از جمله شدت میدان مغناطیس و حرارت و ضریب ناهمگنی بر رفتار تنش و کرنش، توزیع پتانسیل الکتریکی و جابه جایی شعاعی سیلندر بررسی شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل شده، نتایج با مطالعات گذشته در زمینه سیلندر با مواد مدرج تابعی مقایسه شده اند.</p>	<p>دریافت: ۹۴/۹/۲۰ پذیرش: ۹۴/۱۱/۲۳</p> <p><b>کلیدواژگان:</b> سیلندر دوار پیزوالکتریک الکترومکانیک مواد مدرج تابعی میدان حرارتی و مغناطیسی نرم افزار انسیس</p>

## Electromechanical response analysis of a rotating piezoelectric cylinder with functionally graded material under thermomagnetic fields

**Mohammad Hosseini\*, Abbas Zandi Baghche Maryam**

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran  
\*P.O.B. 7813733385, Sirjan, Iran, hosseini@sirjantech.ac.ir

Keywords	Abstract
<p>Rotating piezoelectric cylinder Electromechanical Functionally graded material Thermomagnetic fields ANSYS software</p>	<p>In this paper, electromechanical response analysis of a rotating piezoelectric cylinder with functionally graded material under thermomagnetic fields is presented. In this study all mechanical, magnetic, electrical and thermal piezoelectric material properties, were considered to follow an identical power law in the radial direction. Using heat transfer equation in one dimension (1D) with symmetric boundary conditions, the temperature changes in the steady-state can be achieved. According to Maxwell electrostatics equations, Lorentz magnetic force is obtained due to the presence of an externally applied axial magnetic field. Using the equation of temperature distribution in the cylinder wall thickness under considered boundary conditions and the use of electromechanical relations by acquiring the magnetic force, inhomogeneous differential equation is derived and then solved by analytical method. Also, the ANSYS finite-element software is employed for thermo-piezo-mechanical analysis of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder. By providing a numerical example, the effect of various parameters such as the intensity of the magnetic field and temperature and coefficient of heterogeneous material on the stress and strain behavior, electric potential distributions and radial displacement of cylinder is investigated. To validate the results, comparisons are made with the solutions for FGM cylinder available in the literature.</p>

۱- مقدمه  
در سال های اخیر مطالعه های وسیعی در زمینه مواد پیزوالکتریک به علت کاربرد زیاد و پیشرفت های آن در علوم مهندسی صورت گرفته است. یکی از اولین کاربردهای تاثیر پیزوالکتریک در یک زیردریایی فراصوتی موج یاب

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:  
Hosseini, M. and Zandi Baghche Maryam, A., "Electromechanical response analysis of a rotating piezoelectric cylinder with functionally graded material under thermomagnetic fields", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 3, No. 1, pp. 59-72, 2016.

پیشرفته در طول جنگ جهانی اول بود. اثر پیزوالکتریک به زبان ساده، قابلیت برخی از مواد و کریستال‌ها برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی می‌باشد. تولید اختلاف پتانسیل الکتریکی در برخی بلورهای نارسا مثل کوارتز تحت کشش یا فشار همان اثر پیزوالکتریک است. مواد پیزوالکتریک برای ساخت وسایل الکترومکانیکی زیادی برای زمان طولانی مورد استفاده قرار می‌گرفته‌اند. برای اصلاح ساختار ماده‌ی پیزوالکتریک و کاربرد این مواد در محیط‌های مختلف عملاً مواد پیزوالکتریک با مواد تابعی ایجاد شده‌اند. مواد پیزوالکتریک تشکیل شده با مواد تابعی نوعی از مواد ترکیبی می‌باشند که خواص آنها به‌صورت پیوسته در یک راستا تغییر می‌کند. همچنین کاربرد مواد با مواد تابعی به طور خاص در محیط‌های با گرادیان دمایی بالاست و عموماً این مواد از ترکیب یک سرامیک با یک فلز با قابلیت‌های خاص در دماهای بالا و با خواص مکانیکی مطلوب ساخته می‌شوند. از مواد مدرج تابعی در محیط‌های با دمای بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، کارخانجات شیمیایی و نیز در ساخت سفینه‌های فضایی سرعت بالا، اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است. لیم و هی [۱] حل دقیقی برای مواد پیزوالکتریک ناهمگن در حالت بارگذاری ترکیبی ارائه دادند. لیو و همکاران یک مدل تحلیلی برای آنالیز ارتعاشی ورق مدور پیزوالکتریک ارائه دادند. آن‌ها از تئوری میندیلین برای مدل‌سازی ورق استفاده کردند و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت را به وسیله‌ی یک تابع سینوسی مدل نمودند. در نهایت یک روش المان محدود برای یافتن جواب‌ها بکار برده شد [۲]. گالیک و هورگان یک راه حل تحلیلی برای یک سیلندر توخالی پیزوالکتریک را بررسی کردند [۳]. لو و همکاران [۴] راه حل تحلیلی سه بعدی دقیق را برای یک جسم مستطیلی شکل با لایه‌های پیزوالکتریک مدرج و تحت شرایط مرزی ساده به دست آوردند. تاتانسو و اوزترک [۵] حل تحلیلی تنش و تغییر شکل مخازن استوانه‌ای و کروی با مواد تابعی تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که بیشتر شدن سفتی یا مدول الاستیسته در نزدیکی سطح داخلی باعث کاهش تنش در راستای ضخامت استوانه می‌شود. احمدی [۶] به مدل‌سازی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی و بررسی میدان تنش برون صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه کامپوزیتی تحت بارگذاری شعاعی پرداخت. در این مقاله ملاحظه گردید لایه گذاری تاثیر زیادی در توزیع تنش بین لایه‌های دارد. پیتزاکوفسکی روش ارتعاشی یک ورق مستطیلی پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار داد. ورق مورد نظر ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزو به عنوان عملگر و سنسور بود که در یک مدار کنترل سرعت برای بررسی ارتعاش جانبی مورد استفاده قرار می‌گرفت. در مطالعه آنها، دو تئوری مختلف شامل تئوری‌های کیرشپف و میندیلین برای تحلیل ارتعاشی ورق به‌دست آوردن معادلات نهایی مورد استفاده قرار گرفت [۷]. پان و هان نیز یک راه حل دقیقی برای یک صفحه‌ی مستطیل شکل چند لایه‌ای ساخته شده از مواد ناهمگن و الکتروالاستیکی مغناطیسی را ارائه دادند. ردی و چن [۸] تحلیل ترمومکانیکی سیلندرها با مواد تابعی جدار ضخیم را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. آنها خواص مواد را وابسته به دما فرض نمودند تا نتایج بهتری به‌دست آورند. قربانپور و همکاران توزیع فشار در میدان‌های پتانسیل الکتریکی را در کره‌های توخالی پیزوالکتریک بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که توزیع فشار مکانیکی در حالت خاصی می‌تواند به طور کامل توسط میدان الکتریکی خنثی شود [۹]. حیدری رارانی و همکاران [۱۰] به‌صورت تحلیلی ارتعاشات آزاد یک نانو ورق ناهمسانگرد دولایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند. حسینی و همکاران [۱۱] حل تحلیلی انتقال حرارت گذرا در

سیلندرهایی با مواد تابعی جدار ضخیم را با استفاده از توابع بسل به‌دست آوردند. همچنین سعادتفر و رضوی اثرات فشار را در سیلندر توخالی پیزوالکتریک با گرادیان دمایی تحلیل کردند [۱۲]. لی و همکاران مسئله الکتروالاستیک در سیلندرهایی پیزوسرامیکی توخالی را تحلیل کردند که این سیلندرها از عملگرها و سنسورها ساخته شده بودند [۱۳]. شاه و همکاران [۱۴] به بررسی ارتعاش آزاد سیلندر ساخته شده با مواد تابعی واقع بر بستر الاستیک پرداختند. در این بررسی آن‌ها معادلات حرکت را با بکارگیری از روش موج و براساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها به‌دست آوردند. که نتایج به‌دست آمده از این پژوهش نشان دهنده این است که استفاده از یک بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانسی ارتعاش آزاد می‌شود. سبحانی و یاس [۱۵] به بررسی تئوری الاستیسته سه‌بعدی پرداخته و تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با مواد تابعی تقویت شده با الیاف<sup>۱</sup> را مورد مطالعه قرار داده‌اند. معادلات دیفرانسیل معمولی کوبله با ضرایب متغیر با بهره‌گیری از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم‌یافته حل شده‌اند و نتایج حاصل از آن را با نتایج به‌دست آمده از پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت لایه‌ای ساده مقایسه نموده‌اند. نعمت اله [۱۶] به مطالعه اثرات تنش‌های حرارتی بر روی ورق مستطیلی با خواص ماده تابعی دوبعدی پرداخت. با تحلیل نتایج حاصل از این بررسی مشخص شد که مواد مدرج تابعی دوبعدی نسبت به مواد مدرج تابعی یک‌بعدی دارای برتری می‌باشند. سبحانی و همکاران [۱۷] پاسخ‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد یک صفحه انحنادار مدرج تابعی دوبعدی براساس تئوری سه‌بعدی الاستیسته را مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق، با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم‌یافته معادلات حرکت و شرایط مرزی مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. علی بیگلر [۱۸]، [۱۹] به بررسی تغییر شکل ترموالاستیک یک سیلندر ساخته شده با مواد تابعی و پانل پیزوالکتریک دوسر مفصل پرداخت. الشتی و خرسند [۲۰] روش دینامیکی و استاتیکی یک سیلندر مدرج تابعی با لایه‌های پیزوالکتریک تحت تاثیر اثرات ترمو الکترومکانیک را با استفاده از روش تریب دیفرانسیلی بررسی کرده‌اند. قناد و همکاران [۲۱] تنش و تغییر مکان پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم با مواد تابعی تحت فشار داخلی را با استفاده از روش تحلیلی و با بکارگیری تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی بررسی کردند. جباری و همکاران [۲۲] مسائل تنش حرارتی حالت پایا و یک بعدی را برای سیلندرهایی با مواد تابعی جدار ضخیم تحلیل نمودند. آنها تنش‌های حرارتی و مکانیکی را با حل مستقیم معادلات به‌دست آوردند. بابایی و چن حل دقیق یک سیلندر توخالی مگنتوالاستیک دوار را ارائه داد. سیلندر مورد نظر در جهت شعاعی مغناطیس شده بود. سیلندر به‌صورت ارتوتروپیک فرض شده و با حل معادلات مورد نظر، تغییر شکل مکانیکی، تنش‌های شعاعی، مماسی، جابه‌جایی الکتریکی و پتانسیل الکتریکی بر حسب تغییرات سرعت زاویه‌ای مورد بررسی قرار گرفت [۲۳]. قربانپور و همکاران [۲۴] سیلندر پیزوالکتریک تحت میدان مغناطیس را بررسی کردند. در مقاله آنها تاثیر انتقال حرارت بررسی نشده است. در پژوهشی دیگر قربانپور و همکاران [۲۵] با روش عددی تریب دیفرانسیلی، سیلندر دوار تحت دمای غیر متقارن را تحلیل نمودند.

آنچه در مرور مطالعات گذشته بدان اشاره شد نشان دهنده این امر است که با وجود پژوهش‌های قابل توجهی که در زمینه تحلیل سیلندرها تحت بارگذاریهای مختلف انجام شده است، در حوزه حل تحلیلی مسئله سیلندر دوار با ماده مدرج تابعی پیزوالکتریک تحت میدان الکترومکانیک و

پیشرفته در طول جنگ جهانی اول بود. اثر پیزوالکتریک به زبان ساده، قابلیت برخی از مواد و کریستال‌ها برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی می‌باشد. تولید اختلاف پتانسیل الکتریکی در برخی بلورهای نارسا مثل کوارتز تحت کشش یا فشار همان اثر پیزوالکتریک است. مواد پیزوالکتریک برای ساخت وسایل الکترومکانیکی زیادی برای زمان طولانی مورد استفاده قرار می‌گرفته‌اند. برای اصلاح ساختار ماده‌ی پیزوالکتریک و کاربرد این مواد در محیط‌های مختلف عملاً مواد پیزوالکتریک با مواد تابعی ایجاد شده‌اند. مواد پیزوالکتریک تشکیل شده با مواد تابعی نوعی از مواد ترکیبی می‌باشند که خواص آنها به‌صورت پیوسته در یک راستا تغییر می‌کند. همچنین کاربرد مواد با مواد تابعی به طور خاص در محیط‌های با گرادیان دمایی بالاست و عموماً این مواد از ترکیب یک سرامیک با یک فلز با قابلیت‌های خاص در دماهای بالا و با خواص مکانیکی مطلوب ساخته می‌شوند. از مواد مدرج تابعی در محیط‌های با دمای بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، کارخانجات شیمیایی و نیز در ساخت سفینه‌های فضایی سرعت بالا، اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است. لیم و هی [۱] حل دقیقی برای مواد پیزوالکتریک ناهمگن در حالت بارگذاری ترکیبی ارائه دادند. لیو و همکاران یک مدل تحلیلی برای آنالیز ارتعاشی ورق مدور پیزوالکتریک ارائه دادند. آن‌ها از تئوری میندیلین برای مدل‌سازی ورق استفاده کردند و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت را به وسیله‌ی یک تابع سینوسی مدل نمودند. در نهایت یک روش المان محدود برای یافتن جواب‌ها بکار برده شد [۲]. گالیک و هورگان یک راه حل تحلیلی برای یک سیلندر توخالی پیزوالکتریک را بررسی کردند [۳]. لو و همکاران [۴] راه حل تحلیلی سه بعدی دقیق را برای یک جسم مستطیلی شکل با لایه‌های پیزوالکتریک مدرج و تحت شرایط مرزی ساده به دست آوردند. تاتانسو و اوزترک [۵] حل تحلیلی تنش و تغییر شکل مخازن استوانه‌ای و کروی با مواد تابعی تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که بیشتر شدن سفتی یا مدول الاستیسته در نزدیکی سطح داخلی باعث کاهش تنش در راستای ضخامت استوانه می‌شود. احمدی [۶] به مدل‌سازی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی و بررسی میدان تنش برون صفحه‌ای در پوسته‌های استوانه کامپوزیتی تحت بارگذاری شعاعی پرداخت. در این مقاله ملاحظه گردید لایه گذاری تاثیر زیادی در توزیع تنش بین لایه‌های دارد. پیتزاکوفسکی روش ارتعاشی یک ورق مستطیلی پیزوالکتریک را مورد بررسی قرار داد. ورق مورد نظر ورق کامپوزیت با لایه‌های پیزو به عنوان عملگر و سنسور بود که در یک مدار کنترل سرعت برای بررسی ارتعاش جانبی مورد استفاده قرار می‌گرفت. در مطالعه آنها، دو تئوری مختلف شامل تئوری‌های کیرشپف و میندیلین برای تحلیل ارتعاشی ورق به‌دست آوردن معادلات نهایی مورد استفاده قرار گرفت [۷]. پان و هان نیز یک راه حل دقیقی برای یک صفحه‌ی مستطیل شکل چند لایه‌ای ساخته شده از مواد ناهمگن و الکتروالاستیکی مغناطیسی را ارائه دادند. ردی و چن [۸] تحلیل ترمومکانیکی سیلندرها با مواد تابعی جدار ضخیم را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. آنها خواص مواد را وابسته به دما فرض نمودند تا نتایج بهتری به‌دست آورند. قربانپور و همکاران توزیع فشار در میدان‌های پتانسیل الکتریکی را در کره‌های توخالی پیزوالکتریک بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که توزیع فشار مکانیکی در حالت خاصی می‌تواند به طور کامل توسط میدان الکتریکی خنثی شود [۹]. حیدری رارانی و همکاران [۱۰] به‌صورت تحلیلی ارتعاشات آزاد یک نانو ورق ناهمسانگرد دولایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند. حسینی و همکاران [۱۱] حل تحلیلی انتقال حرارت گذرا در

دما در سیلندر را طبق معادله (۳) به دست آورد. با در نظر گرفتن شرایط مرزی دمایی مشخصی می توان ثابت های توزیع دما در جداره سیلندر را با قدری محاسبات جبری محاسبه نمود.

$$T(r) = -\frac{A_1}{\beta} \left(\frac{r}{b}\right)^{-\beta} + A_2 \quad (3)$$

$A_1$  و  $A_2$  ضرایب ثابت هستند که از شرایط مرزی در حالت مختلف، که در ادامه ارائه خواهد شد به دست می آید.

### ۲-۲- ثابت های ماده ناهمگن

ثابت های ماده ناهمگن به صورت توابع توانی که در راستای شعاع تغییر می کند در رابطه (۴) تعریف می شود.

$$\begin{aligned} c_{ij}(r) &= c_{ij0} \left(\frac{r}{b}\right)^\beta, \quad i, j = r, \theta, \quad \mu(r) = \mu_0 \left(\frac{r}{b}\right)^\beta \\ e_{ri}(r) &= e_{ri0} \left(\frac{r}{b}\right)^\beta, \quad i = r, \theta, \quad p_{rr}(r) = p_{rr0} \left(\frac{r}{b}\right)^\beta \\ \bar{\rho}(r) &= \bar{\rho}_0 \left(\frac{r}{b}\right)^\beta, \quad \varepsilon_{rr}(r) = \varepsilon_{rr0} \left(\frac{r}{b}\right)^\beta, \quad \alpha_i(r) = \alpha_{i0} \left(\frac{r}{b}\right)^\beta \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $\theta, c_{ij}, e_{ri}, \mu, p_{rr}, \varepsilon_{rr}, \bar{\rho}, \alpha_i$  به ترتیب متغیر زاویه، ضرایب الاستیک ماده، ضریب نفوذپذیری مغناطیسی، ضرایب پیزوالکتریک، ضریب دی الکتریک، ضریب پیروالکتریک، چگالی، ضرایب انبساط گرمایی و ضرایب گرمایی است که ضرایب گرمایی در اینجا برحسب ضرایب الاستیک و ضرایب انبساط گرمایی تعریف می شوند. رابطه بین میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۵) است [۳].

$$E_r = -\frac{\partial \bar{\psi}(r)}{\partial r} \quad (5)$$

که  $\bar{\psi}$  پتانسیل الکتریکی و  $E_r$  میدان الکتریکی است. معادلات کرنش شعاعی  $\varepsilon_r$  و محیطی  $\varepsilon_\theta$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_e = (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

که در رابطه فوق  $\varepsilon_e$  کرنش معادل و  $u$  جابجایی است.

### ۲-۳- معادلات تنش و جابه جایی الکتریکی

در اینجا معادلات حاکم بر یک سیلندر دوار جداره ضخیم ناهمگن پیزوالکتریک واقع شده در میدان مغناطیسی یکنواخت  $\vec{H}(0,0,H_z)$  آورده شده است. معادلات تنش شعاعی  $\sigma_r$  و محیطی  $\sigma_\theta$  و جابه جایی الکتریکی  $D_r$  برحسب جابجایی، میدان الکتریکی و دما در حالت کرنش صفحه ای به صورت زیر بیان می شوند [۱].

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{r\theta} \frac{u}{r} + e_{rr} \frac{\partial \bar{\psi}(r)}{\partial r} - \lambda_r T(r) \\ \sigma_\theta &= c_{r\theta} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{\theta\theta} \frac{u}{r} + e_{r\theta} \frac{\partial \bar{\psi}(r)}{\partial r} - \lambda_\theta T(r) \\ D_r &= e_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + e_{r\theta} \frac{u}{r} - \varepsilon_{rr} \frac{\partial \bar{\psi}(r)}{\partial r} + p_{rr} T(r) \\ \sigma_e &= \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2} - \sigma_\theta \sigma_r \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه فوق  $\sigma_e$  تنش معادل می باشد.

### ۲-۴- معادلات الکترو دینامیک ماکسول

معادلات الکترو دینامیک ماکسول یک جسم الاستیک به صورت زیر است [۱۱].

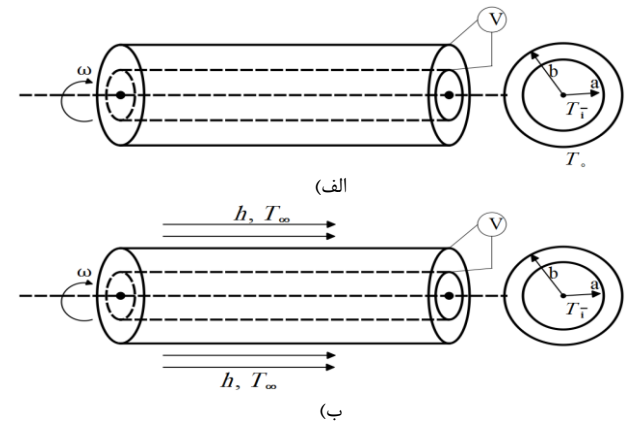
$$\begin{aligned} \vec{j} &= \nabla \times \vec{h}, \quad \nabla \times \vec{e} = -\mu(r) \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{h} = 0 \\ \vec{e} &= -\mu(r) \left( \frac{\partial \vec{l}}{\partial t} \times \vec{H} \right), \quad \vec{h} = \nabla \times (\vec{U} \times \vec{H}) \end{aligned} \quad (8)$$

$\vec{j}$  چگالی جریان،  $e$  بردار مقاومت،  $\mu$  ضریب نفوذ پذیری و  $H_z$  بردار شدت

میدان حرارتی و مغناطیسی به طور همزمان مطالعه ای صورت نگرفته است. لذا در این پژوهش رفتار الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی و حرارتی مورد مطالعه قرار گرفته است. جهت در نظر گرفتن اثرات حرارت دو نوع شرط مرزی حرارتی در نظر گرفته شده است یکی مربوط به دمای ثابت بر روی مرز و دیگری مربوط به شرط انتقال حرارت جابجایی بر روی سطح خارجی سیلندر می باشد. با بکارگیری معادلات توزیع دما در جداره سیلندر تحت شرایط مرزی در نظر گرفته شده و روابط تعادل الکترومکانیک و با به دست آوردن نیروی ناشی از میدان مغناطیسی، معادله دیفرانسیل ناهمگن حاکم بر مساله استخراج می شود که با روش تحلیلی این معادله مورد تحلیل قرار می گیرد. علاوه بر این در این مطالعه از نرم افزار المان محدود انسیس برای مدل سازی و تحلیل عددی مساله نیز استفاده می شود. در نهایت نیز تاثیرات پارامترهای مختلف بر تنش و کرنش، جابجایی الکتریکی و جابجایی شعاعی با ارائه مثال های سیلندرهای دوار پیزوالکتریک استفاده کرد. همچنین از کاربرد این بررسی می توان به مبدل ها، سنسورها و محرک ها و مخازن جدار ضخیم تحت فشار و حرارت اشاره کرد [۲۴-۲۶].

### ۲- فرمولاسیون بنیادین مسئله

یک سیلندر دوار پیزوالکتریک با مواد مدرج تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی و الکترومکانیک، با شعاع داخلی و خارجی به ترتیب  $a$  و  $b$ ، دما در مرز داخلی  $T_i$  و خارجی  $T_o$ ، با سرعت زاویه ای  $\omega$ ، ضریب جابجایی  $h$  و دمای در سطح خارجی  $T_\infty$  همانند شکل ۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۱ سیلندر دوار با مواد تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی و

الکترومکانیک (الف) دما روی مرز ثابت (ب) شرط مرزی جابجایی بر سطح خارجی

### ۲-۱- معادله انتقال حرارت هدایتی

معادله انتقال حرارت برای حالت پایا و یک بعدی بدون وجود منبع حرارتی در مختصات قطبی به صورت معادله (۱) بیان می شود [۱۱].

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r k(r) \frac{\partial T(r)}{\partial r} \right] = 0, \quad (a \leq r \leq b) \quad (1)$$

$a, b$  شعای داخلی و خارجی،  $T$  تغییرات دما،  $r$  متغیر شعاع و  $k(r)$  ضریب حرارتی است و به صورت مدل توانی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$k(r) = k_0 \left(\frac{r}{b}\right)^\beta \quad (2)$$

$\beta$  ضریب ناهمگنی،  $k_0$  ضریب ثابت هدایت است. با جایگزینی رابطه (۲) در معادله (۱) و با دو بار انتگرال گیری از این معادله، می توان معادله توزیع

می‌شود. با تقسیم طرفین این نامساوی بر  $a$ ، شعاع بی بعد شده در نتیجه داریم  $1 \leq \rho \leq \eta$  بطوریکه (روابط (۱۶) و (۱۷)):

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (16)$$

$$\eta = \frac{b}{a} \quad (17)$$

$\rho$  و  $\eta$  ضرایب بدون بعد هستند. با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۷) در (۱۳) و (۱۴) می‌توان روابط (۱۳) و (۱۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho(1 + \beta\xi) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \Gamma u + \xi \rho^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho^2} + (\beta - \alpha + 1)\xi \rho \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} = -\Omega a \rho^3 - A_1 \rho a G_1 + A_2 \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{\beta+1} G_2 \eta a \quad (18)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + (\beta + \alpha + 1)\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \beta \alpha u - \gamma \rho^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho^2} - \gamma(\beta + 1)\rho \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} = -A_1 \eta a \left(\frac{\rho}{\eta}\right)^{-\beta+1} G_3 - A_2 \rho a G_4 \quad (19)$$

که ضرایب موجود در رابطه فوق به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G_1 = \left( \frac{c_{rr0}\alpha_{r0} + c_{r\theta0}\alpha_{\theta0} + \frac{c_{rr0}\alpha_{r0}}{\beta} + \frac{c_{r\theta0}\alpha_{\theta0}}{\beta}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} - \frac{c_{r\theta0}\alpha_{r0}}{\beta} - \frac{c_{\theta\theta0}\alpha_{\theta0}}{\beta} \right)$$

$$G_2 = \left( \frac{2c_{rr0}\alpha_{r0}\beta + 2c_{r\theta0}\alpha_{\theta0}\beta + c_{rr0}\alpha_{r0}\alpha_{\theta0}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} + c_{r\theta0}\alpha_{\theta0} - c_{r\theta0}\alpha_{r0} - c_{\theta\theta0}\alpha_{\theta0} \right)$$

$$G_3 = \left( -\frac{p_{rr0}}{\beta e_{rr0}} \right)$$

$$G_4 = \left( \frac{p_{rr0}}{e_{rr0}} (\beta + 1) \right)$$

$$\xi = \frac{c_{rr0}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}}$$

$$\Gamma = \frac{\beta c_{rr0} - c_{\theta\theta0} - \mu_0 H_z^2}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}}, \quad \alpha = \frac{e_{r\theta0}}{e_{rr0}}$$

$$\Omega = \frac{\bar{\rho}_0 r^3 \omega^2}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{rr0} c_{rr0}}{e_{rr0}^2} \quad (20)$$

با تغییر متغیر  $\rho = e^t$  در روابط (۱۸) و (۱۹) به صورت رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) ساده سازی می‌شود.

$$u'' + \beta \xi u' + \Gamma u + \xi \psi_1'' + \xi(\beta - \alpha)\psi_1' = -\Omega a e^{3t} - A_1 a G_1 e^t + A_2 G_2 a \eta^{-\beta} e^{(\beta+1)t} \quad (21)$$

$$u'' + (\beta + \alpha)u' + \beta \alpha u - \gamma \psi_1'' - \gamma \beta \psi_1' = -A_1 a G_3 \eta^\beta e^{(-\beta+1)t} - A_2 a G_4 e^t \quad (22)$$

که در آن  $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$  و  $(\cdot)'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot)$  است. با دی کوپل کردن و ترکیب دو رابطه (۲۱) و (۲۲) رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

$$\psi_1' = F_1 u'' + F_2 u' + F_3 u + F_4 \quad (23)$$

که ضرایب معادله (۲۳) به صورت رابطه (۲۴) تعریف می‌شود.

میدان مغناطیس است. با در نظر گرفتن  $\vec{H}(0,0,H_z)$  در مختصات قطبی و اینکه سیلندر به اندازه کافی بلند باشد تا شرایط کرنش صفحه‌ای برقرار باشد بنابراین در این مورد تمام متغیرها تابعی از شعاع هستند و جابجایی فقط در راستای شعاع وجود دارد و از جابجایی در بقیه راستاها صرف نظر شده است.

$$\vec{U} = (u, 0, 0), \vec{h} = (0, 0, h_z), \vec{e} = -\mu(r) \left( 0, H_z \frac{\partial u}{\partial t}, 0 \right)$$

$$\vec{j} = \left( 0, -\frac{\partial h_z}{\partial r}, 0 \right), \quad h_z = -H_z \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (9)$$

در رابطه فوق  $h_z$  انحراف بردار مغناطیسی است.

### ۵-۲- معادله تعادل مکانیکی

معادله تعادل با در نظر گرفتن نیروهای جسمی و نیروی ناشی از میدان مغناطیسی هم‌راستا با محور سیلندر به صورت معادله (۱۰) نوشته شده است.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_z + \bar{\rho} r \omega^2 = 0 \quad (10)$$

$\omega$  سرعت زاویه‌ای استوانه دوار و  $f_z$  نیروی لورنتز است که ناشی از میدان مغناطیسی بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_z = \mu(r) H_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (11)$$

### ۲-۶- معادله تعادل الکترواستاتیکی

معادله تعادل الکترواستاتیکی سیلندر جدار ضخیم به صورت معادله (۱۲) بیان شده است [۲].

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (12)$$

### ۳- حل معادلات

با استفاده از پارامترهای رابطه (۴) و جایگذاری معادلات تنش (۷) و نیروی لورنتز (۱۱) در معادله تعادل مکانیکی (۱۰) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \left( 1 + \frac{\beta c_{rr0}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{\beta c_{r\theta0} - c_{\theta\theta0} - \mu_0 H_z^2}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} \right) u + r^2 \left( \frac{e_{rr0}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + r \left( \frac{e_{rr0}(\beta + 1) - e_{r\theta0}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \frac{\bar{\rho}_0 r^3 \omega^2}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} + A_1 r \left( \frac{c_{rr0}\alpha_{r0} + c_{r\theta0}\alpha_{\theta0} + \frac{c_{rr0}\alpha_{r0}}{\beta} + \frac{c_{r\theta0}\alpha_{\theta0}}{\beta} - \frac{c_{r\theta0}\alpha_{r0}}{\beta}}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} - \frac{c_{\theta\theta0}\alpha_{\theta0}}{\beta} - A_2 \left(\frac{r}{b}\right)^{\beta+1} b \left( \frac{2c_{rr0}\alpha_{r0}\beta + 2c_{r\theta0}\alpha_{\theta0}\beta}{\mu_0 H_z^2 + c_{rr0}} + c_{r\theta0}\alpha_{r0} + c_{r\theta0}\alpha_{\theta0} - c_{r\theta0}\alpha_{r0} - c_{\theta\theta0}\alpha_{\theta0} \right) \right) = 0 \quad (13)$$

با جایگذاری معادله جابه‌جایی الکتریکی (۷) در معادله تعادل الکترواستاتیکی (۱۲) داریم:

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \left( (\beta + 1) + \frac{e_{r\theta0}}{e_{rr0}} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{e_{r\theta0}}{e_{rr0}} u - r^2 \left( \frac{\varepsilon_{rr0}}{e_{rr0}} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} - r(\beta + 1) \left( \frac{\varepsilon_{rr0}}{e_{rr0}} \right) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + A_1 \left( b \left(\frac{r}{b}\right)^{-\beta+1} \left( -\frac{p_{rr0}}{\beta e_{rr0}} \right) \right) + A_2 r \left( \frac{p_{rr0}}{e_{rr0}} (\beta + 1) \right) = 0 \quad (14)$$

بر اساس دو رابطه (۱۳) و (۱۴) یک تابع پتانسیل جدید در رابطه (۱۵) تعریف می‌شود.

$$\psi_1 = \frac{e_{rr0}}{c_{rr0}} \bar{\psi} \quad (15)$$

شعاع یک سیلندر جداره ضخیم به صورت  $a \leq r \leq b$  در نظر گرفته

$$K_4 = \frac{-E_4}{F_5 + F_6 + F_7 + F_8}$$

همچنین با انتگرال گرفتن از رابطه‌ی (۲۳) و جایگذاری رابطه‌ی (۳۰) در رابطه‌ی (۲۳) می‌توان پتانسیل الکتریکی را به دست آورد (رابطه (۳۲)).

$$\psi_1 = I_1 A \rho^{m_1} + I_2 B \rho^{m_2} + I_3 C \rho^{m_3} + I_4 \rho^{-\beta+1} + I_5 \rho^{\beta+1} + I_6 \rho^3 + I_7 \rho + M \quad (32)$$

که در آن ضرایب طبق رابطه (۳۳) هستند.

$$I_1 = (F_1 m_1 + F_2 + \frac{F_3}{m_1})$$

$$I_2 = (F_1 m_2 + F_2 + \frac{F_3}{m_2})$$

$$I_3 = (F_1 m_3 + F_2 + \frac{F_3}{m_3})$$

$$I_4 = (k_1 (F_1(-\beta + 1) + F_2 + \frac{F_3}{-\beta + 1}) + \frac{A_1 a G_3 \eta^\beta}{\gamma \alpha (-\beta + 1)})$$

$$I_5 = (k_2 (F_1(\beta + 1) + F_2 + \frac{F_3}{\beta + 1}) - \frac{A_2 a G_2 \eta^{-\beta}}{\xi \alpha (\beta + 1)})$$

$$I_6 = (k_3 (3F_1 + F_2 + \frac{F_3}{3}) + \frac{\Omega a}{3 \xi \alpha})$$

$$I_7 = (k_4 (F_1 + F_2 + F_3) + \frac{A_1 a G_1}{\xi \alpha} + \frac{A_2 a G_4}{\gamma \alpha}) \quad (33)$$

با بی‌بعدسازی رابطه‌ی تنش، روابط (۳۳) و (۳۴) حاصل می‌شود.

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{rr0}} = \frac{1}{a} (\frac{C_{rr}}{c_{rr0}} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{C_{\theta r}}{c_{rr0}} \frac{u}{\rho} + \frac{e_{rr}}{c_{rr0}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} - \frac{\lambda_1}{c_{rr0}} T(r)) \quad (34)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{c_{rr0}} = \frac{1}{a} (\frac{C_{\theta\theta}}{c_{rr0}} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{C_{\theta\theta}}{c_{rr0}} \frac{u}{\rho} + \frac{e_{r\theta}}{c_{rr0}} \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} - \frac{\lambda_2}{c_{rr0}} T(r)) \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳)، (۳۰) و (۳۲) در رابطه‌ی (۳۴) و (۳۵) معادلات تنش به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{rr0}} = \frac{1}{a} \eta^{-\beta} \rho^\beta [A \rho^{(m_1-1)} (m_1 (I_1 + 1) + \delta) + B \rho^{(m_2-1)} (m_2 (I_2 + 1) + \delta) + C \rho^{(m_3-1)} \times (m_3 (I_3 + 1) + \delta) + \rho^{-\beta} ((-\beta + 1)(I_4 + K_1) + K_1 \delta) + \rho^\beta ((\beta + 1)(I_5 + K_2) + K_2 \delta) + \rho^2 (3(I_6 + K_3) + K_3 \delta) + (I_7 + K_4 + K_4 \delta) + (\alpha_{10} + \delta \alpha_{20}) (\frac{A_1}{\beta})] + (-\frac{1}{a}) \eta^{-2\beta} \rho^{2\beta} (\alpha_{10} + \delta \alpha_{20}) A_2 \quad (36)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{c_{rr0}} = \frac{1}{a} \eta^{-\beta} \rho^\beta [A \rho^{(m_1-1)} (m_1 (\alpha I_1 + \delta) + \vartheta) + B \rho^{(m_2-1)} (m_2 (\alpha I_2 + \delta) + \vartheta) + C \rho^{(m_3-1)} (m_3 (\alpha I_3 + \delta) + \vartheta) + \rho^{-\beta} (K_1 (\delta (-\beta + 1) + \vartheta) + \alpha I_4 (-\beta + 1)) + \rho^\beta (K_2 (\delta (\beta + 1) + \vartheta) + \alpha I_5 (\beta + 1)) + \rho^2 (K_3 (3\delta + \vartheta) + 3\alpha I_6) + (K_4 (\delta + \vartheta) + \alpha I_7) + (\alpha_{10} \delta + \alpha_{20} \vartheta) (\frac{A_1}{\beta})] + (-\frac{1}{a}) \eta^{-2\beta} \rho^{2\beta} (\alpha_{10} \delta + \alpha_{20} \vartheta) A_2 \quad (37)$$

$$F_1 = \frac{\gamma + \xi}{\xi \gamma \alpha}$$

$$F_2 = \frac{\beta(\gamma + 1) + \alpha}{\alpha \gamma}$$

$$F_3 = \frac{\Gamma \gamma + \beta \xi \alpha}{\gamma \alpha \xi}$$

$$F_4 = \frac{A_1 a G_3 \eta^\beta e^{(-\beta+1)t}}{\gamma \alpha} + \frac{A_1 a G_1 e^t}{\xi \alpha} + \frac{A_2 a G_4 e^t}{\gamma \alpha} - \frac{A_2 a G_2 e^{(\beta+1)t} \eta^{-\beta}}{\xi \alpha} + \frac{\Omega a e^{3t}}{\xi \alpha} \quad (34)$$

با جایگزینی رابطه (۲۳) و مشتق آن در رابطه (۲۱) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$F_5 u''' + F_6 u'' + F_7 u' + F_8 u + F_9 = 0 \quad (25)$$

که:

$$F_5 = \frac{\gamma + \xi}{\gamma \alpha}$$

$$F_6 = \frac{\beta(\gamma(1 + \xi) + 2\xi)}{\gamma \alpha}$$

$$F_7 = \frac{\Gamma}{\alpha} + \frac{\xi(\beta \alpha + \beta^2(\gamma + 1) - \alpha^2)}{\gamma \alpha}$$

$$F_8 = \frac{\beta \Gamma}{\Gamma} + \frac{\xi \beta (\beta - \alpha)}{\gamma}$$

$$F_9 = E_1 e^{(-\beta+1)t} + E_2 e^{(\beta+1)t} + E_3 e^{3t} + E_4 e^t$$

$$E_1 = \frac{(1 - \alpha) \xi A_1 a G_3 \xi^\beta}{\gamma \alpha}$$

$$E_2 = \frac{(-2\beta - 1) A_2 a G_2 \eta^{-\beta}}{\alpha}$$

$$E_3 = \frac{(3 + \beta) \Omega a}{\alpha}$$

$$E_4 = \frac{(\beta + 1) A_1 G_1 a}{\alpha} + \frac{(\beta - \alpha + 1) \xi A_2 a G_4}{\gamma \alpha} \quad (26)$$

ابتدا برای به دست آوردن جواب عمومی رابطه‌ی (۲۵)، با صرف نظر

کردن از قسمت ناهمگن این رابطه جواب همگن به دست می‌آید.

$$u_g = A \rho^{m_1} + B \rho^{m_2} + C \rho^{m_3} \quad (27)$$

و با فرض اینکه جواب خصوصی رابطه‌ی (۲۵) به صورت رابطه‌ی (۲۸)

است،  $A, B, C$  از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

$$u_p = K_1 \rho^{-\beta+1} + K_2 \rho^{\beta+1} + K_3 \rho^3 + K_4 \rho \quad (28)$$

با جایگزینی رابطه (۲۸) در رابطه‌ی (۲۵) جواب خصوصی به دست

می‌آید. بنابراین جواب کلی از حاصل جمع جواب خصوصی و عمومی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u = u_p + u_g \quad (29)$$

$$u = A \rho^{m_1} + B \rho^{m_2} + C \rho^{m_3} + K_1 \rho^{-\beta+1} + K_2 \rho^{\beta+1} + K_3 \rho^3 + K_4 \rho \quad (30)$$

که ضرایب جواب خصوصی عبارتند از:

$$K_1 = \frac{-E_1}{F_5(-\beta + 1)^3 + F_6(-\beta + 1)^2 + F_7(-\beta + 1) + F_8}$$

$$K_2 = \frac{-E_2}{F_5(\beta + 1)^3 + F_6(\beta + 1)^2 + F_7(-\beta + 1) + F_8}$$

$$K_3 = \frac{-E_3}{27F_5 + 9F_6 + 3F_7 + F_8}$$

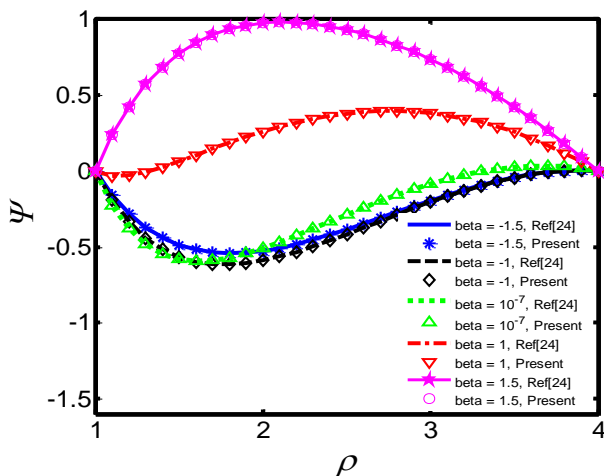
$$(31)$$

شکل به خوبی نشان می‌دهد که نتایج به‌دست آمده در این تحقیق با نتایج حاصل از کارهای گذشته هم‌خوانی دارد. در شکل ۳، به بررسی کرنش و تنش به ازای مقادیر مختلف پارامترهای  $T_0$  و  $H_z = 1 \times 10^9 A/m$ ،  $\beta = -1.5$ ،  $\Omega = 1$ ،  $m$ ، برحسب مقادیر مختلف  $\rho$  پرداخته شده است. همچنین  $T_i = 0$  می‌باشد. همانطور که در شکل ۳ الف مشاهده می‌شود، با افزایش دمای بیرونی سیلندر، کرنش شعاعی همانطور انتظار می‌رود افزایش می‌یابد. براساس نتایج به‌دست آمده در شکل ۳ ب، مشخص است که مشابه با نتایج شکل ۳ الف، با افزایش دمای بیرونی مقادیر تنش نیز افزایش می‌یابد.

شکل ۳ ج و د، نشان دهنده تغییرات جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی سیلندر مدرج تابعی است که تمامی خواص آن در راستای شعاع تغییر می‌کند. همان‌طوریکه در شکل ۳ ج نشان داده شده است، مقادیر جابه‌جایی شعاعی با افزایش دمای بیرونی افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود در سیلندر مدرج تابعی دوبعدی با افزایش پارامتر بی بعد  $\rho$  مقادیر جابه‌جایی شعاعی در محدوده‌ای کاهش و در محدوده‌ای دیگر افزایش می‌یابد. در شکل ۳ د، همانطور که مشاهده می‌شود توزیع پتانسیل الکتریکی در نقطه ابتدا و انتهای پارامتر بی بعد  $\rho$  به سمت عدد صفر میل می‌کند تا شرایط مرزی در نظر گرفته شده را ارضا نماید. همچنین در این حالت نیز افزایش دما موجب کاهش تابع پتانسیل الکتریکی می‌شود.

در شکل‌های ۴ الف و ب، کرنش و تنش برحسب پارامتر مختلف بی بعد  $\rho$  و  $T_0 = 50^\circ C$ ،  $\beta = -1.5$ ، در پنج مقدار از پارامتر مغناطیسی با مقادیر  $H_z = 0, 1 \times 10^9 \frac{A}{m}$ ،  $2 \times 10^9 \frac{A}{m}$ ،  $3 \times 10^9 \frac{A}{m}$ ،  $4 \times 10^9 \frac{A}{m}$  رسم شده‌اند. در این نمودارها، تاثیر افزایش پارامتر شدت میدان مغناطیس بر پاسخ استوانه مدرج تابعی به تفصیل ارزیابی شده است. همان‌طور که در شکل ۴ الف مشاهده می‌شود، با افزایش عدد پارامتر شدت مغناطیسی، مقادیر کرنش سیلندر مدرج تابعی افزایش می‌یابد. همچنین مقدار کرنش در حالتی که پارامتر  $\rho$  افزایش یابد تقریباً به سمت عددی ثابت میل می‌کند.

شکل ۴ ب توزیع تنش را در راستای شعاع بی بعد به ازای مقادیر مختلف شدت مغناطیسی نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل مشخص است افزایش اثرات پارامتر شدت میدان مغناطیس، با افزایش اثرات تنش همراه است به گونه‌ای که نرخ افزایش تنش در حالتی که  $\rho$  افزایش یابد کم می‌شود.



شکل ۲ مقایسه توزیع پتانسیل الکتریکی با مرجع [۲۴] برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  و پارامتر نا همگنی  $\beta$  و  $\Omega = 1$ ،  $H_z = 0$ ،  $T_0 = 0$

$$\delta = \frac{C_{r\theta\theta}}{C_{rr0}} \quad (38)$$

$$\vartheta = \frac{C_{\theta\theta\theta}}{C_{rr0}} \quad (39)$$

همچنین تابع پتانسیل الکتریکی را می‌توان بر شعاع داخلی  $a$  به‌صورت روابط (۴۰) و (۴۱) تقسیم نمود.

$$\psi = \frac{\psi_1}{a} \quad (40)$$

$$\psi = \frac{1}{a} (I_1 A \rho^{m_1} + I_2 B \rho^{m_2} + I_3 C \rho^{m_3} + I_4 \rho^{-\beta+1} + I_5 \rho^{\beta+1} + I_6 \rho^3 + I_7 \rho + M) \quad (41)$$

اکنون با اعمال شرایط مرزی، ثابت انتگرال  $B$ ،  $A$  و  $C$  در رابطه (۳۶) و (۳۷) و ثابت انتگرال  $M$  در رابطه (۴۱) و همچنین ثابت‌های توزیع دما  $A_2$  و  $A_1$  در رابطه (۳) به‌دست می‌آیند.

#### ۴- نتایج و بحث

در این بخش نتایج عددی برای سیلندر دوار با این فرض که سطح خارجی این سیلندر از ماده پیزوالکتریک PZT-4 ساخته شده است، بررسی می‌شود. خواص این ماده پیزوالکتریک در جدول ۱ آورده شده است [۳].

جدول ۱ خواص ماده پیزوالکتریک PZT-4

خواص و مقادیر آنها	
$C_{rr0} = 115 \times 10^9$ pa	$P_{rr0} = -2.5 \times 10^{-5} \frac{C}{km^2}$
$C_{r\theta\theta} = 74.3 \times 10^9$ pa	$\alpha_{r0} = 7.41 \times 10^{-6} 1/K$
$C_{\theta\theta\theta} = 139 \times 10^9$ pa	$\alpha_{\theta\theta} = 2.11 \times 10^{-6} 1/K$
$e_{rr0} = 15.1 C/m^2$	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$
$e_{r\theta\theta} = -5.2 C/m^2$	$\bar{\rho}_0 = 7500 \text{ kg}/m^3$
$\epsilon_{rr0} = 5.62 \times 10^{-9} \frac{C^2}{Nm^2}$	

در این تحقیق چهار حالت در نظر گرفته می‌شود و در هر حالت با شرایط مرزی مختلف و به ازای مقادیر مختلف پارامترهای  $\Omega$ ،  $H_z$ ،  $T_0$  و  $\beta$  به بررسی رفتار الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با مواد تابعی پرداخته می‌شود.

#### ۴-۱-۴ نتایج عددی با استفاده از روش تحلیلی

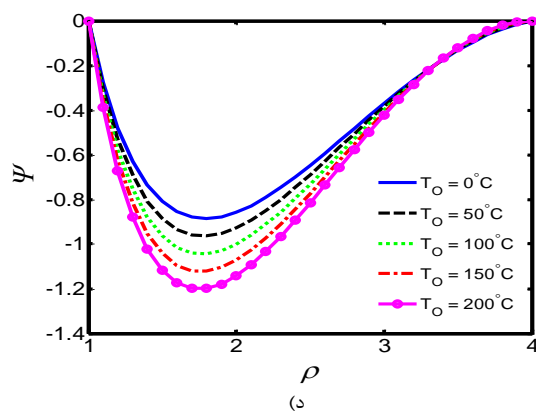
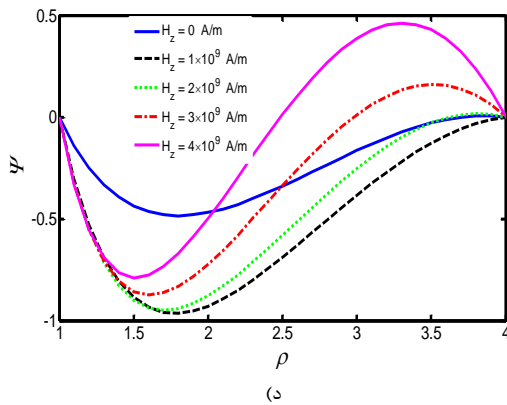
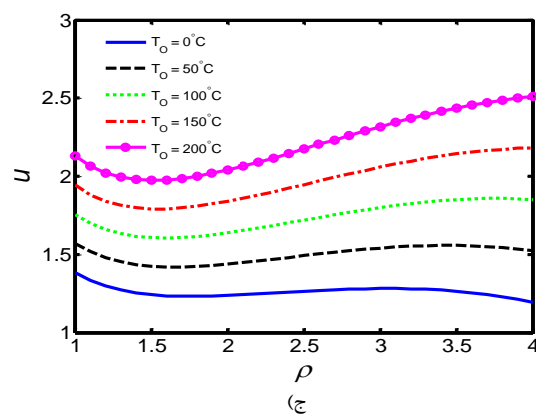
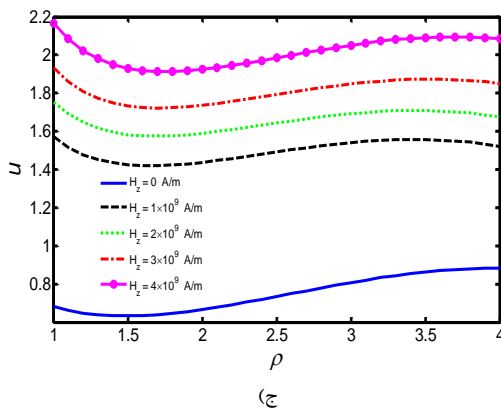
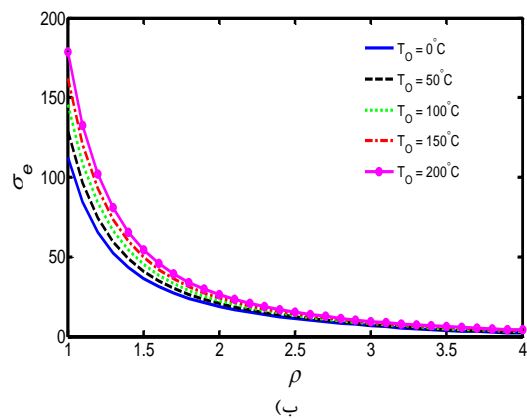
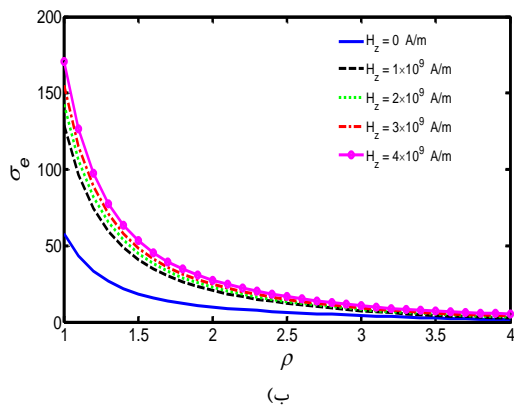
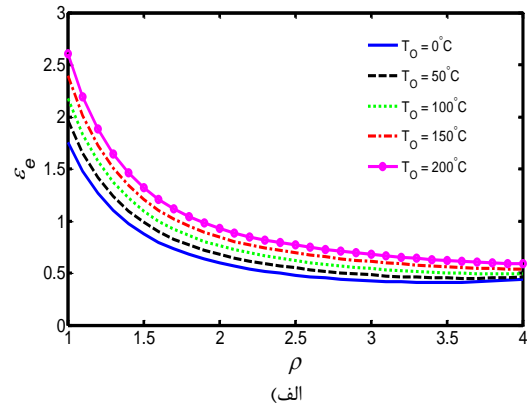
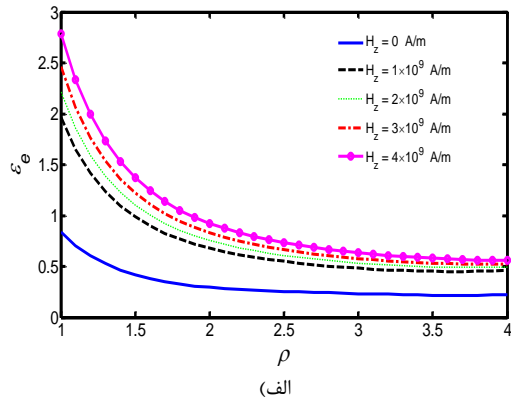
##### ۴-۱-۱-۴ حالت اول

فرض کنید در این حالت یک سیلندر دوار دوار پیزوالکتریک در معرض دمای داخلی  $T_i$  و دمای بیرونی سیلندر  $T_0$ ، میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی قرار دارد. در این حالت شرایط مرزی در  $r = a$  ( $\rho = 1$ ) و  $r = b$  ( $\rho = \eta$ ) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(\eta) = 0, \psi(1) = 0, \psi(\eta) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r)|_{r=a} = T_i \\ T(r)|_{r=b} = T_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{(T_i - T_0)\beta}{(1 - \eta^\beta)} \\ A_2 = \frac{(T_i - T_0)}{(1 - \eta^\beta)} + T_0 \end{array} \right. \quad (42)$$

به‌منظور بررسی صحت نتایج این پژوهش، توزیع پتانسیل الکتریکی سیلندر مدرج تابعی به‌دست آمده با نتایج مقاله مرجع [۲۴] در غیاب اثرات پیزوالکتریک و دما مقایسه شده و نتایج در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۴ الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی

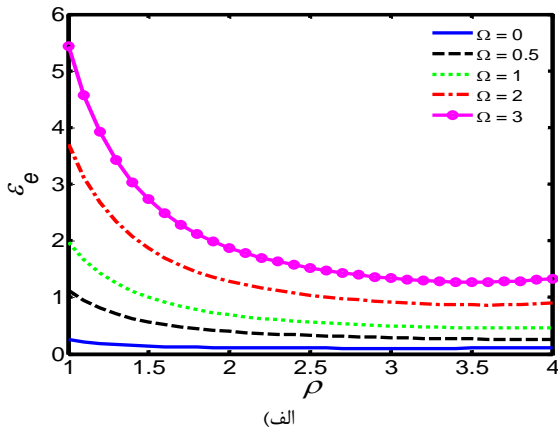
برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $H_z$  و

$$\beta = -1.5, T_0 = 50^\circ\text{C}, \Omega = 1$$

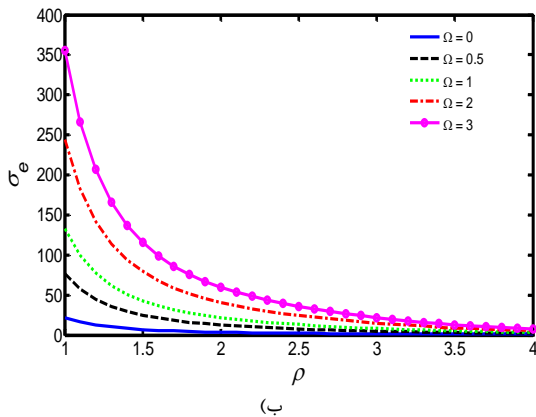
شکل ۳ الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی

برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر  $T_0$  و

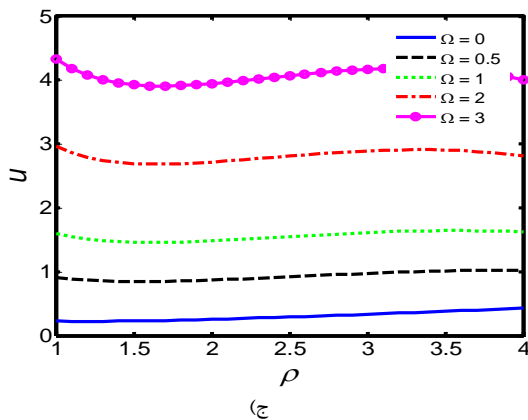
$$\beta = -1.5, H_z = 1 \times 10^9 \text{ A/m}, \Omega = 1$$



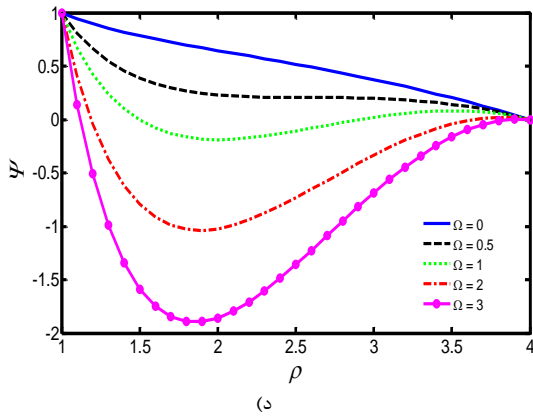
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۴ (الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر بعد  $\rho$  به ازای مقادیر  $\Omega$  و  $H_z = 1 \times 10^9 A/m$  و  $\beta = -1.5, T_0 = 50^\circ C$

در شکل ۴ ج و د جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی رسم شده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش عدد پارامتر شدت میدان مغناطیس، مقادیر جابه‌جایی شعاعی سیلندر مدرج تابعی دو بعدی افزایش می‌یابد. در این حالت نیز، با افزایش مقادیر شدت میدان مغناطیس، پتانسیل الکتریکی در حالتی مشخص افزایش و در دیگر بازه پارامتر بی بعد شعاع کاهش می‌یابد.

#### ۴-۱-۲- حالت دوم

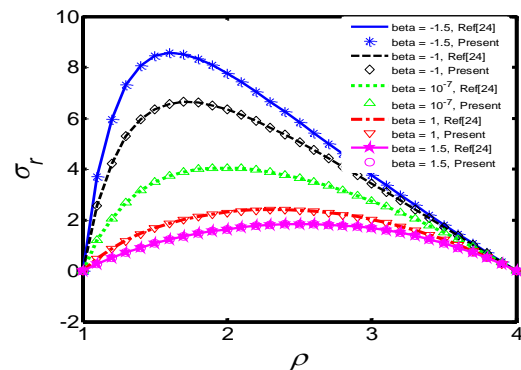
در این حالت یک سیلندر دوار دوار که در معرض دما داخلی  $T_i$  و دمای بیرونی سیلندر  $T_0$ ، میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی قرار دارد را در نظر بگیرید. در این حالت شرایط مرزی طبق رابطه (۴۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\sigma_{rr}}{c_{rr0}}(1) = 0, \frac{\sigma_{rr}}{c_{rr0}}(\eta) = 0, \psi(1) = 1, \psi(\eta) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r)|_{r=a} = T_i \\ T(r)|_{r=b} = T_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{(T_i - T_0)\beta}{(1 - \eta^\beta)} \\ A_2 = \frac{(T_i - T_0)}{(1 - \eta^\beta)} + T_0 \end{array} \right. \quad (43)$$

برای اعتبار سنجی، نتایج حاصل از حل تحلیلی مدل سیلندر مدرج تابعی برای حالت بدون اثرات میدان مغناطیس و حرارتی با نتایج حاصل از حل تحلیلی مشابه انجام شده توسط قربانپور و همکاران [۲۴] در شکل ۵ مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود نمودارهای مربوطه تطابق خوبی با یکدیگر دارند. پس از اعتبارسنجی مدل سیلندر مدرج تابعی با حل تحلیلی، شکل ۶ تنش و کرنش، جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی را بر حسب شعاع بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی بعد دورانی  $\Omega$  را نشان می‌دهد. مقادیر عددی  $\beta = -1.5, H_z = 10^9 A/m, T_0 = 50^\circ C$  این شکل در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است در این حالت نیز همانند شکل‌های قبلی با افزایش  $\Omega$  علاوه بر اینکه تنش و کرنش ناشی از آن افزایش می‌یابد، سرعت دورانی موجب افزایش تغییر مکان شعاعی نیز می‌گردد. همچنین پتانسیل الکتریکی در تمام بازه شعاع بی بعد شده با کاهش روبرو می‌شود.

شکل ۷ الف و ب به ترتیب تأثیر تغییرات کرنش و تنش به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  و  $\Omega = 1, H_z = 10^9 A/m, T_0 = 0$  را برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  نشان می‌دهد، به گونه‌ای که هر چه مقدار  $\beta$  بیشتر باشد کرنش ایجاد شده دارای مقادیر بیشتری بوده و هرچه مقدار پارامتر ناهمگنی کمتر باشد کرنش ایجاد شده دارای مقادیر کمتری می‌شود. همچنین در شعاع‌های بالاتر تغییرات کرنش و تنش با تغییرات پارامتر ناهمگنی کاهش می‌یابد.



شکل ۵ مقایسه توزیع تنش شعاعی با مرجع [۲۴] برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  و پارامتر ناهمگنی  $\beta$  و  $\Omega = 1, H_z = 0, T_0 = 0$



همان گونه که در شکل ۷ ج و د مشخص است با افزایش پارامتر ناهمگنی  $\beta$ ، جابه‌جایی شعاعی افزایش و توزیع پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد به گونه‌ای که میزان این تغییرات در جابجایی شعاعی بیشتر از پتانسیل الکتریکی است. همچنین همانطوری که از شکل مشخص است تابع پتانسیل شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

#### ۳-۱-۴- حالت سوم

در این حالت نیز یک سیلندر دوار پیزوالکتریک که در معرض دما، میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی قرار دارد و تحت انتقال حرارت جابجایی با ضریب جابجایی  $h$  در بیرون سیلندر است مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی در این حالت در رابطه (۴۴) ارائه شده است [۲۶].

$$\frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(1) = -3, \frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(\eta) = 0, \psi(1) = 3, \psi(\eta) = 0$$

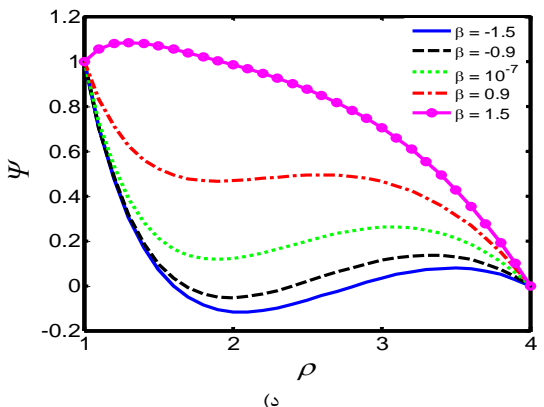
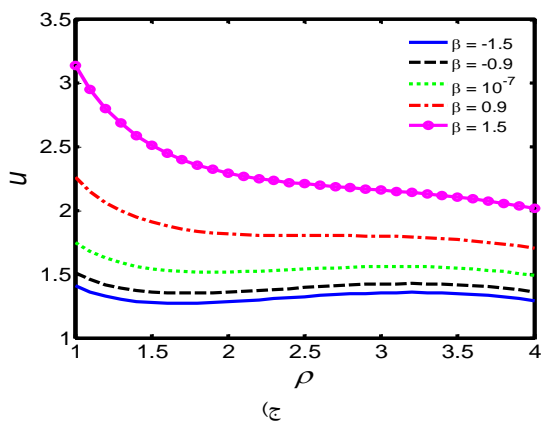
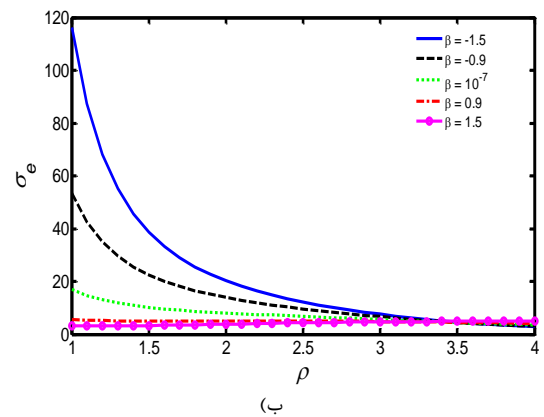
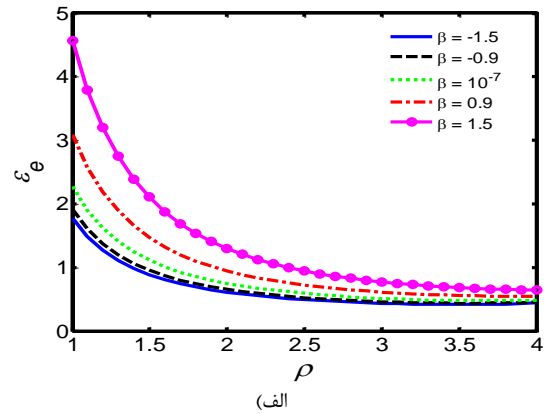
$$\left\{ \begin{array}{l} T(r)|_{r=a} = T_i \\ \left( \frac{\partial T(r)}{\partial x} + hT(r) \right) \Big|_{r=b} = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{hT_i}{\left( \frac{h}{\beta} - \frac{1}{b} - \frac{h\eta^\beta}{\beta} \right)} \\ A_2 = \frac{T_i[-\beta b^{-1} + h]}{-\beta b^{-1} + h(1 - \eta^\beta)} \end{array} \right. \quad (44)$$

شکل ۸ برای شرایط مرزی که در رابطه (۴۴) در نظر گرفته شده است رسم شده است. برای بررسی کرنش ناشی از حرارت برحسب پارامتر بی بعد شعاع و مقادیر مختلف دمای داخلی شکل ۸ الف ارائه شده است. در این بررسی، افزایش دمای داخلی به دلیل کاهش اختلاف دمای داخل و خارج سیلندر موجب کاهش کرنش حجمی می‌گردد.

در شکل ۸ ب همانند کرنش در شکل ۸ الف نیز افزایش دما موجب کاهش تنش می‌شود. دلیل آن نیز روشن است که با افزایش دمای داخل سیلندر موجب کاهش اختلاف دو سطح داخلی و خارجی می‌شود. برای نشان دادن اثرات دمای داخلی سیلندر بر جابجایی شعاعی برحسب مقادیر پارامتر بی بعد شعاع برای دماهای داخلی مختلف  $T_i = 0, 10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}, 50^\circ\text{C}$  در شکل ۸ ج نتایج آورده شده است. در این حالت با افزایش دمای داخلی، به دلیل کاهش اثرات دما در داخل و خارج سیلندر، جابجایی کاهش می‌یابد.

شکل ۸ د توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $T_i$  و پارامترهای  $\beta = -1.5, H_z = 10^9 \text{ A/m}, \Omega = 1$  ترسیم شده است. همانطور که از این شکل ملاحظه می‌گردد، برای رفتار الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی، پتانسیل الکتریکی در حالت بدون در نظر گرفتن حرارت نسبت به در نظر گرفتن حرارت داخلی افزایش می‌یابد و یا به بیانی دیگر افزایش دما، موجب کاهش توزیع پتانسیل الکتریکی می‌شود.

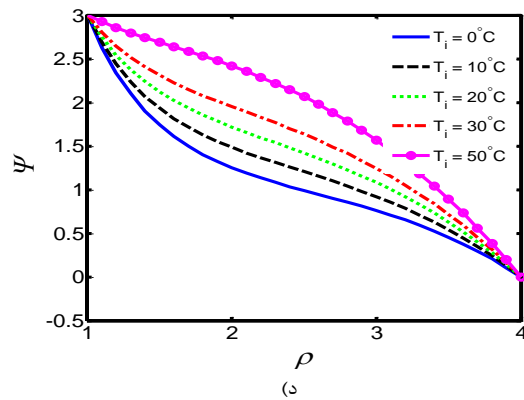
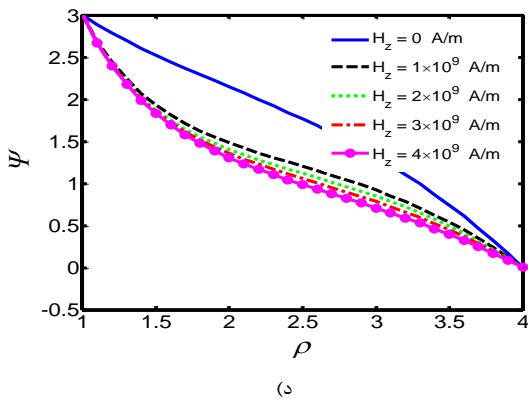
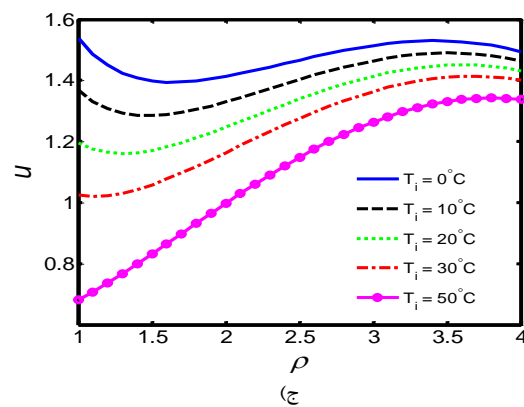
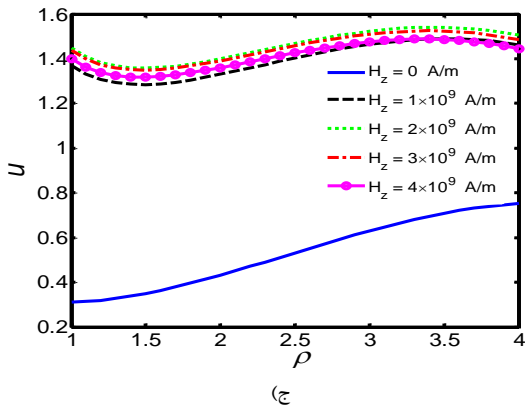
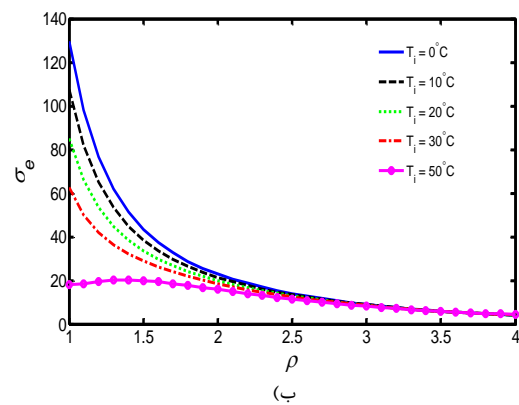
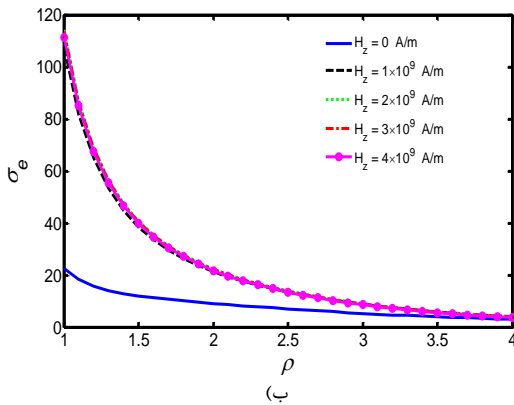
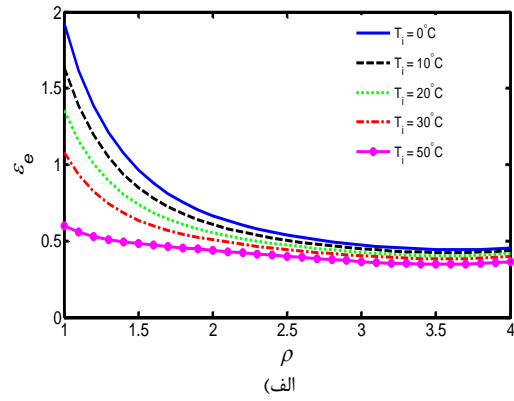
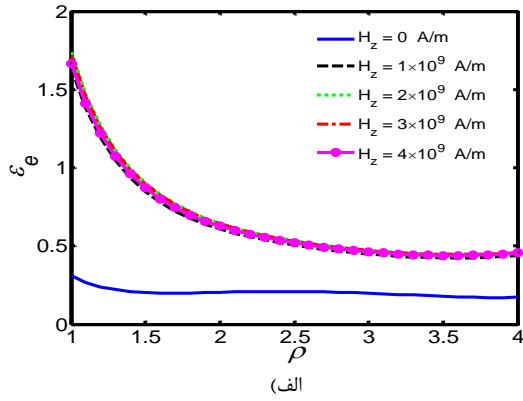
در شکل‌های ۹ الف و ب، کرنش و تنش برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  و به ازای پارامتر شدت مغناطیسی و  $\beta = -1.5, T_i = 10^\circ\text{C}, \Omega = 1$  رسم شده‌اند. با تفسیر و تحلیل این نمودارها متوجه خواهیم شد که با افزایش عدد پارامتر شدت مغناطیسی، مقادیر کرنش و تنش سیلندر با خواص مواد تابعی تا حدی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش شعاع بدون بعد  $\rho$  مقادیر تغییرات کرنش و مقدار تنش بر حسب شعاع کاهش می‌یابد. شکل ۹ ج جابه‌جایی شعاعی و شکل ۹ د توزیع پتانسیل الکتریکی را بر حسب شعاع بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $H_z$  برای مدل سیلندر نشان می‌دهد و در آن اثر تغییر شدت میدان مغناطیس بر جابه‌جایی شعاعی استوانه مدرج تابعی به تفصیل ارزیابی شده است.



شکل ۷ الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی

برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  و

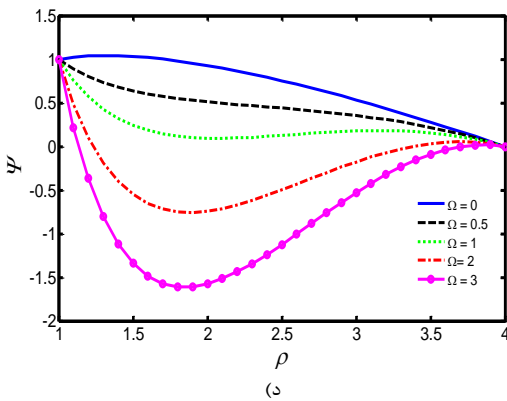
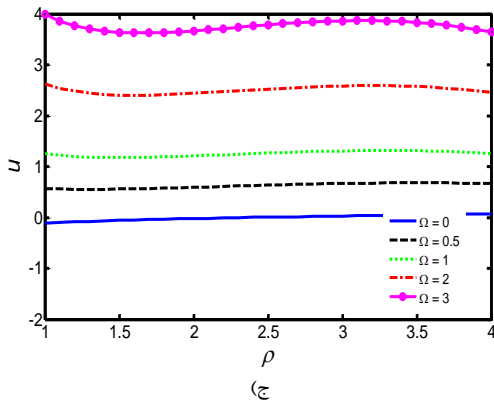
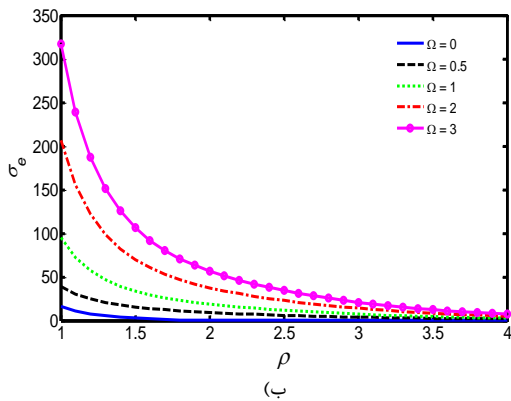
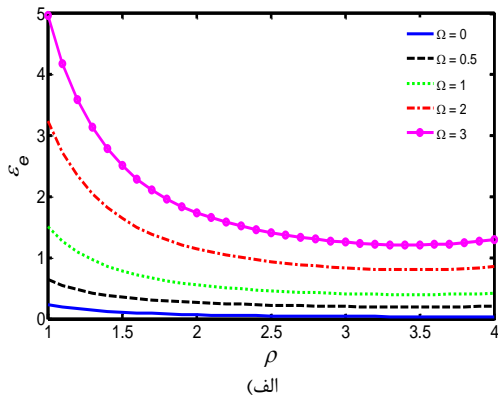
$$H_z = 1 \times 10^9 \text{ A/m}, T_0 = 0, \Omega = 1$$



شکل ۹ الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $H_z$  و  $\beta = -1.5, T_i = 10^\circ\text{C}, \Omega = 1$

شکل ۸ الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $T_i$  و  $\beta = -1.5, H_z = 1 \times 10^9 \text{ A/m}, \Omega = 1$

افزایش تغییر مکان می‌گردد.



شکل ۱۰ الف) کرنش ب) تنش ج) جابه‌جایی شعاعی د) توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر  $\rho$  به ازای مقادیر  $\Omega$  و  $\beta = -1.5, H_z = 1 \times 10^9 A/m, T_i = 10^\circ C$

همان‌طور که در شکل ۹ ج مشخص است در این حالت نیز همانند شکل‌های قبلی، افزایش شدت میدان مغناطیس علاوه بر افزایش تنش و کرنش تا حدی موجب افزایش تغییر مکان شعاعی می‌گردد. همچنین پتانسیل الکتریکی در تمام بازه‌ی شعاع بی بعد شده بر خلاف شکل‌های قبلی با کاهش روبرو می‌شود (شکل ۵۹). در این حالت نیز نظیر حالت‌های دیگر بررسی شده در شکل‌های قبلی شرایط مرزی مربوطه برقرار است.

#### ۴-۱-۴ حالت چهارم

در این حالت یک سیلندر پیزوالکتریک دوار که در معرض دما، میدان مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی قرار دارد در نظر گرفته می‌شود. سیلندر دوار در تماس انتقال حرارت جابجایی با ضریب جابجایی  $h$  در بیرون است. شرایط مرزی در این حالت در رابطه (۴۵) ارائه شده است [۲۶].

$$\frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(1) = -1, \frac{\sigma_{rr}}{C_{rr0}}(\eta) = 0, \psi(1) = 1, \psi(\eta) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(r)|_{r=a} = T_i \\ \left( \frac{\partial T(r)}{\partial x} + hT(r) \right) \Big|_{r=b} = 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{hT_i}{\left( \frac{h}{\beta} - \frac{1}{b} - \frac{h\eta^\beta}{\beta} \right)} \\ A_2 = \frac{T_i[-\beta b^{-1} + h]}{-\beta b^{-1} + h(1 - \eta^\beta)} \end{array} \right. \quad (45)$$

شکل ۱۰ الف تاثیر ضریب  $\Omega$  بر نمودار پاسخ کرنش سیستم را نشان می‌دهد. همان‌گونه که قابل مشاهده است، با افزایش پارامتر  $\Omega$  بیشینه دامنه کرنش نیز دچار افزایش می‌شود. این شکل نشان از افزایش کرنش با افزایش میزان پارامتر دورانی دارد. در شکل ۱۰ ب تنش برحسب پارامتر  $\rho$  و به ازای مقادیر مختلف  $\Omega$  و  $H_z = 10^9 A/m, T_i = 10^\circ C, \beta = -1.5$  ارائه شده است. در این حالت با افزایش پارامتر بی بعد دوران سیلندر یا به عبارت دیگر، افزایش سرعت زاویه‌ای سیلندر دوار، تنش سیستم ناشی از آن افزایش می‌یابد که این خود علاوه بر افزایش کرنش سیستم منجر به افزایش تنش نیز می‌شود. جهت بررسی اثرات سرعت زاویه‌ای بر جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی به ازای  $H_z = 10^9 A/m, T_i = 10^\circ C$  و  $\beta = -1.5$  برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$ ، شکل ۱۰ ج و د ارائه گردیده است. به ازای مقادیر ذکر شده با افزایش پارامتر سرعت دورانی تغییر مکان ناشی از آن افزایش می‌یابد. همچنین همان‌طور در شکل ۱۰ د مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دورانی، پتانسیل الکتریکی نسبی در مقایسه با حالت بدون دوران اختلاف آن بیشتر گردیده و علاوه بر این در مقدار بی بعد شعاع در ابتدا و انتها شرایط مرزی نیز ارضا می‌گردد.

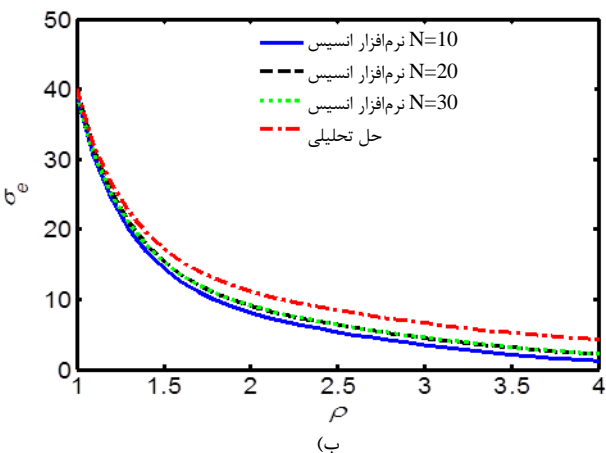
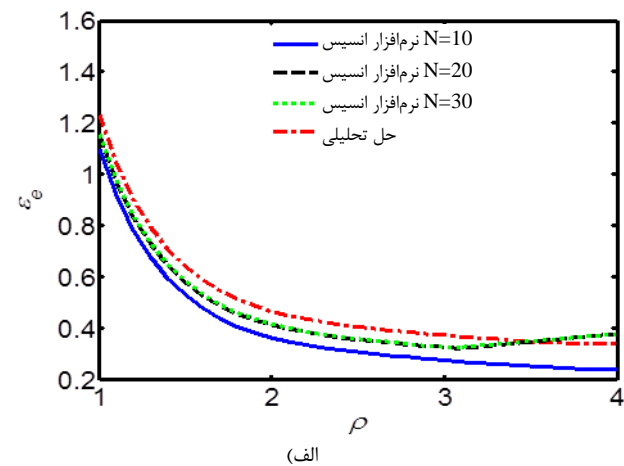
برای بررسی اثرات ضرایب ناهمگنی بر کرنش، تنش، جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  و به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  و مقادیر  $H_z = 10^9 A/m, T_i = 0^\circ C, \Omega = 1$  شکل ۱۱ ارائه شده است. مشخص است که با تغییر ضریب ناهمگنی و افزایش آن مقدار بیشینه مقدار کرنش در تمام بازه در نظر گرفته شده افزایش می‌یابد. در شکل ۱۱ ب، تاثیر ضریب غیرهمگنی بدون بعد  $\beta = 1.5, 0.9, 10^{-7}, -0.9, -1.5$  بر پاسخ تنش سیستم نشان داده شده است. با افزایش ضریب ناهمگنی بدون بعد منحنی‌های نمودار به سمت تنش‌های پایین‌تر متمایل می‌شوند. این نشان از افزایش رفتار نرم شوندگی سیلندر مدرج تابعی با افزایش ضریب ناهمگنی بدون بعد دارد.

اثر تغییر ضریب ناهمگنی بدون بعد بر نمودار تغییر جابجایی در راستای شعاع، در شکل ۱۱ ج آورده شده است. در این شکل مشخص است که با افزایش ضریب ناهمگنی بدون بعد میزان جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان این‌گونه بیان نمود که افزایش ضریب ناهمگنی موجب

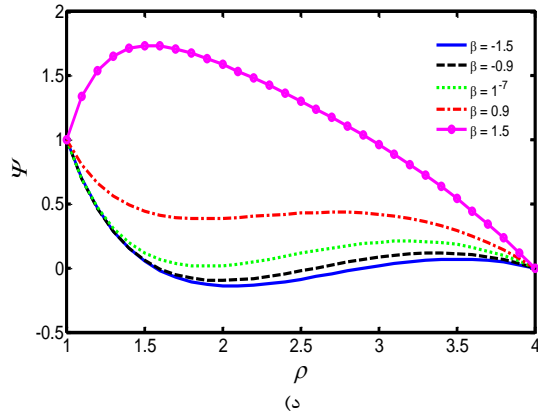
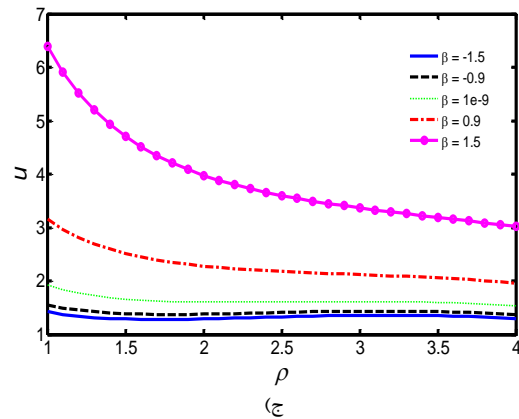
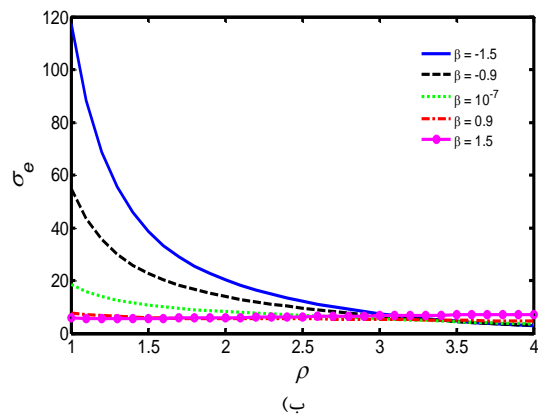
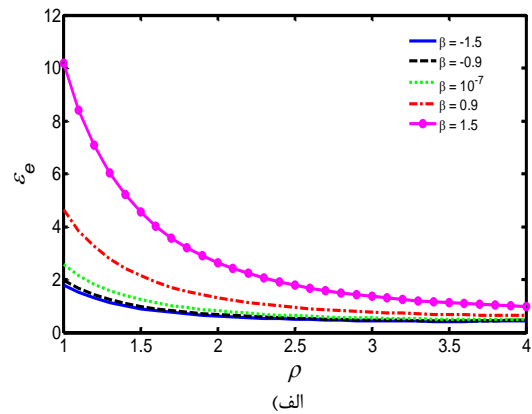
در شکل ۱۱ د توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  و  $\Omega = 1, H_z = 10^9 A/m, T_i = 0$  ترسیم شده است. همانطور که در این شکل مشخص است توزیع پتانسیل الکتریکی با افزایش ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد. این امر نشان از کاهش توزیع پتانسیل الکتریکی سیلندر دوار با مواد مدرج تابعی با افزایش ضریب ناهمگنی بدون بعد را دارد.

#### ۴-۲- مقایسه نتایج حل تحلیلی با نتایج عددی حاصل از مدل سازی با نرم افزار المان محدود انسیس

به منظور بررسی نتایج و اعتبار سنجی آن، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از نرم افزار انسیس مقایسه شده است. شکل ۱۲ مربوط به رابطه (۴۲) و شکل ۱۳ با استفاده از شرایط مرزی ارائه شده در رابطه (۴۳) به دست آمده است. نتایج عددی با استفاده المان سه بعدی SOLID191 که قابلیت مدلسازی سازه‌های با مواد تابعی و خواص پیزوالکتریک را دارد حاصل شده است. با توجه به نتایج به دست آمده مشخص است که دقت قابل قبولی بین نتایج تحلیلی و نتایج عددی وجود دارد. با مقایسه نتایج شکل ۱۲ و شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که تنش و کرنش در حالت اول حاصل از شرایط مرزی رابطه (۴۲) بیشتر از حالت دوم است. علاوه بر این در شکل ۱۲ همگرایی مش بندی بررسی شده و با توجه به آن مشخص است که به ازای تعداد المان  $N=20$  نمودارها همگرا شده و تغییری در نتایج مشاهده نمی‌شود.



شکل ۱۲ مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی با استفاده از نرم افزار انسیس به ازای پارامترهای  $\Omega = 1, H_z = 10^9 A/m, T_i = 0, \beta = -1, \Omega = 1$ ؛ کرنش (ب) تنش

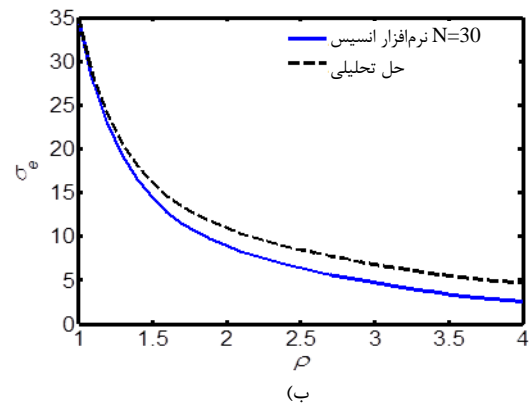
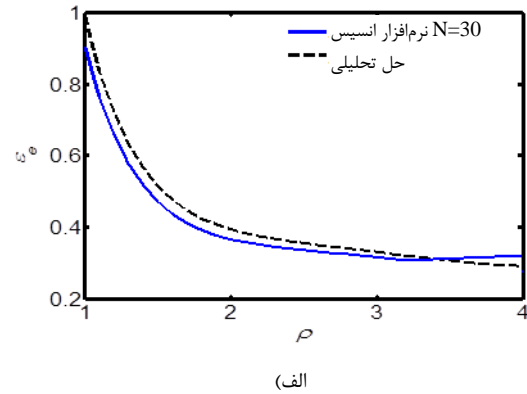


شکل ۱۱ (الف) کرنش (ب) تنش (ج) جابه‌جایی شعاعی (د) توزیع پتانسیل الکتریکی برحسب پارامتر بی بعد  $\rho$  به ازای مقادیر  $\beta$  و  $\Omega = 1, H_z = 1 \times 10^9 A/m, T_i = 0$

تابعی با افزایش دمای داخلی، به دلیل کاهش اثرات دما، جابجایی دچار کاهش می‌شود. ملاحظه شد که با افزایش سرعت زاویه‌ای سیلندر دوار، کرنش و تنش افزایش می‌یابد. همچنین نشان داده شد که با افزایش ضریب ناهمگنی بدون بعد میزان جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان این‌گونه بیان کرد که افزایش ضریب ناهمگنی موجب افزایش تغییر مکان می‌شود.

#### ۶- مراجع

- [1] Lim, C. and He, L., "Exact Solution of a Compositionally Graded Piezoelectric Layer under Uniform Stretch, Bending and Twisting," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, pp. 2479-2492, 2001.
- [2] Liu, X. Wang, Q. and Quek, S., "Analytical Solution for Free Vibration of Piezoelectric Coupled Moderately Thick Circular Plates," International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, pp. 2129-2151, 2002.
- [3] Galic, D. and Horgan, C., "The Stress Response of Radially Polarized Rotating Piezoelectric Cylinders," Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, pp. 426-435, 2003.
- [4] Lu, P. Lee, H. and Lu, C., "An Exact Solution for Functionally Graded Piezoelectric Laminates in Cylindrical Bending," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, pp. 437-458, 2005.
- [5] Tutuncu, N. and Ozturk, M., "Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels," Composites Part B: Engineering, Vol. 32, pp. 683-686, 2001.
- [6] Ahmadi, L., "Analysis of Nterlaminar Stresses in Cross-Ply Composite Cylinders Subjected to Radial Loads", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 43-54, 2015.
- [7] Pietrzakowski, M., "Piezoelectric Control of Composite Plate Vibration: Effect of Electric Potential Distribution," Computers & Structures, Vol. 86, pp. 948-954, 2008.
- [8] Reddy, J. and Chin, C., "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates," Journal of Thermal Stresses, Vol. 21, pp. 593-626, 1998.
- [9] Ghorbanpour, A, Golabi, S. and Saadatfar, M., "Stress and Electric Potential Fields in Piezoelectric Smart Spheres," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 20, pp. 1920-1933, 2006.
- [10] Heidari-Rarani, M. Alimirzaei, S. and Torabi, K., "Analytical Solution for Free Vibration of Functionally Graded Carbon Nanotubes (FG-CNT) Reinforced Double-Layered Nano-Plates Resting on Elastic Medium", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 55-66, 2015.
- [11] Hosseini, S. M, Akhlaghi, M. and Shakeri, M., "Transient Heat Conduction in Functionally Graded Thick Hollow Cylinders by Analytical Method," Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 669-675, 2007.
- [12] Saadatfar, M. and Razavi, A., "Piezoelectric Hollow Cylinder with Thermal Gradient," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 23, pp. 45-53, 2009.
- [13] Li, X. F. Peng, X. L. and Lee, K. Y., "Radially Polarized Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinders as Sensors and Actuators," European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 29, pp. 704-713, 2010.
- [14] Shah, A. G. Mahmood, T. Naeem, M. N. Iqbal, Z. and Arshad, S. H., "Vibrations of Functionally Graded Cylindrical Shells Based on Elastic Foundations," Acta mechanica, Vol. 211, pp. 293-307, 2010.
- [15] Sobhani, B. and Yas, M., "Static and Free Vibration Analyses of Continuously Graded Fiber-Reinforced Cylindrical Shells using Generalized Power-Law Distribution," Acta mechanica, Vol. 215, pp. 155-173, 2010.
- [16] Nemat-Alla, M., "Reduction of Thermal Stresses by Composition Optimization of Two-Dimensional Functionally Graded Materials," Acta mechanica, Vol. 208, pp. 147-161, 2009.
- [17] Sobhani, B. Hedayati, H. Farahani, E. B. and Hedayati, M., "A Novel 2-D Six-Parameter Power-Law Distribution for Free Vibration and Vibrational Displacements of Two-Dimensional Functionally Graded Fiber-Reinforced Curved Panels," European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 30, pp. 865-883, 2011.
- [18] Alibeigloo, A., "Thermoelastic Solution for Static Deformations of Functionally Graded Cylindrical Shell Bonded to Thin Piezoelectric Layers," Composite Structures, Vol. 93, pp. 961-972, 2011.
- [19] Alibeigloo, A., "Exact Solution of an FGM Cylindrical Panel Integrated with Sensor and Actuator Layers under Thermomechanical Load," Smart Materials and Structures, Vol. 20, p. 035002, 2011.
- [20] Alashti, R. A. and Khorsand, M., "Three-Dimensional Dynamo Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers by DQ-FD Coupled," International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 96, pp. 49-67, 2012.
- [21] Ghannad, M. Rahimi, G. and Zamani, M., "Elastic Analysis of Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Made of Functionally Graded Materials." Composites Part B: Engineering, Vol.45, 388-396. 2013.



شکل ۱۳ مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی با استفاده از نرم افزار انسیس به ازای  $T_0 = 100, H_z = 0, \beta = -1, \Omega = 1$  کرنش (ب) تنش

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از تئوری الاستیسیته حل دقیقی برای رفتار الکترومکانیک سیلندر دوار پیزوالکتریک با خواص ماده تابعی واقع شده در میدان مغناطیسی و حرارتی ارائه شد. کلیه خواص ماده پیزوالکتریک به صورت توابعی پیوسته از شعاع سیلندر و به صورت مدل توانی مدل‌سازی شدند. با استفاده از معادله انتقال حرارت در یک بعد، تغییرات دما در حالت پایا به دست آمد. با بهره‌گیری از معادلات الکتروستاتیکی ماکسول و در نظر گرفتن میدان مغناطیسی اولیه هم‌راستا با محور سیلندر، نیروی ناشی از آن برای حالت ناهمگن به دست آورده شد. تغییرات توزیع رفتارهای تنش و کرنش همچنین جابجایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی به ازای  $\Omega, \beta, H_z, T_i, T_0$  برای چهار حالت مختلف نشان داده شد. همچنین با مطالعه پاسخ سیلندر تحت شرایط مذکور، می‌توان ساختار مورد نظر حالت بهینه طراحی را در حالات مختلف تعیین کرد. همچنین تحلیل ترمومکانیک یک سیلندر پیزوالکتریک با خواص تابعی نیز با استفاده از نرم افزار المان محدود انسیس در این مطالعه انجام شده است.

با بررسی نتایج مشخص شد که با افزایش دمای بیرونی سیلندر، تنش و کرنش و همچنین جابجایی شعاعی همانطور که مورد انتظار است دچار افزایش می‌شود. همان‌طور که مشاهده شد، با افزایش عدد پارامتر شدت مغناطیسی، مقادیر تنش و کرنش سیلندر مدرج تابعی افزایش می‌یابد. همچنین این نتیجه حاصل شد که هر چه مقدار  $\beta$  بیشتر باشد کرنش ایجاد شده دارای مقادیر بیشتری می‌شود. در این بررسی مشخص شد که افزایش دمای داخلی به دلیل کاهش اختلاف دمای داخل و خارج سیلندر در تماس با سیال موجب کاهش کرنش و تنش می‌گردد. علاوه بر این در سیلندر مدرج

- [22] Jabbari, M. Sohrabpour, S. and Eslami, M., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads," International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, pp. 493-497, 2002.
- [23] Babaei, M. and Chen, Z., "Exact Solutions for Radially Polarized and Magnetized Magnetoelastoelectric Rotating Cylinders," Smart Materials and Structures, Vol. 17, p. 025035, 2008.
- [24] Ghorbanpour, A. Bakhtiari, R. Mohammadimehr, M. and Mozdianfard, M. R., "Electromagnetomechanical Responses of a Radially Polarized Rotating Functionally Graded Piezoelectric Shaft," Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences, Vol. 36, pp. 33-44, 2011.
- [25] Ghorbanpour, A. Abdollahian, M. and Khoddami Maraghi, Z., "Thermoelastic analysis of a non-axisymmetrically heated FGPM hollow cylinder under multi-physical fields." International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 11, No. 2, pp. 157-171, 2014.
- [26] Ghorbanpour, A. Loghman, A. Abdollahitaheri, A. and Atabakhshian, V., "Electrothermomechanical Behavior of a Radially Polarized Rotating Functionally Graded Piezoelectric Cylinder," Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 6, pp. 869-882, 2011.