



## تحلیل دقیق میکرومکانیکی تنش در کامپوزیت تقویت شده با الیاف بلند تحت بارگذاری کششی یکنواخت

حسین رهنما<sup>۱</sup>، محمود مهرداد شکرپه<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی، ۱۶۳-۱۶۷۶۵، shokrieh@iust.ac.ir

### چکیده

در این مقاله سعی بر این است که بر اساس یک روند نظام‌مند در حوزه‌ی تئوری الاستیسیته، برای مسئله‌ی مقدار مرزی المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند تحت بارگذاری کششی یکنواخت، یک حل بسته‌ی دقیق ارائه شود. برای این منظور المان حجمی معرف کامپوزیت‌های الیاف بلند در نظر گرفته شد که متشکل از دو استوانه‌ی هم‌مرکز با استوانه‌ی درونی از جنس الیاف و استوانه‌ی بیرونی از جنس ماتریس است. بدین ترتیب مسئله‌ی مورد بررسی در این پژوهش در حوزه‌ی مسائل متقارن محوری تئوری الاستیسیته قرار می‌گیرد. با بهره‌گیری از تابع لاپو برای مسائل متقارن محوری، دستگاه معادلات تعادل ناویر برای مولفه‌های میدان جابجایی تبدیل به یک معادله‌ی بای‌هارمونیک بر حسب تابع لاپو می‌شود. سپس یک عبارت جامع برای حل‌های جداپذیر معادله‌ی بای‌هارمونیک در مختصات استوانه‌ای ارائه می‌شود. در گام بعدی، عبارات مناسب از حل‌های جداپذیر با الهام از شرایط مرزی و فیزیک مسئله انتخاب شده و یک حل پیشنهادی استخراج می‌شود. در گام نهایی ثوابت مجهول موجود در حل پیشنهادی توسط شرایط مرزی به دست می‌آیند. بدین ترتیب حل دقیق به دست آمده قادر به ارضای تمامی معادلات میدانی تئوری الاستیسیته است. با استفاده از این حل توزیع دقیق مولفه‌های میدان تنش و جابجایی در المان حجمی معرف مشخص شده و برخی نتایج عددی برای آن ارائه می‌گردد. بر اساس این حل دقیق عبارتی برای مدول الاستیک طولی معادل کامپوزیت الیاف بلند به دست می‌آید و با رابطه‌ی معروف قانون اختلاط مقایسه می‌شود. این مقایسه نشان می‌دهد که قانون اختلاط می‌تواند تقریب مهندسی خوبی برای محاسبه‌ی مدول الاستیک طولی معادل باشد.

### اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۶/۱

پذیرش: ۹۴/۷/۱۳

### کلیدواژگان:

حل بسته‌ی دقیق الاستیسیته کامپوزیت الیاف بلند المان حجمی معرف معادله‌ی بای‌هارمونیک

## Exact micromechanical stress analysis of long fiber composites under uniform tensile loading

Hosein Rahnema, Mahmood Mehrdad Shokrieh\*

Composite Research Lab., Center of Excellence in Experimental Solid Mechanics, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 16765-163, Tehran, Iran, shokrieh@iust.ac.ir

### Keywords

Exact closed form solution  
Elasticity  
Long-fiber composites  
Representative volume element  
Biharmonic equation

### Abstract

In this paper, based on a systematic procedure in the field of theory of elasticity, it is tried to establish an exact closed form solution for the problem of a long-fiber composite representative volume element (RVE) under uniform tension loading condition. To this end, the RVE of long fiber composites is considered. The RVE is composed of two concentric cylinders where the inner and outer ones are of fiber and matrix materials, respectively. Consequently, this study deals with an axially symmetric problem of the theory of elasticity. Using the Love function for axisymmetric problems, the Navier equilibrium equations for displacement components are converted to a single biharmonic equation in terms of the Love function. Then, a general expression for the separable solutions of biharmonic equation in cylindrical coordinates is derived. Next, according to the boundary conditions and physical interpretations, appropriate terms from separable solutions are chosen and a solution is suggested. In the final step, the unknown constants in the suggested solution are computed by using the boundary conditions. The obtained exact solution satisfies the entire field equations of theory of elasticity. Using this solution, the exact distribution of stress and displacement field components of the RVE is determined and related numerical results are presented. Based on the exact solution, an expression for the equivalent longitudinal modulus of composite is obtained and compared with the well-known rule of mixture formula. This comparison reveals that the rule of mixture can be a good engineering approximation for the equivalent longitudinal modulus.

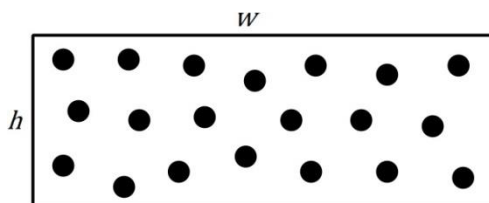
Please cite this article using:

Rahnema, H. and Shokrieh, M. M., "Exact micromechanical stress analysis of long fiber composites under uniform tensile loading", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 1-10, 2015.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

## ۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر کامپوزیت‌ها کاربردهای گسترده‌ای در صنایع گوناگون پیدا کرده‌اند. خواص ترمومکانیکی مناسب و قابلیت طراحی آن‌ها، سهولت در تولید، دوام، وزن پایین و توانایی بالا در تحمل بار از جمله ویژگی‌هایی است که سبب استقبال از این مواد در صنعت شده است. در این میان، کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف بلند از جایگاه ویژه‌ای در کاربردهای سازه‌ای مختلف نظیر صنعت هوایی، صنعت کشتی‌سازی، صنعت خودرو، صنعت پایپینگ و صنایع دیگر برخوردار هستند. به همین دلیل مطالعه‌ی رفتار مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف بلند مورد توجه بسیاری از صنعتگران و محققین قرار گرفته است.



شکل ۱ نمای مقطع صفحه‌ی کامپوزیتی متشکل از الیاف بلند

تمرکز پژوهش حاضر بر روی تحلیل تنش المان حجمی معرف کامپوزیت تقویت شده با الیاف بلند تحت بارگذاری کشش یکنواخت بر مبنای تئوری الاستیسیته است. هدف ارائه‌ی یک حل بسته‌ی دقیق برای این مسئله‌ی مقدار مرزی است به گونه‌ای که تمامی معادلات میدانی در تئوری الاستیسیته یعنی معادلات تعادل، معادلات سازگاری و شرایط مرزی ارضا شوند. این حل‌های دقیق می‌توانند به عنوان یک مسئله‌ی صحت سنجی برای حل‌های عددی و المان محدود و همینطور حل‌های بسته‌ی تقریبی مورد توجه قرار بگیرند. با توجه به تقارن محوری این مسئله نسبت به محور استوانه‌ها این مسئله در زمره‌ی مسائل متقارن محوری تئوری الاستیسیته قرار می‌گیرد. بدین ترتیب در ادامه به مروری کوتاه بر حل‌های بسته‌ی ارائه شده در این حوزه پرداخته خواهد شد.

به طور کلی می‌توان حل‌های بسته در حیطه‌ی مسائل متقارن محوری مرتبط با المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند را به سه دسته‌ی عمده تقسیم نمود:

۱- حل‌های مبنی بر تئوری تاخیر برشی<sup>۵</sup> و سایر مدل‌های تقریبی انتقال تنش<sup>۶</sup>

۲- حل‌های مبنی بر روش‌های حساب تغییرات<sup>۷</sup>

۳- حل‌های بسته‌ی دقیق مبنی بر معادلات میدانی تئوری الاستیسیته

که حل‌های مربوط به دسته‌های اول و دوم، حل‌های بسته‌ی تقریبی به شمار می‌آیند که تمامی معادلات میدانی را ارضا نمی‌کنند. در مقابل، حل‌های دسته‌ی سوم تمامی معادلات میدانی را اقلان می‌نمایند.

برای مطالعه‌ی خواص سطح واسط الیاف و زمینه، محققین بسیاری آزمایشاتی را برای مبنای یک تکرشته‌ی محاط<sup>۸</sup> که به طور کامل یا جزئی در زمینه قرار گرفته، انجام داده‌اند. این جمله از آزمایشات شامل آزمایش تکه‌تکه شدن تکرشته<sup>۹</sup> [۸]، آزمایش بیرون کشی الیاف<sup>۱۰</sup> [۹]، آزمایش میکرو-دندانگذار<sup>۱۱</sup> [۱۰] و آزمایش جدایش میکرو-قطره<sup>۱۲</sup> [۱۱] می‌باشد. نتایج مربوط به این آزمایشات، بسیار مهم هستند اما تفسیر کمی این نتایج در اکثر موارد محدود به استفاده از مدل ساده‌ی تحلیل تنش تئوری

در دهه‌های اخیر کامپوزیت‌ها کاربردهای گسترده‌ای در صنایع گوناگون پیدا کرده‌اند. خواص ترمومکانیکی مناسب و قابلیت طراحی آن‌ها، سهولت در تولید، دوام، وزن پایین و توانایی بالا در تحمل بار از جمله ویژگی‌هایی است که سبب استقبال از این مواد در صنعت شده است. در این میان، کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف بلند از جایگاه ویژه‌ای در کاربردهای سازه‌ای مختلف نظیر صنعت هوایی، صنعت کشتی‌سازی، صنعت خودرو، صنعت پایپینگ و صنایع دیگر برخوردار هستند. به همین دلیل مطالعه‌ی رفتار مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف بلند مورد توجه بسیاری از صنعتگران و محققین قرار گرفته است.

در تحلیل پاسخ مکانیکی مواد مرکب تحت بارگذاری استاتیکی مشخص دو دیدگاه وجود دارد. دیدگاه اول که موسوم به دیدگاه میکرومکانیک است، تفاوتی میان فازهای تشکیل دهنده ماده‌ی مرکب قائل نیست و در واقع کل ماده‌ی مرکب را به صورت یک جسم همگن اورتوتروپیک<sup>۱</sup> می‌نگرد. این دیدگاه باعث سهولت در تحلیل‌ها و محاسبات می‌گردد. این امر را می‌توان در تئوری لایه‌چینی کلاسیک ورق‌ها<sup>۲</sup> مشاهده کرد که یک تک‌لایه به صورت یک جسم همگن اورتوتروپیک مدل می‌شود و در نهایت کل چندلایه<sup>۳</sup> به صورت مجموعه‌ای از تک‌لایه‌های همگن اورتوتروپیک با جهات اصلی متفاوت مورد تحلیل قرار می‌گیرد. اگرچه این دیدگاه تحلیل را آسان می‌کند اما داده‌های ورودی برای تحلیل (به عنوان مثال خواص تک‌لایه‌ها) نیازمند آزمایشات بسیاری هستند، چرا که این خواص به جنس مواد سازنده‌ی کامپوزیت و هندسه‌ی قرارگیری آن‌ها نسبت به هم بستگی دارد. برای برطرف کردن این نقیصه در دیدگاه اول، دیدگاه دوم موسوم به دیدگاه مایکرومکانیک مورد توجه قرار می‌گیرد. در این دیدگاه فازهای تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی مرکب به صورت کاملاً مجزا در نظر گرفته می‌شوند. این دیدگاه سعی دارد که با دانستن خواص و رفتار اجزای سازنده، خواص و رفتار کل ماده‌ی مرکب را پیش‌بینی کند. در صورت امکان این امر، تعداد آزمایشات لازم جهت مشخصه‌سازی ماده‌ی مرکب بسیار کاهش خواهد یافت. همچنین این دیدگاه این امکان را فراهم می‌آورد که فازهای سازنده‌ی ماده‌ی مرکب به صورت جداگانه مورد تحلیل قرار بگیرند. از سوی دیگر تحلیل‌های مورد استفاده در دیدگاه مایکرومکانیک به مراتب پیچیده‌تر و دارای حجم محاسباتی بالاتری نسبت به دیدگاه میکرومکانیک هستند.

با توجه به اینکه در دیدگاه مایکرومکانیک، فازهای تقویت کننده و زمینه در ماده‌ی مرکب در تحلیل به طور کامل در نظر گرفته می‌شوند، تحلیل کل کامپوزیت رشته‌ای (الیاف بلند یا کوتاه) که متشکل از دو فاز الیاف و زمینه است بسیار پیچیده خواهد شد. به طوری که دست یافتن به حل‌های بسته‌ی دقیق و حتی حل‌های عددی و بسته‌ی تقریبی را به نوعی غیر ممکن می‌سازد. برای برطرف کردن این مشکل، محققین بسیاری همچون مکارتنی [۱]، کرتز و پاگانو [۲]، ناپرن [۳، ۴]، پاگانو [۵]، وو و همکاران [۶]، هشین و روزن [۷] از مفهوم المان حجمی معرف<sup>۴</sup> در تحلیل‌های خود بهره جستند. این کار سبب می‌شود که تحلیل تا حدود زیادی ساده‌تر شود. یک صفحه‌ی کامپوزیتی معکب مستطیل شکل در نظر بگیرید که ابعاد مقطع آن  $h \times w$  و طول صفحه  $l$  باشد. فرض کنید که تمامی الیاف بلند در راستای طولی صفحه هستند (شکل ۱). در این حالت اکثر محققین هم عقیده هستند که المان

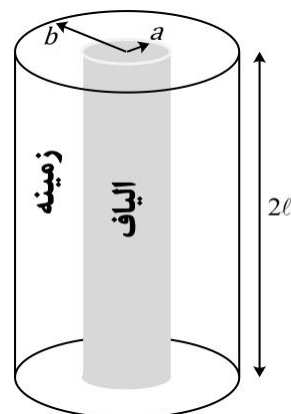
1. Orthotropic
2. Classical Lamination Theory of Plates
3. Laminate
4. Representative Volume Element (RVE)

5. Shear Lag Theory  
6. Stress Transfer  
7. Variational Method  
8. Embedded Fiber  
9. Single Fiber Fragmentation Test  
10. Fiber Pull-Out  
11. Micro Indentation  
12. Microdrop Debond Test

در رابطه با حل‌های دقیق، اولین پژوهش مربوط به اسمیت و اسپنسر [۲۱] است. آن‌ها در پژوهش خود مسائل بیرون‌کشی الیاف و شکست الیاف را برای المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند تحت دو شرط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. تکنیک حل، استفاده از توابع غیرمتممادی بود که مقادیر ویژه آن‌ها ریشه‌های مختلط یک معادله‌ی مشخصه بودند. این روش موسوم به حل‌های همگن<sup>۲</sup> است [۲۲]. پیچیدگی در تعیین ریشه‌های این معادله‌ی مشخصه عدم استقبال از این روند حل را به دنبال داشت. آن‌ها تنها توانستند، برای المان حجمی معرفی که نسبت منطقی (نسبت طول به قطر ماتریس) آن بزرگتر از ده باشد، ریشه‌های این معادله‌ی مشخصه را تخمین بزنند. در پژوهش دیگری توسط کرتز و پاگانو [۲]، محققین با استفاده از تکنیک برهم‌نهی ضربدری<sup>۳</sup> به بررسی مسئله‌ی بیرون‌کشی الیاف پرداخته‌اند. پاسخ‌های نوسانی غیر منطقی‌ای بر روی سطح واسط میان الیاف و ماتریس گزارش شد که با فیزیک مسئله هم‌خوانی ندارد. آنان این امر را ناشی از تکنیک حل، خطاهای عددی و همچنین ناپیوستگی‌ای که در یکی از شرایط مرزی اعمال شده بود، دانسته‌اند و سعی کرده‌اند با استفاده از مجموع‌های سزارو<sup>۴</sup> مقداری این نوسانات را کاهش دهند. مشابه با پژوهش [۲]، وو و همکاران [۶] نیز با یک فرمول‌بندی جدید از مسائل متقارن محوری برای مواد همسانگرد عرضی که برگرفته از روش فضای حالت است به بررسی مسئله‌ی بیرون‌کشی الیاف پرداخته‌اند. در تحقیق دیگری نایرن و ليو [۲۳] مسئله‌ی تکه‌تکه شدن تک‌رشته را با فرض این که شعاع ماتریس بی‌نهایت است، مورد توجه قرار داده‌اند. آن‌ها عباراتی برای نرخ‌هایی انرژی کرنشی در اثر ایجاد ترک‌ها به دست آوردند. مزیت اصلی کار آن‌ها نسبت به پژوهش‌های پیشین در نظر گرفتن پیوند میان الیاف و ماتریس به صورت کامل بود. حل آن‌ها دو محدودیت داشت. اول این که شرط مرزی مربوط به تنش محوری به صورت نقطه به نقطه ارضا نشده و تنها به صورت کاهش یافته اقلان شده است. دومین نقصه، در نظر گرفتن ماتریس به عنوان یک محیط بی‌نهایت بزرگ است. با توجه به دانش نویسندگان مقاله حاضر، پژوهش دیگری در رابطه با کامپوزیت‌های الیاف بلند بر مبنای حل‌های بسته‌ی دقیق صورت نگرفته است.

با توجه به پیشینه‌ی ادبیات موضوع، به نظر می‌رسد که مسئله‌ی کشش یکنواخت المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند مورد توجه جدی قرار نگرفته است. در این پژوهش هدف ارائه‌ی حل بسته‌ی دقیقی برای این مسئله‌ی مقدار مرزی است. برای این منظور معادلات میدانی تئوری الاستیسیته برای اجسام الاستیک ایزوتروپیک با در نظر گرفتن تقارن محوری، تبدیل به یک معادله‌ی بای‌هارمونیک بر حسب تابع لاو می‌شود. با استفاده از تکنیک جداپذیری متوالی متغیرها یک عبارت عمومی برای حل‌های متقارن محوری جداپذیر معادله‌ی بای‌هارمونیک ارائه می‌شود. در گام بعدی با انتخاب عبارات مناسب از این حل عمومی، تابع لاو مناسب برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی ارائه می‌گردد. سپس ثوابت مجهول موجود در حل با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند. در پایان برخی نتایج عددی برای توزیع مولفه‌های میدان تنش و جابجایی در المان حجمی معرف داده می‌شود. همچنین به عنوان کاربردی از حل این مسئله‌ی مقدار مرزی عبارتی برای مدول الاستیک طولی معادل کامپوزیت الیاف بلند محاسبه شده و با رابطه‌ی معروف قانون اختلاط مقایسه می‌گردد.

تاخیر برشی است. بنیانگذار تئوری تاخیر برشی کاکس [۱۲] می‌باشد که کار او در ادامه توسط سایر پژوهشگران نظیر هوسه [۱۳] تکمیل شده است. از جمله مدل‌های تقریبی دیگر انتقال تنش که به بررسی مسئله‌ی بیرون‌کشی الیاف پرداخته است، توسط مکارتنی [۱] و پاگانو [۵] ارائه شده است.



شکل ۲ المان حجمی معرف کامپوزیت تقویت شده با الیاف بلند

تئوری ساده‌ی تاخیر برشی محدودیت‌هایی دارد. اول اینکه، این تئوری هیچ گونه اطلاعاتی در رابطه با تنش‌های شعاعی و محیطی در اختیار قرار نمی‌دهد چرا که این مدل یک تحلیل یک بُعدی است. دوم این که پارامتر برهم کنش برشی در مدل تاخیر برشی که توسط کاکس پیشنهاد داده شده تنها برای نسبت‌های حجمی بالای الیاف صادق است، در صورتی که در آزمایشاتی مانند تکه‌تکه شدن تک‌رشته یا بیرون‌کشی الیاف نسبت حجمی الیاف بسیار پایین است. سومین محدودیت این است که مدل تاخیر برشی یک میدان تنش قابل قبول<sup>۱</sup> تولید نمی‌کند بدین معنا که مولفه‌های تنش معادلات تعادل را ارضا نمی‌کنند [۳].

برای دست‌یابی به حل‌های بسته‌ای بهتر از تئوری تاخیر برشی تلاش‌هایی صورت گرفته است. در یکی از این کوشش‌ها، نایرن [۳] به بررسی مسئله‌ی تکه‌تکه شدن تک‌رشته می‌پردازد. او با معرفی یک تابع تنش جدید برای مسائل متقارن محوری که تعمیمی از پژوهش ویتنی و رزل [۱۴] است، فرم کلی میدان تنش را محاسبه می‌کند. سپس به پیروی از روش هشین [۱۶، ۱۵] در به دست آوردن توابع مجهول موجود در فرم کلی میدان تنش از اصل کمینه بودن انرژی مکمل کل استفاده می‌کند. در این روش که موسوم به روش حساب تغییرات است، یک میدان تنش قابل قبول محاسبه می‌شود که معادلات تعادل را ارضا می‌کند، اما معادلات سازگاری ارضا نخواهد شد و این بدان معناست که این میدان تنش، میدان کرنشی به دست می‌دهد که نمی‌توان از آن یک میدان جابجایی تک مقدار به دست آورد. این امر ضعف اصلی روش حساب تغییرات به شمار می‌آید. در این روش تمامی شرایط مرزی مربوط به میدان تنش نقطه به نقطه و یا به صورت کاهش یافته ارضا می‌شوند. در تکمیل کار نایرن، وو و همکاران با استفاده از روش حساب تغییرات به بررسی مسئله‌ی تکه‌تکه شدن تک‌رشته توسط مدل‌های دو فازی [۱۷] و سه فازی [۱۸] و مسئله‌ی انتقال تنش به الیاف توسط سطح واسط نیمه و امانده توسط مدل‌های دو فازی [۱۹] و سه فازی [۲۰] پرداختند.

2. Homogenous Solutions  
3. Crosswise Superposition  
4. Cesaro Summation

1. Admissible Stress Field

## ۲- مروری بر معادلات میدانی حاکم

با توجه به تئوری الاستیسیته‌ی خطی (تغییر شکل‌های کوچک) معادلات میدانی حاکم برای یک ماده‌ی الاستیک ایزوتروپیک به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \end{aligned} \quad (1)$$

که دسته‌ی اول، معادلات تعادل، دسته‌ی دوم معادلات ساختاری هوک و دسته‌ی سوم روابط سینماتیکی میان مولفه‌های میدان جابجایی و تانسور کرنش است. در این معادلات  $\boldsymbol{\sigma}$  میدان تانسوری تنش،  $\boldsymbol{\varepsilon}$  میدان تانسوری کرنش،  $\mathbf{I}$  تانسور همانی مرتبه‌ی دوم،  $\mathbf{u}$  بردار میدان جابجایی،  $\mathbf{b}$  میدان نیروی حجمی و  $\rho$  چگالی است.  $\lambda$  و  $\mu$  نیز ثوابت لامه هستند.  $\nabla$  نیز عملگر دیفرانسیلی گرادینان، ضرب اسکالر برداری و: نیز ضرب اسکالر دونقطه‌ی تانسوری است. با ترکیب معادلات موجود در (۱) و حذف میدان‌های کرنش و تنش و نوشتن معادله‌ی تعادل بر حسب میدان جابجایی معادله‌ی معروف ناویر برای یک ماده‌ی الاستیک ایزوتروپیک حاصل خواهد شد:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2)$$

که در آن  $\nabla^2$  عملگر دیفرانسیلی لاپلاسین است. معادله‌ی (۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بر حسب مولفه‌های میدان جابجایی است. حل این دستگاه معادلات بدین صورت دشوار است. بنابراین تلاش‌های بسیاری برای تبدیل این معادله به فرم‌های ساده‌تر با استفاده از تغییر متغیرهای مختلف صورت گرفت. یکی از این تغییر متغیرها منصوب به گالرکین می‌باشد که به صورت زیر است:

$$2\mu \mathbf{u} = 2(1-\nu) \nabla^2 \mathbf{V} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (3)$$

بدین ترتیب با استفاده از (۳)، معادله‌ی (۲) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\rho}{1-\nu} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4)$$

با انتخاب بردار گالرکین به صورت  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z$  که برای اجسام حاصل از دوران یک سطح حول محور  $Z$  ها معتبر است و در عدم حضور نیروهای حجمی، معادله‌ی (۴) تبدیل به یک معادله‌ی بای هارمونیک می‌گردد:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

که در آن  $\Phi(\mathbf{x})$  موسوم به تابع لاو و  $\mathbf{x}$  بردار مکانی است که می‌تواند تابعی از تمامی مختصه‌ها باشد. اکنون مختصات استوانه‌ای  $(r, \varphi, Z)$  در نظر گرفته شود. فرض تقارن نسبت به محور  $Z$  در مسئله‌ی مقدار مرزی مورد نظر بدان معنا خواهد بود که تمامی متغیرهای میدانی و در نتیجه تابع لاو، تابعی از مختصه‌ی  $\varphi$  نیستند. برای این امر، هندسه، بارگذاری و خواص مادی مسئله باید نسبت به محور  $Z$  متقارن باشند. این نکته نیز قابل توجه است که هندسه زمانی نسبت به محور  $Z$  متقارن است، که جسم از دوران سطحی حول این محور حاصل گردد. با در نظر گرفتن این توضیحات، برای یک مسئله‌ی متقارن محوری معادله‌ی (۵) را می‌توان به صورت زیرین نوشت:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(r, z) = 0 \quad (6)$$

که در آن  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  عملگر لاپلاسین متقارن محوری خواهد بود. همچنین با استفاده از معادله‌ی دوم موجود در (۱) و معادله‌ی (۳)، می‌توان روابط میان تابع لاو و مولفه‌های میدان جابجایی و تنش را به دست آورد:

$$\begin{aligned} 2\mu u_r &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \\ 2\mu u_z &= 2(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ \sigma_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( (2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( (1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن  $\nu$  ضریب پواسون است. همچنین برای سایر مولفه‌های میدان جابجایی و تنش رابطه‌ی  $u_\varphi = \sigma_{\varphi r} = \sigma_{\varphi z} = 0$  برقرار است. بدین ترتیب دسته معادلات اصلی که از آن‌ها در این پژوهش بهره گرفته خواهد شد، معادلات (۶) و (۷) خواهند بود. این معادلات نخستین بار توسط ریاضی‌دان معروف لاو فرمول‌بندی شده است [۲۴].

## ۲- حل‌های متقارن محوری جداپذیر معادله‌ی بای هارمونیک در مختصات استوانه‌ای

همان‌طور که در قسمت قبل مشاهده شد حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر مسائل الاستیسیته برای یک مسئله‌ی متقارن محوری در مختصات استوانه‌ای به حل معادله‌ی بای هارمونیک برای تابع لاو انجامید. با مشخص شدن این تابع، میدان جابجایی و در نتیجه‌ی آن میدان کرنش از طریق روابط سینماتیکی و میدان تنش از طریق معادله‌ی ساختاری هوک تعیین می‌گردند. در این قسمت سعی بر این است که کلی‌ترین فرم حل‌های جداپذیر برای معادله‌ی بای هارمونیک برای یک مسئله‌ی متقارن محوری یعنی زمانی که تابع لاو به مختصه‌ی  $\varphi$  وابسته نیست، تعیین گردد. برای این منظور تابع هارمونیک  $\Psi(r, z)$  را در نظر بگیرید، یعنی:

$$\nabla^2 \Psi(r, z) = 0 \quad (8)$$

سپس معادله‌ی زیرین را مورد توجه قرار دهید:

$$\nabla^2 \Phi(r, z) = \Psi(r, z) \quad (9)$$

اکنون می‌توان ادعا کرد که اگر  $\Phi(r, z)$  معادله‌ی (۹) را ارضا نماید آن‌گاه معادله‌ی بای هارمونیک را نیز ارضا خواهد کرد چرا که با اعمال عملگر لاپلاسین به طرفین معادله‌ی (۹) نتیجه خواهد شد:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi(r, z)) = \nabla^2 \Psi(r, z) = 0 \quad (10)$$

بدین ترتیب می‌توان در گام اول یک حل کلی جداپذیر برای معادله‌ی (۸) ارائه نمود. سپس به سراغ معادله‌ی (۱۰) رفته و یک حل عمومی جداپذیر برای آن ارائه کرد. با این کار معادله‌ی بای هارمونیک تبدیل به یک معادله‌ی لاپلاس و یک معادله‌ی پواسون می‌شود.

با توجه به این که در این روش دو بار متوالی از تکنیک جداسازی متغیرها برای دو معادله استفاده خواهد شد، لذا روش جداسازی متوالی متغیرها نامیده می‌شود. بدین ترتیب اگر  $\Phi(r, z) = R(r)Z(z)$  در نظر گرفته شود، با توجه به روندی که توضیح داده شد، می‌توان نشان داد که توابع  $R(r)$  و  $Z(z)$  می‌بایست دو دسته معادلات دیفرانسیل معمولی زیرین را ارضا نمایند [۲۵]:

۲- پیوند بین الیاف و ماتریس یک پیوند کامل<sup>۱</sup> است.

۳- مسئله نسبت به صفحه‌ی  $z = 0$  متقارن است.

معادلات حاکم بر این مسئله‌ی مقدار مرزی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

• معادله‌ی تعادل برای نواحی داخلی

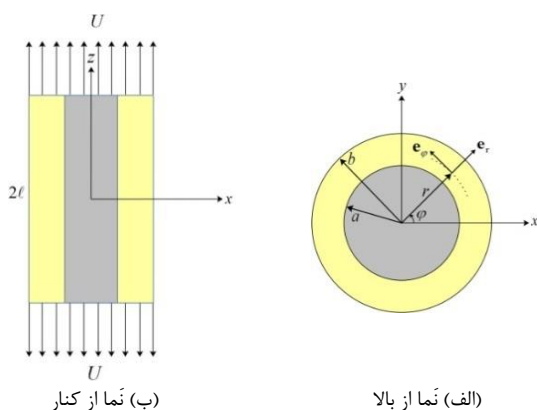
$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_i(r, z) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

• شرایط مرزی بر روی سطح  $\begin{cases} r = b \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \ell \end{cases}$

$$\sigma_{rr,2}(b, z) = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_{rz,2}(b, z) = 0 \quad (15)$$

این دو شرط مرزی بدین معناست که سطح جانبی المان حجمی معرف تنش آزاد است. این شرایط مرزی، در واقع یک فرض ساده کننده هستند بدین علت که در واقعیت توزیع‌هایی از تنش برشی و تنش شعاعی بر روی سطح جانبی وجود دارند که فرم تابعی آن‌ها از مختصه‌ها مجهول است. این توزیع‌های مجهول را می‌توان ناشی از اثر الیاف مجاور دانست که در این تحلیل جهت ساده‌سازی برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۳ المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند تحت کشش یکنواخت

• شرایط مرزی بر روی سطح  $\begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \ell \end{cases}$

$$u_{z,2}(r, \ell) = U \quad (16)$$

$$\sigma_{rz,2}(r, \ell) = 0 \quad (17)$$

• شرایط مرزی بر روی سطح  $\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \ell \end{cases}$

$$u_{z,1}(r, \ell) = U \quad (18)$$

$$\sigma_{rz,1}(r, \ell) = 0 \quad (19)$$

• شرایط تقارن بر روی سطح  $\begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$

$$u_{z,2}(r, 0) = 0 \quad (20)$$

$$\sigma_{rz,2}(r, 0) = 0 \quad (21)$$

• شرایط تقارن بر روی سطح  $\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$

$$u_{z,1}(r, 0) = 0 \quad (22)$$

$$\sigma_{rz,1}(r, 0) = 0 \quad (23)$$

• شرایط مرزی پیوستگی بر روی سطح واسط  $\begin{cases} r = a \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq \ell \end{cases}$

$$\begin{cases} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \omega \right)^2 R(r) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} + \omega \right) Z(z) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \omega \right) R(r) = 0 \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} + \omega \right)^2 Z(z) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن  $\omega$  ثابت جداسازی است که یک عدد حقیقی می‌باشد. بنابراین با حل معادلات دیفرانسیل موجود در (۱۱)، عبارت عمومی برای حل‌های جداپذیر متقارن محوری معادله‌ی بای‌هارمونیک حاصل خواهد شد [۲۵]:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & A^{(0)} + B^{(0)}z + C^{(0)}r^2 + D^{(0)}z^2 \\ & + E^{(0)}r^2z + F^{(0)}z^3 \\ & + M^{(0)}\ln(r) + N^{(0)}z\ln(r) + P^{(0)}r^2\ln(r) \\ & + Q^{(0)}z^2\ln(r) + R^{(0)}r^2z\ln(r) + S^{(0)}z^3\ln(r) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ A_i^{(1)}J_0(\alpha_i r) + B_i^{(1)}Y_0(\alpha_i r) + \right. \\ & \left. A_i^{(2)}zJ_0(\alpha_i r) + B_i^{(2)}zY_0(\alpha_i r) + \right. \\ & \left. A_i^{(3)}rJ_1(\alpha_i r) + B_i^{(3)}rY_1(\alpha_i r) \right] \\ & \left[ C_i^{(1)}\cosh(\alpha_i z) + D_i^{(1)}\sinh(\alpha_i z) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_j^{(4)}I_0(\beta_j r) + B_j^{(4)}K_0(\beta_j r) + \right. \\ & \left. A_j^{(5)}zI_0(\beta_j r) + B_j^{(5)}zK_0(\beta_j r) + \right. \\ & \left. A_j^{(6)}rI_1(\beta_j r) + B_j^{(6)}rK_1(\beta_j r) \right] \\ & \left[ C_j^{(2)}\cos(\beta_j z) + D_j^{(2)}\sin(\beta_j z) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $Y_1(\alpha_i r)$ ,  $Y_0(\alpha_i r)$ ,  $J_1(\alpha_i r)$ ,  $J_0(\alpha_i r)$  توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه‌های صفر و یک،  $K_1(\alpha_i r)$ ,  $K_0(\alpha_i r)$ ,  $I_1(\alpha_i r)$ ,  $I_0(\alpha_i r)$  نیز توابع بسل تغییر یافته‌ی نوع اول و دوم از مرتبه‌های صفر و یک هستند. همچنین  $\omega_j = \beta_j^2$  و  $\omega_i = -\alpha_i^2$  می‌باشد. بدین ترتیب دسته‌ی اول حل‌ها مربوط به ثابت جداسازی صفر، دسته‌ی دوم (حل‌های هایپربولیکی و توابع بسل) مربوط به ثابت جداسازی منفی و دسته‌ی سوم (حل‌های مثلثاتی و توابع بسل تغییر یافته) مربوط به ثابت جداسازی مثبت هستند. به دلیل طولانی بودن محاسبات، جزئیات آن برای به دست آوردن معادلات (۱۱) و (۱۲) در اینجا ارائه نمی‌شود. نویسندگان مقاله‌ی حاضر در هیچ مرجعی روند دستیابی به حل‌های جداپذیر و همینطور پاسخ کاملی برای آن‌ها نظیر (۱۲) نیافته‌اند. به همین دلیل سعی شد تا مراحل به دست آوردن آن به صورت کامل بیان گردد. جزئیات محاسبات توسط نویسندگان در فصل دوم مرجع [۲۵] به دقت مورد توجه قرار گرفته است.

#### ۴- بیان مسئله‌ی مقدار مرزی

المان حجمی معرف یک کامپوزیت الیاف بلند، مطابق با شکل ۳ که در آن یک رشته الیاف توسط زمینه محاط شده است را در نظر بگیرید. این المان تحت کشش یکنواخت توسط مقدار جابجایی  $U$  در دو انتها قرار دارد. هدف یافتن میدان‌های جابجایی و تنش برای این المان حجمی معرف بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی است. از این پس در صورت لزوم از زیرنویس‌های ۱ و ۲ برای تمایز میان الیاف و ماتریس استفاده می‌شود. فرضیات در حل این مسئله‌ی مقدار مرزی به صورت زیر است:

۱- الیاف و زمینه هر دو مواد ایزوتروپیک الاستیک هستند که از معادله‌ی ساختاری هوک پیروی می‌کنند.

1. Perfect Bonding

$$u_{r,2} = -\frac{1}{2\mu_2} \left( 2A_{2,0}r + \frac{C_{2,0}}{r} \right)$$

$$u_{z,2} = \frac{(-8\nu_2 + 8)A_{2,0} + (-12\nu_2 + 6)B_{2,0}}{2\mu_2} z$$

$$\sigma_{rr,2} = (4\nu_2 - 2)A_{2,0} + 6\nu_2 B_{2,0} + \frac{C_{2,0}}{r^2}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi,2} = (4\nu_2 - 2)A_{2,0} + 6\nu_2 B_{2,0} - \frac{C_{2,0}}{r^2}$$

$$\sigma_{zz,2} = (-4\nu_2 + 8)A_{2,0} + (-6\nu_2 + 6)B_{2,0}$$

$$\sigma_{rz,2} = 0 \quad (30)$$

با کمی دقت در معادلات (۲۹) و (۳۰) مشخص است که تنش‌های شعاعی و محیطی در الیاف و زمینه تنها تابعی از مختصه‌ی  $r$  و تنش محوری نیز مقدار ثابتی است. همچنین تنش برشی در کل المان حجمی معرف برابر صفر است. مولفه‌ی شعاعی میدان جابجایی تنها تابعی از مختصه‌ی  $r$  و مولفه‌ی محوری آن تابعی خطی از مختصه‌ی  $z$  است.

### ۶- اعمال شرایط مرزی

با توجه به این که توابع لاو، توابعی فرد از مختصه‌ی  $z$  انتخاب شده‌اند، شرایط مرزی تقارن خود به خود ارضا خواهد شد. بدین ترتیب چهار شرط مرزی (۲۰) تا (۲۳)، ارضا خواهند شد. از سوی دیگر تنش برشی در الیاف و ماتریس صفر است و بنابراین چهار شرایط مرزی (۱۵)، (۱۷)، (۱۹) و (۲۵) نیز اکتفا می‌گردند. بدین ترتیب هشت شرط مرزی از چهارده شرط مرزی مسئله برقرارند. اکنون به بررسی شش شرط مرزی باقی‌مانده پرداخته خواهد شد. در نگاه اول ارضای شش معادله‌ی باقی‌مانده با پنج ثابت در نظر گرفته شده در توابع لاو، غیرممکن به نظر می‌رسد اما اگر یکی از این معادلات از بقیه مستقل خطی نباشد این امر امکان پذیر خواهد بود. بنابراین با توجه به شرایط مرزی (۱۴)، (۱۶)، (۱۸)، (۲۴)، (۲۶) و (۲۷) به ترتیب داریم:

$$(4\nu_2 - 2)A_{2,0} + 6\nu_2 B_{2,0} + \frac{C_{2,0}}{b^2} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{(-8\nu_2 + 8)A_{2,0} + (-12\nu_2 + 6)B_{2,0}}{2\mu_2} \ell = U \quad (32)$$

$$\frac{(-8\nu_1 + 8)A_{1,0} + (-12\nu_1 + 6)B_{1,0}}{2\mu_1} \ell = U \quad (33)$$

$$(4\nu_1 - 2)A_{1,0} + 6\nu_1 B_{1,0} = \quad (34)$$

$$(4\nu_2 - 2)A_{2,0} + 6\nu_2 B_{2,0} + \frac{C_{2,0}}{a^2} \quad (35)$$

$$-\frac{1}{2\mu_1} 2A_{1,0}a = -\frac{1}{2\mu_2} \left( 2A_{2,0}a + \frac{C_{2,0}}{a} \right)$$

$$\frac{(-8\nu_1 + 8)A_{1,0} + (-12\nu_1 + 6)B_{1,0}}{2\mu_1} z = \quad (36)$$

$$\frac{(-8\nu_2 + 8)A_{2,0} + (-12\nu_2 + 6)B_{2,0}}{2\mu_2} z$$

به راحتی قابل فهم است که معادله‌ی (۳۶) از معادلات (۳۲) و (۳۳) مستقل خطی نیست. برای برقراری معادله‌ی (۳۶) به ازای هر  $z$  دلخواه، می‌بایستی ضرایب  $z$  در طرفین معادله برابر باشند، بنابراین با حذف  $z$  از طرفین معادله‌ی (۳۶) می‌توان نوشت:

$$\frac{(-8\nu_1 + 8)A_{1,0} + (-12\nu_1 + 6)B_{1,0}}{2\mu_1} = \quad (37)$$

$$\frac{(-8\nu_2 + 8)A_{2,0} + (-12\nu_2 + 6)B_{2,0}}{2\mu_2}$$

از سوی دیگر با برابر قراردادن سمت چپ معادلات (۳۲) و (۳۳) و حذف  $\ell$  از طرفین معادله‌ی حاصل شده، دقیقاً معادله‌ی (۳۷) به دست می‌آید و بنابراین عدم استقلال خطی معادله‌ی (۳۶) نتیجه خواهد شد. بدین ترتیب معادلات

$$\sigma_{rr,1}(a, z) = \sigma_{rr,2}(a, z) \quad (24)$$

$$\sigma_{rz,1}(a, z) = \sigma_{rz,2}(a, z) \quad (25)$$

$$u_{r,1}(a, z) = u_{r,2}(a, z) \quad (26)$$

$$u_{z,1}(a, z) = u_{z,2}(a, z) \quad (27)$$

در معادلات فوق میدان جابجایی و تنش مطابق با معادله‌ی (۷) با تابع لاو ارتباط دارند و زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب برای الیاف و ماتریس به کار برده شده‌اند. بدین ترتیب در این مسئله‌ی مقدار مرزی، چهارده شرط مرزی وجود دارد. این نکته نیز قابل توجه است که به دلیل تقارن مسئله نسبت به صفحه‌ی میانی  $z = 0$  شرایط مرزی تقارن بر روی این صفحه جایگزین شرایط مرزی مسئله در  $z = -\ell$  شده است و این بدان معناست که دامنه‌ی حل نصف شده است.

### ۵- تابع لاو، میدان جابجایی و تنش برای الیاف و زمینه

انتخاب تابع لاو مناسب برای یک مسئله‌ی مقدار مرزی کار آسانی نیست و در واقع سخت‌ترین قسمت حل مسئله به شمار می‌آید. برای این کار نویسندگان بر این عقیده‌اند که باید همانند یک حلقه‌ی بازخورد<sup>۱</sup>، ابتدا یک تابع به عنوان حدس اولیه انتخاب شده و سپس سعی در حل مسئله شود. با توجه به کاستی‌هایی که در حل ممکن است با آن مواجه شد، حدس اولیه اصلاح گردد و این روند تا آنجا که دیگر نقصی در ارضای شرایط مرزی وجود نداشته باشد ادامه یابد. در انتخاب حدس اولیه می‌توان از تقارن‌های موجود در مسئله و برخی برداشت‌های فیزیکی استفاده کرد. می‌توان نشان داد که اگر تابع لاو نسبت به مختصه‌ی  $z$  فرد انتخاب گردد، شرایط مرزی تقارن ارضا خواهند شد [۲۵]. این نکته می‌تواند در انتخاب تابع لاو مناسب کمک کننده باشد. همچنین با توجه به این که جابجایی تمام نقاط سطح انتهایی المان حجمی معرف برابر  $U$  است، بنابراین انتظار می‌رود که کرنش برشی و در نتیجه تنش برشی در کل دامنه‌ی حل صفر باشد. با توجه به توضیحات داده شده، توابع لاو زیر برای الیاف و زمینه پیشنهاد می‌گردند:

$$\Phi_1(r, z) = A_{1,0}r^2z + B_{1,0}z^3 \quad (28)$$

$$\Phi_2(r, z) = A_{2,0}r^2z + B_{2,0}z^3 + C_{2,0}z \ln(r)$$

توجه شود که تنها تفاوت میان تابع لاو برای الیاف و زمینه در عبارت لگاریتمی است. این امر با توجه به این که محور  $z$  از الیاف عبور کرده و جواب باید در این ناحیه یک مقدار متناهی باشد، توجیه پذیر است اما در مورد زمینه، با توجه به این که محور  $z$  را شامل نمی‌شود، بنابراین می‌توان از عبارت لگاریتمی در آن استفاده کرد.

با توجه به معادلات (۷) و (۲۸)، میدان جابجایی و تنش در الیاف به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{r,1} = -\frac{2A_{1,0}}{2\mu_1} r$$

$$u_{z,1} = \frac{(-8\nu_1 + 8)A_{1,0} + (-12\nu_1 + 6)B_{1,0}}{2\mu_1} z$$

$$\sigma_{rr,1} = (4\nu_1 - 2)A_{1,0} + 6\nu_1 B_{1,0}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi,1} = (4\nu_1 - 2)A_{1,0} + 6\nu_1 B_{1,0}$$

$$\sigma_{zz,1} = (-4\nu_1 + 8)A_{1,0} + (-6\nu_1 + 6)B_{1,0} \quad (29)$$

$$\sigma_{rz,1} = 0$$

به طرز مشابه میدان جابجایی و تنش به صورت رابطه (۳۰) خواهد بود.

1. Feedback Loop

حجمی معرف در  $z = \ell$  و همچنین میدان کرنش محوری در الیاف و ماتریس است یعنی:

$$\varepsilon_{zz}(r, z) = \begin{cases} \varepsilon_{zz,1} & 0 \leq r \leq a \\ \varepsilon_{zz,2} & a \leq r \leq b \end{cases} = \bar{\varepsilon} = \frac{U}{\ell} \quad (41)$$

که با توجه به معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۲)، (۳۳) و رابطه  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$  به راحتی قابل دست‌یابی می‌باشد. میدان تنش  $\sigma_{zz}(r, z)$  در کل المان حجمی معرف مشخص بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{zz}(r, z) = \begin{cases} \sigma_{zz,1} & 0 \leq r < a \\ \sigma_{zz,2} & a < r \leq b \end{cases} \quad (42)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۹)، (۴۰) و استفاده از رابطه‌ی معروف  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  برای مواد ایزوتروپیک، می‌توان مدول یانگ طولی معادل را بر حسب مدول یانگ طولی و ضریب پواسون اجزا محاسبه نمود. با توجه به طولانی بودن محاسبات، این کار در نرم افزار میپل ۱۸ صورت گرفت که نتیجه به صورت زیر است:

$$E_L^* = V_1 E_1 + (1 - V_1) E_2 + \frac{2E_1 E_2 (v_1 - v_2)^2 V_1 (1 - V_1)}{\left( (1 - (2v_2 - 1)V_1)(1 + v_2)E_1 - (1 - V_1)(2v_1 - 1)(1 + v_1)E_2 \right)} \quad (43)$$

که در آن  $V_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_1 + \Omega_2} = \frac{a^2}{b^2}$  نسبت حجمی الیاف و  $i = 1, 2$  حجم هریک از اجزای سازنده است. نکته‌ی جالب توجه این است که مدول الاستیک معادل طولی به پارامتر هندسی  $\ell$  وابسته نیست. همانطور که مشاهده می‌شود، مدول یانگ طولی معادل به مدول یانگ و ضرایب پواسون هر یک از اجزای سازنده و نسبت حجمی الیاف (پارامترهای هندسی  $a$  و  $b$ ) بستگی دارد. تفاوت عبارت (۴۳) با رابطه‌ی معروف قانون اختلاط<sup>۱</sup> برای مدول یانگ طولی معادل در نظر گرفتن تاثیر ضرایب پواسون الیاف و ماتریس است چرا که در به دست آوردن قانون اختلاط از معادلات ساختاری  $\sigma_{zz,i} = E_i \varepsilon_{zz,i}$ ،  $i = 1, 2$  استفاده می‌شود. بدین ترتیب در به دست آوردن قانون اختلاط از تاثیر ضرایب پواسون اجزا صرف نظر شده است. دلیل اصلی این امر برای رهایی از حل مسئله‌ی مقدار مرزی کشش یکنواخت است. جالب توجه است که اگر ضرایب پواسون الیاف و ماتریس با یکدیگر برابر باشند، رابطه‌ی (۴۳) تبدیل به قانون اختلاط می‌شود:

$$E_L^* = V_1 E_1 + (1 - V_1) E_2 \quad (44)$$

## ۸- نتایج عددی

در این قسمت به بررسی برخی نتایج عددی برای سیستم الیاف و ماتریس با خواص داده شده در جدول ۱ پرداخته می‌شود مگر این که خواص دیگری ذکر شود. همچنین پارامترهای هندسی و بارگذاری در نظر گرفته شده برای المان حجمی معرف کامپوزیت الیاف بلند در مسئله‌ی مقدار مرزی کشش یکنواخت در جدول ۲ آمده است.

در شکل ۴ تنش‌های نرمال بی بعد شده در الیاف که بر مضرپی از تنش محوری میانگین  $\sigma_0 = V_1 \sigma_{zz,1} + V_2 \sigma_{zz,2}$  بی بُعد شده‌اند در سطح واسط الیاف و زمینه بر حسب فاصله‌ی بی بعد نشان داده شده‌اند. همانطور که مشخص است تمامی مقادیر تنش‌های نرمال بر روی سطح واسط ثابت هستند. همچنین مقادیر تنش محوری در حدود ۱۰۰ برابر تنش‌های شعاعی و محیطی بر روی این سطح واسط است. تنش برشی در الیاف و ماتریس برابر صفر است.

(۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) تشکیل یک دستگاه معادلات جبری خطی را بر حسب مجهولات  $A_{1,0}$ ،  $B_{1,0}$ ،  $A_{2,0}$ ،  $B_{2,0}$  و  $C_{2,0}$  می‌دهند:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4v_2 - 2 & 6v_2 & \frac{1}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{(-8v_2 + 8)\ell}{2\mu_2} & \frac{(-12v_2 + 6)\ell}{2\mu_2} & 0 \\ \frac{(-8v_1 + 8)\ell}{2\mu_1} & \frac{(-12v_1 + 6)\ell}{2\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 4v_1 - 2 & 6v_1 & -4v_2 + 2 & -6v_2 & -\frac{1}{a^2} \\ -\frac{a}{\mu_1} & 0 & \frac{a}{\mu_2} & 0 & \frac{1}{2a\mu_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,0} \\ B_{1,0} \\ A_{2,0} \\ B_{2,0} \\ C_{2,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \\ U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

این دستگاه معادلات خطی در نرم افزار میپل ۱۸ به صورت پارامتری حل گردید که نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} A_{1,0} &= \frac{\left( ((2v_2 - 1)v_1\mu_1 - (2v_1 - 1)v_2\mu_2)a^2 + (-v_1\mu_1 + (2v_1 - 1)v_2\mu_2)b^2 \right)}{\Delta} \mu_1 \frac{U}{\ell} \\ B_{1,0} &= \frac{\left( \left( ((4v_2 - 2)v_1 - 2v_2 + 1)\mu_1 - ((4v_1 - 4)v_2 + 1)\mu_2 \right) a^2 + \left( (-2v_1 + 1)\mu_1 + ((4v_1 - 4)v_2 + 1)\mu_2 \right) b^2 \right)}{-3\Delta} \mu_1 \frac{U}{\ell} \\ A_{2,0} &= \frac{\left( ((2v_2 - 1)v_1\mu_1 - (2v_1 - 1)v_2\mu_2)a^2 + (-v_2\mu_1 + (2v_1 - 1)v_2\mu_2)b^2 \right)}{\Delta} \mu_2 \frac{U}{\ell} \\ B_{2,0} &= \frac{\left( \left( (1 + (4v_2 - 4)v_1)\mu_1 + ((-4v_2 + 2)v_1 + 2v_2 - 1)\mu_2 \right) a^2 + \left( (-2v_2 + 1)\mu_1 + ((4v_2 - 2)v_1 - 2v_2 + 1)\mu_2 \right) b^2 \right)}{-3\Delta} \mu_2 \frac{U}{\ell} \\ C_{2,0} &= -\frac{2\mu_1 a^2 b^2 (v_1 - v_2)}{\Delta} \mu_2 \frac{U}{\ell} \\ \Delta &= \left( ((2v_2 - 1)\mu_1 - (2v_1 - 1)\mu_2)a^2 + (-\mu_1 + (2v_1 - 1)\mu_2)b^2 \right) \end{aligned} \quad (39)$$

و این حل مسئله‌ی مقدار مرزی مورد نظر را به پایان می‌رساند. نکته‌ی جالب توجه این است که در صورت برابر بودن ضرایب پواسون الیاف و ماتریس، ثابت  $C_{2,0}$  برای زمینه صفر خواهد بود. با توجه به معادلات (۲۸)، (۲۹) و (۳۰) این بدان معنا خواهد بود که فرم تابعی مولفه‌های میدان جابجایی و تنش برای الیاف و ماتریس یکسان خواهد شد اگرچه ثوابت موجود در آن‌ها متفاوت است.

## ۷- مدول الاستیک طولی معادل

با توجه به این مسئله‌ی مقدار مرزی، می‌توان یک مدول یانگ طولی معادل برای المان حجمی معرف به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{A} \int_A \sigma_{zz}(r, \ell) dA \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{U}{\ell} \\ E_L^* &= \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن  $E_L^*$  مدول الاستیک طولی معادل،  $A$  سطح مقطع المان حجمی معرف و  $\bar{\sigma}$  تنش محوری میانگین بر روی سطح مقطع المان حجمی معرف در  $z = \ell$  است.  $\bar{\varepsilon}$  نیز کرنش محوری میانگین بر روی سطح مقطع المان

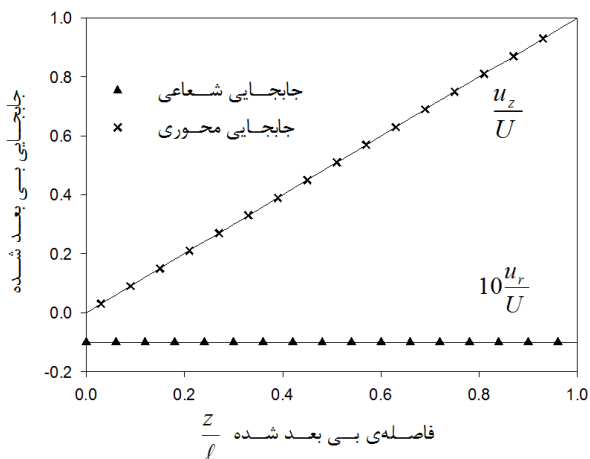
1. Rule of Mixtures

در شکل ۶ تغییرات مولفه‌های شعاعی و محوری میدان جابجایی بی بُعد شده بر روی سطح واسط الیاف و ماتریس بر حسب فاصله‌ی محوری بی بُعد نمایان است. همانطور که پیداست مولفه‌ی محوری میدان جابجایی به صورت خطی با مختصه‌ی  $Z$  تغییر می‌کند تا به مقدار  $U$  برسد. مولفه‌ی شعاعی نیز یک مقدار ثابت منفی دارد که در حدود  $0/1$  مقدار مولفه‌ی محوری میدان جابجایی است. منفی بودن مولفه‌ی شعاعی بدین معناست که المان حجمی معرف در اثر کشش محوری در راستای عرضی فشرده می‌شود.

در شکل ۷ مولفه‌های بی بُعد شده‌ی میدان جابجایی بر روی سطح  $Z = \frac{\ell}{2}$  نشان داده شده‌اند. مولفه‌ی محوری میدان جابجایی مقداری ثابت داشته که در حدود ده برابر مقدار مولفه‌ی شعاعی است. مولفه‌ی شعاعی در سطح واسط یک تابع پیوسته و اما غیر هموار است بدان معنا که مشتق نرمال آن بر روی سطح واسط پیوسته نیست و تابع در آن‌جا اصطلاحاً دارای شکستگی می‌باشد. جالب توجه است که اگرچه در سطح واسط مشتق نرمال مولفه‌ی شعاعی جابجایی یعنی کرنش شعاعی  $\epsilon_{rr}(a, z) = \frac{\partial u_r}{\partial r}(a, z)$  ناپیوسته است اما به دلیل متفاوت بودن خواص، مولفه‌ی شعاعی تنش در سطح واسط می‌تواند پیوسته باشد.

در شکل ۸ تغییرات مدول الاستیک طولی معادل بی بعد شده برای سیستم الیاف و ماتریس ذکر شده در جدول ۱ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌گردد مدول الاستیک معادل به دست آمده از الاستیسیته در این حالت تفاوت قابل مشاهده‌ای با مقدار به دست آمده از قانون اختلاط ندارد. دلیل این امر نزدیک بودن ضرایب پواسون الیاف و ماتریس و همینطور بزرگ بودن مدول الاستیک الیاف نسبت به ماتریس است که سبب می‌شود عبارت جدید موجود در معادله‌ی (۴۳) نسبت به قانون اختلاط در معادله‌ی (۴۴)، عدد بسیار کوچکی گردد.

برای نشان دادن تفاوت مدول الاستیک طولی معادل به دست آمده از تئوری الاستیسیته و قانون اختلاط، شکل ۹ برای یک سیستم تقویت‌کننده و زمینه فرضی با خواص مندرج در جدول ۳ رسم شده است. اگرچه تفاوت بین مدول الاستیک طولی معادل به دست آمده از تئوری الاستیسیته و قانون اختلاط در شکل ۹ نمایان است اما حداکثر این تفاوت چیزی در حدود  $0/03$  مدول الاستیک تقویت‌کننده فرضی می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان به این نکته اشاره کرد که اگرچه به لحاظ تئوری رابطه‌ی (۴۳) دقیق است اما معادله‌ی (۴۴) یا همان قانون اختلاط تقریب مناسبی به لحاظ مهندسی برای آن ارایه می‌کند.



شکل ۶ جابجایی بی بعد شده در سطح واسط الیاف و ماتریس  $r = a$

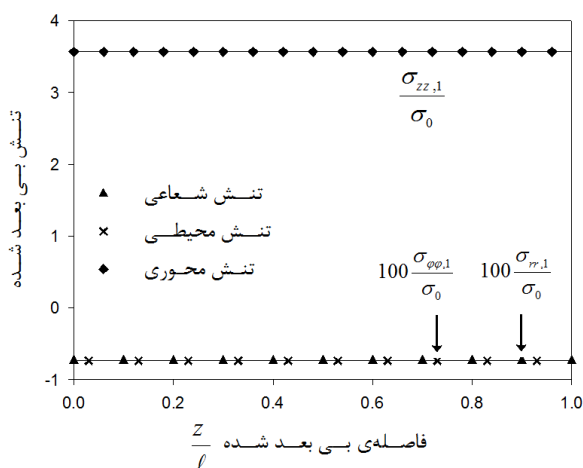
در شکل ۵ تنش‌های نرمال بی بعد شده بر روی سطح  $Z = \frac{\ell}{2}$  نشان داده شده‌اند. تنش‌های محیطی و محوری در سطح واسط یک ناپیوستگی دارند که ناشی از ناپیوستگی خواص در سطح واسط است اما همانطور که از شرط پیوستگی ترکشن انتظار می‌رود، تنش شعاعی در سطح واسط پیوسته است. در اینجا نیز مقادیر تنش محوری در حدود  $100$  برابر تنش‌های شعاعی و محیطی هستند. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد، تنش برشی در الیاف و ماتریس برابر صفر است. تنش محوری در الیاف و ماتریس مقدار ثابتی دارد در صورتی که تنش‌های محیطی و شعاعی تنها در الیاف ثابت هستند و در ماتریس به ترتیب روند کاهشی و افزایشی دارند. همانطور که انتظار می‌رود، الیاف تنش محوری بیشتری نسبت به زمینه تحمل می‌کنند.

جدول ۱ خواص الاستیک الیاف و زمینه

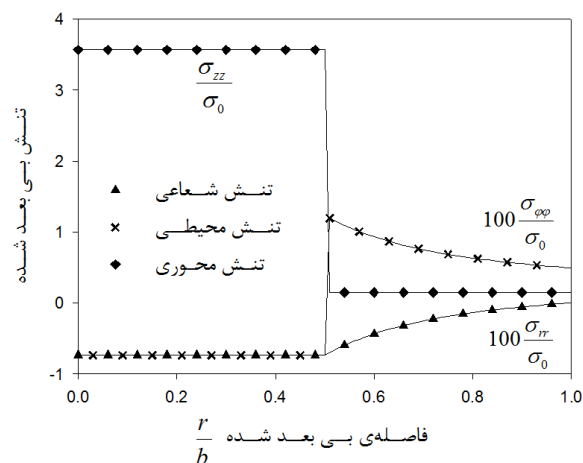
مواد	$\nu$	$E$ [GPa]	$\mu$ [GPa]
زمینه اپوکسی	0/3	1/307	3/4
الیاف شیشه	0/2	35/416	85

جدول ۲ پارامترهای هندسی و بارگذاری

$U$ [mm]	$V_1$	$\ell$ [mm]	$b$ [mm]	$a$ [mm]
1	0/25	10	1	0/5



شکل ۴ تنش‌های نرمال بی بعد شده در سطح واسط الیاف و ماتریس  $r = a$



شکل ۵ تنش‌های نرمال بی بعد شده بر روی سطح  $Z = \frac{\ell}{2}$



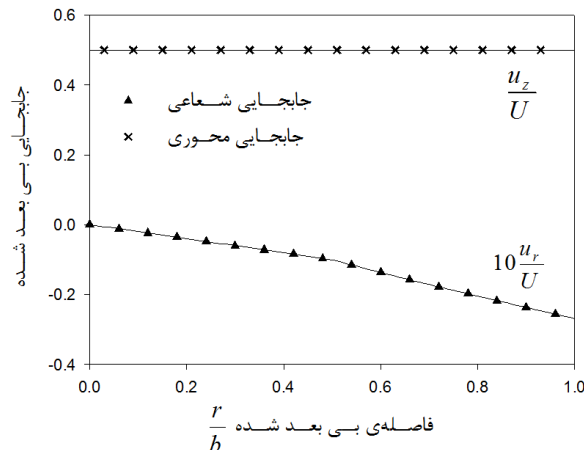
آمده است. همانطور که در شکل ۹ پیداست، قانون اختلاط حد پایینی را برای مدول الاستیک طولی معادل مشخص می‌کند.

### ۹- جمع‌بندی

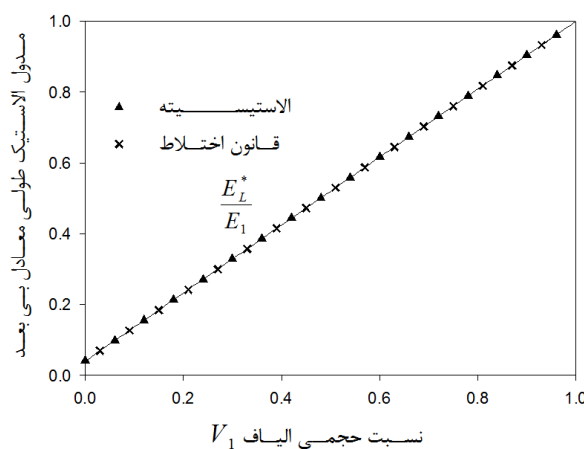
در این مقاله به بررسی مسئله‌ی مقدار مرزی کشش یکنواخت المان حجمی معرف یک کامپوزیت الیاف بلند در حوزه‌ی تئوری الاستیسیته پرداخته شد. هدف اصلی ارائه‌ی یک حل بسته‌ی دقیق برای تعیین میدان الاستیک (یعنی میدان تنش، میدان کرنش و میدان جابجایی) در داخل المان حجمی معرف بود. با توجه به این امر که مسئله در حوزه‌ی مسائل متقارن محوری تئوری الاستیسیته قرار می‌گیرد، با بهره‌گیری از تابع لاو و حل‌های جداپذیر ارائه شده برای معادله‌ی بای‌هارمونیک در این پژوهش، تابع لاو مناسب برای این مسئله‌ی مقدار مرزی انتخاب شد و با اعمال شرایط مرزی مسئله، ثوابت مجهول در حل پیشنهادی به دست آمدند. حل به دست آمده تمامی معادلات میدانی الاستیسیته را ارضا می‌کند و از این رو یک حل دقیق به شمار می‌رود. مزیت اول این حل این است که به تحلیل‌گر این امکان را می‌دهد که اطلاعات درست و کاملی را از میدان الاستیک المان حجمی معرف داشته باشد. مزیت دوم این است که حل دقیق می‌تواند معیاری برای اعتبارسنجی و صحت‌سنجی حل‌های تقریبی و عددی باشد. به عنوان مزیت سوم، می‌توان به فرم ساده‌ی حل دقیق به دست آمده اشاره کرد که استفاده از آن را آسان می‌کند. با استفاده از حل به دست آمده، برخی نتایج عددی برای تغییرات میدان تنش و میدان جابجایی در المان حجمی معرف ارائه شد. به عنوان کاربردی از حل این مسئله مقدار مرزی، مدول الاستیک طولی معادل برای المان حجمی معرف به دست آمد و با رابطه‌ی معروف قانون اختلاط مقایسه شد. مشاهده شد که قانون اختلاط می‌تواند به عنوان یک حد پایینی، تقریب مهندسی مناسبی برای رابطه‌ی دقیق تئوری باشد. بدین ترتیب روندی نظام‌مند در این مقاله ارائه شد تا نشان دهد که چگونه از دیدگاه تئوری الاستیسیته می‌توان به قانون اختلاط دست یافت که اگرچه از لحاظ کاربردی تفاوت چندانی حاصل نمی‌گردد اما از دیدگاه تئوری و بنیادی می‌تواند مورد توجه باشد.

### ۱۰- مراجع

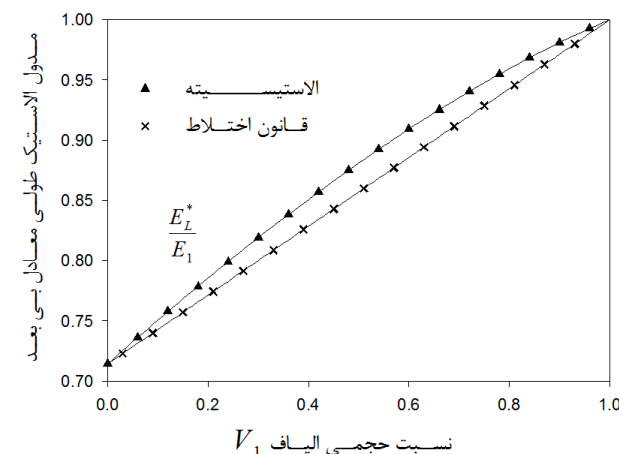
- [1] McCartney, L. N., "New Theoretical Model of Stress Transfer between Fiber and Matrix in a Uniaxially Fibre-Reinforced Composite," Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, Vol. 425, No. 1868, pp. 215-244, 1989.
- [2] Kurtz, R. D. and Pagano, N. J., "Analysis of Deformation of a Symmetrically Loaded Fiber Embedded in a Matrix Material," Composites Part B: Engineering, Vol. 1, No. 1, pp. 13-27, 1991.
- [3] Nairn, J. A., "A Variational Mechanics Analysis of the Stresses around Breaks in Embedded Fibers," Mechanics of Materials, Vol. 13, No. 2, pp. 131-154, 1992.
- [4] Nairn, J. A., "On the Use of Shear-lag Methods for Analysis of Stress Transfer in Unidirectional Composites," Mechanics of Materials, Vol. 26, pp. 63-80, 1997.
- [5] Pagano, N. J., "Axisymmetric Micromechanical Stress Fields in Composites," Local Mechanics Concepts for Composite Material Systems, Springer, pp. 1-26, 1991.
- [6] Wu, Z. J. Ye, J. Q. and Cabrera, J. G., "3D Analysis of Stress Transfer in the Micromechanics of Fiber Reinforced Composites by Using an Eigen-Function Expansion Method," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 48, 2000.
- [7] Hashin, Z. and Rosen, B. W., "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials," Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, No. 63, 1964.
- [8] Netravali, A. N., Schwartz, P. and Phoenix, S. L., "Study of Interfaces of High-Performance Glass Fibers and DGEBA-Based Epoxy Resins Using Single-Fiber-Composite Test," Polymer Composites, Vol. 10, No. 6, pp. 385-388, 1989.
- [9] Piggott, M. R., "Debonding and Friction at Fibre-Polymer Interfaces. I: Criteria for Failure and Sliding," Composites Science and Technology, Vol. 30, No. 4, pp. 295-306, 1987.



شکل ۷ جابجایی بی بعد شده بر روی سطح  $z = \frac{\ell}{2}$



شکل ۸ مدول الاستیک طولی معادل بر حسب نسبت حجمی الیاف



شکل ۹ مدول الاستیک طولی معادل بر حسب نسبت حجمی الیاف

جدول ۳ خواص الاستیک یک تقویت کننده و زمینه‌ی فرضی

مواد	$\nu$	$E$ [GPa]	$\mu$ [GPa]
زمینه فرضی	۰/۴۵	۲/۵	۱/۸۱
تقویت کننده فرضی	۰/۱	۳/۵	۱/۹۲

در هر صورت رابطه‌ای که از منظر تئوری دقیق و صحیح است، همان رابطه‌ی (۴۳) است که بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی به دست

- [10] Mandell, J. F. Chen, J. H. and McGarry, F. J., "A Microdebonding Test for in Situ Assessment of Fibre/Matrix Bond Strength in Composite Materials," *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 1, No. 1, pp. 40-44, 1980.
- [11] Gaur, U. and Miller, B., "Microbond Method for Determination of the Shear Strength of a Fiber/Resin Interface: Evaluation of Experimental Parameters," *Composites Science and Technology*, Vol. 34, No. 1, pp. 35-51, 1989.
- [12] Cox, H. L., "The Elasticity and Strength of Paper and other Fibrous Materials," *British journal of Applied Physics*, Vol. 72, 1951.
- [13] Hsueh, C.-H., "Interfacial Debonding and Fiber Pull-out Stresses of Fiber-Reinforced Composites VII: Improved Analyses for Bonded Interfaces," *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 154, No. 2, pp. 125-132, 1992.
- [14] Whitney, J. M. and Drzal, L. T., "Axisymmetric Stress Distribution around an Isolated Fiber Fragment," *Toughened Composites*, ASTM STP, Vol. 937, pp. 179-196, 1987.
- [15] Hashin, Z., "Analysis of Cracked Laminates: a Variational Approach," *Mechanics of Materials*, Vol. 4, No. 2, pp. 121-136, 1985.
- [16] Hashin, Z., "Analysis of Stiffness Reduction of Cracked Cross-Ply Laminates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 771-778, 1986.
- [17] Wu, W. Desaegeer, M. Verpoest, I. and Varna, J., "An Improved Analysis of the Stresses in a Single-Fiber Fragmentation Test: I. Two-Phase Model," *Composites Science and Technology*, Vol. 57, No. 7, pp. 809-819, 1997.
- [18] Wu, W. Verpoest, I. and Varna, J., "An Improved Analysis of the Stresses in a Single-Fiber Fragmentation Test—II. 3-Phase Model," *Composites Science and Technology*, Vol. 58, No. 1, pp. 41-50, 1998.
- [19] Wu, W. Verpoest, I. and Varna, J., "A Novel Axisymmetric Variational Analysis of Stress Transfer into Fibres through a Partially Debonded Interface," *Composites Science and Technology*, Vol. 58, No. 12, pp. 1863-1877, 1998.
- [20] Wu, W. Jacobs, E. Verpoest, I. and Varna, J., "Variational Approach to the Stress-Transfer Problem through Partially Debonded Interfaces in a Three-Phase Composite," *Composites Science and Technology*, Vol. 59, No. 4, pp. 519-535, 1999.
- [21] Smith, G. E. and Spencer, A. J. M., "Interfacial Traction in a Fiber-Reinforced Elastic Composite Material," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 18, No. 2, pp. 81-100, Apr. 1970.
- [22] Grinchenko, V. T., "The Biharmonic Problem and Progress in the Development of Analytical Methods for the Solution of Boundary-Value Problems," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 46, No. 3-4, pp. 281-297, 2003.
- [23] Nairn, J. A. and Liu, Y. C., "Stress Transfer into a Fragmented, Anisotropic Fiber through an Imperfect Interface," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, pp. 1255-1281, 1997.
- [24] Boreasi, A. P. Chong, K. and Lee, J. D., "Elasticity in Engineering Mechanics," John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.
- [25] Rahnama, H., "Micromechanical Stress Analysis of Long Fiber Composites," In Persian, MSc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, 2015.