جلد ۲، شماره ۳، آذر ۹٤، ص‌ص ۵۵- ۶۶

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیت**

http://jstc.iust.ac.ir

حل تحلیلی ارتعاشات آزاد نانو ورق دولایۀ تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی واقع در بستر الاستیک

محمد حیــدری رارانی[۱*]، سجاد علی‌میرزایی[۲]، کیوان ترابی[۳]

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

۳- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

* اصفهان، صندوق پستی، ۷۳۴۴۱-۸۱۷۴۶، m.heidarirarani@eng.ui.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۶/۱۱

پذیرش: ۹۴/۷/۱۱

کلیدواژگان:

ارتعاشات آزاد

نانو ورق

نانولوله کربن

مدرج تابعی

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد یک نانو ورق ناهمسانگرد دو لایه‌ی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به‌صورت تحلیلی حل شده است. نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق به‌صورت مدرج تابعی با دو فرم یکنواخت و کاهشی-افزایشی توزیع شده‌اند. محیط الاستیک اطراف ورق به‌صورت بستر الاستیک پاسترناک مدل‌سازی شده و اثرات نیروی واندروالس بین دو لایه نیز لحاظ شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و تئوری غیر محلی ارینگن به‌دست آمده و برای یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش ناویر حل شده‌اند. در نهایت، اثر پارامترهای مختلف مانند ثابت فنری نوع وینکلر، ثابت برشی نوع پاسترناک، چیدمان‌های مختلف ذرات نانو و پارامترهای غیر محلی روی رفتار ارتعاشی نانو ورق دو لایه بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند با افزایش ثابت فنری نوع وینکلر فرکانس طبیعی نانو ورق افزایش می‌یابد در حالی‌که تاثیر ثابت برشی نوع پاسترناک بر فرکانس طبیعی نانو ورق دولایه بسیار کم است. همچنین با افزایش ضریب غیرمحلی در یک طول ثابت نسبت فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق (L/h) فرکانس طبیعی غیر محلی کاهش پیدا کرده و در (L/h) ثابت، فرکانس طبیعی چیدمان کاهشی-افزایشی بیشتر از توزیع یکنواخت می‌باشد. نتایج حاصل از این تحقیق می‌تواند در ساخت وسایل نانو استفاده شده و همچنین الگویی برای ادامه کارهای دیگر باشد.

Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium

Mohammad Heidari-Rarani[1*], Sajad Alimirzaei[2], Keivan Torabi[2]

1- Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

* P.O.B. 81746–73441, Isfahan, Iran, m.heidarirarani@eng.ui.ac.ir

Keywords

Free vibration

Nano-plate

CNT

Functionally graded

Abstract

In this paper, free vibration of an embedded double-layered nano-plate reinforced by functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) is analytically investigated. Carbon nanotubes are distributed through the thickness in two ways: uniform distribution and symmetrically linear distribution (or decreasing-increasing layup). To accurately model this nanocomposite behavior, the elastic medium around the nano-plate is modeled by Pasternak elastic foundation and the Van der waals forces between two nano-plates are taken into account. Governing equations of motions are obtained using energy method in association with Eringen nonlocal theory and solved by Navier method for a simply-supported rectangular plate. Finally, the effect of elastic foundation parameters, different distributions of CNT and nonlocal parameters are investigated on the vibration behavior of orthotropic double-layer nano-plate. Results show that natural frequencies of a double-layer nano-plate increase by increasing the Winkler elastic constants while Pasternak elastic constant has less effect on the results. Also, increasing the nonlocal parameter at a constant length decreases the natural frequencies. By increasing the length to thickness ratio (L/h) of nano-plate, the nonlocal frequencies reduce and natural frequency of symmetrically linear distribution is more than those of uniform distribution for constant value of L/h.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Heidari-Rarani, M. Alimirzaei, S. and Torabi, K., “Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium”, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 55-66, 2015.

۱- مقدمه

علم نانو به سرعت در حال پیشرفت است و این پیشرفت به دلیل علاقه محققان در تحلیل سازه‌های مختلف از قبیل نانو تیر، نانو ورق، و نانو پوسته با در نظر گرفتن اثر مقیاس کوچک طول می‌باشد. در مقایسه با ساختار مواد استاندارد، نانو مواد کربنی ویژگی‌های بسیار عالی در زمینه‌های شیمیایی، مکانیکی و الکتریکی دارند [۱-۳]. یکی از معروفترین نظریه‌های غیر محلی در مقیاس نانو نظریه ارینگن است. این مدل الاستیسیته غیر محلی توسط ارینگن [۴] در سال ۱۹۸۳ ارائه شد. نظریه ارینگن فرض می‌کند تنش در یک نقطه به کرنش در سایر نقاط وابسته است. بنابراین معادلات تغییر می‌کند و دیگر نمی‌توان از معادلات کلاسیک استفاده کرد. به عبارت دیگر در حالت غیر محلی رفتار جسم تغییر نموده و دلیل آن نیروهای بین اتمی و اثر مقیاس کوچک طول می باشد که به عنوان پارامتر مادی در معادلات متشکله ظاهر می‌شود.

توسعه نانوکامپوزیت‌های پایه پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و افزایش تحقیقات در این زمینه با کشف نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ میلادی آغاز شده است. استحکام و خواص الاستیک نانولوله‌های کربنی به طور قابل ملاحظه‌ای با دیگر مواد پرکننده فرق دارد و می‌تواند بهبود فوق‌العاده‌ای در خواص نانوکامپوزیت ایجاد نماید. پیش‌بینی می‌شود که نانولوله‌های کربنی کاربرد گسترده‌ای در زمینه‌های تقویت مواد حسگرهای شیمیایی دارو رسانی و نانوالکترونیک پیدا کنند. این نانو ساختارها بسیار سفت و محکم (سفتی کششی در حدود یک ترا پاسکال و استحکام کششی در حدود چند ده گیگا پاسکال) می‌باشند. همچنین پیش‌بینی شده است که نانولوله‌ها حرارت را حتی بهتر از الماس از خود عبور می‌دهند همچنین دارای خواص بسیار بالای الکتریکی و دانسیته پایین می‌باشند.

تاکنون کارهای بی‌شماری در رابطه با ارتعاشات آزاد ورق‌های یک و چندلایه در مقیاس نانو انجام شده است. در تحقیقات اولیه که صورت پذیرفت اثر غیرمحلی برای نانو ساختارها در نظر گرفته نشد. به مرور زمان این تجزیه و تحلیل‌ها توسعه یافتند و در انتشار کارهای بعدی به ترتیب زمان اثر بستر الاستیک و رفتار ناهمسانگرد[1] برای نانو ساختارها در نظر گرفته شد، به عنوان مثال، ارتعاشات عرضی ورق تقویت شده با نانو لوله‌های تک جداره و دوجداره توسط قربان پور و همکاران مطالعه شد [۵]. پیرو نتایج آن‌ها تئوری غیرمحلی نسبت به تئوری کلاسیک فرکانس‌های طبیعی را کمتر نشان می‌دهد. در کارهای دیگر در این زمینه محمدی‌مهر و همکاران به تحلیل ارتعاشات ورق ویسکو الاستیک دو لایه تقویت شده با توزیع‌های مختلف نانو لوله کربن به روش بدون شبکه پرداختند [۶].

کارهای بی شماری در رابطه با ارتعاشات آزاد و انتشار موج و کمانش نانو ورق‌ها انجام شده است. از جمله تئوری الاستیسیته غیرمحلی برای ارتعاشات نانو ورق‌ها توسط پرادهان و فادیکار استفاده شد [۷]. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که برای مقادیر بالای اثر مقیاس کوچک نسبت فرکانسی کاهش پیدا می‌کند. همچنین تأثیر مقیاس کوچک بر روی انتشار موج مارپیچی در نانو ورق‌های قرار گرفته بر روی ماتریس الاستیک با تنش اولیه توسط وانگ و همکاران انجام شد [۸]. آن‌ها مشاهده کردند که با افزایش تنش اولیه، فرکانس نیز افزایش پیدا می‌کند. مطالعه‌ی خواص موج تراهرتز در نانو ورق‌ها با در نظر گرفتن تأثیرات سطحی و اثر مقیاس کوچک توسط نارندر و گوپالاکریشنان انجام گرفت [۹]. آن‌ها دریافتند که با افزایش تانسور تنش پسماند سطحی و همچنین با افزایش عدد موج، فرکانس افزایش می‌یابد. تأثیرات حرارت بر روی انتشار موج نانو ورق‌ها توسط نارندر و گوپالاکریشنان انجام گرفت [۱۰]. تحقیقی در مورد تأثیرات قبل از تنش بر روی فرکانس ارتعاشی نانو ورق‌های مستطیلی قرار گرفته بر روی بستر ویسکو پاسترناک توسط گودرزی و همکاران انجام شد [۱۱].

تأثیرات اثر مقیاس کوچک روی کمانش نانو ورق‌های چهارگوش با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی و روش حل گالرکین توسط بابایی و شهیدی انجام شد [۱۲]. آن‌ها نتیجه گرفتند که هر چه میزان ضریب مقیاس را افزایش دهند، مقدار بار کمانش بدون بعد کاهش می‌یابد تاثیر ضریب غیرمحلی بر روی ارتعاشات سیستم نانو ورق دو لایه توسط مورمو و ادهیکاری انجام شد [۱۳]. آن‌ها یافتند که با افزایش سفتی محیط الاستیک در سیستم غیر محلی نانو ورق دو لایه، در طول مُد ارتعاشی ناهماهنگ (اسنکرون) اثر مقیاس کوچک کاهش می‌یابد.

تأثیرات اثر مقیاس کوچک بر روی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای نانو ورق‌ها با استفاده از مدل پیوسته غیرمحلی توسط مورمو و پرادهان انجام شد [۱۴]. آن‌ها نشان دادند که با افزایش اثر مقیاس کوچک برای طول‌های ثابت نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد. همچنین ورق گرافن به عنوان یک ورق ناهمسانگرد و به دلیل خواص ویژه‌ای که دارد در دهه اخیر مورد توجه محققان بوده است. خصوصیات ارتعاشات ورق گرافن چندلایه جاسازی شده بر روی بستر الاستیک با شرایط مرزی مختلف و با استفاده از الاستیسیته غیر محلی توسط انصاری و همکاران انجام شد [۱۵].

آنالیز کمانش و ارتعاشات غیر محلی ورق یک و چند لایه گرافن و با در نظر گرفتن تاثیر نیروی واندروالس توسط صرامی فروشانی و ازهری انجام شد [۱۶]. ارتعاشات اجباری غیر خطی ورق چندلایه گرافن توسط هی و همکاران مطالعه گردید [۱۷]. تاثیرات بستر الاستیک بر روی ارتعاشات حرارتی غیر خطی ورق دو لایه گرافن توسط قربان پور و همکاران بررسی شد [۱۸]. آن‌ها دریافتند که زمانی که تغییرات دمایی افزایش می‌یابد نسبت فرکانس غیرخطی افزایش می‌یابد در حالی که فرکانس بدون بعد خطی کاهش می‌یابد.

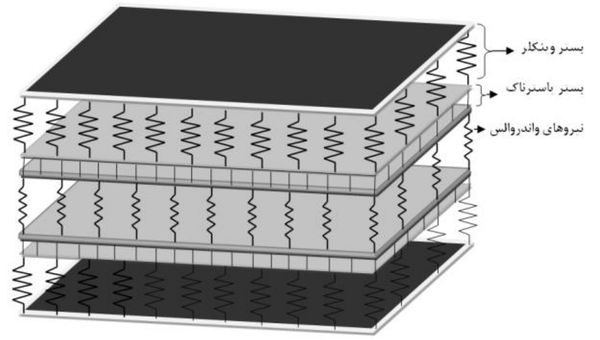
محمدی‌مهر و همکاران [۱۹] به برسی اثرات اندازه روی کمانش و ارتعاشات ورق دو لایه نانو کامپوزیت تقویت شده با نانو لوله نیترید بور با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداختند. تاثیرات اثر مقیاس طول بستر الاستیک و تعداد موج‌ها روی فرکانس طبیعی ورق مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها نشان دادند که با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس طبیعی بدون بعد افزایش پیدا می‌کند و همچنین با افزایش نسبت طول به عرض ورق، فرکانس کاهش پیدا می‌کند. لیو و همکاران [۲۰] به تجزیه و تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله های کربنی (CNTRC) و کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله های کربنی (FG-CNTRC) پرداختند. این تحقیقات شامل معرفی نانو لوله‌های کربنی و همچنین آنالیز مکانیکی این گونه مواد می‌باشد.

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد نانو ورق ناهمسانگرد دو لایه‌ی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی که بر روی بستر الاستیک قرار گرفته‌اند با در نظر گرفتن نیروی واندروالس بین دولایه و به صورت تحلیلی حل شده است. در واقع نانولوله‌های کربنی به صورت مدرج تابعی (یکنواخت، کاهشی- افزایشی) در راستای ضخامت توزیع شده‌اند. سپس تاثیر پارامترهای مختلف بر روی رفتار ارتعاشی ورق ناهمسانگرد دو لایه مورد بررسی قرار گرفته است.

1. Orthotropic

۲- مدل سازی ریاضی

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد یک نانو ورق دولایه که در یک محیط الاستیک قرار گرفته است تحلیل می‌شود. ورق ذکر شده توسط نانولوله‌های کربنی با چیدمان مختلف مدرج تابعی تقویت شده است. محیط الاستیک توسط بستر الاستیک پاسترناک با دوثابت فنری کششی و برشی مدلسازی شده است. همچنین نیروهای واندروالس بین دو صفحه لحاظ گردیده است. شکل ۱ شمای کلی مدل ریاضی مسئله را نمایش می‌دهد.



شکل ۱ شمای کلی نانو ورق دولایه جای گرفته در بستر الاستیک

۲-۱- تئوری غیر محلی

مدل الاستیسیته غیرمحلی در سال ۱۹۸۳ توسط ارینگن بیان گردید [۴]. این مدل بیان می‌کند که تنش وارد شده در یک نقطه در ابعاد میکرو و نانو وابسته به کرنش در تمام نقاط مدل است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left[1-(e_0a)^2\nabla^2\right]\sigma^{nl}=\sigma^{l} \tag{۱}$$

در این رابطه σ^{nl} تنش غیرموضعی (غیرمحلی) و σ^{l} تنش موضعی (محلی) و $(e_0a)^2$ ضریب پارامتر غیرمحلی ارینگن (پارامتر اثر مقیاس کوچک طول) می‌باشند. روابط تنش صفحه‌ای ورق ناهمسانگرد غیرمحلی زمانی که با نانولوله کربن تقویت شده باشد به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^{nl}\\ \sigma_{yy}^{nl}\\ \sigma_{xy}^{nl}\end{Bmatrix}-(e_0a)^2\nabla^2\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}^{nl}\\ \sigma_{yy}^{nl}\\ \sigma_{xy}^{nl}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}(z)\upsilon_{21}(z)} & \dfrac{\upsilon_{12}(z)E_{12}(z)}{1-\upsilon_{12}(z)\upsilon_{21}(z)} & 0\\ \dfrac{\upsilon_{12}(z)E_{12}(z)}{1-\upsilon_{12}(z)\upsilon_{21}(z)} & \dfrac{E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}(z)\upsilon_{21}(z)} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}(z)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{۲}$$

از آن جا که ورق با نانولوله کربنی تقویت شده است، لذا تمامی خواص مکانیکی از قبیل مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون در راستای ضخامت تابعی از z هستند. اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب راستای محور x و y را نشان می‌دهند. با فرض ورق ناهمسانگرد داریم $E_{12}=E_{22}$ [۱۸].

طبق تئوری کلاسیک ورق‌ها جابجایی‌ها در راستای محور x، y و z به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۱].

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z,t)&=u(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial x}\\ \bar{v}(x,y,z,t)&=v(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial y}\\ \bar{w}(x,y,z,t)&=w(x,y,t)\end{aligned} \tag{۳}$$

که $\bar{u}$، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ جابجایی در جهات x، y و z و u و v و w جابجایی روی صفحه میانی است. از روابط کرنش-جابجایی (رابطه (۴)) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \varepsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \varepsilon_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned} \tag{۴}$$

همچنین نیروی محوری و ممان خمشی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\left\{N_{ij},M_{ij}\right\}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}^{nl}(1,z)dz,\quad \left\{i,j=x,y\right\} \tag{۵}$$

با بسط معادلات (۲) و با توجه به تعریف معادله (۵) روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}N_{xx}-(e_0a)^2\nabla^2N_{xx}&=A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}-B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_{12}\frac{\partial v}{\partial y}-B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ N_{yy}-(e_0a)^2\nabla^2N_{yy}&=A_{12}\frac{\partial u}{\partial x}-B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial v}{\partial y}-B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ N_{xy}-(e_0a)^2\nabla^2N_{xy}&=A_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-2B_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned} \tag{۶}$$

و

$$\begin{aligned}M_{xx}^{nl}-(e_0a)^2\nabla^2M_{xx}^{nl}&=B_{11}\frac{\partial u}{\partial x}-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ M_{yy}^{nl}-(e_0a)^2\nabla^2M_{yy}^{nl}&=B_{12}\frac{\partial u}{\partial x}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}-D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ M_{xy}^{nl}-(e_0a)^2\nabla^2M_{xy}^{nl}&=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)B_{44}-2D_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned} \tag{۷}$$

ضرایب معادله‌های بالا به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}&A_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}dz, && A_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\upsilon_{12}(z)E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}dz\\ &A_{22}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}dz, && B_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}zdz\\ &B_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\upsilon_{12}(z)E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}zdz, &&\\ &B_{22}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}zdz, &&\\ &D_{11}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{11}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}z^2dz, && D_{12}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\upsilon_{12}(z)E_{12}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}z^2dz\\ &D_{22}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E_{22}(z)}{1-\upsilon_{12}^2(z)}z^2dz, && A_{44}=\int_{-h/2}^{h/2}G_{12}(z)dz\\ &B_{44}=\int_{-h/2}^{h/2}G_{12}(z)zdz, && D_{44}=\int_{-h/2}^{h/2}G_{12}(z)z^2dz\end{aligned} \tag{۸}$$

۲-۲- تخمین خواص نانوکامپوزیت

فرض کنید ذرات نانو لوله کربنی به صورت مدرج تابعی یک زمینه را تقویت کرده باشند. در صورتیکه V_{cn} کسر حجمی نانو لوله کربنی و V_m کسر حجمی زمینه باشد آنگاه $V_{cn}+V_m=1$. رابطه کسر حجمی نانو لوله کربنی با کسر وزنی به صورت زیر است [۲۲].

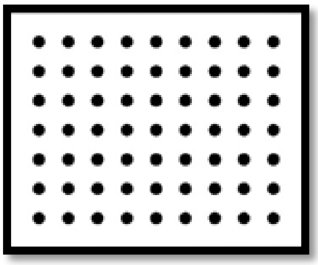
$$V_{cn}^{*}=\frac{w_{cn}}{w_{cn}+\left(\frac{\rho_{cn}}{\rho_m}\right)-\left(\frac{\rho_{cn}}{\rho_m}\right)w_{cn}} \quad (۹)$$

w_{cn} کسر جرمی نانو لوله کربنی و ρ_m، ρ_{cn} به ترتیب چگالی‌های زمینه و نانو لوله کربنی می‌باشند.

در این تحقیق فرض شده است ذرات نانو با دو چیدمان مختلف مدرج تابعی زمینه را در راستای ضخامت تقویت می‌کنند. در ادامه به دو توزیع یکنواخت و کاهشی-افزایشی پرداخته می‌شود.

- **توزیع یکنواخت تک جهته** (UD[1])

مطابق شکل ۲ در صورتیکه ذرات نانو لوله کربنی به طور یکنواخت در راستای ضخامت توزیع گردند به این چیدمان توزیع یکنواخت گویند. در این داریم: $V_{cn}=V_{cn}^{*}$.

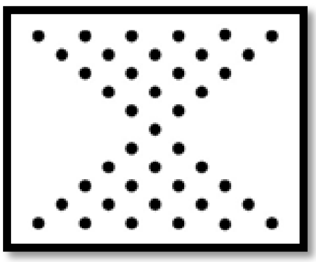


شکل ۲ نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع یکنواخت

- **توزیع کاهشی-افزایشی** (SFG[2])

در صورتی‌که مطابق شکل ۳ نانولوله‌ها به صورت کاهشی-افزایشی در راستای ضخامت توزیع شوند آنگاه داریم [۲۲].

$$V_{cn}=2\left(\frac{2|z|}{h}\right)V_{cn}^{*}$$



شکل ۳ نانو کامپوزیت مدرج تابعی با توزیع کاهشی- افزایشی

همچنین با استفاده از روابط میکرومکانیک می‌توان چگالی، مدول الاستیسیته، ضرایب انبساط گرمایی و ضریب پواسون را برای نانو کامپوزیت به صورت رابطه (۱۰) تعریف کرد [۲۲].

$$\begin{aligned}
&E_{11}=\eta_1 V_{cn}E_{11}^{cn}+V_m E_m\\
&\frac{\eta_2}{E_{22}}=\frac{V_{cn}}{E_{22}^{cn}}+\frac{V_m}{E_m}\\
&\frac{\eta_3}{E_{22}}=\frac{V_{cn}}{G_{12}^{CNT}}+\frac{V_m}{G_m}\\
&\upsilon=V_{cn}\upsilon_{cn}+V_m\upsilon_m\\
&\rho=V_{cn}\rho_{cn}+V_m\rho_{cn}\\
&\alpha_{xx}=\alpha_{11}=V_{cn}\alpha_{11}^{cn}+V_m\alpha_m\\
&\alpha_{yy}=\alpha_{22}=(1-\upsilon_{cn})V_{cn}\alpha_{22}^{cn}+(1+\upsilon_m)V_m\alpha_m+\upsilon\alpha_{11}
\end{aligned} \quad (۱۰)$$

که در آن η_i پارامتر تعیین کننده نانو لوله کربنی در جهات مختلف، E_{11} و E_{22} مدول الاستیک نانو لوله در دو راستای ۱ و ۲، υ ضریب پواسون نانوکامپوزیت، ρ چگالی نانو کامپوزیت، α_{11}^{cn}، α_{22}^{cn} و α_m به ترتیب ضرایب انبساط نانو لوله و زمینه می‌باشند.

۳-۲- استخراج معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی

انرژی کلی سیستم از مجموع انرژی‌های پتانسیل، جنبشی و کار ناشی از نیروهای خارجی تشکیل می‌شود.

$$\Pi=K-(U-W) \quad (۱۱)$$

که در آن انرژی جنبشی به صورت زیر می‌باشد.

$$K=\frac{1}{2}\iint\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dAdz \quad (۱۲)$$

که ρ، u، v و w به ترتیب چگالی، جابجایی در راستای x، y و z می‌باشند. همچنین انرژی کرنشی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
U&=\frac{1}{2}\int\int\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dAdz\\
&=\frac{1}{2}\iint\left[\sigma_{xx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\sigma_{yy}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\sigma_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]dAdz
\end{aligned} \quad (۱۳)$$

کار ناشی از نیروهای خارجی که از بستر الاستیک و نیروی واندروالس بین دو صفحه نشات می‌گیرد به صورت زیر می‌باشد.

$$W=-\int f_i w dV \quad (۱۴)$$

اثرات نیروی محیط الاستیک پاسترناک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۸].

$$\begin{aligned}
&f_1=q-(k_w w_1)+k_g\nabla^2(w_1)-c(w_1-w_2)\\
&f_2=q-(k_w w_2)+k_g\nabla^2(w_2)-c(w_2-w_1)
\end{aligned} \quad (۱۵)$$

در این معادلات q بار عرضی، k_w ثابت فنری نوع وینکلر و k_g ثابت برشی نوع پاسترناک و c ثابت نیروی واندروالس می‌باشند. از اصل همیلتون استفاده می‌شود (رابطه (۱۶)).

$$\delta\int_0^t(K-U+W)dt=0\Rightarrow\int_0^t(\delta K-\delta U+\delta W)dt=0 \quad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶) انرژی جنبشی و پتانسیل و کار نیروی خارجی به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شوند.

1. Uniform distribution
2. Symmetrically linear distribution

$$\delta K=\iint\Big[I_0\dot{u}\delta\dot{u}-I_1\dot{u}\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}-I_1\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\delta\dot{u}$$
$$+I_2\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial x}+I_0\dot{v}\delta\dot{v}-I_1\dot{v}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial y}$$
$$-I_1\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\delta\dot{v}+I_2\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial y}+I_0\dot{w}\delta\dot{w}\Big]dA \qquad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷) ممان اینرسی سطحی به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود.

$$\left\{I_0,I_1,I_2\right\}=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(\mathrm{z})(1,z,z^2)dz \qquad (۱۸)$$

با توجه به معادلات (۵) و (۱۳)، تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر است.

$$\delta U=\int_A\Bigg[N_{xx}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)-M_{xx}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right)+N_{yy}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial y}\right)$$
$$-M_{yy}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\right)+N_{xy}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)-2M_{xy}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\right)\Bigg]dA \qquad (۱۹)$$

همچنین؛

$$\delta W=-\int_V f_i\delta w\ dA \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری روابط (۱۷)، (۱۹) و (۲۰) در رابطه (۱۶) و استفاده از روش انتگرالگیری جزء به جزء برای کاهش مرتبه دادن معادلات تعادل برای ورق دو لایه نانو کامپوزیت مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله کربنی به دست می‌آید که به دلیل حجم زیادی محاسبات، محاسبات اضافی در پیوست (الف) ذکر شده است.

$$\delta u_1:\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial\ddot{w}_1}{\partial x}$$
$$\delta u_2:\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial\ddot{w}_2}{\partial x}$$
$$\delta v_1:\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2v_1}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial\ddot{w}_1}{\partial y}$$
$$\delta v_2:\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2v_2}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial\ddot{w}_2}{\partial y}$$
$$\delta w_1:\frac{\partial^2M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2M_{yy}}{\partial y^2}+q=I_0\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}+I_1\left(\frac{\partial\ddot{v}_1}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_1}{\partial y}\right)-$$
$$I_2\left(\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4w_1}{\partial y^2\partial t^2}\right)+k_wW_1-k_g\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}\right)+\mathrm{C}(\mathrm{w}_1-\mathrm{w}_2)$$
$$\delta w_2:\frac{\partial^2M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2M_{yy}}{\partial y^2}+q=I_0\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}+I_1\left(\frac{\partial\ddot{v}_2}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_2}{\partial y}\right)-$$
$$I_2\left(\frac{\partial^4w_2}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4w_2}{\partial y^2\partial t^2}\right)+k_wW_2-k_g\left(\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_2}{\partial y^2}\right)+\mathrm{C}(\mathrm{w}_2-\mathrm{w}_1) \qquad (۲۱)$$

با جایگذاری روابط (۶) و (۷) در معادلات تعادل، معادلات حاکمه‌ی ورق دو لایه نانو کامپوزیت مدرج تابعی تقویت شده با نانو لوله کربنی به صورت رابطه (۲۲) بدست می‌آید.

$$\delta u_1:\mathrm{A}_{11}\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}-B_{11}\frac{\partial^3w_1}{\partial x^3}+A_{12}\frac{\partial^2v_1}{\partial x\partial y}-B_{12}\frac{\partial^3w_1}{\partial x\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}+$$
$$A_{44}\frac{\partial^2v_1}{\partial x\partial y}-2B_{44}\frac{\partial^3w_1}{\partial x\partial y^2}=I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial\ddot{w}_1}{\partial x}$$
$$\delta u_2:\mathrm{A}_{11}\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}-B_{11}\frac{\partial^3w_2}{\partial x^3}+A_{12}\frac{\partial^2v_2}{\partial x\partial y}-B_{12}\frac{\partial^3w_2}{\partial x\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2u_2}{\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2v_2}{\partial x\partial y}$$
$$-2B_{44}\frac{\partial^3w_2}{\partial x\partial y^2}=I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial\ddot{w}_2}{\partial x} \qquad (۲۲)$$

$$\delta v_1:A_{12}\frac{\partial^2u_1}{\partial x\partial y}-B_{12}\frac{\partial^3w_1}{\partial x^2\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2v_1}{\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^3w_1}{\partial y^3}+A_{44}\frac{\partial^2u_1}{\partial x\partial y}$$
$$+A_{44}\frac{\partial^2v_1}{\partial x^2}-2B_{44}\frac{\partial^3w_1}{\partial x^2\partial y}=I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2v_1}{\partial t^2}-I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial\ddot{w}_1}{\partial y}$$
$$\delta v_2:A_{12}\frac{\partial^2u_2}{\partial x\partial y}-B_{12}\frac{\partial^3w_2}{\partial x^2\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2v_2}{\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^3w_2}{\partial y^3}+A_{44}\frac{\partial^2u_2}{\partial x\partial y}+A_{44}\frac{\partial^2v_2}{\partial x^2}$$
$$-2B_{44}\frac{\partial^3w_2}{\partial x^2\partial y}=I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2v_2}{\partial t^2}-I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial\ddot{w}_2}{\partial y} \qquad (۲۳)$$

$$\delta w_1:\mathrm{B}_{11}\frac{\partial^3u_1}{\partial x^3}-D_{11}\frac{\partial^4w_1}{\partial x^4}+B_{12}\frac{\partial^3v_1}{\partial x^2\partial y}-2D_{12}\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^3u_1}{\partial x\partial y^2}+\mathrm{B}_{22}\frac{\partial^3v_1}{\partial y^3}$$
$$-D_{22}\frac{\partial^4w_1}{\partial y^4}+2B_{44}\frac{\partial^3u_1}{\partial x\partial y^2}+2B_{44}\frac{\partial^3v_1}{\partial x^2\partial y}-4D_{44}\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial y^2}=-q+I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2w_1}{\partial t^2}$$
$$+I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial\ddot{v}_1}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_1}{\partial x}\right)-I_2(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial^4w_1}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4w_1}{\partial t^2\partial y^2}\right)+C(1-(e_0a)^2\nabla^2)$$
$$(w_1-w_2)-K_g(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial^2w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_1}{\partial y^2}\right)+(1-(e_0a)^2\nabla^2)K_ww_1$$

$$\delta w_2:\mathrm{B}_{11}\frac{\partial^3u_2}{\partial x^3}-D_{11}\frac{\partial^4w_2}{\partial x^4}+B_{12}\frac{\partial^3v_2}{\partial x^2\partial y}-2D_{12}\frac{\partial^4w_2}{\partial x^2\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^3u_2}{\partial x\partial y^2}+\mathrm{B}_{22}\frac{\partial^3v_2}{\partial y^3}$$
$$-D_{22}\frac{\partial^4w_2}{\partial y^4}+2B_{44}\frac{\partial^3u_2}{\partial x\partial y^2}+2B_{44}\frac{\partial^3v_2}{\partial x^2\partial y}-4D_{44}\frac{\partial^4w_2}{\partial x^2\partial y^2}=-q+I_0(1-(e_0a)^2\nabla^2)\frac{\partial^2w_2}{\partial t^2}$$
$$+I_1(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial\ddot{v}_2}{\partial y}+\frac{\partial\ddot{u}_2}{\partial x}\right)-I_2(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial^4w_2}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4w_2}{\partial t^2\partial y^2}\right)+C(1-(e_0a)^2\nabla^2)$$
$$(w_2-w_1)-K_g(1-(e_0a)^2\nabla^2)\left(\frac{\partial^2w_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w_2}{\partial y^2}\right)+(1-(e_0a)^2\nabla^2)K_ww_2 \qquad (۲۴)$$

شرایط مرزی استخراج شده از معادلات تعادل به صورت رابطه (۲۵) می‌باشند.

$$\begin{aligned}&\delta u: N_{xx}+N_{xy}=0 \qquad \delta v: N_{yy}+N_{xy}=0\\&\delta w: M_{xx,x}+M_{yy,y}+2M_{xy,y}=0\\&\delta w_{,x}: M_{xx}+2M_{xy}=0 \qquad \delta w_{,y}: M_{yy}=0\end{aligned} \tag{۲۵}$$

همچنین شرایط اولیه طبق رابطه (۲۶) می‌باشند.

$$\begin{aligned}&\delta u: I_0\dot{u}-I_1\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}=0 \qquad \delta v: I_0\dot{v}-I_1\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}=0\\&\delta w: I_0\dot{w}-I_2\dot{w}_{,xx}-I_2\dot{w}_{,yy}+I_1\ddot{u}+I_1\ddot{v}=0\\&\delta \dot{w}: I_2\dot{w}_{,x}+I_2\dot{w}_{,y}=0 \qquad \delta w_{,x}: \mathrm{I}_1\,\dot{u}=0 \qquad \delta w_{,y}: \mathrm{I}_1\,\dot{v}=0\end{aligned} \tag{۲۶}$$

۳- بی‌بعد سازی معادلات

به منظور بی بعدسازی معادلات حاکم پارامترهای بی بعد هندسی و مکانیکی به صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۸].

$$\begin{aligned}&\eta_y=\frac{h}{\mathrm{L}_y},\ \eta_x=\frac{h}{\mathrm{L}_x},\ \xi_x=\frac{x}{\mathrm{L}_x},\ \ \xi_y=\frac{y}{\mathrm{L}_y},\ \bar{e}_n=\frac{(e_0a)^2}{\mathrm{L}_x{}^2}\\&\bar{u}=\frac{u}{h},\ \ \bar{v}=\frac{v}{h},\ \bar{w}_1=\frac{w_1}{h},\ \ \beta=\frac{\mathrm{L}_y}{\mathrm{L}_x},\quad \bar{t}=\frac{t}{\mathrm{L}_y}\sqrt{\frac{\mathrm{E}_{11}}{\rho}}\\&\bar{I}_0=\frac{I_0}{\rho\mathrm{L}_y},\ \bar{I}_1=\frac{I_1}{\rho\mathrm{L}_y^2},\ \ \bar{I}_2=\frac{I_2}{\rho\mathrm{L}_y{}^3}\\&\bar{c}=\frac{ch}{\mathrm{E}_{11}},\ \bar{K}_g=\frac{K_g}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y},\ \bar{k}_w=\frac{k_w\mathrm{L}_y}{\mathrm{E}_{11}}\\&\bar{\mathrm{A}}_{11}=\frac{\mathrm{A}_{11}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y},\ \bar{\mathrm{A}}_{12}=\frac{\mathrm{A}_{12}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y},\ \bar{\mathrm{A}}_{22}=\frac{\mathrm{A}_{22}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y},\ \bar{\mathrm{A}}_{44}=\frac{\mathrm{A}_{44}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y}\\&\bar{B}_{11}=\frac{B_{11}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^2},\ \bar{B}_{12}=\frac{B_{12}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^2},\ \bar{B}_{22}=\frac{B_{22}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^2},\ \bar{B}_{44}=\frac{B_{44}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^2}\\&\bar{D}_{11}=\frac{D_{11}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^3},\ \bar{D}_{12}=\frac{D_{12}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^3},\ \bar{D}_{22}=\frac{D_{22}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^3},\ \bar{D}_{44}=\frac{D_{44}}{\mathrm{E}_{11}\mathrm{L}_y{}^3}\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با جایگذاری پارامترهای بدون بعد در معادلات حاکم (۲۴)، معادلات حاکم بدون بعد برای ارتعاشات آزاد یک نانو ورق دو لایه تقویت شده با نانو لوله کربنی بدست می‌آید که به علت حجیم بودن فرمول‌ها، در پیوست (ب) ذکر شده‌اند.

۴- روش حل و شرایط مرزی

برای حل معادلات حاکم از روش ناویر استفاده شده است. طبق این روش توابع مربوط به متغیرهای مسئله به گونه‌ای باید حدس زده شوند که شرایط مرزی و معادله حاکم سیستم را برآورده کنند. با فرض شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده می‌توان شرایط را برای یک ورق مستطیلی ($a\times b$) به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}&y=0, y=b\rightarrow u=0, w=0,\ M_{yy}=0\\&x=0, x=a\rightarrow v=0, w=0,\ M_{xx}=0\end{aligned} \tag{۲۸}$$

به این ترتیب، توابع جابجایی در رابطه (۲۹) برای دو لایه ورق به گونه‌ای که شرایط مرزی را ارضاء نمایند تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}&u_1(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{1mn}\cos(\alpha_n\xi_x)\sin(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\\&u_2(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}\sum_{n=1}u_{2mn}\cos(\alpha_n\xi_x)\sin(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\\&v_1(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}\sum_{n=1}v_{1mn}\sin(\alpha_n\xi_x)\cos(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\\&v_2(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}\sum_{n=1}v_{2mn}\sin(\alpha_n\xi_x)\cos(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\\&w_1(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}\sum_{n=1}w_{1mn}\sin(\alpha_n\xi_x)\sin(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\\&w_2(\mathrm{x,y,t})=\sum_{m=1}\sum_{n=1}w_{2mn}\sin(\alpha_n\xi_x)\sin(\alpha_m\xi_y)e^{iwt}\end{aligned} \tag{۲۹}$$

از آنجایی که ورق مربوطه دارای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده می‌باشد، α_m و α_n به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$\alpha_n=n\pi\ ,\ \alpha_m=m\pi\,.$

حال با جایگذاری روابط (۲۹) در معادلات حاکم بدون بعد موجود در پیوست (ب)، یک دستگاه معادلات جبری همگن به صورت زیر دست می‌آید که از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب فرکانس طبیعی سیستم (ω) حاصل می‌شود. به دلیل حجیم بودن رابطه‌ها از ذکر آنها در اینجا خودداری کرده و در پیوست (ج) ذکر شده‌اند.

$$\begin{bmatrix}m_1&0&m_2&0&m_3&0\\0&m_4&0&m_5&0&m_6\\m_7&0&m_8&0&m_9&0\\0&m_{10}&0&m_{11}&0&m_{12}\\m_{13}&0&m_{14}&0&m_{15}&m_{16}\\0&m_{17}&0&m_{18}&m_{19}&m_{20}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{1mn}\\u_{2mn}\\v_{1mn}\\v_{2mn}\\w_{1mn}\\w_{2mn}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{۳۰}$$

که

$$\begin{aligned}m_1=&-\omega^2(-\bar{I}_0\eta_y-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\alpha_n{}^2-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\beta^2\alpha_m{}^2)\\&-\bar{\mathrm{A}}_{11}\eta_x\beta\alpha_n{}^2-\bar{A}_{44}\eta_y\alpha_m{}^2\\m_2=&-\bar{\mathrm{A}}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m-\bar{\mathrm{A}}_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m\\m_3=&-\omega^2(\bar{I}_1\eta_x\alpha_n+\bar{I}_1\bar{e}_n\eta_x\alpha^3{}_n+\bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n\beta^{-2}\alpha_n\alpha_m{}^2)\\&+\bar{\mathrm{B}}_{11}\beta^2\alpha_n{}^3\eta_x+\bar{\mathrm{B}}_{12}\alpha_n\alpha_m{}^2\eta_x+2\bar{\mathrm{B}}_{44}\alpha_n\alpha_m{}^2\eta_x\\m_7=&-\bar{A}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m-\bar{A}_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m\\m_8=&-\omega^2(-\bar{I}_0\eta_y-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\alpha_n{}^2-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\beta^2\alpha_m{}^2)\\&-\bar{A}_{44}\eta_x\alpha_n{}^2-\bar{A}_{22}\eta_y\beta\alpha_m{}^2\\m_9=&-\omega^2(\bar{I}_1\eta_y\alpha_m+\bar{I}_1\bar{e}_n\eta_y\alpha^2{}_n\alpha_m+\bar{I}_1\eta_y\bar{e}_n\beta^{-2}\alpha_m{}^3)\\&+\bar{\mathrm{B}}_{11}\beta\alpha^2{}_n\alpha_m\eta_x+\bar{\mathrm{B}}_{22}\alpha_m{}^3\eta_y+2\bar{\mathrm{B}}_{44}\beta\alpha_m\alpha_n{}^2\eta_x\\m_{13}=&-\omega^2(\bar{I}_1\eta_x\alpha_n+\bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n^2\alpha_n{}^3+\bar{I}_1\eta_y\bar{e}_n^2\beta^{-1}\alpha_m{}^2\alpha_n)\\&+\bar{\mathrm{B}}_{11}\eta_x\alpha_n{}^3+\bar{\mathrm{B}}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m{}^2+2\bar{B}_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m^2\\m_{14}=&-\omega^2(\bar{I}_1\eta_y\alpha_m-\bar{I}_1\eta_y\bar{e}_n^2\alpha_n{}^2\alpha_m-\bar{I}_1\eta_y\bar{e}_n^2\alpha_m{}^3\beta^{-2})\\&+\bar{\mathrm{B}}_{12}\eta_x\beta\alpha^2{}_n\alpha_m+\bar{B}_{22}\eta_y\alpha_m^3+2\bar{B}_{44}\eta_x\beta\alpha_m\alpha_n^2\\m_{15}=&-\omega^2(-\bar{I}_0\eta_y-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\alpha_n^2-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\beta^2\alpha_m^2\\&-\bar{I}_2\eta_x\beta\alpha_n^2-\bar{I}_2\eta_y\alpha_m^2-\bar{I}_2\eta_x\beta\bar{e}_n\alpha_n^4-\bar{I}_2\bar{e}_n\eta_y\beta^{-2}\alpha_m^4-2\bar{I}_2\eta_y\bar{e}_n\alpha_n^2\alpha_m^2)\\&-\bar{D}_{11}\eta_x\beta^3\alpha_n^4-2\bar{D}_{12}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2-\bar{D}_{22}\eta_y\alpha_m^4-4\bar{D}_{22}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2\\&-\bar{c}-\bar{e}_n\bar{c}\alpha_n^2-\frac{\bar{e}_n\bar{c}}{\beta^2}\alpha_m^2-\bar{K}_g\eta_x\beta\alpha_n^2-\bar{K}_g\eta_y\alpha_m^2-\bar{K}_g\eta_x\beta\bar{e}_n\alpha_n^4\\&-\frac{\bar{K}_g\eta_y\bar{e}_n}{\beta}\alpha_m^4-2\bar{K}_g\eta_y\bar{e}_n\alpha_n^2\alpha_m^2-\bar{k}_{1w}\eta_y\\&-\bar{k}_{1w}\eta_y\bar{e}_n\alpha_n^2-\bar{k}_{1w}\eta_y\bar{e}_n\beta^{-2}\alpha_m^2\\m_{16}=&\,\bar{c}+\bar{e}_n\bar{c}\alpha_n^2+\frac{\bar{e}_n\bar{c}}{\beta^2}\alpha_m^2\end{aligned} \tag{۳۱}$$

به دلیل متقارن بودن ماتریس ضرایب رابطه (۳۲) برقرار است.

$$m_1=m_4,\ m_2=m_5,\ m_3=m_6,\ m_7=m_{10},\ m_8=m_{11},\ m_9=m_{12}$$
$$m_{13}=m_{17},\ m_{14}=m_{18},\ m_{15}=m_{19},\ m_{16}=m_{20} \quad (۳۲)$$

۵- بحث و تفسیر نتایج

در این بخش تاثیر ثابت‌فنری نوع وینکلر، ثابت‌برشی نوع پاسترناک، پارامترهای غیرمحلی و چیدمان مختلف تقویت کننده با نانولوله کربن روی رفتار ارتعاشی نانو ورق ناهمسانگرد دولایه مورد بررسی قرار می‌گیرد. ماده استفاده شده در این تحقیق PMMA است که خواص مکانیکی آن وابسته به دما می‌باشد به طوری که با تغییرات دما این مقادیر نیز تغییر می‌کنند. خواص هندسی، فیزیکی و مکانیکی PMMA در دمای ثابت ۳۰۰ درجه کلوین در جداول ۱ و ۲ آورده شده است.

جدول ۱ خواص مکانیکی PMMA در دمای ۳۰۰ درجه کلوین [۲۳]

کمیت	مقدار
η_1	۰/۱۳۷
η_2	۱/۰۲۲
η_3	۰/۷۱۵
V_{cn}^{*}	۰/۱۲
E_{11}^{cn}, TPa	۵/۶۴۶۶
E_{22}^{cn}, TPa	۷/۰۸
G_{12}^{cn}, TPa	۱/۹۴۹۵
E_m, GPa	۲/۵
ρ_{cn}, kg/m³	۱۴۰۰
υ_{12}^{cn}	۰/۱۷۵
ρ_m, kg/m³	۱۱۵۰
υ_m	۰/۳۴

در جدول ۱ مدول الاستیسیته زمینه به صورت تابعی از دما از رابطه $E_m=3.52-0.0034\,(300+\Delta T)$ پیروی می‌کند [۲۳].

جدول ۲ خواص هندسی و فیزیکی PMMA [۲۴]

کمیت	مقدار
K_g, N/m	۲/۰۷۱۲۷۳
K_w, N/m³	$۸/۹۹\times۱۰^{۱۷}$
c, N/m³	$۹/۹۱\times۱۰^{۱۹}$
L_x, nm	۰/۶۷
L_y, nm	۰/۳۳۵
h, nm	۰/۰۶۷

۵-۱- ارتعاشات آزاد

به منظور بررسی کمیت‌های ذکر شده روی ارتعاشات آزاد نانو ورق دولایه، فرکانس طبیعی بدون بعد به صورت زیر تعریف شده است.

$$\varpi=\omega L\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (۳۳)$$

با جایگذاری مقادیر ارائه شده در جداول ۱ و ۲ در معادلات حاکم، معادلات سیستم بر حسب فرکانس طبیعی حاصل می‌شود که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب مقادیر فرکانس‌های طبیعی بدست می‌آید.

جدول ۳ مقادیر فرکانس طبیعی بدون بعد را در حالتی که چیدمان لایه‌ها به‌صورت یکنواخت و کاهشی-افزایشی است بر حسب مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی و مقدار ثابت (*m=n=1*) نشان می‌دهد.

جدول ۳ فرکانس طبیعی اول بی‌بعد نانو ورق دولایه با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به ازای دو چیدمان مختلف نانولوله‌های کربنی

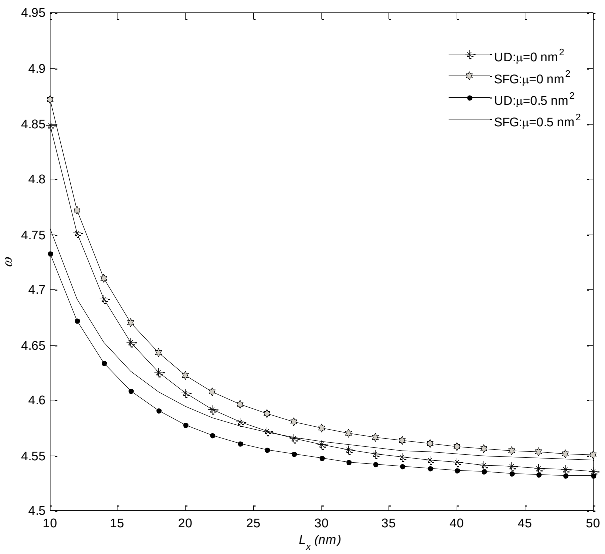
ضریب غیرمحلی	توزیع یکنواخت	توزیع کاهشی-افزایشی
۰	۹/۵۶۲۰	۹/۵۹۰۱
۰/۵	۳/۴۰۸۳	۳/۴۱۹۷
۱	۱/۷۹۱۷	۱/۷۹۷۷
۱/۵	۱/۲۰۶۳	۱/۲۱۰۳
۲	۰/۹۰۷۹	۰/۹۱۰۹

برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، مدل ارائه شده به گونه‌ای ساده می‌شود تا بتوان با نتایج بدست آمده توسط پردهن و همکاران [۲۵] مقایسه کرد. برای رسیدن به مدل مرجع [۲۵] باید اثرات بستر الاستیک و نیروی واندروالس بین ورق‌ها برابر با صفر قرار داده شود و خواص ماده به صورت $E_1=E_2=1.06$ TPa، $\nu_{12}=\nu_{21}=0.25$، $\rho=2250$ kg/m³ و $h=0.34$nm و $k_g=k_w=0$ فرض شود. نتایج نسبت فرکانس برای نانو ورق کامپوزیت با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴ مقادیر نسبت فرکانس برای نانوورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

ضریب غیرمحلی	مرجع [۲۵]	نتایج تحقیق حاضر
۰	۱	۱
۱	۰/۹۱۳۹	۰/۹۱۳۸
۲	۰/۸۴۶۷	۰/۸۴۶۷
۳	۰/۷۹۲۵	۰/۷۹۲۵

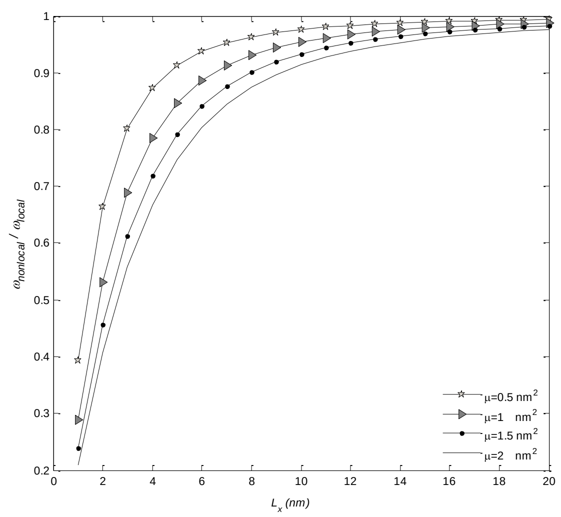
در شکل ۴ منحنی‌های فرکانس طبیعی بدون بعد غیرمحلی و محلی بر حسب افزایش طول در حالتی که مقدار ضریب غیر محلی برابر با $\mu=(e_0a)^2=0.5$ و *m=n=1* می‌باشد به ازای دو چیدمان یکنواخت و کاهشی-افزایشی نشان داده شده است.



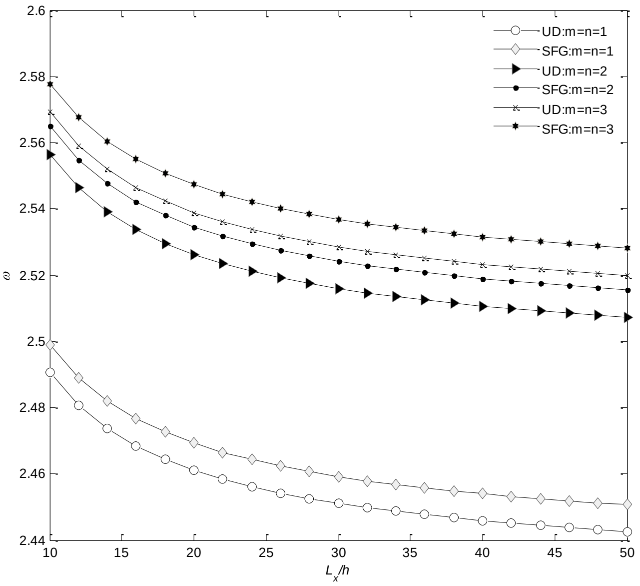
شکل ۴ اثر تغییرات طول نانو ورق دولایه بر فرکانس غیرمحلی بدون بعد (به ازای $\mu=0.5$) و محلی ($\mu=0$) برای دو چیدمان مختلف نانو لوله کربنی و *m=n=1*

همانطوری که از این منحنی‌ها مشخص است به ازای یک ضریب غیرمحلی ثابت با افزایش طول فرکانس کاهش می‌یابد و با افزایش پارامتر غیرمحلی به ازای یک طول ثابت فرکانس‌ها کاهش پیدا می‌کند. دلیل آن این است که با افزایش پارامتر غیرمحلی تغییر مکان‌های دینامیکی صفحات افزایش می‌یابد که به معنای افزایش الاستیسیته (کاهش سفتی) و یا کاهش فرکانس‌های سیستم می‌باشد. همچنین از نتایج جدول ۳ و شکل ۴ می‌توان نتیجه گرفت که در حالتی که چیدمان به صورت کاهشی-افزایشی باشد مقدار فرکانس طبیعی بیشتر می‌باشد که دلیل آن سفتی بالای ماده و کاهش خیز است. در شکل ۵ منحنی‌های نسبت فرکانس غیرمحلی به محلی به ازای افزایش طول ورق در حالتی که مقدار پارامتر غیرمحلی متغیر و m و n ثابت باشند، برای چیدمان کاهشی-افزایشی رسم شده است. همانطوری که از منحنی‌ها مشاهده می‌شود با افزایش ضریب غیرمحلی نسبت فرکانس‌ها کاهش پیدا کرده و افزایش طول باعث افزایش نسبت فرکانس می‌شود. همچنین با افزایش ضریب غیرمحلی تغییرات نسبت فرکانس کمتر می‌شود.

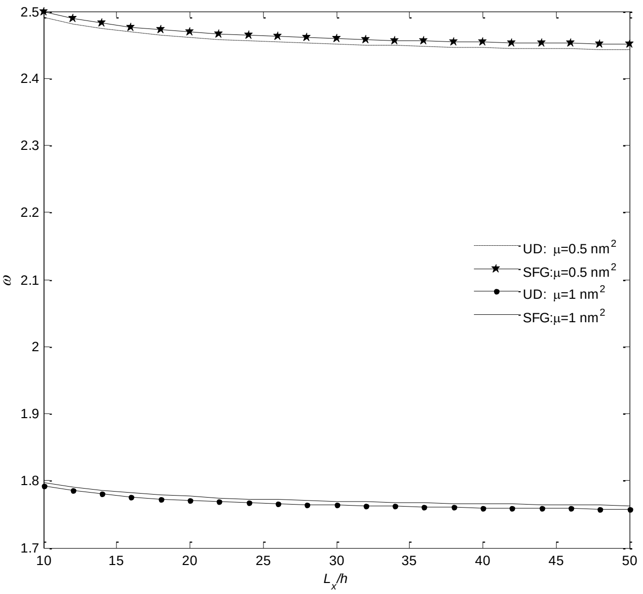
شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب منحنی‌های تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد با نسبت‌های مختلف (L_x/h) و به ازای مقادیر مختلف مودهای ارتعاشی m و n و تغییرات ضریب غیرمحلی برای دو توزیع یکنواخت و کاهشی-افزایشی نشان می‌دهند. همانطوری که از نمودارها مشخص است با افزایش نسبت (L_x/h) فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند و دلیل آن این است که با افزایش (L_x/h) ورق نازک‌تر شده و سفتی خمشی ورق کاهش پیدا می‌کند و در نتیجه فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز کاهش پیدا می‌کند. همانطوری که از منحنی‌ها مشخص است با افزایش مود ارتعاشی فرکانس نیز افزایش می‌یابد و در حالتی که چیدمان به صورت کاهشی-افزایشی باشد مقدار فرکانس بیشتر می‌باشد. همانطوری که از شکل ۷ مشاهده می‌شود تاثیر ضریب غیر محلی روی فرکانس طبیعی بیشتر از تعداد مودهای ارتعاشی می‌باشد. شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد را با افزایش (L_y/h) و به ازای مقادیر مختلف مودهای ارتعاشی و ضریب غیرمحلی نشان می‌دهد. همانطوری که از منحنی‌ها مشخص است با افزایش نسبت (L_y/h) فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند. همانطوری که از شکل ۸ مشخص است با افزایش تعداد مود ارتعاشی m شیب نمودارها کاهش پیدا می‌کند و تغییرات فرکانس به تدریج کمتر می‌شود.



شکل ۵ اثر تغییرات طول نانو ورق دولایه بر نسبت فرکانس غیرمحلی به محلی به ازای ضریب غیرمحلی مختلف برای چیدمان کاهشی-افزایشی CNT

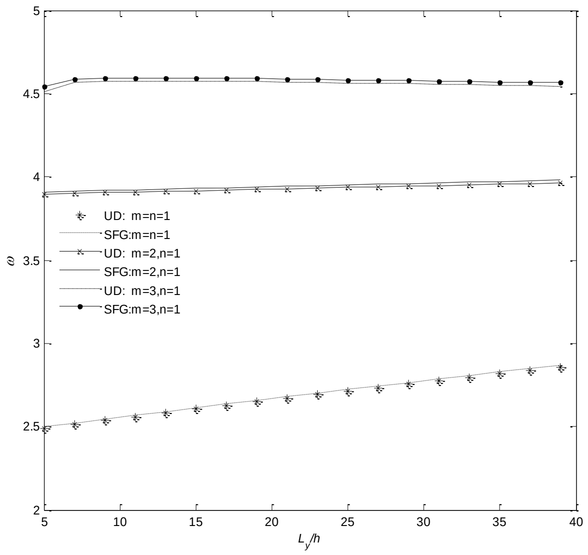


شکل ۶ اثر افزایش تعداد مودهای ارتعاشی بر تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد به ازای ضریب غیرمحلی $\mu=0.5$ برای دو چیدمان مختلف CNT

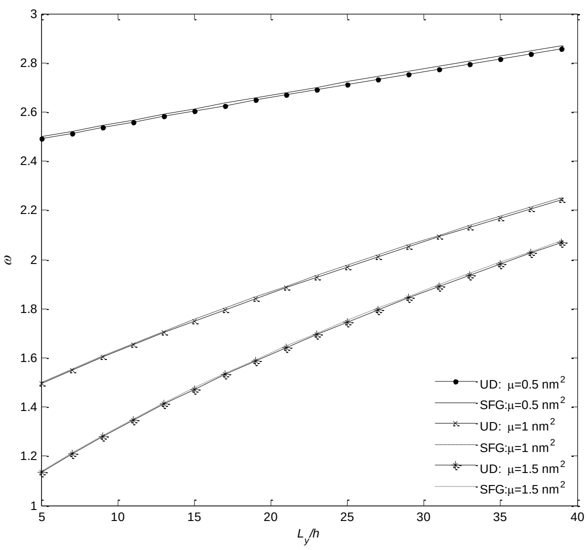


شکل ۷ تاثیر تغییر نسبت منظری (L_x/h) و ضریب غیر محلی بر فرکانس طبیعی بی بعد نانو ورق دولایه به ازای چیدمان مختلف $(m=n=1)$

قابل ذکر است که تا یک نسبت معینی از (L_y/h) فرکانس در حالتی که چیدمان به صورت کاهشی-افزایشی باشد بیشتر از حالتی است که توزیع نانو لوله‌ها به صورت یکنواخت می‌باشند. همانطوری که از نمودار ۹ مشاهده می‌شود با افزایش ضریب غیر محلی شیب نمودارها افزایش پیداکرده و تغییرات فرکانس کمتر می‌شود. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به‌ترتیب اثرات افزایش مقدار ثابت فنری نوع وینکلر و پاسترناک را بر روی نسبت فرکانس طبیعی غیرمحلی به محلی تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در حالتی که توزیع نانو لوله‌ها به صورت کاهشی-افزایشی باشد را نشان می‌دهد.



شکل ۸ اثر تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش نسبت (L_y/h) به ازای تعداد مود ارتعاشی m متفاوت و $\mu=0.5$ برای دو چیدمان متفاوت



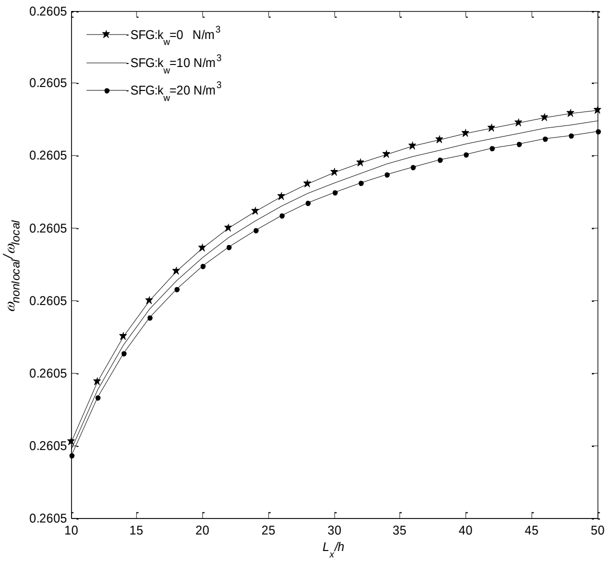
شکل ۹ اثر تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش نسبت (L_y/h) به ازای افزایش ضریب غیر محلی و $m=n=1$ برای دو چیدمان مختلف

همان‌طوری که از منحنی‌ها مشاهده می‌شود با افزایش نسبت (L_x/h) به ازای ثابت فنری، ثابت نسبت فرکانس‌ها افزایش یافته و همچنین با افزایش ثابت فنری نسبت فرکانس‌ها کاهش پیدا می‌کند. همانطوری که از منحنی‌ها مشاهده می‌شود شیب منحنی‌های نسبت فرکانس در حالتی که ثابت فنری نوع پاسترناک ثابت و نوع وینکلر متغیر باشد بیشتر بوده و تغییرات آن نیز کمتر می‌باشد.

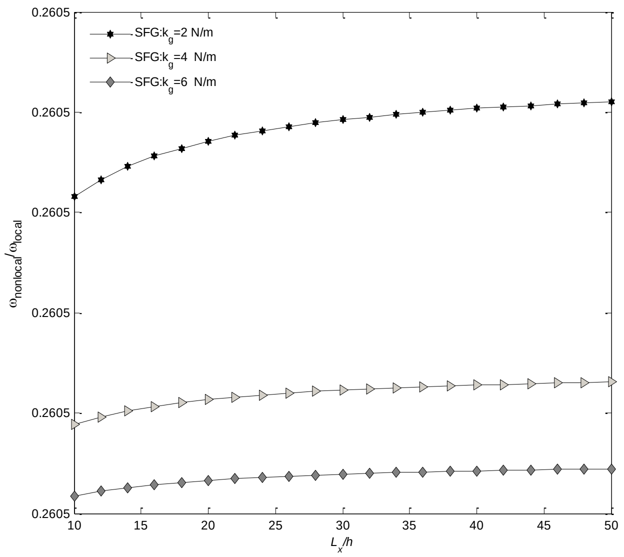
شکل ۱۲ منحنی تغییرات فرکانس طبیعی غیر محلی به ازای افزایش ثابت برشی نوع پاسترناک در حالتی که چیدمان نانو لوله‌ها به صورت کاهشی-افزایشی باشد را نشان می‌دهد همانطوری که این منحنی نشان می‌دهد با افزایش ثابت برشی فرکانس طبیعی افزایش چندانی ندارد.

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد یک نانو ورق دولایه واقع شده بر بستر الاستیک پاسترناک به صورت تحلیلی حل شده است.



شکل ۱۰ اثر تغییرات نسبت فرکانس با افزایش نسبت (L_x/h) به ازای مقادیر متفاوت ثابت فنری نوع وینکلر و ضریب غیرمحلی $\mu=0.5$

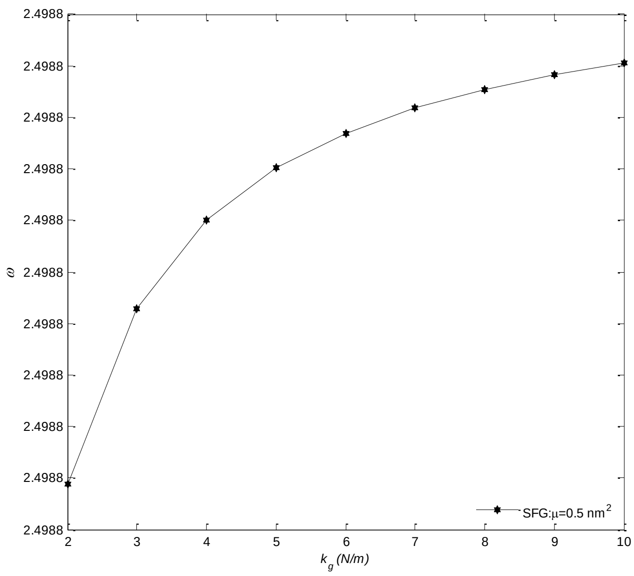


شکل ۱۱ اثر تغییرات نسبت فرکانس با افزایش نسبت (L_x/h) به ازای مقادیر متفاوت ثابت فنری نوع پاسترناک و ضریب غیرمحلی $\mu=0.5$

نانو ورق با دو شکل تابعی مدرج (یکنواخت و افزایشی-کاهشی) با نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت تقویت شده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات نانو ورق با استفاده از روش انرژی بدست آمده و با استفاده از روش ناویر حل شده است. در نهایت تاثیر ثابت‌فنری نوع وینکلر، ثابت‌برشی نوع پاسترناک، پارامترهای غیرمحلی و چیدمان مختلف تقویت‌کننده با نانولوله کربنی روی رفتار ارتعاشی نانو ورق ناهمسانگرد دولایه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

- در حالتی که چیدمان نانو لوله‌های کربنی به صورت کاهشی-افزایشی باشد مقدار فرکانس در یک (Lx/h) مشخص بیشتر از توزیع یکنواخت می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت ماده سفتی بیشتری دارد.
- در نسبت معینی از (Ly/h) فرکانس حالت توزیع کاهشی-افزایشی بیشتر از حالت توزیع یکنواخت است.

- به ازای یک ضریب غیرمحلی ثابت با افزایش طول، نسبت فرکانس غیرمحلی به محلی افزایش می‌یابد و با افزایش پارامتر غیرمحلی به ازای یک طول ثابت نسبت فرکانس‌ها کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش مودهای ارتعاشی فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند.
- با افزایش نسبت (Lx/h) ورق نازک‌تر شده و سفتی آن کاهش پیدا می‌کند و فرکانس طبیعی آن کاهش پیدا کرده و خیز آن بیشتر می‌شود.
- با افزایش ثابت فنری نوع وینکلر و ثابت برشی نوع پاسترناک فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده و نسبت فرکانس غیر محلی به محلی کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۱۲ اثر ثابت برشی نوع پاسترناک بر فرکانس طبیعی نانو ورق دولایه برای چیدمان افزایشی-کاهشی و $\mu = 0.5$

۷- پیوست

(الف) کاهش مرتبه معادلات تعادل به روش انتگرال‌گیری جز به جز:

$$\int I_0 U^{\bullet}\delta U^{\bullet} = \int I_0 U^{\bullet}\frac{d}{dt}(\delta u) = I_0 U^{\bullet}\delta U - \int I_0 U^{\bullet\bullet}\delta U^{\bullet}$$

$$-\int N_{xx}\frac{\partial \delta u}{\partial x} = -N_{xx}\delta u + \int \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}\delta u$$

$$-\int N_{xy}\frac{\partial \delta u}{\partial y} = -N_{xy}\delta u + \int \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u$$

$$\int I_0 V^{\bullet}\delta V^{\bullet} = \int I_0 V^{\bullet}\frac{d}{dt}(\delta v) = I_0 V^{\bullet}\delta V^{\bullet} - \int I_0 V^{\bullet\bullet}\delta V^{\bullet}$$

$$-\int N_{yy}\frac{\partial \delta v}{\partial y} = -N_{yy}\delta v + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y}\delta v$$

$$\int I_0 W^{\bullet}\delta W^{\bullet} = \int I_0 W^{\bullet}\frac{d}{dt}(\delta w) = I_0 W^{\bullet}\delta W^{\bullet} - \int I_0 W^{\bullet\bullet}\delta W^{\bullet}$$

$$\int I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial x}\frac{\partial \delta W^{\bullet}}{\partial x} = I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial x}\delta W^{\bullet} - \int I_2\delta W^{\bullet}\frac{\partial^2 W^{\bullet}}{\partial x^2} =$$
$$I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial x}\delta W^{\bullet} - \left[I_2\frac{\partial^2 W^{\bullet}}{\partial x^2}\delta w - \int I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\delta w\right]$$

$$\int I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial y}\frac{\partial \delta W^{\bullet}}{\partial y} = I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial y}\frac{\partial \delta W^{\bullet}}{\partial y}\Big|_0 - \int I_2\delta W^{\bullet}\frac{\partial^2 W^{\bullet}}{\partial y^2} =$$
$$I_2\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial y}\delta W^{\bullet} - \left[I_2\frac{\partial^2 W^{\bullet}}{\partial y^2}\delta W^{\bullet} - \int I_2\frac{\partial^4 W^{\bullet}}{\partial y^2\partial t^2}\delta W^{\bullet}\right]$$

$$\int M_{yy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = M_{yy}\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \int \frac{\partial \delta w}{\partial y}\left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right)dy =$$
$$M_{yy}\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \left[\int \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}\delta w - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\delta w\right]$$

$$\int 2M_{xy}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y\partial x} = 2M_{xy}\frac{\partial\ \delta w}{\partial x} - 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w + \int 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}\delta w$$

(الف-۱)

$$N_{xx} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial v}{\partial y} - B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$N_{yy} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(A_{12}\frac{\partial u}{\partial x} - B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{22}\frac{\partial v}{\partial y} - B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(A_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2B_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

$$M_{xx} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{yy} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial v}{\partial y} - D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{xy}^{nl} = \frac{1}{(1-(e_0 a)^2\nabla^2)}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)B_{44} - 2D_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

(الف-۲)

(ب) معادلات حاکم بدون بعد:

$$\delta U_1 : \bar{A}_{11}\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial\xi_x^2} - B_{11}\beta^2\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_1}{\partial\xi_x^3} + \bar{A}_{12}\eta_x\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y} - \bar{B}_{12}\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2}$$
$$+\bar{A}_{44}\eta_x\frac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y} + \bar{A}_{44}\eta_y\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial\xi_y^2} - 2\bar{B}_{44}\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2} = \bar{I}_0\eta_y\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial\bar{t}^2}$$
$$-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\frac{\partial^4\bar{u}_1}{\partial\xi_x^2\partial\bar{t}^2} - \bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\beta^2\frac{\partial^4\bar{u}_1}{\partial\xi_y^2\partial\bar{t}^2} - \bar{I}_1\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_1}{\partial\xi_x\partial\bar{t}^2} +$$
$$\bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n\frac{\partial^5\bar{w}_1}{\partial\xi_x^3\partial\bar{t}^2} + \bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n\beta^{-2}\frac{\partial^5\bar{w}_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2\partial\bar{t}^2}$$

$$\delta U_2 : \bar{A}_{11}\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar{u}_2}{\partial\xi_x^2} - B_{11}\beta^2\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_2}{\partial\xi_x^3} + \bar{A}_{12}\eta_x\frac{\partial^2\bar{v}_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y} - \bar{B}_{12}\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2}$$
$$+\bar{A}_{44}\eta_x\frac{\partial^2\bar{v}_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y} + \bar{A}_{44}\eta_y\frac{\partial^2\bar{u}_2}{\partial\xi_y^2} - 2\bar{B}_{44}\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2} = \bar{I}_0\eta_y\frac{\partial^2\bar{u}_2}{\partial\bar{t}^2}$$
$$-\bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\frac{\partial^4\bar{u}_2}{\partial\xi_x^2\partial\bar{t}^2} - \bar{I}_0\eta_y\bar{e}_n\beta^2\frac{\partial^4\bar{u}_2}{\partial\xi_y^2\partial\bar{t}^2} - \bar{I}_1\eta_x\frac{\partial^3\bar{w}_2}{\partial\xi_x\partial\bar{t}^2} +$$
$$\bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n\frac{\partial^5\bar{w}_2}{\partial\xi_x^3\partial\bar{t}^2} + \bar{I}_1\eta_x\bar{e}_n\beta^{-2}\frac{\partial^5\bar{w}_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^2\partial\bar{t}^2}$$

(ب-۱)

$$\begin{aligned}
&\delta V_1:\bar A_{12}\eta_x\frac{\partial^2\bar u_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y}-\bar B_{12}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar w_1}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}+\bar A_{22}\eta_y\frac{\partial^2\bar v_1}{\partial\xi_y^{2}}-\bar B_{22}\eta_y\frac{\partial^3\bar w_1}{\partial\xi_y^{3}}\\
&+\bar A_{44}\eta_x\frac{\partial^2\bar u_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y}+\bar A_{44}\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar v_1}{\partial\xi_x^{2}}-2\bar B_{44}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar w_1}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}=\bar I_0\eta_y\frac{\partial^2\bar v_1}{\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_0\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar v_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\frac{\partial^4\bar v_1}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\frac{\partial^3\bar w_1}{\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}+\\
&\bar I_1\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\frac{\partial^5\bar w_1}{\partial\xi_y^{3}\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_y\bar e_n\frac{\partial^5\bar w_1}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}\\
&\delta V_2:\bar A_{12}\eta_x\frac{\partial^2\bar u_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y}-\bar B_{12}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar w_2}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}+\bar A_{22}\eta_y\frac{\partial^2\bar v_2}{\partial\xi_y^{2}}-\bar B_{22}\eta_y\frac{\partial^3\bar w_2}{\partial\xi_y^{3}}\\
&+\bar A_{44}\eta_x\frac{\partial^2\bar u_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y}+\bar A_{44}\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar v_2}{\partial\xi_x^{2}}-2\bar B_{44}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar w_2}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}=\bar I_0\eta_y\frac{\partial^2\bar v_2}{\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_0\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar v_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\frac{\partial^4\bar v_2}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\frac{\partial^3\bar w_2}{\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}+\\
&\bar I_1\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\frac{\partial^5\bar w_2}{\partial\xi_y^{3}\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_y\bar e_n\frac{\partial^5\bar w_2}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}
\end{aligned}$$

(ب-۲)

$$\begin{aligned}
&\delta W_1:\bar{\mathrm B}_{11}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_1}{\partial\xi_x^{3}}-\bar{\mathrm D}_{11}\eta_x\beta^3\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{4}}+\bar{\mathrm B}_{12}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar v_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y}-2\bar D_{12}\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}\\
&+\bar B_{12}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}}+\bar B_{22}\eta_y\frac{\partial^3\bar v_1}{\partial\xi_y^{3}}-\bar D_{22}\eta_y\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_y^{4}}+2\bar B_{44}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}}+\\
&2\bar B_{44}\eta_x\beta\frac{\partial^3\bar v_1}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}-4\bar D_{22}\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}=-q+\bar I_0\eta_y\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\bar t^{2}}-\bar I_0\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_y\frac{\partial^3\bar v_1}{\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_x\frac{\partial^3\bar u_1}{\partial\xi_x\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar v_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}-\\
&\bar I_1\eta_y\beta^{-2}\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar v_1}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_x\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar u_1}{\partial\xi_x^{3}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\beta^{-1}\bar e_n^{2}\frac{\partial^5 u_1}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_2\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_2\eta_y\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_2\eta_x\beta\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_1}{\partial\xi_x^{4}\partial\bar t^{2}}+2\bar I_2\eta_y\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_2\eta_y\beta^{-2}\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_1}{\partial\xi_y^{4}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar c(\bar w_1-\bar w_2)-\bar e_n\bar c\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}}+\bar e_n\bar c\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}}+\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}}-\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}}-\bar K_g\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}}-\\
&\bar K_g\eta_y\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}}+\bar K_g\eta_x\beta\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{4}}+\frac{\bar K_g\eta_y\bar e_n}{\beta}\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_y^{4}}+2\bar K_g\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}+\bar k_w\eta_y\bar w_1-\\
&\bar k_w\eta_y\bar e_n\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}}-\frac{\bar k_w\eta_y\bar e_n}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}}\\
&\delta W_2:\bar{\mathrm B}_{11}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_2}{\partial\xi_x^{3}}-\bar{\mathrm D}_{11}\eta_x\beta^3\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{4}}+\bar{\mathrm B}_{12}\beta\eta_x\frac{\partial^3\bar v_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y}-2\bar D_{12}\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}\\
&+\bar B_{12}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}}+\bar B_{22}\eta_y\frac{\partial^3\bar v_2}{\partial\xi_y^{3}}-\bar D_{22}\eta_y\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_y^{4}}+2\bar B_{44}\eta_x\frac{\partial^3\bar u_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}}+\\
&2\bar B_{44}\eta_x\beta\frac{\partial^3\bar v_2}{\partial\xi_y\partial\xi_x^{2}}-4\bar D_{22}\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}=-q+\bar I_0\eta_y\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\bar t^{2}}-\bar I_0\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_y\frac{\partial^3\bar v_2}{\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}+\bar I_1\eta_x\frac{\partial^3\bar u_2}{\partial\xi_x\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar v_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y\partial\bar t^{2}}-\\
&\bar I_1\eta_y\beta^{-2}\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar v_2}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_x\bar e_n^{2}\frac{\partial^5\bar u_2}{\partial\xi_x^{3}\partial\bar t^{2}}-\bar I_1\eta_y\beta^{-1}\bar e_n^{2}\frac{\partial^5 u_2}{\partial\xi_x\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}-\bar I_2\eta_x\beta\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar I_2\eta_y\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_2\eta_x\beta\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_2}{\partial\xi_x^{4}\partial\bar t^{2}}+2\bar I_2\eta_y\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}\partial\bar t^{2}}+\bar I_2\eta_y\beta^{-2}\bar e_n\frac{\partial^6\bar w_2}{\partial\xi_y^{4}\partial\bar t^{2}}\\
&-\bar c(\bar w_2-\bar w_1)-\bar e_n\bar c\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}}+\bar e_n\bar c\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_x^{2}}+\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_1}{\partial\xi_y^{2}}-\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}}-\bar K_g\eta_x\beta\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}}-\\
&\bar K_g\eta_y\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}}+\bar K_g\eta_x\beta\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{4}}+\frac{\bar K_g\eta_y\bar e_n}{\beta}\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_y^{4}}+2\bar K_g\eta_y\bar e_n\frac{\partial^4\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}\partial\xi_y^{2}}+\bar k_{1w}\eta_y\bar w_2-\\
&\bar k_{1w}\eta_y\bar e_n\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_x^{2}}-\frac{\bar k_{1w}\eta_y\bar e_n}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar w_2}{\partial\xi_y^{2}}
\end{aligned}$$

(ب-۳)

ج) دستگاه معادلات حاصل از جایگذاری توابع حدس زده در روش ناویر در معادلات حاکم بدون بعد:

$$\begin{aligned}
&\delta U_1:\mathrm u_{1mn}(-\bar{\mathrm A}_{11}\eta_x\beta\alpha_n^{2}-\bar A_{44}\eta_y\alpha_m^{2}+\bar I_0\eta_y\omega^2\\
&+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^{2}\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\alpha_m^{2}\omega^2)+v_{1mn}(-\bar{\mathrm A}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m\\
&-\bar{\mathrm A}_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m)+\mathrm w_{1mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\beta^2\alpha_n^{3}\eta_x+\bar{\mathrm B}_{12}\alpha_n\alpha_m^{2}\eta_x+\\
&2\bar{\mathrm B}_{44}\alpha_n\alpha_m^{2}\eta_x-\bar I_1\eta_x\alpha_n\omega^2-\bar I_1\bar e_n\eta_x\alpha^3{}_n\omega^2-\bar I_1\eta_x\bar e_n\beta^{-2}\alpha_n\alpha_m^{2}\omega^2)\\
&\delta U_2:\mathrm u_{2mn}(-\bar{\mathrm A}_{11}\eta_x\beta\alpha_n^{2}-\bar A_{44}\eta_y\alpha_m^{2}+\bar I_0\eta_y\omega^2\\
&+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^{2}\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\alpha_m^{2}\omega^2)+v_{2mn}(-\bar{\mathrm A}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m\\
&-\bar{\mathrm A}_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m)+\mathrm w_{2mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\beta^2\alpha_n^{3}\eta_x+\bar{\mathrm B}_{12}\alpha_n\alpha_m^{2}\eta_x+\\
&2\bar{\mathrm B}_{44}\alpha_n\alpha_m^{2}\eta_x-\bar I_1\eta_x\alpha_n\omega^2-\bar I_1\bar e_n\eta_x\alpha^3{}_n\omega^2-\bar I_1\eta_x\bar e_n\beta^{-2}\alpha_n\alpha_m^{2}\omega^2)
\end{aligned}$$

(ج-۱)

$$\begin{aligned}
&\delta V_1:u_{1mn}(-\bar A_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m-\bar A_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m)+v_{1mn}(-\bar A_{44}\eta_x\alpha_n^{2}\\
&-\bar A_{22}\eta_y\beta\alpha_m^{2}+\bar I_0\eta_y\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^{2}\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\alpha_m^{2}\omega^2)\\
&+\mathrm w_{1mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\beta\alpha^2{}_n\alpha_m\eta_x+\bar{\mathrm B}_{22}\alpha_m^{3}\eta_y+2\bar{\mathrm B}_{44}\beta\alpha_m\alpha_n^{2}\eta_x-\\
&\bar I_1\eta_y\alpha_m\omega^2-\bar I_1\bar e_n\eta_y\alpha^2{}_n\alpha_m\omega^2-\bar I_1\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\alpha_m^{3}\omega^2)\\
&\delta V_2:u_{2mn}(-\bar A_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m-\bar A_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m)+v_{2mn}(-\bar A_{44}\eta_x\alpha_n^{2}\\
&-\bar A_{22}\eta_y\beta\alpha_m^{2}+\bar I_0\eta_y\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^{2}\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\alpha_m^{2}\omega^2)\\
&+\mathrm w_{2mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\beta\alpha^2{}_n\alpha_m\eta_x+\bar{\mathrm B}_{22}\alpha_m^{3}\eta_y+2\bar{\mathrm B}_{44}\beta\alpha_m\alpha_n^{2}\eta_x-\\
&\bar I_1\eta_y\alpha_m\omega^2-\bar I_1\bar e_n\eta_y\alpha^2{}_n\alpha_m\omega^2-\bar I_1\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\alpha_m^{3}\omega^2)
\end{aligned}$$

(ج-۲)

$$\begin{aligned}
&\delta W_1:\mathrm u_{1mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\eta_x\alpha_n^{3}+\bar{\mathrm B}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m^{2}+2\bar B_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m^2\\
&-\bar I_1\eta_x\omega^2\alpha_n-\bar I_1\eta_x\bar e_n^2\alpha_n^{3}\omega^2-\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\beta^{-1}\alpha_m^{2}\alpha_n\omega^2)\\
&+v_{1mn}(\bar{\mathrm B}_{12}\eta_x\beta\alpha^2{}_n\alpha_m+\bar B_{22}\eta_y\alpha_m^3+2\bar B_{44}\eta_x\beta\alpha_m\alpha_n^2-\\
&\bar I_1\eta_y\omega^2\alpha_m+\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\alpha_n^{2}\alpha_m\omega^2+\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\alpha_m^{3}\beta^{-2}\omega^2)\\
&+\mathrm w_{1mn}(-\bar D_{11}\eta_x\beta^3\alpha_n^4-2\bar D_{12}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2-\bar D_{22}\eta_y\alpha_m^4\\
&-4\bar D_{22}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2+\bar I_0\eta_y\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\omega^2\\
&+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\omega^2\alpha_m^2+\bar I_2\eta_x\beta\omega^2\alpha_n^2+\bar I_2\eta_y\omega^2\alpha_m^2\\
&+\bar I_2\eta_x\beta\bar e_n\alpha_n^4\omega^2+\bar I_2\bar e_n\eta_y\beta^{-2}\alpha_m^4\omega^2+2\bar I_2\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\alpha_m^2\omega^2\\
&-\bar c-\bar e_n\bar c\alpha_n^2-\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\alpha_m^2-\bar K_g\eta_x\beta\alpha_n^2-\bar K_g\eta_y\alpha_m^2-\bar K_g\eta_x\beta\bar e_n\alpha_n^4\\
&-\frac{\bar K_g\eta_y\bar e_n}{\beta}\alpha_m^4-2\bar K_g\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\alpha_m^2-\bar k_w\eta_y-\bar k_w\eta_y\bar e_n\alpha_n^2-\\
&\bar k_w\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\alpha_m^2)+w_{2mn}(+\bar c+\bar e_n\bar c\alpha_n^2+\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\alpha_m^2)\\
&\delta W_2:\mathrm u_{2mn}(\bar{\mathrm B}_{11}\eta_x\alpha_n^{3}+\bar{\mathrm B}_{12}\eta_x\alpha_n\alpha_m^{2}+2\bar B_{44}\eta_x\alpha_n\alpha_m^2\\
&-\bar I_1\eta_x\omega^2\alpha_n-\bar I_1\eta_x\bar e_n^2\alpha_n^{3}\omega^2-\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\beta^{-1}\alpha_m^{2}\alpha_n\omega^2)\\
&+v_{2mn}(\bar{\mathrm B}_{12}\eta_x\beta\alpha^2{}_n\alpha_m+\bar B_{22}\eta_y\alpha_m^3+2\bar B_{44}\eta_x\beta\alpha_m\alpha_n^2-\\
&\bar I_1\eta_y\omega^2\alpha_m+\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\alpha_n^{2}\alpha_m\omega^2+\bar I_1\eta_y\bar e_n^2\alpha_m^{3}\beta^{-2}\omega^2)\\
&+w_{1mn}(+\bar c+\bar e_n\bar c\alpha_n^2+\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\alpha_m^2)+\mathrm w_{2mn}(-\bar D_{11}\eta_x\beta^3\alpha_n^4\\
&-2\bar D_{12}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2-\bar D_{22}\eta_y\alpha_m^4-4\bar D_{22}\eta_x\beta\alpha_n^2\alpha_m^2+\bar I_0\eta_y\omega^2+\bar I_0\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\omega^2\\
&+\bar I_0\eta_y\bar e_n\beta^2\omega^2\alpha_m^2+\bar I_2\eta_x\beta\omega^2\alpha_n^2+\bar I_2\eta_y\omega^2\alpha_m^2+\bar I_2\eta_x\beta\bar e_n\alpha_n^4\omega^2+\\
&\bar I_2\bar e_n\eta_y\beta^{-2}\alpha_m^4\omega^2+2\bar I_2\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\alpha_m^2\omega^2-\bar c-\bar e_n\bar c\alpha_n^2-\frac{\bar e_n\bar c}{\beta^2}\alpha_m^2-\\
&\bar K_g\eta_x\beta\alpha_n^2-\bar K_g\eta_y\alpha_m^2-\bar K_g\eta_x\beta\bar e_n\alpha_n^4-\frac{\bar K_g\eta_y\bar e_n}{\beta}\alpha_m^4-2\bar K_g\eta_y\bar e_n\alpha_n^2\alpha_m^2\\
&-\bar k_w\eta_y-\bar k_w\eta_y\bar e_n\alpha_n^2-\bar k_w\eta_y\bar e_n\beta^{-2}\alpha_m^2)
\end{aligned}$$

(ج-۳)

۸- مراجع

[1] Fennimore, A.M. Yuzvinsky, T.D. Han, W.Q. Fuhrer, M.S. Cumings J. and Zett, A., "Rotational Actuators Based on Carbon Nanotubes," Nature, Vol. 424, pp. 408-410, 2003.

[2] Leung, A.Y.T. Wu, Y.D. and Zhong, W.F., "Computation of Young's Moduli for Chiral single-Walled Carbon Nanotubes," Applied Physics Letters, Vol. 88, 2006. doi: 10.1063/1.2396843.

[3] Gibson, R.F. Ayorinde, E.O. and Wen, Y.F., "Vibrations of Carbon Nanotubes and Their Composites: A Review," Composites Science and Technology, Vol. 67, pp. 1-28, 2007.

[4] Eringen, A.C., "On Differential Equation of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface Waves," Journal of Applied Physics, Vol. 54, pp. 4703-4710, 1983.

[5] Ghorbanpour arani, A., Mohammadimehr, M. and Arefmanesh, A., "Transverse Vibration of Short Carbon Nanotubes Cylindrical Shell and Beam Models," Journal of Mechanical Engineering, Vol. 224, pp. 745-756, 2010.

[6] Mohammadimehr, M. Rousta Navi, B. and Ghorbanpour Arani, A., "Free Vibration of Viscoelastic Double-Bonded Polymeric Nanocomposite Plates Reinforced By FG-SWCNTs Using MSGT, Sinusoidal Shear Deformation Theory and Meshless Method," Composite Structures, Vol. 131, pp. 654–671, 2015.

[7] Pradhan, S.C. and Phadikar, J. K., "Nonlocal Elasticity Theory For Vibration of Nanoplates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 325, pp. 206-223, 2009.

[8] Wang, Y.Z. Li, F.M. and Kishimoto, K., "Scale Effects on Flexural Wave Propagation in Nanoplate Embedded in Elastic Matrix With Initial Stress," Journal of Applied Physics, Vol. 99, pp. 907-911, 2010.

[9] Narendar, S. and Gopalakrishnan, S., "Study of Terahertz Wave Propagation Properties in Nanoplates With Surface and Small-Scale Effects," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 64, pp. 221-231, 2012.

[10] Narendar, S. and Gopalakrishnan, S., "Temperature Effects on Wave Propagation in Nanoplates,"Composite Part B, Vol. 43, pp. 1275-1281, 2012.

[11] Goodarzi, M. Mohammadi, M. Farajpour, A. and Khooran, M., "Investigation of The Effect of Pre-Stressed on Vibration Frequency of Rectangular Nanoplate Based on a ViscoPasternak Foundation," Journal of Solid Mechanics, Vol. 6, pp. 98-121, 2014.

[12] Babaei, H. and Shahidi, A.R., "Small-scale Effects on the Buckling of Quadrilateral Nanoplates Based on Nonlocal Elasticity Theory Using the Galerkin Method," Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, pp. 1051-1062, 2011.

[13] Murmu, T. and Adhikari, S., "Nonlocal Vibration of Bonded Double-Nanoplate-Systems," Composites: Part B, Vol. 42, pp. 1901-1911, 2011.

[14] Murmu, T., and Pradhan, S.C., "Small-Scale Effect on the Free In-Plane Vibration of Nanoplates by Nonlocal Continuum Model," Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 41, pp. 1628-1633, 2009.

[15] Ansari, A. Arash, B. and Rouhi, H., "Vibration Characteristics of Embedded Multi-Layerede Graphene Sheets With Different Boundary Conditions Via Nonlocal Elasticity," Composite Structures, Vol. 93, pp. 2419-2429, 2011.

[16] Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M., "Nonlocal Vibration and Buckling Analysis of Single and Multi-Layered Graphene Sheets Using Finite Strip Method Including Van Der Wals Effects," Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 57, pp. 83-95, 2014.

[17] He, X.Q, Wang, J.B. Liu, B. and Liew, K.M., "Analysis of Nonlinear Forced Vibration of Multi-Layered Ggraphen Sheets," Computational Materials Science, Vol. 61, pp. 194-199, 2012 .

[18] Ghorbanpour Arani, A. Kolahchi, R. Mosallaie Barzoki, A. Mozdianfard, M.R. and Noudeh Farahani, S.M., "Elastic Foundation Effect on Nonlinear Thermo-Vibration of Embedded Double-Layered Orthotropic Graphene Sheets Using Differential Quadrature Method," Mechanical Engineering Science, Vol. 227, No. 4, pp. 862-879, 2012.

[19] Mohammadimehr, M. Mohandes, M. and Moradi, M., "Size Dependent Effect on the Buckling and Vibration Analysis of Double-Bonded Nanocomposite Piezoelectric Plate Reinforced by Boron Nitride Nanotube Based on Modified Couple Stress Theory," Journal of vibration and Control, DOI: 10.1177/1077546314544513, 2014.

[20] Liewa, K.M. Lei, Z.X. and Zhan, L.W., "Mechanical Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composites," A review, Compos. Struct. Vol. 120 pp. 90–97, 2015.

[21] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," 2nd ed., London: Mc Gyaw-Hill, 1959.

[22] Seidel, G.D. and Lagoudas, D.C., "Micromechanical Analysis of the Effective Elastic Properties of Carbon Nanotube Reinforced Composites," Mechanics of Materials, Vol. 38, pp. 884-907, 2006.

[23] Moradi-Dastjerdi, R. and Foroutan, M., "Dynamic Analysis of Functionally Graded Nanocomposite Cylinders Reinforced by Carbon Nanotube by a Mesh-Free Method," Materials and Design, Vol. 91, pp. 256-266, 2013.

[24] Ghorbanpour Arani, A. and Roudbari, M.A., "Nonlocal Piezoelastic Surface Effect on the Vibration of Visco-Pasternak Coupled Boron Nitride Nanotube System under a Moving Nanoparticle," Thin Solid Films, Vol. 542, pp. 232-241, 2013.

[25] Pradhan, S.C. and Kumar, A., "Vibration Analysis of Orthotropic Graphene Sheets Embedded in Pasternak Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity Theory and Differential Quadrature Method," Computational Materials Science, Vol. 50, pp. 239-245, 2010.