



مسئله تماس لغزشی پانچ صلب استوانه‌ای و جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند در حضور ترک سطحی

علی طالعزاده‌لاری^۱، علی نیک بخت^{۲*}، مجتبی صدیقی^۳

۱- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۲- استادیار، پژوهشکده فناوری‌های نو، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

۳- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی، ۱۵۹۱۶۳۳۱۱، anikbakht@aut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۵/۲۰

پذیرش: ۹۴/۶/۲۸

کلیدواژگان:

تماس

پانچ صلب استوانه‌ای

ضرایب شدت تنش

مواد هدفمند

تفاضلات محدود

در این مقاله تماس لغزشی دوبعدی یک پانچ صلب استوانه‌ای روی یک سطح نیمه بی‌نهایت ساخته شده از مواد هدفمند در حضور و عدم حضور یک ترک سطحی بررسی شده است. مدول الاستیسیته در لایه هدفمند طبق مدل تی-تی-او محاسبه شده است. این مدل با تعریف پارامتر q ، تاثیر برهم‌کنش‌های ریزساختارها را نیز در نظر می‌گیرد. برای حل معادلات حاکم از کد نویسی روش تفاضلات محدود در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. اثر ناهمگنی، q ، شعاع پانچ، ضخامت لایه هدفمند و ضریب اصطکاک بر نمودار نیرو - جابه‌جایی، تنش‌های ایجاد شده و ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که افزایش ضخامت لایه هدفمند، شعاع پانچ و ضریب ناهمگنی (q) برای جابه‌جایی‌های یکسان پانچ افزایش نیروی تماس را در پی دارد. همچنین تغییرات این پارامترها بر توزیع تنش فشاری زیر پانچ موثر است. اما تغییرات q تاثیری بر نیروی تماس و نیز توزیع تنش فشاری ندارد. در تماس بدون اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول همواره نامثبت است و ترک تمایلی به رشد تحت این مود ندارد. افزایش ضریب اصطکاک، ضریب شدت تنش مود اول را افزایش می‌دهد؛ اما موجب کاهش ضریب شدت تنش مود دوم می‌شود.

Sliding contact between a rigid cylindrical punch and a functionally graded semi-infinite medium in the presence of a surface crack

Ali Talezadehlari¹, Ali Nikbakht^{2*}, Mojtaba Sadighi¹

1- Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University, Tehran, Iran.

2- New Technologies Research Center, Amirkabir University, Tehran, Iran.

*P. O. B. 159163311, Tehran, Iran, anikbakht@aut.ac.ir

Keywords

Contact
 Rigid cylindrical punch
 Stress intensity factor
 Functionally graded material (FGM)
 Finite difference (FD)

Abstract

In this article two dimensional sliding contact of a rigid cylindrical punch on a functionally graded (FG) semi-infinite medium is studied. The modulus of elasticity in the graded layer is calculated based on TTO model approximation. This model defines a parameter q which considers the microstructural interactions between the constituting phases. The governing equations are solved by finite difference (FD) method by means of MATLAB software. The effects of different parameters such as non-homogeneity, q , the dimensions of the punch, the thickness of the graded layer and the coefficient of friction are investigated on the force-displacement diagram of the punch, stress distribution and modes I and II stress intensity factors (KI and KII). The results show that the contact force and the stress distribution under the punch are affected by the thickness of the graded layer, radius of the punch and the non-homogeneity coefficient. But the variation of q has no effects on the contact force and the stress distribution under the punch. In the absence of the friction, KI is always non-positive and the crack has no tendency to grow under this mode. Increasing the friction coefficient, increases KI but decreases KII.

۱- مقدمه

مناسب در برابر بارهای تماسی به عنوان یکی از پوشش‌های پرکاربرد در مواردی که قطعه تحت بارگذاری تماسی قرار دارد مطرح هستند. اما چقرمگی کم سرامیک‌ها باعث به وجود آمدن ترک‌های سطحی و بین‌لایه‌ای شده و

عموماً برای محافظت سطوح در برابر خرابی ناشی از بارهای تماسی، از پوشش‌های محافظ استفاده می‌شود. سرامیک‌ها به علت سختی بالا و مقاومت

Please cite this article using:

Talezadehlari, A. Nikbakht, A. and Sadighi, M., "Sliding contact between a rigid cylindrical punch and a functionally graded semi-infinite medium in the presence of a surface crack", In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 11-22, 2015.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

تماس لغزشی هرتزی منظور گردیده است [۲۲]. چوبی و پائولینو در سال ۲۰۱۰ مسئله ای با هندسه مشابه را حل نمودند با این تفاوت که در این مسئله ترک بین لایه‌های (موازی سطح آزاد) میان لایه هدفمند و زمینه همگن مورد بررسی قرار گرفته است. ایشان در این تحقیق اثر حضور ترک بر توزیع فشار تماسی و تنش‌های درون صفحه‌ای ایجاد شده در پوشش را مطالعه کردند. همچنین ضرایب شدت تنش با استفاده از توزیع تنش در نوک ترک محاسبه شده است. در این تحقیق از اصطکاک و تماس میان سطوح ترک صرف‌نظر شده است [۲۳]. داگ و همکارانش در سال ۲۰۱۲ مسئله تماس پانچ صلب و یک لایه با ساختار هدفمند که بر روی یک زمینه نیمه بی‌نهایت همگن قرار دارد را در حضور ترک سطحی حل کرده‌اند. ایشان در این تحقیق توزیع خواص را به صورت نمایی در نظر گرفته و تاثیر ضریب اصطکاک و ضریب ناهمگنی را بر تنش‌های ناشی از تماس و ضرایب شدت تنش در موده‌های اول و دوم بررسی کرده‌اند [۲۴].

در همه کارهای تحلیلی ذکر شده، تغییر خواص به صورت نمایی در نظر گرفته شده است. این امر سبب می‌شود معادلات حاکم نهایتاً به یک معادله دیفرانسیل خطی و یا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضریب ثابت تبدیل شوند که امکان ارائه حل تحلیلی برای آنها وجود دارد. اما این توابع فقط حالت خاصی از توزیع خواص را نشان می‌دهند و همچنین اثر برهم‌کنش ریزساختارهای جسم را نیز در نظر نمی‌گیرند. در نظر گرفتن تغییر خواص مطابق قانون مخلوط‌ها و یا مدل تی-تی^۱ امکان حل مسئله در حالت کلی-تر را ایجاد می‌کند؛ اما تعریف خواص مواد بدین صورت، معادلات را پیچیده‌تر کرده و ارائه حل‌های تحلیلی را بسیار سخت و بعضاً غیرممکن می‌سازد. برای حل چنین مسائلی به ناچار باید از روش‌های عددی استفاده کرد. روش المان محدود یکی از معروف‌ترین روش‌ها برای حل اینگونه مسائل است. در دهه اخیر روش المان مرزی^۲ نیز برای حل اینگونه مسائل به کار گرفته شده است [۱۰]. در این میان روش تفاضلات محدود چندان مورد توجه قرار نگرفته است. علت اصلی این مطلب، محدودیت روش تفاضلات محدود برای مش‌بندی هندسه‌های نامنظم است [۲۵]. علاوه بر این در روش تفاضلات محدود مرسوم اندازه همه شبکه‌بندی ایجاد شده یکسان است. آلتوس و همکارانش روشی ارائه کرده‌اند که در آن با استفاده از تکنیک نگاشت، می‌توان اندازه شبکه‌ها را به صورت دلخواه تعیین نمود [۲۶]. با استفاده از این روش می‌توان فضای مسئله را به گونه‌ای مش‌بندی نمود که شبکه‌ها در اطراف ناحیه تماس و ترک متراکم‌تر باشند و با دور شدن از این ناحیه از تراکم آنها کاسته شود (مش درجه‌ای^۳). این تکنیک در تحقیقات دوروگویی و بانکس‌سیلس نیز به کار گرفته شده است [۲۸، ۲۷].

برای محاسبه پارامترهای شکست به صورت عددی نیز روش‌های مختلفی وجود دارد. این روش‌ها به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:

- روش‌هایی که بر اساس میزان انرژی آزاد شده در اثر گسترش ترک عمل می‌کنند، مانند روش انتگرال^۴ و تکنیک بسته شدن مجازی ترک^۴.
- روش‌هایی که اساس آنها بر برون‌یابی در اطراف نوک ترک است. روش‌هایی که بر پایه انرژی بنا نهاده شده‌اند دقت بالایی دارند و همچنین نیازی به مش‌بندی ریز ندارند و حتی با مش درشت نیز دقت این روش‌ها مناسب است؛ اما در این روش‌ها جدا کردن موده‌های اول و دوم بسیار سخت و بعضاً غیرممکن است [۲۹]. همین عامل باعث شده است، روش‌های دسته

مشکلاتی را برای کارکرد بهینه قطعه در پی خواهد داشت. تحقیقات انجام شده بر روی مواد هدفمند نشان داده است که این مواد می‌توانند راه حلی برای رفع این مشکل باشند [۱].

مواد هدفمند، مواد مرکبی هستند که در مقیاس ماکروسکوپی غیرهمگن بوده و در آنها خواص مکانیکی به صورت پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این امر با تغییر ترکیب ماده هدفمند صورت می‌گیرد که خود ناشی از تغییر پیوسته در کسر حجمی فازهای تشکیل دهنده ساختار می‌باشد. این مواد عموماً از ترکیب یک سرامیک (با سختی بالا) و یک فلز (با خواص مکانیکی مطلوب مانند استحکام و چقرمگی بالا) ساخته می‌شوند. مواد هدفمند به خوبی می‌توانند نقش لایه واسطه میان سرامیک و فلز را ایفا نمایند؛ به گونه‌ای که مزیت اصلی بکارگیری این مواد، از بین رفتن ناپیوستگی خواص درون ساختار است. این امر باعث می‌شود تمرکز تنش، جوانه‌زنی، رشد ترک و جدایش لایه‌ها کاهش یابد. با این وجود، رشد ترک-های سطحی همچنان از جمله مکانیزم‌های خرابی ساختارهای تشکیل شده از مواد هدفمند می‌باشد [۱].

مسئله تماس اولین بار توسط هرتز برای دو لنز شیشه‌ای مطرح شد [۲]. پس از هرتز پژوهشگران زیادی به بررسی رفتار تماسی مواد مختلف پرداختند. در دو دهه‌ی اخیر نیز مقالات فراوانی در زمینه تماس مواد هدفمند منتشر شده است. از جمله می‌توان به کارهای جیاناکوپولوس و پالوت [۳]، آیزیکویچ و همکاران [۴]، که و وانگ [۵، ۶]، گولر و اردوگان [۷]، داگ و همکاران [۸، ۹] و گان و گائو [۱۰] اشاره کرد.

با توجه به وجود ترکیبات سرامیکی در اغلب ساختارهای هدفمند، یکی از کاربردهای عمده مواد هدفمند در قطعاتی است که متحمل بارگذاری حرارتی می‌شوند. بدین علت، بررسی مکانیک شکست مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی نیز، یکی دیگر از زمینه‌های مورد مطالعه محققین بوده است. هدف اصلی این تحقیقات، بررسی اثر ناهمگنی و اثر تغییرات خواص در ساختار بر روی پارامترهای شکست می‌باشد؛ به گونه‌ای که پارامتر متغیر در همگی این تحقیقات، تغییر خواص می‌باشد.

از جمله‌ی اولین تحقیقات صورت گرفته در زمینه مکانیک شکست مواد هدفمند، می‌توان به مطالعات اردگان اشاره کرد. وی توزیع تنش در اطراف نوک یک ترک موجود در یک ساختار هدفمند را محاسبه نموده است [۱۱]. بعد از وی، جین و باترا، در مقاله‌ای مفاهیم مکانیک شکست در مواد هدفمند را مرور کرده‌اند [۱۲]. از دیگر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه می‌توان به کارهای اردوگان و وو [۱۳، ۱۴]، چوی [۱۵]، والترز و همکارانش [۱۶]، داگ [۱۷] و داگ و همکارانش [۱۸، ۱۹] اشاره کرد.

هرچند تحقیقات زیادی در زمینه مسائل تماس مواد هدفمند و نیز مکانیک شکست این مواد به صورت مجزا صورت پذیرفته است، لیکن بررسی رفتار ترک در مواد هدفمند تحت بارگذاری تماسی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۱، داگ در رساله دکترای خود، به بررسی مسأله همزمان تماس و ترک در یک نیم‌صفحه ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته است [۲۰]. در سال ۲۰۰۲ نیز داگ و اردوگان همین مسئله را بررسی کردند که مقاله آنها یکی از مقالات مرجع و پرآستاد در این زمینه است [۲۱]. چوی نیز مسأله تماس و ترک را مورد مطالعه قرار داده است. وی سیستم را به صورت یک پوشش و زمینه همگن و یک زیر لایه هدفمند بین این دو و با یک پوشش هدفمند بر روی یک زمینه همگن در نظر گرفته است. در این تحقیق، ترک در راستای عمود بر سطح آزاد (موازی جهت گرایان تغییرات خواص) و درون زمینه همگن در نظر گرفته شده و مدل تماس به صورت

1. TTO
2. Boundary Element (BE)
3. Graded mesh
4. Virtual Crack Closure Technique (VCCT)

کدنیوسی روش تفاضلات محدود در نرم‌افزار متلب^۴ حل شده و توزیع تنش در نقاط مختلف بدست آمده است. در بررسی مسئله تماس در حضور ترک سطحی پس از بدست آمدن تنش‌ها در تمامی نقاط جسم و از جمله در نوک ترک، با استفاده از روش نیرو ضرایب شدت تنش در نوک ترک محاسبه شده است.

در ادامه ابتدا خواص مواد در بخش ۲ تشریح شده است. در بخش ۳ هندسه حاکم بر مسئله، معادلات حاکم و شرایط مرزی در حالت کلی شرح داده شده، و در بخش ۴ نحوه استفاده از تکنیک نگاشت و اعمال روش تفاضلات محدود برای مدل کردن مسئله تماس را مورد بررسی قرار گرفته است. نحوه محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از روش نیرو در بخش ۵ آورده شده است. در بخش ۶ نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله و نتایج تحلیلی موجود مقایسه شده و بدین ترتیب صحت روش ارائه شده سنجیده شده است. تاثیر پارامترهای مختلف هندسی و مکانیکی بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ، تنش‌های ایجاد شده در جسم و ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در بخش ۷ بررسی شده است.

۲- خواص مواد

در این مقاله، خواص مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون ثابت فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است. این مدل تنش تک محوری، σ ، و کرنش تک محوری، ε ، را در یک ماده کامپوزیت دو فازی بر حسب تنش و کرنش میانگین در هر کدام از فازها به صورت رابطه (۱) بیان می‌نماید [۳۴].

$$\sigma = \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 \quad (۱-الف)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 \quad (۱-ب)$$

که در آن σ_i و ε_i مشخص‌کننده تنش‌ها و کرنش‌ها در هر کدام از فازها و V_i ($i=1,2$) کسر حجمی فازها می‌باشد. زیرنویس $i=1$ برای فاز سرامیکی و $i=2$ برای فاز فلزی انتخاب شده است. تغییرات کسر حجمی نیز به صورت توانی در نظر گرفته شده است.

$$V_2(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^r, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (۲)$$

که r توان ناهمگنی و h ضخامت لایه هدفمند است. z نیز از وسط لایه هدفمند اندازه‌گیری می‌شود. مدل تی-تی-او پارامتر دیگری به نام q را نیز شامل می‌شود که در رابطه (۳) تعریف شده است:

$$q = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right|, \quad 0 \leq q < \infty \quad (۳)$$

مقدار این پارامتر با استفاده از داده‌های تجربی و بر اساس خواص فازهای تشکیل‌دهنده ساختار و بر هم‌کنش آن‌ها در ماده کامپوزیت تعیین می‌شود. با فرض خطی بودن رابطه تنش-کرنش و با استفاده از این دو رابطه، در کاربردهای الاستیک، مدول الاستیسیته، برای ماده کامپوزیت دوفازی طبق رابطه (۴) بدست می‌آید [۳۴].

$$E = \frac{\frac{V_2 E_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2) E_1}{\frac{V_2 (q + E_1)}{q + E_2} + (1 - V_2)} \quad (۴)$$

دوم با وجود محدودیت‌هایی که دارند، مورد توجه قرار گیرند. یکی از روش‌هایی که بر اساس برون‌یابی بنا نهاده شده است، روش نیرو^۱ است. این روش نخستین بار توسط راجو و نیومن در سال ۱۹۷۷ مطرح شد [۳۰]. اسمیت و راجو در مقاله خود بار دیگر به این روش اشاره کردند [۳۱]. دومورایس نشان داد که این روش در تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک مرکزی در ورق ایزوتروپ و تیر ارتوتروپ از دقت خوبی برخوردار است. وی سه مزیت مهم برای این روش بیان کرد [۳۲]:

(۱) این روش نیازی به المان‌های منفرد خاص^۲ در نوک ترک ندارد و جواب المان‌های معمول نیز از دقت خوبی برخوردار خواهند بود.

(۲) این روش برای مواد غیرایزوتروپ به راحتی قابل استفاده است و نیازی به دانستن روابط پیچیده الاستیسیته در نوک ترک ندارد.

(۳) این روش برای مودهای ترکیبی شکست نیز مناسب است.

طالع‌زاده و صدیقی با ترکیب روش تفاضلات محدود و روش نیرو مسئله تماس پانچ صلب تخت^۳ و جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند را در حضور ترک سطحی بررسی کردند. ایشان در این تحقیق جسم را به صورت سه لایه در نظر گرفتند، به گونه‌ای که یک لایه‌ی همگن سرامیکی در تماس با پانچ قرار دارد، و لایه‌ای از جنس مواد هدفمند این لایه را به زمینه‌ی همگن فلزی متصل می‌سازد. ترک سطحی نیز عمود بر سطح آزاد و در پوشش همگن سرامیکی قرار دارد [۳۳].

با توجه به توضیحات فوق مسئله تماس لغزشی یک پانچ صلب استوانه‌ای با استفاده از روش تفاضلات محدود بررسی نشده است. در راستای پیشبرد تحقیق گذشته، در مقاله حاضر، مسئله تماس لغزشی دوبعدی پانچ صلب استوانه‌ای بر روی جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند بررسی شده است. مسئله به صورت کرنش صفحه‌ای فرض شده و خواص زمینه و لایه هدفمند به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون در کل جسم ثابت فرض شده است. تغییرات مدول الاستیسیته در راستای عمق جسم و در کلی‌ترین حالت و طبق مدل تی-تی-او در نظر گرفته شده است. این مدل اولین بار توسط تامورا، توموتا و اوزاوا مطرح شد. مدل تی-تی-او با تعریف پارامتر q تاثیر برهم‌کنش‌های ریزساختارها را نیز در نظر می‌گیرد [۳۴]. دقت این مدل در محدوده الاستیک به خصوص در مواد هدفمند سرامیک-فلزی توسط نیکبخت و همکارانش نشان داده شده است [۳۵].

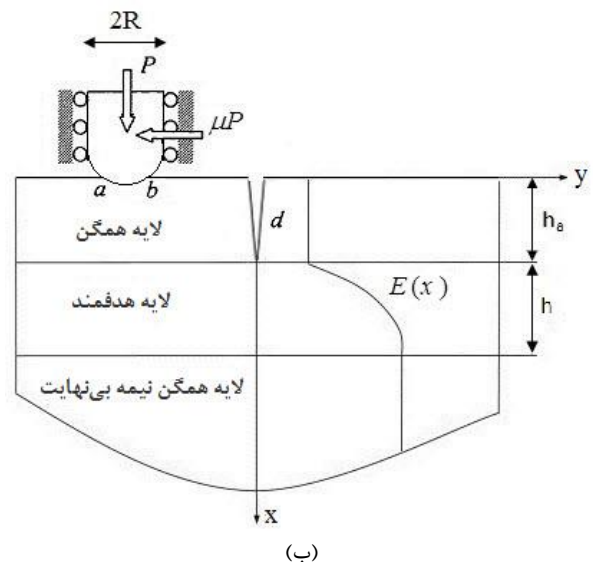
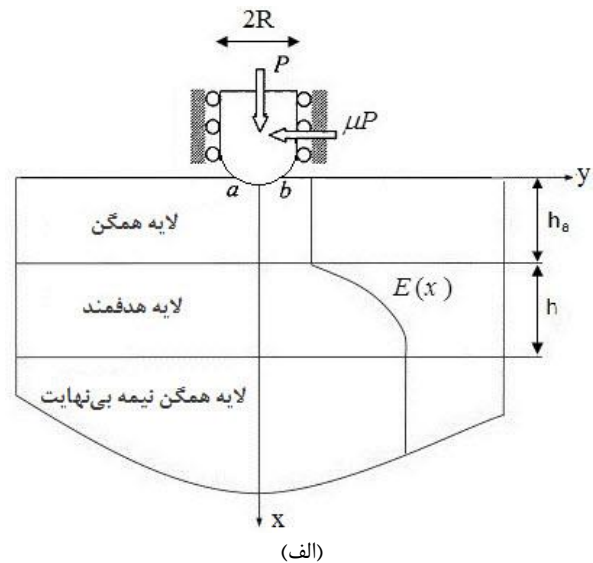
در این مسئله تماس در حضور و در عدم حضور ترک سطحی مورد توجه قرار گرفته است. اصول کلی و روش حل در هر دو حالت مشابه یکدیگر هستند. در تماس بدون حضور ترک اثر ضریب اصطکاک و نیز پارامترهای r (توان ناهمگنی)، q ، شعاع پانچ و ضخامت لایه هدفمند بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ، و نیز بر تنش‌های ایجاد شده در جسم بررسی شده است. از آنجا که ترک در ناحیه ترد جسم قرار دارد، در مسئله تماس در حضور ترک سطحی، ضرایب شدت تنش به عنوان پارامتر تعیین‌کننده رشد ترک انتخاب شده و بررسی تاثیر پارامترهای ذکر شده بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم مورد توجه واقع شده است.

برای آنالیز هر کدام از مسائل ذکر شده ابتدا با به کار بردن تکنیک نگاشت مش‌بندی مناسب در ناحیه تماس و نیز ناحیه نوک ترک (در صورت وجود ترک) ایجاد شده است. سپس در حضور و در عدم حضور ترک سطحی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوط به هر کدام از این حالات، مسئله با

1. Force Method
2. Special singular quadratic element
3. Flat punch

۳- هندسه و معادلات حاکم و شرایط مرزی

مسئله تماس لغزشی دوبعدی پانچ صلب استوانه‌ای با یک جسم نیمه بی-نهایت در دو حالت بررسی شده است؛ نخست در عدم حضور ترک و سپس در حضور ترک سطحی. شکل ۱ هندسه مسئله و نحوه بارگذاری را در این دو حالت نشان می‌دهد. در هر دو حالت جسم به صورت سه لایه در نظر گرفته شده است به گونه‌ای که یک لایه همگن سرامیکی در تماس با پانچ قرار دارد، و لایه‌ای از جنس مواد هدفمند این لایه را به زمینه‌ی همگن فلزی متصل می‌سازد. اصطکاک به صورت کولمب لحاظ شده است. در حالت دو بعدی روابط کرنش-جابجایی، تنش-کرنش و تعادل تنش‌ها به ترتیب از روابط (۵) تا (۷) بدست می‌آید.



شکل ۱ هندسه و بارگذاری مسئله (الف) در عدم حضور ترک (ب) در حضور ترک سطحی

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \quad (۵-ج)$$

$$\sigma_{jxx} = \frac{G_j}{\kappa-1} [(1+\kappa)\varepsilon_{jx} + (3-\kappa)\varepsilon_{jy}] \quad (۵-د)$$

$$\sigma_{jxx} = \frac{G_j}{\kappa-1} [(1+\kappa)\varepsilon_{jx} + (3-\kappa)\varepsilon_{jy}] \quad (۶-الف)$$

$$\sigma_{jyy} = \frac{G_j}{\kappa-1} [(1+\kappa)\varepsilon_{jy} + (3-\kappa)\varepsilon_{jx}] \quad (۶-ب)$$

$$\tau_{jxy} = G_j(2\varepsilon_{jxy}) \quad (۶-ج)$$

$$\frac{\partial \sigma_{jxx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial y} = 0 \quad (۷-الف)$$

$$\frac{\partial \tau_{jxy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jyy}}{\partial y} = 0 \quad (۷-ب)$$

در این روابط، u_j و v_j مولفه‌های جابجایی در راستای x و y هستند و اندیس j که مقادیر ۱ تا ۳ را می‌تواند اختیار کند، به ترتیب نشان‌دهنده‌ی پارامترهای مربوط به لایه سرامیکی، لایه هدفمند و زمینه فلزی است. G مدول برشی و تابعی از x است، همچنین κ برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به ترتیب از رابطه (۸) بدست می‌آید.

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (۸-الف)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (۸-ب)$$

با استفاده از روابط (۵) و (۶) و (۷) می‌توان معادلات تعادل را بر حسب مولفه‌های تغییر مکان به صورت رابطه (۹) بازنویسی کرد:

$$\frac{1}{G_j(\kappa-1)} \frac{dG_j}{dx} \left[(1+\kappa) \frac{\partial u_j}{\partial x} + (3-\kappa) \frac{\partial v_j}{\partial y} \right] + \nabla^2 u_j + \frac{2}{\kappa-1} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (۹-الف)$$

$$\nabla^2 v_j + \frac{2}{\kappa-1} \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} \right] + \frac{1}{G_j} \frac{dG_j}{dx} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) = 0 \quad (۹-ب)$$

برای مدل کردن ترک، گره‌هایی روی هر دو سطح ترک قرار می‌گیرد؛ و شرایط مرزی برای هر کدام از این گره‌ها به صورت مجزا اعمال می‌شود. این گره‌ها که در ابتدا مختصات یکسانی دارند می‌توانند در اثر بارگذاری از هم فاصله بگیرند و باز شدن دهانه ترک را مدل نمایند. در صورتی که سطوح ترک با یکدیگر تماس نداشته باشند، برای نقاطی که روی سطوح ترک قرار دارند تنش برشی و تنش عمودی صفر است بنابراین شرایط مرزی در این نقاط طبق رابطه (۱۰) است.

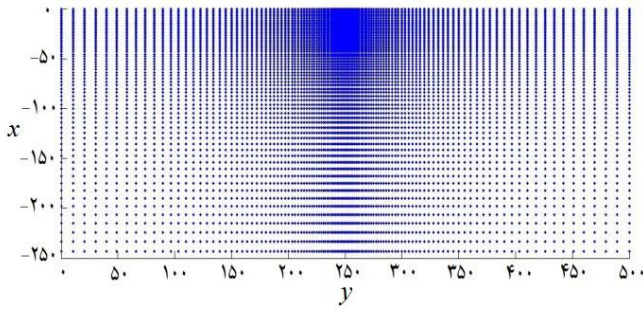
$$\left. \begin{aligned} \tau_{1xy}(x,0) &= 0 \\ \sigma_{1yy}(x,0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 < x < d \quad (۱۰)$$

شرایط مرزی در سطح بالایی از دو قسمت تشکیل شده است. قسمتی که در تماس با پانچ قرار دارد ($a < y < b$) و جابجایی نقاط آن تابعی از شکل پانچ است، و قسمتی که در تماس با پانچ نیست و اصطلاحاً سطح آزاد نامیده می‌شود. در سطح آزاد نیز تنش برشی و تنش عمودی صفر است. بنابراین شرایط مرزی در این سطوح طبق رابطه (۱۱) بیان می‌شود.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1xy}(0,y) &= \mu \sigma_{1xx}(0,y) \\ u_1(0,y) &= g(y) \end{aligned} \right\}, \quad a < y < b \quad (۱۱-الف)$$

$$\varepsilon_{jx} = \frac{\partial u_j}{\partial x} \quad (۵-الف)$$

$$\varepsilon_{jy} = \frac{\partial v_j}{\partial y} \quad (۵-ب)$$



شکل ۲ نمونه‌ای از مش‌بندی ایجاد شده

که در این رابطه a_i و b_j مقادیری دلخواه هستند و باید به گونه‌ای انتخاب شوند که نهایتاً مش‌بندی مناسب را ایجاد کنند. با تغییر متغیر فوق مشتقات نسبت به x و y ، بر حسب مشتقات بر حسب ξ و η نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = \frac{f_{,\xi}}{x_{,\xi}} \quad (15-f)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_{,y} = \frac{f_{,\eta}}{y_{,\eta}} \quad (15-b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{,xx} = a_{xx} f_{,\xi\xi} + c_{xx} f_{,\xi\xi\xi} \quad (15-c)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{,yy} = b_{yy} f_{,\eta\eta} + d_{yy} f_{,\eta\eta\eta} \quad (15-d)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{,xy} = e_{xy} f_{,\xi\eta} \quad (15-e)$$

که در این عبارات،

$$a_{xx} = \frac{-x_{,\xi\xi}}{x_{,\xi}^3} \quad (16-f)$$

$$b_{yy} = \frac{-y_{,\eta\eta}}{y_{,\eta}^3} \quad (16-b)$$

$$c_{xx} = \frac{1}{x_{,\xi}^2} \quad (16-c)$$

$$d_{yy} = \frac{1}{y_{,\eta}^2} \quad (16-d)$$

$$e_{xy} = \frac{1}{x_{,\xi} y_{,\eta}} \quad (16-e)$$

حال با استفاده از روابط (۱۵)، معادله (۹) بازنویسی شده و به صورت (۱۷) نوشته می‌شود.

$$u_{,\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + u_{,\xi\xi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{xx} + u_{,\eta} b_{yy} + u_{,\eta\eta} d_{yy} + v_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa-1} e_{xy} + v_{,\eta} \frac{3-\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0 \quad (17-f)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1,xy}(0,y) &= 0 \\ \sigma_{1,xx}(0,y) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \begin{cases} -\infty < y < a \\ b < y < \infty \end{cases} \quad (11-b)$$

که در این رابطه a و b نشان‌دهنده مختصات ناحیه تماس هستند و $g(y)$ با پروفیل پانچ در ارتباط است. در واقع جابجایی نقاطی که در ناحیه تماس پانچ قرار دارند، به گونه‌ای است که شکل پروفیل پانچ را به خود بگیرند.

اگر به اندازه کافی از پانچ دور شویم اثر آن از بین خواهد رفت؛ پس در مرزهای بی‌نهایت دور مولفه‌های جابجایی و نیز تغییرات آنها صفر خواهد بود. بنابراین شرایط مرزی در فاصله دور از پانچ طبق رابطه (۱۲) و (۱۳) بیان می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_3(x,y) = \lim_{x \rightarrow \infty} v_3(x,y) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u_j(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u_j(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (13-f)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v_j(x,y)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial v_j(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (13-b)$$

۴- اعمال روش تفاضلات محدود

در روش تفاضلات محدود معمول اندازه المان‌ها در جهت x و y ثابت است. در نتیجه برای ایجاد مش‌بندی ریز در ناحیه تماس یا ناحیه نوک ترک باید کل جسم را به صورت ریز مش زد؛ که این امر حجم محاسبات را به شدت بالا برده و عملاً روش تفاضلات محدود را به روشی نامناسب برای بررسی مسائل تماس تبدیل کرده است. برای رفع این مشکل از تکنیک نگاشت استفاده شده است. با استفاده از این تکنیک، ابتدا معادلات از فضای فیزیکی $x-y$ به فضای عددی $\xi-\eta$ برده شده‌اند؛ که در این فضا مقادیر ξ و η از ۱ تا ۲ تغییر می‌کنند، سپس معادلات در مختصات جدید حل شده و دوباره به مختصات $x-y$ بازگردانده شده‌اند [۲۷].

در واقع در این روش هر نقطه در مختصات $x-y$ با یک نقطه در مختصات $\xi-\eta$ متناظر می‌شود. این تناظر یک‌به‌یک به گونه‌ای ایجاد می‌شود که در مختصات $\xi-\eta$ فواصل همه نقاط برابر باشند و در مختصات $x-y$ نقاط توزیع دلخواهی داشته باشند. بدین ترتیب می‌توان رابطه مناسب را بین این دو دستگاه مختصات بدست آورد. بنابراین با استفاده از این تکنیک می‌توان هر نوع مش‌بندی دلخواه را ایجاد کرد. شکل ۲ نمونه‌ای از مش‌بندی ایجاد شده توسط این تکنیک را نشان می‌دهد که برای تحلیل مسئله تماس بدون حضور ترک مناسب است. برای تحلیل مسئله تماس در حضور ترک باید مش‌بندی هم در محل تماس ریز شود و هم در نزدیک نوک ترک.

برای تغییر مختصات ذکر شده از رابطه (۱۴) استفاده می‌شود.

$$x = \sum_{i=1}^M a_i \xi^i \quad (14-f)$$

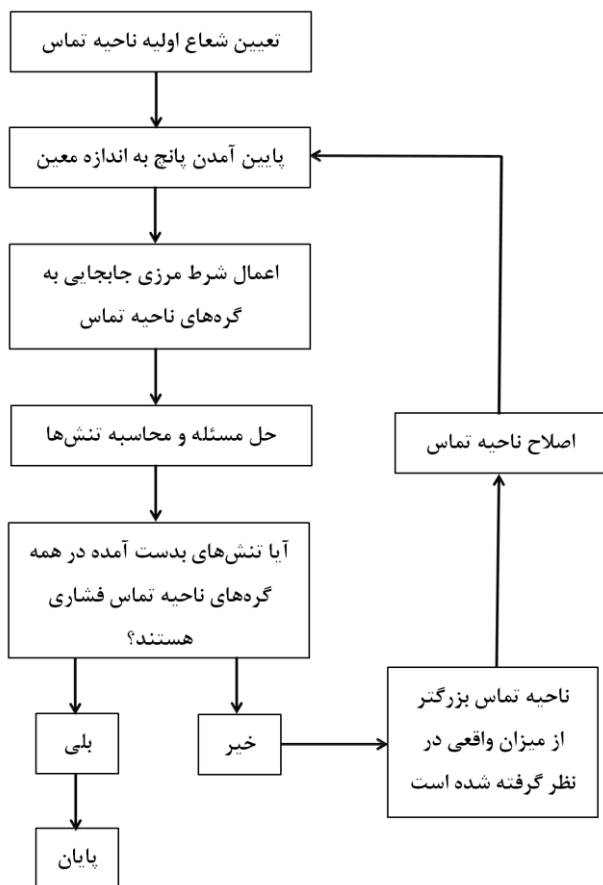
$$y = \sum_{j=1}^N b_j \eta^j \quad (14-b)$$

مسئله و تعیین ناحیه تماس برای پانچ استوانه ای را به صورت فلوجارت نشان می‌دهد.

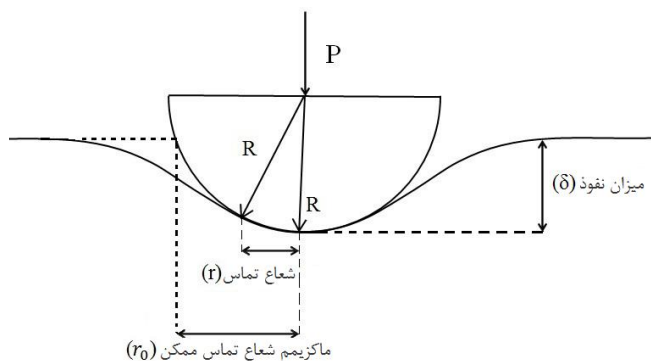
شعاع اولیه ناحیه تماس (ماکزیمم مقدار شعاع ناحیه تماس) از رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$R^2 = (R - \delta)^2 + r^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - (R - \delta)^2} = \sqrt{2R\delta - \delta^2} \quad (18)$$

که در این رابطه R ، δ و r_0 به ترتیب شعاع پانچ، میزان نفوذ پانچ و شعاع اولیه ناحیه تماس هستند. شکل ۴ شعاع تماس واقعی و حداکثر شعاع تماس ممکن را نشان می‌دهد



شکل ۳ مراحل تعیین شعاع تماس در پانچ استوانه‌ای



شکل ۴ شعاع تماس واقعی و ماکزیمم مقدار شعاع ناحیه تماس

$$v_{,\xi} \left[a_{xx} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{x_{,\xi}} \right] + c_{xx} v_{,\xi\xi} + b_{yy} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} v_{,\eta\eta} + d_{yy} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} v_{,\eta\eta} + u_{,\xi\eta} \frac{2}{\kappa-1} e_{xy} + u_{,\eta} \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \frac{1}{y_{,\eta}} = 0 \quad (17-b)$$

برای هر کدام از نقاط جسم (به جز مرزها و سطوح ترک) دو معادله اخیر به کار برده شده است. به طریق مشابه معادلات مربوط به شرایط مرزی نیز از فضای $X-Y$ به فضای $\xi-\eta$ برده شده و نهایتاً یک دستگاه معادلات ایجاد می‌شود که تعداد معادلات آن دو برابر تعداد گره‌هاست. برای حل این دستگاه معادلات از روش تفاضلات محدود استفاده شده است. برای تبدیل مشتقات توابع به عبارات جبری، به علت دقت بالاتر روابط مشتق مرکزی تا حد امکان از این روابط استفاده شده است؛ اما در نقاط مرزی و سطح ترک استفاده از مشتق مرکزی امکان‌پذیر نیست و به ناچار باید از مشتقات پیش‌رونده یا پس‌رونده استفاده کرد.

جابجایی عمودی پانچ به عنوان ورودی مسئله در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب که جابجایی پانچ به عنوان شرایط مرزی به لایه‌ی بالایی جسم اعمال می‌شود و سطحی که در تماس قرار دارد شکل پروفیل پانچ را می‌گیرد. باید توجه داشت که به علت وجود نیروی عرضی ناشی از اصطکاک، سطوح تماس متقارن نیستند. این نیروی عرضی طبق معادله اول رابطه (۱۱-الف) اعمال می‌شود و بدین ترتیب سطوح تماس با توجه به وجود همزمان نیروهای عمودی و عرضی بدست خواهد آمد. پس از حل مسئله با استفاده از روابط کرنش-جابجایی می‌توان کرنش را در هر نقطه بدست آورده و سپس با استفاده از روابط تنش-کرنش، تنش در هر نقطه قابل محاسبه است. نهایتاً با انتگرال گیری از تنش نرمال بر سطح پایینی جسم نیمه بی‌نهایت نیروی لازم برای ایجاد جابجایی مورد نظر بدست خواهد آمد. اگر مقدار این نیرو برابر P باشد، با اعمال معادله اول رابطه (۱۱-الف) نیروی عرضی نیز برابر μP بدست خواهد آمد.

در پانچ تخت ناحیه تماس ثابت و مستقل از نیروی اعمالی و برابر با پهنای پانچ است. بنابراین می‌توان جابجایی پانچ را در یک مرحله وارد کرد؛ مشابه کاری که در مرجع [۳۳] انجام شده است. اما در پانچ استوانه‌ای، ناحیه تماس ثابت نیست و با افزایش میزان نفوذ پانچ (که مترادف با افزایش نیروی پانچ است)، اندازه ناحیه تماس نیز افزایش می‌یابد. همانگونه که ذکر شد جابجایی عمودی نقاط ناحیه تماس به عنوان ورودی مسئله در نظر گرفته شده است، بنابراین لازم است تا راهکاری در نظر گرفته شود تا اندازه این ناحیه به دقت تعیین شود. برای یافتن ناحیه تماس از روش سعی و خطا استفاده می‌شود. بدین ترتیب که ابتدا، با توجه به میزان جابجایی پانچ حداکثر ناحیه تماس محاسبه خواهد شد و به کمک آن، جابجایی نقاط ناحیه تماس تعیین می‌شود. سپس با تشکیل دستگاه معادلات و حل آن نهایتاً تنش در همه نقاط تعیین می‌شود. تنش عمودی در همه نقاط ناحیه تماس بررسی می‌شود، اگر تنش در همه این نقاط فشاری باشد بدین معناست که ناحیه تماس به درستی تعیین شده است اما اگر در یک یا چند نقطه در این ناحیه تنش کششی باشد به این معناست که ناحیه تماس بزرگتر از حد واقعی در نظر گرفته شده است و باید اصلاح شود و نقاطی که تنش در آنها منفی شده است از ناحیه تماس حذف شوند. با اصلاح ناحیه تماس مجدداً دستگاه معادلات تشکیل شده و حل می‌شود. این روند آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا تنش در همه نقاط ناحیه تماس فشاری بدست آید. شکل ۳ مراحل حل

۵- محاسبه ضرایب شدت تنش

پس از حل دستگاه معادلات و اعمال شرایط مرزی، نهایتاً توزیع تنش در کل جسم بدست خواهد آمد. با استفاده از توزیع تنش در حوزه نوک ترک می‌توان ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد. برای محاسبه ضرایب شدت تنش از روش نیرو استفاده شده است. این روش نخستین بار توسط راجو و نیومن در سال ۱۹۷۷ مطرح شد [۳۰]. دومورایس در سال ۲۰۰۶ نشان داد که این روش در تعیین ضرایب شدت تنش برای ترک مرکزی در ورق ایزوتروپ و تیر ارتوتروپ از دقت خوبی برخوردار است. وی مزیت‌های مهمی را برای این روش بیان کرد؛ که از جمله آنها می‌توان به عدم نیاز به المان‌های منفرد خاص در نوک ترک، مناسب بودن برای مواد غیرایزوتروپ و مناسب بودن برای مودهای ترکیبی شکست اشاره کرد [۳۲]. طالع‌زاده و صدیقی دقت این روش را برای تماس پانچ صلب تخت و جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند در حضور ترک سطحی نشان دادند [۳۳].

اگر ترکی مطابق شکل ۵ در جسم وجود داشته باشد با صرف نظر کردن از ترم‌های بالاتر، تنش‌های σ_y و τ_{xy} از رابطه (۱۹) و (۲۰) بدست می‌آیند [۳۲].

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (19)$$

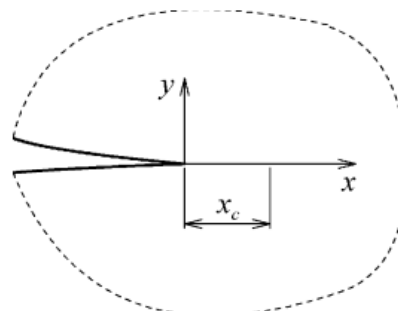
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (20)$$

با انتگرال‌گیری از تنش‌ها در فاصله صفر تا x_c روابط (۲۱) و (۲۲) برای ضرایب شدت تنش بدست می‌آید.

$$K_I = F_y \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \quad (21)$$

$$K_{II} = F_x \sqrt{\frac{\pi}{2x_c}} \quad (22)$$

با محاسبه F_x و F_y در فواصل مختلف x_c و میل دادن x_c به سمت صفر، مقادیر K_I و K_{II} در نوک ترک بدست می‌آید [۳۲].



شکل ۵ شکل شماتیک ترک و محورهای انتخابی

۶- اعتبارسنجی

اعتبارسنجی روش ارائه شده با حل دو مسئله خاص صورت پذیرفته است. نخست تماس پانچ صلب استوانه‌ای با جسم نیمه بی‌نهایت همگن بدون حضور ترک بررسی شده است. توزیع تنش بدست آمده با نتایج تحلیلی هرتز مقایسه شده است [۲]. هندسه مسئله مشابه شکل ۱-الف بوده با این تفاوت که در این مسئله اثر اصطکاک در نظر گرفته نشده است. همچنین ماده همگن فرض شده است. شعاع پانچ و میزان نفوذ به ترتیب ۵۰ و ۲ میلی‌متر و ابعاد جسم

۵۰×۲۵۰ میلی‌متر انتخاب شده است. انتخاب این ابعاد برای جسم به این علت است که در این حالت اثرات پانچ در لبه‌های جسم ناچیز بوده و فرض نیمه بی‌نهایت بودن صحیح است. در راستای x و y به ترتیب از ۱۲۰ و ۶۰ گره استفاده شده است. توزیع تنش عمودی در زیر پانچ با استفاده از روش تفاضلات محدود بدست آمده و با توزیع تنشی که رابطه هرتز پیش‌بینی کرده است مورد مقایسه قرار گرفته است. رابطه (۲۳) توزیع تنش را طبق رابطه هرتز بیان می‌کند که در این رابطه a شعاع ناحیه تماس است و P نیروی پانچ است.

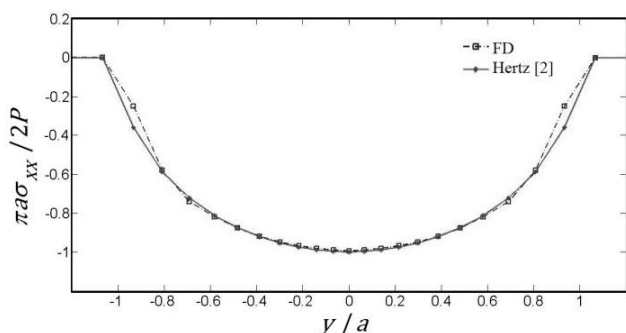
$$\sigma_{yy} = \frac{2P}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (23)$$

شکل ۶ توزیع تنش عمودی زیر پانچ را با استفاده از روش تفاضلات محدود و روابط هرتز نشان می‌دهد. در این شکل (و سایر شکل‌هایی که در ادامه آورده شده است) نتایج بدست آمده از روش تفاضلات محدود با نماد FD نشان داده شده است. با توجه به شکل، مشخص است که نتایج حاصل از این روش تطابق بسیار خوبی با روابط هرتز داشته و تنها در لبه‌های پانچ مقداری اختلاف وجود دارد که قابل صرف نظر کردن است. همچنین همین مسئله با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس حل شده و نتایج آن با نتایج روش ارائه شده مقایسه شده است. نیروی به دست آمده برای پانچ با استفاده از روش تفاضلات محدود ۵۹/۰۱ کیلونیوتن است که در مقایسه با نتایج بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس فقط ۰/۷٪ اختلاف را نشان می‌دهد؛ که نشان از دقت روش تفاضلات محدود دارد.

برای سنجش اعتبار روش نیرو، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مسئله تماس پانچ استوانه‌ای، نتایج حاصل از این روش در یک مسئله خاص با نتایج ارائه شده توسط داگ مقایسه شده است [۲۰]. در این مسئله تماس پانچ صلب استوانه‌ای و جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند مطالعه شده است. هندسه مسئله شبیه شکل ۱-الف است. ضریب پواسون ثابت و برابر ۰/۲۵ فرض شده و تغییرات مدول الاستیسیته به صورت نمایی و طبق رابطه (۲۴) در نظر گرفته شده است:

$$E = E_0 e^{\gamma x} \quad (24)$$

که در این رابطه E_0 مدول الاستیسیته سطح تماس و γ ثابت ناهمگنی است که در اینجا برای هماهنگی با نتایج داگ، برابر ۰/۰۳۳۳ در نظر گرفته شده است. شعاع پانچ و اندازه ترک مساوی و برابر ۳ میلی‌متر در انتخاب شده است.

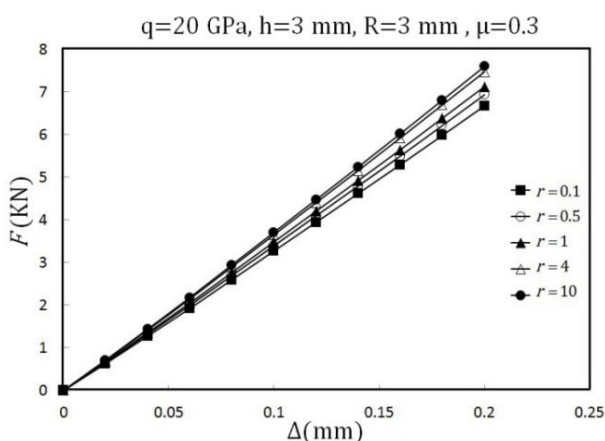


شکل ۶ مقایسه توزیع تنش عمودی زیر پانچ استوانه‌ای، با استفاده از روش تفاضلات محدود (FD) و روابط هرتز

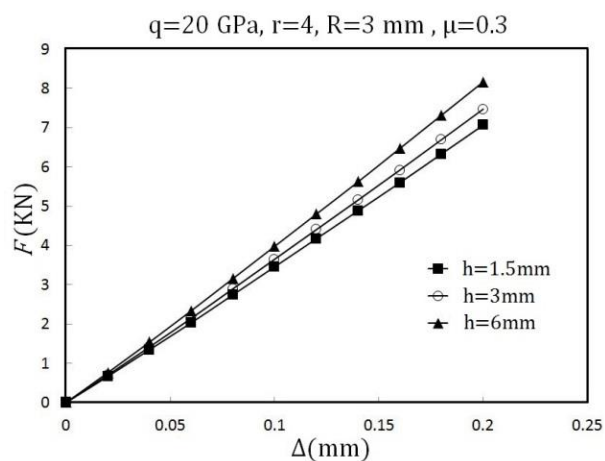
حضور ترک ترک سطحی بررسی شده است. جسم نیمه بی‌نهایت به صورت سه لایه، مطابق شکل ۱ و با ابعاد $70\text{mm} \times 80\text{mm}$ در نظر گرفته شده است. ضخامت لایه سرامیکی و عمق ترک سطحی مساوی و برابر ۳ میلی‌متر فرض شده است. آلومینیوم و آلومینا (اکسید آلومینیوم) با مدول الاستیسیته 70 گیگاپاسکال و 320 گیگاپاسکال به ترتیب به عنوان فاز فلزی و سرامیکی انتخاب شده‌اند. ضریب پواسون برای کل جسم ثابت و برابر 0.3 در نظر گرفته شده است.

ابتدا تماس بدون حضور ترک بررسی شده و اثر پارامترهای مختلف بر نمودارهای نیرو-جابجایی (قانون تماس) مورد مطالعه قرار گرفته است. نخست با ثابت نگه داشتن پارامترهای هندسی (پهنای پانچ و ضخامت لایه هدفمند و ضریب اصطکاک)، اثر توزیع خواص الاستیک در جسم نیمه بی‌نهایت بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر تعیین کننده r است و تغییرات q تأثیری بر قانون تماس ندارد. شکل ۸ نمودار نیرو-جابجایی را برای مقادیر مختلف r نشان می‌دهد. افزایش r ، که مترادف است با افزایش نسبی کسر حجمی پوشش سرامیکی، سفتی کلی جسم را افزایش داده و افزایش نیروی تماس را برای جابجایی‌های یکسان پانچ در پی دارد.

شکل ۹ اثر تغییر ضخامت لایه هدفمند را بر نمودار نیرو - جابجایی پانچ نشان می‌دهد. در اینجا نیز با افزایش ضخامت این لایه سهم سرامیک در کل جسم افزایش یافته و در نتیجه سفتی کلی جسم افزایش می‌یابد. این امر افزایش نیروی تماس را برای مقادیر یکسان جابجایی پانچ در پی دارد.

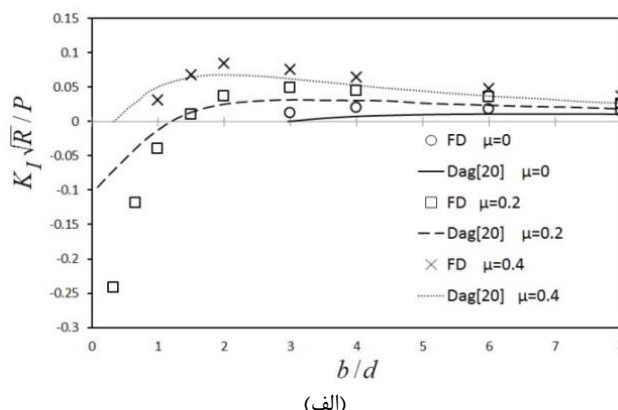


شکل ۸ اثر تغییر r بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ

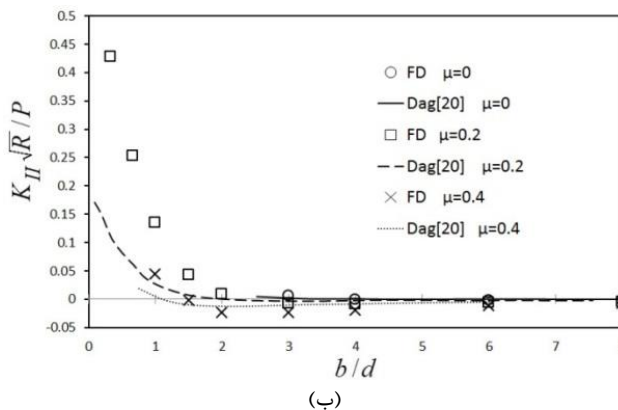


شکل ۹ اثر تغییر ضخامت لایه هدفمند بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ

شکل ۷ نتایج بدست آمده را در مقایسه با نتایج داگ نشان می‌دهد. همانگونه که پیداست، برای مقادیر مثبت ضریب شدت تنش مود اول، نتایج بدست آمده تطابق قابل قبولی با نتایج داگ دارند. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که منفی شدن ضرایب شدت تنش به معنای عدم رشد ترک است و مقدار عددی منفی آن اهمیت خاصی ندارد. در واقع، از آنجا که منفی شدن ضریب شدت تنش مود اول به معنای بسته شدن دهانه ترک بسته است و به عبارت دیگر سطوح ترک در تماس با یکدیگر قرار خواهند گرفت، فرضیات صورت گرفته در مورد سطوح ترک نقض خواهد شد و در نتیجه مقادیر عددی بدست آمده قابل اعتماد نیستند. این مسئله در نتایج ارائه شده توسط داگ نیز وجود دارد. بنابراین مقادیر منفی شدت تنش مود اول از نظر عددی اهمیتی ندارند و صرفاً منفی شدن آنها مورد توجه است. از این رو در تمامی نتایجی که در ادامه آورده شده است مقادیر منفی ضرایب شدت تنش مود اول و ضرایب شدت تنش مود دوم متناظر با آنها، حذف شده است. در شکل ۷، صرفاً برای نمونه ضرایب شدت تنش منفی برای ضریب اصطکاک 0.2 آورده شده است. همانگونه که پیداست ضرایب شدت تنش منفی با نتایج داگ اختلاف قابل توجهی دارد که قابل پیش‌بینی بود و همانگونه که ذکر شد در این موارد مقادیر عددی بدست آمده از روش تفاضلات محدود و نتایج داگ هر دو غیرقابل اعتماد است اما منفی شدن آنها در مقادیر یکسانی از b/d نشان‌دهنده صحت نتایج بدست آمده است.



(الف)

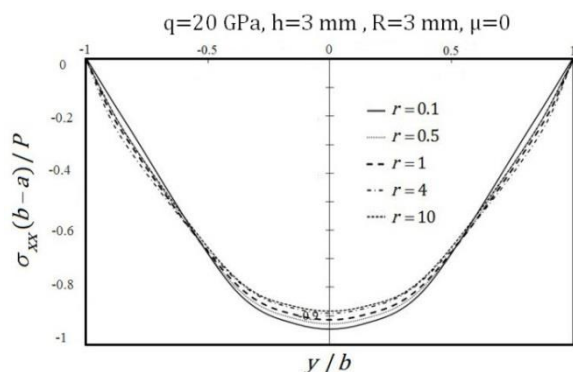
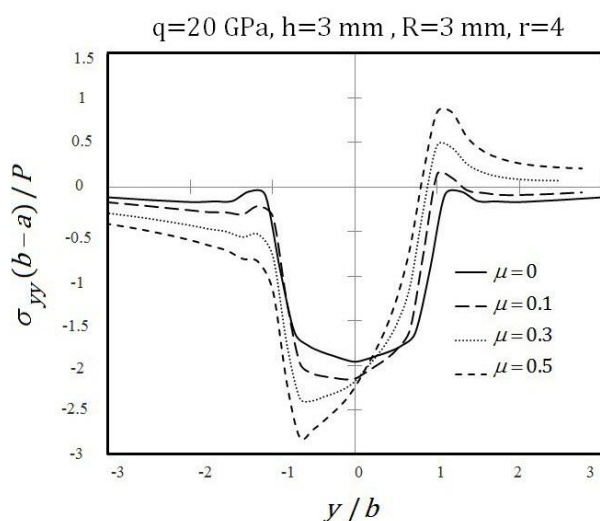


(ب)

شکل ۷ ضرایب شدت تنش جسم نیمه هدفمند تحت بارگذاری تماسی پانچ صلب استوانه‌ای (الف) مود اول و (ب) مود دوم

۷- نتایج و بحث

پس از اعتبارسنجی روش مورد استفاده، در این بخش مسئله تماس لغزشی دوبعدی پانچ صلب استوانه‌ای با یک جسم نیمه بی‌نهایت در حضور و در عدم

شکل ۱۱ توزیع تنش فشاری در زیر پانچ برای مقادیر مختلف r شکل ۱۲ اثر ضریب اصطکاک بر توزیع تنش σ_{yy} زیر پانچ

مقایسه نتایج بدست آمده از تماس پانچ استوانه‌ای بر روی جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند با نتایج تماس پانچ تخت که در مرجع [۳۶] آمده است نشان می‌دهد که اثر کلی پارامترهای مختلف بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ در هر دو حالت مشابه یکدیگر است. اما شدت تغییرات نمودار نیرو-جابجایی در اثر افزایش ابعاد پانچ، در پانچ تخت بیشتر از پانچ استوانه‌ای است. بدین ترتیب که با تغییر پهنای پانچ تخت از ۱ میلی‌متر به ۶ میلی‌متر، ۲۰٪ نیروی پانچ را افزایش می‌دهد؛ اما با تغییر شعاع پانچ استوانه‌ای از ۱ میلی‌متر به ۶ میلی‌متر، نیروی پانچ را ۶٪ افزایش می‌دهد.

پس از بررسی مسئله تماس، در این قسمت ترک سطحی نیز به مسئله افزوده شده است. هندسه مسئله مشابه شکل ۱- (ب) بوده و پیش از این توضیحات مربوط به آن ارائه شده است. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مشابه قسمت قبل است. هدف اصلی این قسمت بررسی پارامترهای رشد ترک است. از آنجا که ترک در ناحیه ترد جسم قرار دارد ضرایب شدت تنش به عنوان پارامتر تعیین کننده رشد ترک انتخاب شده و مورد مطالعه قرار گرفته است.

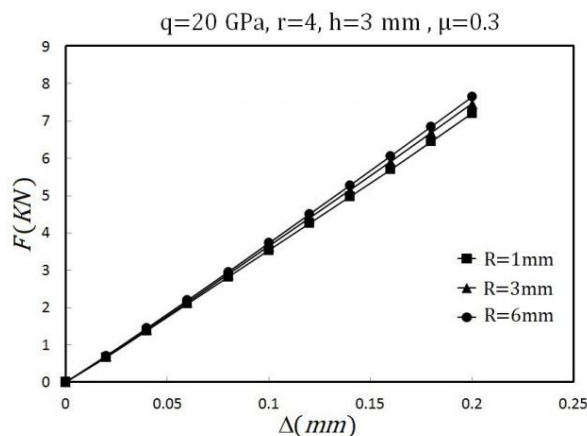
در این قسمت اثر تغییر پارامترهایی نظیر r و q ، ابعاد پانچ، ضخامت لایه هدفمند و ضریب اصطکاک بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. همانگونه که پیش از این توضیح داده شد، مقادیر منفی ضرایب شدت تنش مود اول از نظر عددی اهمیتی ندارند و منفی شدن این ضرایب به معنای بسته شدن دهانه ترک است. بنابراین در نمودارهای ارائه شده در این

شکل ۱۰ اثر تغییر شعاع پانچ بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ را نشان می‌دهد. برای جابجایی‌های یکسان پانچ، با افزایش شعاع پانچ نیروی تماس افزایش می‌یابد. علت این امر افزایش سطح تماس به ازای افزایش شعاع پانچ می‌باشد؛ از طرفی برای یک میزان جابجایی مشخص پانچ، افزایش سطح تماس مستلزم افزایش نیروی تماس است. در نتیجه با افزایش شعاع پانچ نیروی تماس افزایش می‌یابد.

در قسمت بعدی توزیع تنش فشاری در زیر پانچ مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که تغییرات q تاثیر چندانی بر توزیع تنش فشاری در زیر پانچ ندارد. اما تغییرات r تنش فشاری را تحت تاثیر قرار می‌دهد. با افزایش r ، در مرکز پانچ ماکزیمم مقدار تنش فشاری کاهش می‌یابد اما در لبه‌ها تنش افزایش می‌یابد. به طور کلی می‌توان گفت با افزایش r تنش در زیر پانچ توزیع یکنواخت‌تری خواهد داشت. شکل ۱۱ این مطلب را به خوبی نمایش می‌دهد. بررسی سایر نتایج نشان می‌دهد که تغییرات ناشی از افزایش ضخامت لایه هدفمند و افزایش شعاع پانچ مشابه روند تغییرات ناشی از افزایش r است؛ با این تفاوت که تغییرات ناشی از افزایش شعاع پانچ شدیدتر است. افزایش شعاع پانچ افزایش سطح تماس را در پی دارد که این امر موجب می‌شود با افزایش شعاع توزیع تنش یکنواخت‌تر شود. به علت تشابه نمودارها از تکرار آنها اجتناب شده است.

بررسی اثر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش σ_{yy} در زیر پانچ و نواحی اطراف آن نشان می‌دهد که تغییر r و q تاثیر چندانی ندارد. تاثیر تغییر ضخامت لایه هدفمند نیز ناچیز است. اما تغییر ضریب اصطکاک توزیع تنش σ_{yy} را در زیر پانچ به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. شکل ۱۲ تغییرات تنش σ_{yy} را برای مقادیر مختلف ضریب اصطکاک نشان می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک صفر باشد تنش‌های به وجود آمده همه‌جا فشاری و متقارن خواهد بود. اما اگر ضریب اصطکاک مخالف صفر باشد تنش‌ها از حالت متقارن خارج خواهند شد. در این حالت، تنش‌ها در سمتی از جسم که در جلو حرکت پانچ قرار دارد فشاری می‌شوند و در پشت پانچ تنش‌های کششی ایجاد می‌شود.

علت این پدیده این است که نیروی عرضی به وجود آمده در اثر اصطکاک، باعث می‌شود تا پانچ سطح جسم را به یک طرف جمع کند و در این سمت تنش‌های فشاری بروز کند؛ حال آنکه در سمت مقابل تنش‌های کششی پدید می‌آید. با افزایش ضریب اصطکاک عدم تقارن توزیع تنش افزایش می‌یابد، همچنین مقادیر ماکزیمم تنش کششی و فشاری در اطراف پانچ نیز با افزایش روبرو خواهد بود. علت این امر نیز افزایش نیروی عرضی در اثر افزایش ضریب اصطکاک است.



شکل ۱۰ اثر تغییر شعاع پانچ بر نمودار نیرو-جابجایی پانچ

این امر سبب مثبت شدن ضریب شدت تنش مود اول می‌شود تا اینکه به ماکزیمم مقدار خود برسد. با ادامه روند دور شدن پانچ از ترک، رفته رفته اثر تنش کششی نیز از بین رفته و ضریب شدت تنش به صفر همگرا می‌شود.

اثر میدان تنش فشاری و تنش ناشی از اصطکاک بر ضریب شدت تنش مود دوم برعکس مود اول است. شکل ۱۳- (ب) نشان می‌دهد که بر خلاف ضریب شدت تنش مود اول، ضریب شدت تنش مود دوم با افزایش ضریب اصطکاک، کاهش می‌یابد. این کاهش می‌تواند منجر به این شود که به ازای برخی مقادیر ضریب اصطکاک، حتی در فواصل نزدیک پانچ و ترک، ضریب شدت تنش مود دوم منفی بوده و ترک تمایلی به رشد تحت این مود نداشته باشد.

نتایج نشان می‌دهد که مطابق انتظار به ازای هر مقدار ضریب اصطکاک با دور شدن پانچ از ترک ضرایب شدت تنش مود اول و دوم نهایتاً به صفر همگرا می‌شوند.

با ثابت نگه داشتن پارامترهای هندسی و ضریب اصطکاک، اثر توزیع خواص الاستیک در جسم نیمه بی‌نهایت بررسی شده است. به علت کم بودن ضخامت لایه هدفمند نسبت به ضخامت کل جسم اثر تغییرات توزیع خواص در این قسمت ناچیز است. بنابراین تغییرات r و q تاثیر چندانی بر نمودار ضرایب شدت تنش ندارد. شکل ۱۴ اثر تغییرات r را بر روی ضرایب شدت تنش نشان می‌دهد. به علت تشابه از آوردن نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بر حسب تغییرات q اجتناب شده است.

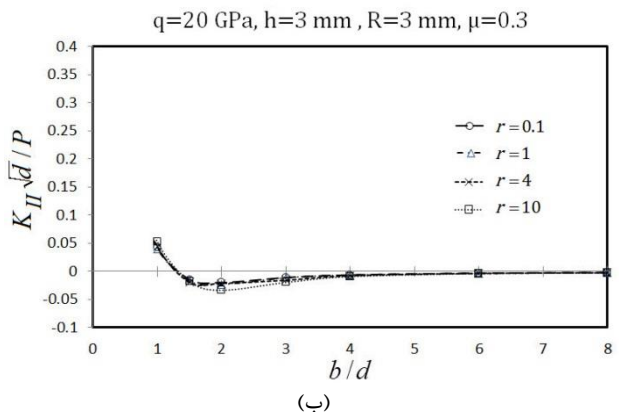
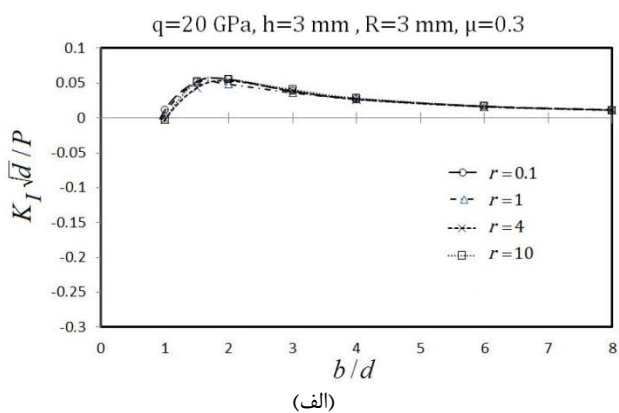
به علت کوچک بودن سطح تماس در مقابل شعاع پانچ و سایر ابعاد جسم، تغییر شعاع پانچ نیز تاثیری بر ضرایب شدت تنش ندارد.

بخش مقادیر منفی ضرایب شدت تنش مود اول و ضرایب شدت تنش مود دوم متناظر با آنها حذف شده است.

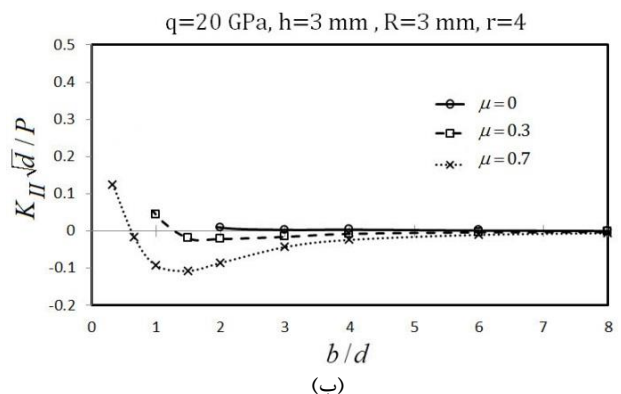
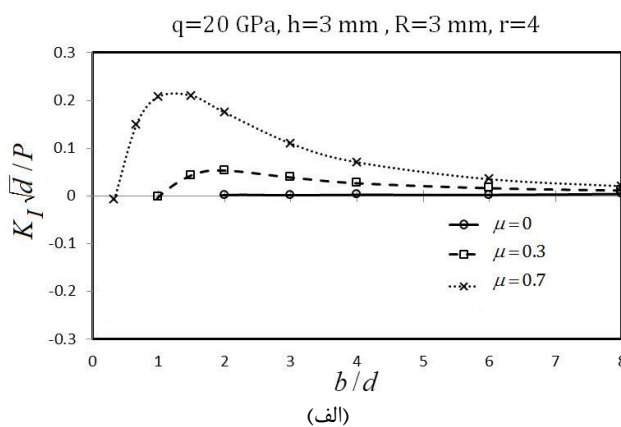
ابتدا برای یک توزیع خواص ثابت ($q=20$ GPa, $r=4$)، و با ثابت نگه داشتن ابعاد پانچ و ترک و ضخامت لایه هدفمند، اثر اصطکاک بررسی شده است. شکل ۱۳ تغییرات ضرایب شدت تنش را برای مقادیر مختلف ضریب اصطکاک نشان می‌دهد.

با توجه به شکل ۱۳- (الف)، برای حالت بدون اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول همواره نامثبت است. وقتی پانچ به ترک نزدیک است میدان تنش فشاری ناشی از تماس پانچ با جسم، تنش‌های فشاری را بر سطوح ترک اعمال می‌کند که باعث بسته شدن دهانه ترک و مانع از رشد آن تحت مود اول می‌شود. در این حالت ضریب شدت تنش مود اول مقادیری منفی خواهند داشت (که در شکل حذف شده‌اند). با دور شدن پانچ از ترک رفته رفته اثر میدان تنش فشاری زیر پانچ بر سطوح ترک کاهش می‌یابد و مقادیر ضریب شدت تنش به صفر میل می‌کنند. بنابراین در تماس بدون اصطکاک پانچ استوانه‌ای ترک تمایلی با رشد ندارد.

وجود اصطکاک باعث اعمال تنش‌هایی در راستای r در جسم و سطوح ترک می‌شود. اعمال این تنش‌ها سطوح ترک را از یکدیگر باز می‌کند و ضرایب شدت تنش مود اول را افزایش می‌دهند. بنابراین در حالتی که اصطکاک وجود دارد دو عامل بر ضریب شدت تنش مود اول تاثیرگذارند: میدان تنش فشاری ناشی از تماس پانچ و تنش کششی ناشی از اصطکاک. با دور شدن پانچ از ترک اثر میدان فشاری ناشی از تماس کاهش می‌یابد و اثر تنش کششی ناشی از اصطکاک غالب می‌شود.



شکل ۱۴ ضرایب شدت تنش بر حسب تغییرات r (الف) مود اول و (ب) مود دوم



شکل ۱۳ ضرایب شدت تنش بر حسب تغییرات ضریب اصطکاک (الف) مود اول و (ب) مود دوم

- (۲) با افزایش ضخامت لایه هدفمند، سفتی کلی جسم افزایش یافته و در نتیجه نیروی تماس برای جابجایی‌های یکسان پنچ افزایش می‌یابد.
- (۳) افزایش شعاع پنچ، سطح تماس را افزایش می‌دهد و به ازای جابجایی‌های یکسان پنچ، نیروی تماس را افزایش می‌یابد.
- (۴) تغییرات q تاثیر چندانی بر توزیع تنش فشاری زیر پنچ ندارد. با افزایش r ، در مرکز پنچ ماکزیمم مقدار تنش فشاری کاهش می‌یابد اما در لبه‌ها تنش افزایش می‌یابد. تغییرات ناشی از افزایش ضخامت لایه هدفمند و افزایش شعاع پنچ مشابه روند تغییرات ناشی از افزایش r است.
- (۵) تغییرات توزیع خواص الاستیک و نیز ضخامت لایه هدفمند بر توزیع تنش در راستای Y بی‌تاثیر است.
- (۶) وجود اصطکاک باعث می‌شود تنش‌های σ_{yy} از حالت تقارن خارج شوند. در این حالت در یک سمت جسم تنش‌های فشاری و در سمت دیگر تنش‌های کششی به وجود می‌آید.
- (۷) اگر اصطکاک وجود نداشته باشد ضریب شدت تنش مود اول منفی است و با دور شدن پنچ از ترک به صفر میل می‌کند. همچنین ضریب شدت تنش مود دوم نیز که در ابتدا، ماکزیمم است و با دور شدن پنچ از ترک به صفر میل می‌کند.
- (۸) افزایش ضریب اصطکاک ضریب شدت تنش مود اول را افزایش می‌دهد. این در حالیست که با ضریب شدت تنش مود دوم کاهش می‌یابد.
- (۹) به علت ضخامت کم لایه هدفمند در مقایسه با ضخامت کل جسم، تغییرات r و q بر ضرایب شدت تنش موثر نیست. همچنین به علت کوچک بودن سطح تماس در مقابل شعاع پنچ و تغییر شعاع پنچ نیز تاثیری بر ضرایب شدت تنش ندارد.
- (۱۰) افزایش ضخامت لایه هدفمند بر ضریب شدت تنش مود دوم تقریباً بی‌تاثیر است اما ضریب شدت تنش مود اول را افزایش می‌دهد.

۹- مراجع

[1] Sahin, A., "An Interface Crack for a Graded Coating Bonded to Layered Medium," Ph.D Thesis, Lehigh University, Pennsylvania, USA, 2002.

[2] Hertz, H., "Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik," Vol. 8, No. 92, pp. 297-306, 1882.

[3] Giannakopoulos, A. and Pallot, P., "Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 48, No. 8, pp. 1597-1631, 2000.

[4] Aizikovich, S. Alexandrov, V. Kalker, J. Krenev, L. and Trubchik, I. "Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties," International Journal of Solids and Structures, Vol. 39, No. 10, pp. 2745-2772, 2002.

[5] Ke, L. L. and Wang, Y. S., "Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties," International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, No. 18, pp. 5779-5798, 2006.

[6] Ke, L. L. and Wang, Y. S., "Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials," European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 26, No. 1, pp. 171-188, 2007.

[7] Guler, M. and Erdogan, F., "The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings," International journal of mechanical sciences, Vol. 49, No. 2, pp. 161-182, 2007.

[8] Dag, S. Guler, M. A. Yildirim, B. and Cihan Ozatag, A., "Sliding frictional contact between a rigid punch and a laterally graded elastic medium," International Journal of Solids and Structures, Vol. 46, No. 22, pp. 4038-4053, 2009.

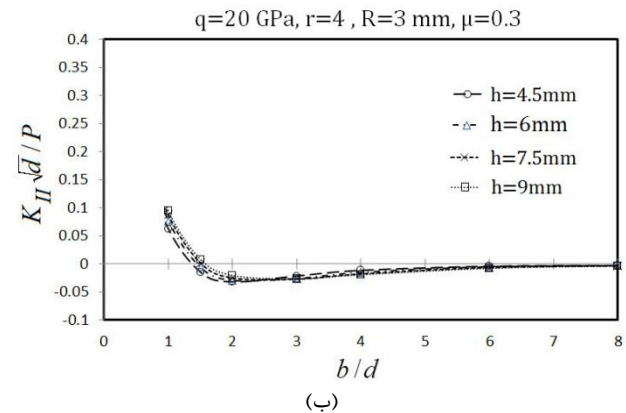
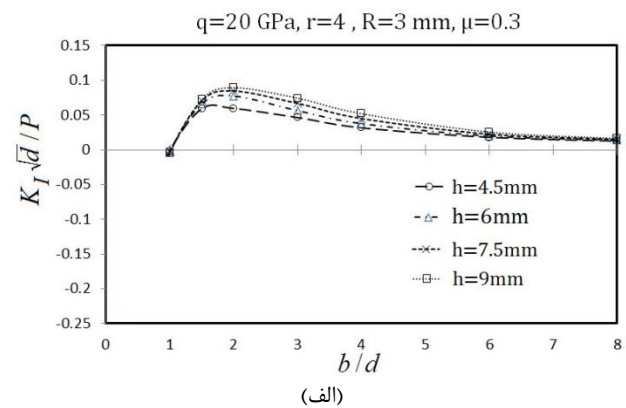
[9] Dag, S. Guler, M. A., Yildirim, B. and Ozatag, A. C., "Frictional Hertzian contact between a laterally graded elastic medium and a rigid circular stamp," Acta Mechanica, Vol. 224, No. 8, pp. 1773-1789, 2013.

[10] Gun, H. and Gao, X.-W., "Analysis of frictional contact problems for functionally graded materials using BEM," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 38, pp. 1-7, 2014.

[11] Erdogan, F., "Fracture mechanics of functionally graded materials," Composites Engineering, Vol. 5, No. 7, pp. 753-770, 1995.

شکل ۱۵ ضرایب شدت تنش را برای مقادیر مختلف ضخامت لایه هدفمند نشان می‌دهد. افزایش ضخامت لایه هدفمند بر ضریب شدت تنش مود دوم تقریباً بی‌تاثیر است اما ضریب شدت تنش مود اول را افزایش می‌دهد.

مقایسه نتایج بدست آمده از تماس پنچ استوانه‌ای بر روی جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند با نتایج تماس پنچ تخت که در مرجع [۳۳] آمده است نشان می‌دهد که اگرچه نمودارهای ضریب شدت تنش مود اول و دوم در این دو حالت با یکدیگر متفاوت است؛ اما رفتار کلی این نمودارها مشابه یکدیگر است. این تشابه در تغییرات ضرایب شدت تنش در اثر تغییر ضریب اصطکاک به خوبی قابل مشاهده است. تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در اثر تغییر r در تماس پنچ استوانه‌ای بسیار کم است در حالی که در تماس پنچ تخت تغییرات r می‌تواند تا ۵۰٪ ضریب شدت تنش مود اول را تغییر دهد.



شکل ۱۵ ضرایب شدت تنش بر حسب تغییرات ضخامت لایه هدفمند (الف) مود اول و (ب) مود دوم

۸- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله مسئله تماس پنچ صلب استوانه‌ای و جسم نیمه بی‌نهایت هدفمند در حضور و در عدم حضور ترک سطحی مورد توجه قرار گرفته است. تاثیر ضریب اصطکاک توزیع خواص الاستیک، شعاع پنچ و ضخامت لایه هدفمند بر نمودار نیرو-جابجایی پنچ، تنش‌های ایجاد شده و ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است.

نتایج بدست آمده به شرح زیر است:

(۱) افزایش r ، افزایش نیروی تماس را برای جابجایی‌های یکسان پنچ در پی دارد؛ اما تغییرات q تاثیری بر قانون تماس ندارد.

- [12] Jin, Z. H. and Batra, R., "Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 44, No. 8, pp. 1221-1235, 1996.
- [13] Erdogan, F. and Wu, B., "Crack problems in FGM layers under thermal stresses," *Journal of thermal stresses*, Vol. 19, No. 3, pp. 237-265, 1996.
- [14] Erdogan, F. and Wu, B., "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No. 3, pp. 449-456, 1997.
- [15] Choi, H. J., "The problem for bonded half-planes containing a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 36, pp. 6559-6588, 2001.
- [16] Walters, M. C. Paulino, G. H. and Dodds, R. H., "Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 3, pp. 1081-1118, 2004.
- [17] Dag, S., "Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach," *Engineering fracture mechanics*, Vol. 73, No. 18, pp. 2802-2828, 2006.
- [18] Dag, S. Yildirim, B. and Sarikaya, D., "Mixed-mode fracture analysis of orthotropic functionally graded materials under mechanical and thermal loads," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 24, pp. 7816-7840, 2007.
- [19] Dag, S. Erhan Arman, E. and Yildirim, B., "Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J_k -integral," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 25-26, pp. 3480-3488, 2010.
- [20] Dag, S. "Crack and Contact Problems in Graded Materials," Ph.D Thesis, , Lehigh University, USA, 2001.
- [21] Dag, S. and Erdogan, F., "A surface crack in a graded medium loaded by a sliding rigid stamp," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, No. 14, pp. 1729-1751, 2002.
- [22] Choi, H. J. "Effects of graded layering on the tip behavior of a vertical crack in a substrate under frictional Hertzian contact," *Engineering fracture mechanics*, Vol. 68, No. 8, pp. 1033-1059, 2001.
- [23] Choi, H. J. and Paulino, G. H., "Interfacial cracking in a graded coating/substrate system loaded by a frictional sliding flat punch," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 466, No. 2115, pp. 853-880, 2010.
- [24] Dag, S. Apatay, T. Guler, M. A. and Gulgeç, M., "A surface crack in a graded coating subjected to sliding frictional contact," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 80, pp. 72-91, 2012.
- [25] Liebowitz, H. Sandhu, J. Lee, J. and Menandro, F., "Computational fracture mechanics: research and application," *Engineering fracture mechanics*, Vol. 50, No. 5-6, pp. 653-670, 1995.
- [26] Altus, E. and Bar-Yoseph, P., "A 3-D finite difference solution for orthotropic laminated composites using curvilinear coordinates," *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 4, pp. 573-577, 1983.
- [27] Dorogoy, A. and Banks-Sills, L., "Shear loaded interface crack under the influence of friction: a finite difference solution," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, No. 13, pp. 1749-1780, 2004.
- [28] Dorogoy, A. and Banks-Sills, L., "Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens—A finite difference solution," *Engineering fracture mechanics*, Vol. 72, No. 18, pp. 2758-2773, 2005.
- [29] Guinea, G. V. Planas, J. and Elices, M., "K_I evaluation by the displacement extrapolation technique," *Engineering fracture mechanics*, Vol. 66, No. 3, pp. 243-255, 2000.
- [30] Raju, I. and Newman, J., "Three dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens," NASA TN D-8414, Technical report, Langley Research Center, May 1977.
- [31] Smith, S. A. and Raju, I. S., "Evaluation of stress-intensity factors using general finite-element models," *Fatigue and Fracture Mechanics (Twenty-Ninth Volume) ASTM STP*, Vol. 1332, pp. 176-200, 1999.
- [32] De Morais, A. B., "Calculation of stress intensity factors by the force method," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, No. 5, pp. 739-750, 2007.
- [33] Talezadehlari, A. and Sadighi, M., "Numerical analysis of the fracture parameters in the sliding contact problem between a rigid flat punch and a functionally graded semi-infinite medium in the presence of a surface crack," In Persian, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 12, pp. 14-24, 2013.
- [34] Tamura, I. Tomota, Y. and M. Ozawa, "Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strengths," in *Proc. Conf. on Microstructure and Design of Alloys*, Institute of Metals and Iron and Steel Institute, London., Vol. 1, No. 129, pp. 611-615, 1973.
- [35] Nikbakht, A. Fallahi Arezoodar, A. Sadighi, M. Zucchelli, A. and Talezadehlari, A., "Frictionless elastic contact analysis of a functionally graded vitreous enameled low carbon steel plate and a rigid spherical indenter," *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 484-501, 2013.
- [36] Talezadehlari, A., "Analysis of contact problem in high temperature in the presence of cracks in the functionally graded (FGM) layers," In Persian, MSc Thesis, Amirkabir University of Technology, Iran, 2012.