جلد ۲، شماره ۳، آذر ۹٤، ص‌ص ۳۵- ٤۲

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیـــت**

http://jstc.iust.ac.ir

بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی با لایه چینی متعامد پادمتقارن تحت کوتاه شدگی انتهایی

سید امیرمهدی قنادپور[۱*]، محسن برکتی[۲]

۱-استادیار، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

*تهران، صندوق پستی، ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳، a_ghannadpour@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: ۹۴/۵/۱۸

پذیرش: ۹۴/۶/۲۸

کلیدواژگان:

پس از کمانش

تئوری کلاسیک صفحات کامپوزیتی

متعامد پادمتقارن

چندجمله‌ای‌های چبیشو مثلثاتی دوگانه

روش حداقل مربعات

چکیده

به‌منظور بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی مستطیلی با لایه‌چینی متعامد پادمتقارن تحت کرنش کوتاه‌شدگی انتهایی، یک روش عددی بر پایه چندجمله‌ای‌های مثلثاتی چبیشو دوگانه گسترش داده شده است. در این تحقیق فرض شده است که ضخامت صفحه بسیار نازک است، به‌همین دلیل برای تحلیل مسئله از تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده می‌شود. در این مقاله از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی چبیشو برای حل معادلات تعادل حاکم بر صفحات کامپوزیتی با لایه چینی متعامد پادمتقارن استفاده شده است که این معادلات با در نظر گرفتن فرضیات ون-کارمن استخراج شده‌اند. مهم‌ترین دلیل به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های مثلثاتی چبیشو، امکان در نظر گرفتن انواع مختلفی از شرایط مرزی بر روی صفحات است. معادلات نهایی حاصل از گسسته‌سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می‌دهند که همواره در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است. برای خطی‌سازی دستگاه معادلات غیرخطی از تکنیک برون‌یابی مرتبه دوم استفاده شده است. ازآنجاکه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است از روش حداقل مربعات برای حل دستگاه معادلات استفاده خواهد شد. نتایج رفتار پس از کمانش برای صفحات ایزوتروپ، متعامد پادمتقارن ارائه شده و تا حد امکان با نتایج موجود مقایسه شده است. در استخراج تمامی نتایج با توجه به آنالیزهای همگرایی انجام پذیرفته از تعداد ۱۳ ترم استفاده شده است.

Post-buckling analysis of anti-symmetric cross-ply composite plates under end-shortening

Seyed Amir Mahdi Ghannadpour*, Mohsen Barekati

Department of New Technologies and Engineering, Shahid Beheshti University, G.C., Tehran, Iran
*P.O.B. 1983963113, Tehran, Iran, a_ghannadpour@sbu.ac.ir

Keywords

Post-buckling
Classical laminated plate theory
Anti-symmetric cross-ply
Double chebyshev polynomials
Least squares technique

Abstract

In this paper, a method based on Chebyshev polynomials is developed for examination of the post-buckling behaviour of thin rectangular anti-symmetric cross-ply composite laminated plates with different boundary conditions under end shortening in their plane. Classical laminated plate theory is used for developing equilibrium equations that it produces acceptable results for thin plates. In this method, the equilibrium equations are solved directly by substituting the displacement fields with equivalent finite Chebyshev polynomials. Using this method allows developing the mathematical model of composite laminated plates with different boundary conditions on all edges. Equations system is introduced by discretizing equilibrium equations and boundary conditions with finite Chebyshev polynomials. Nonlinear terms caused by the product of variables are linearized by using quadratic extrapolation technique to solve the system of equations. Since number of equations is always more than the number of unknown parameters, the least squares technique is used to solve the system of equations. Some results for anti-symmetric cross-ply composite plates under end-shortening in their plane with different boundary conditions are computed and compared with those available in the literature, wherever possible.

۱– مقدمه

مدل‌های امروزه سازه‌های کامپوزیتی و جدار نازک به جزئی جدایی‌ناپذیر از صنایع مختلف مهندسی ازجمله هوافضا، کشتی‌سازی و... تبدیل شده است. علت این امر امکان طراحی ماده با توجه به ویژگی‌های مدنظر طراح و

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Ghannadpour, S. A. M. and Barekati, M., ‘‘Post-buckling analysis of anti-symmetric cross-ply composite plates under end-shortening’’, In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 3, pp. 35-42, 2015.

همچنین استحکام بالا در کنار وزن پایین است. به خاطر وجود رفتار فشاری داخلی صفحه‌ای، پایداری صفحات یکی از موضوعات مهمی است که باید در طراحی سازه مدنظر قرار بگیرد.

با توجه به استفاده بسیار گسترده از سازه‌های جدار نازک و صفحات کامپوزیتی در ساختار سازه‌های هوایی نیاز به روش‌های دقیق جهت تحلیل‌های فوق‌الذکر سازه‌ای احساس می‌شود. تاکنون روش‌های گوناگونی در این خصوص گسترش داده شده است.

کمانش[1] و رفتار پس از کمانش[2] صفحات کامپوزیتی یکی از موضوعاتی است که توسط محققین مختلف بررسی شده است. توروی[3] و مارشال[4] [۱] مروری بر تحقیقات مختلف صورت گرفته در زمینه‌ی کمانش و رفتار پس از کمانش صفحات داشته‌اند. ابوالقاسمی و ایپک‌چی [۲] کمانش صفحات مستطیلی را تحت بار صفحه‌ای غیر یکنواخت به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند.

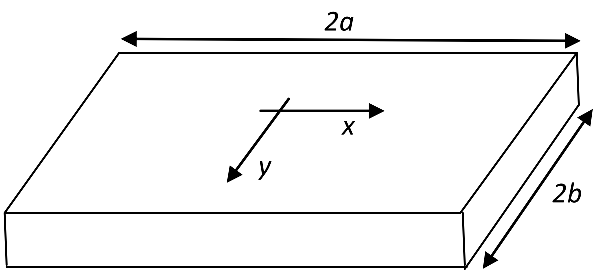
قنادپور و اویسی [۳] برای پیش‌بینی رفتار کمانش صفحات مستطیلی کامپوزیتی متقارن یک روش نوار محدود دقیق را گسترش داد. داو[5] و همکارانش [۴] از یک شیوه‌ی نوار محدود نیمه تحلیلی برای بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی تحت کوتاه‌شدگی انتهایی استفاده کرد. وانگ[6] و داو [۵] یک روش بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات به منظور بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی نسبتاً ضخیم ارائه دادند. قنادپور و اویسی [۶] با استفاده از یک روش دقیق و کاملاً تحلیلی نوار محدود رفتار پس از کمانش سازه‌هایی با مقطع I شکل را بررسی کرد. در این تحقیق مراحل اولیه‌ی پس از بار کمانش به صورت دقیق بررسی شده است. در تحقیقات بعدی رفتار غیرخطی این مقاطع با افزودن ترم‌های هارمونیک متناظر با شکل مودهای کمانش، مورد بررسی قرار گرفت[۷-۸]. او همچنین دو روش نوار محدود دیگر بر مبنای کمینه‌ی انرژی پتانسیل برای پیش‌بینی رفتار غیرخطی صفحات کامپوزیتی تحت کوتاه‌شدگی انتهایی و فشار جانبی ارائه کرده است[۹].

استفاده از چندجمله‌ای‌های ریاضی مانند چندجمله‌ای‌های چبیشو، لاگرانژ و ... به منظور تخمین میدان‌های جابجایی یکی از روش‌های بررسی رفتار پس از کمانش است. خصوصیات چندجمله‌ای‌های چبیشو ازجمله متعامد بودن آن‌ها سبب کاهش میزان ترم‌های موردنیاز برای دست‌یابی به یک جواب قابل‌قبول و در نتیجه کاهش حجم و زمان موردنیاز برای محاسبات می‌شود. برای اولین بار در سال ۱۹۷۶، نث[7] و الوار[8] با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو به بررسی رفتار غیرخطی یک صفحه‌ی ایزوتروپ دایره‌ای شکل پرداختند و علاوه بر نتایج ارائه شده در مورد رفتار غیر خطی صفحات، چگونگی همگرایی چندجمله‌ای‌های چبیشو را نیز در این تحقیق مورد بررسی قرار داده‌اند[۱۰]. در سال ۱۹۹۵، نث و همکارش با بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌های چبیشو دوگانه توانستند رفتار غیرخطی و دینامیکی یک دامنه‌ی مستطیلی را تحت بارگذاری فشاری جانبی بررسی کنند. آن‌ها توانستند با بهره‌گیری از این شیوه و تئوری صفحات کلاسیک، رفتار یک صفحه‌ی مستطیلی را تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کنند[۱۱]. نث و شوکلا[9] در سال ۲۰۰۰ موفق شدند تا رفتار خمشی صفحات کامپوزیتی را نیز با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو دوگانه تحلیل کنند[۱۲].

در مقاله حاضر، به بررسی رفتار الاستیکی بعد از کمانش صفحاتی که تحت کوتاه‌شدگی انتهایی قرار گرفته‌اند، با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو دوگانه پرداخته می‌شود. اضلاع تحت بارگذاری دارای شرایط مرزی ساده و گیردار هستند. فرمول‌بندی مورد استفاده در این تحقیق به منظور بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی بر پایه‌ی تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک[10] (CLPT) است. معادلات نهایی حاصل از گسسته‌سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می‌دهند که همواره در آن تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است. برای خطی‌سازی دستگاه معادلات غیرخطی از تکنیک برونیابی مرتبه ۲ استفاده شده و ازآنجاکه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است از روش حداقل مربعات برای حل دستگاه استفاده خواهد شد. نتایج به‌دست‌آمده از این شیوه تا حدامکان با نتایج حاصل از تحلیل نوار محدود مقایسه شده است. لازم به ذکر است که با توجه به آنالیزهای همگرایی انجام پذیرفته برای صفحات ایزوتروپ و کامپوزیتی، تعداد ۱۳ ترم چندجمله‌ای چبیشو برای استخراج نتایج همگرا شده لازم می‌باشد.

۲- استخراج معادلات

شکل ۱، یک صفحه مستطیلی دلخواه را نشان می‌دهد که دستگاه مختصات روی مرکز آن لحاظ شده است. با این فرض که نسبت ضخامت به طول اضلاع صفحه بسیار کوچک است، می‌توان از تنش‌های برشی در جهت ضخامت صفحه صرف‌نظر کرد. با توجه به این فرض، برای استخراج معادلات تعادل صفحه می‌توان از تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک (CLPT) استفاده کرد.



شکل ۱ نمایش یک صفحه مستطیلی

معادلات تعادل یک صفحه بر مبنای تئوری CLPT به‌صورت رابطه (۱) است[۱۲].

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+N(w_0)=0 \qquad (۱)$$

در معادلات (۱) M و N به ترتیب نشان‌دهنده‌ی ممان‌ها و نیروهای منتجه بوده و $N(w_0)$ به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$N(w_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

1. Buckling
2. Post-buckling
3. Turvey
4. Marshal
5. Dawe
6. Wang
7. Nath
8. Alwar
9. Shukla
10. Classcal laminated plate theory

به‌منظور حل معادلات (۱) لازم است تا ابتدا آن‌ها را برحسب میدان‌های جابجایی بیان کرد؛ بنابراین میدان‌های جابجایی در کل صفحه با در نظر گرفتن فرضیات CLPT به‌صورت رابطه (۲) نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z) &= u(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\\ \bar{v}(x,y,z) &= v(x,y) - z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\\ \bar{w}(x,y,z) &= w(x,y)\end{aligned} \qquad (۲)$$

مقادیر $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ نشان‌دهنده‌ی جابجایی در کل صفحه و مقادیر u,v,w نشان‌دهنده جابجایی بر روی صفحه میانی هستند. با توجه به فرضیات ون-کارمن و معادلات (۲)، کرنش‌های یک صفحه که اصطلاحاً کرنش‌های ون-کارمن نامیده می‌شوند به‌صورت رابطه (۳) تعریف می‌گردند.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} \qquad (۳)$$

که $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy}$ کرنش‌های محوری و γ_{xy} کرنش برشی هستند. با در نظر گرفتن فرضیات تنش صفحه‌ای، رابطه تنش-کرنش بر اساس تئوری CLPT برای هر لایه یک ماده‌ی کامپوزیتی به صورت رابطه (۴) است:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۴)$$

که در آن $\bar{Q}_{ij}(i,j=1,2,6)$ ضرایب سختی کاهش‌یافته‌ی انتقال‌یافته [۱] نامیده نامیده می‌شوند.

اگر در معادله‌ی (۳) عبارت اول، مؤلفه‌های ε^0 و در عبارت دوم ضریب z، مؤلفه‌های ε^1 در نظر گرفته شوند، با انتگرال‌گیری از تنش‌های معادله‌ی (۴) در جهت ضخامت می‌توان نیرو و ممان‌های منتجه را به صورت رابطه (۵) بدست آورد:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16}\\ A_{12} & A_{22} & A_{26}\\ A_{16} & A_{26} & A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ B_{12} & B_{22} & B_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{Bmatrix}\\ \begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ B_{12} & B_{22} & B_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{xy}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ D_{12} & D_{22} & D_{26}\\ D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{Bmatrix}\end{aligned} \qquad (۵)$$

مولفه‌های ماتریس‌های B,D,A که به ترتیب ماتریس سختی محوری، ماتریس سختی خمشی و ماتریس کوپلینگ سختی محوری –خمشی نامیده می‌شوند، به صورت رابطه (۶) به دست می‌آیند.

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1,z,z^2)\,dz = \sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1,z,z^2)\,dz \qquad (۶)$$

1. Transformed reduced stiffness coefficients

با توجه به اینکه در این تحقیق صفحات متعامد پادمتقارن مورد بررسی قرارگرفته‌اند، می‌توان با استفاده از معادله‌های (۳) تا (۶)، معادلات (۱) را به‌صورت رابطه (۷) تا (۹) نوشت.

$$\begin{aligned}&A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+A_{12}\\ &\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right)-B_{11}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)\\ &+A_{66}\left(\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\ +\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\end{gathered}\right)=0\end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned}&A_{22}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)\\ &+A_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right)\\ &-B_{22}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)+A_{66}\left(\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ +\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\ +\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{gathered}\right)=0\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned}&B_{11}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)\\ &+B_{22}\left(\begin{gathered}\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\\ +\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\end{gathered}\right)\\ &-D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-2(D_{12}+2D_{66})\times\\ &\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+N(w_0)=0\end{aligned} \qquad (۹)$$

لازم به ذکر است که در استخراج معادلات حاکم بر صفحات متعامد پادمتقارن از ترم‌های شامل $D_{26},D_{16},B_{66},B_{16},B_{26},B_{12},A_{26},A_{16}$ که برابر صفر هستند، صرف‌نظر شده است[۱۳].

۳- فرآیند حل معادلات حاکم

به‌منظور مدل‌سازی رفتار پس از کمانش، لازم است تا صفحه، تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای قرار بگیرد. با توجه به اینکه بارگذاری به صورت کرنش کوتاه‌شدگی در دو انتهای صفحه تعریف‌شده است، میدان‌های جابجایی را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۰) تعریف نمود:

$$\begin{aligned}u &= -\varepsilon x + U\\ v &= \alpha\varepsilon y + V\\ w &= W\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن U,V,W توابع چندجمله‌ای‌های دوگانه چبیشو، ε مقدار کرنش کوتاه شدگی انتهایی وارده و α یک مقدار ثابت است. علت وجود ترم $\alpha\varepsilon y$ این است که بتوان رفتار دقیق یک صفحه‌ی مسطح کمانش نکرده را تحت فشرده‌سازی یکنواخت دو انتهایش در مسیر تعادل بدیهی آن، نشان داد. به بیانی دیگر، ترم α نمادی برای اعمال اثر پوآسن در مسئله است. با توجه به این توضیحات، اگر در یک تحلیل نیاز باشد تا از حرکت جانبی ضلع‌های

کناری جلوگیری شود، مقدار α برابر صفر و در صورت آزاد بودن ضلع‌های کناری این مقدار برابر $\alpha = \nu$ برای صفحات ایزوتروپ و $\alpha = A_{12}/A_{22}$ برای صفحات کامپوزیتی در نظر گرفته می‌شود.

در مقاله‌ی حاضر میدان‌های جابجایی تعریف شده در معادلات (۱۰) با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو تخمین زده می‌شوند. سری چبیشو یکی از سری‌های قدرتمند ریاضیاتی است، که خواص آن در [۱۴] به صورت کامل شرح داده‌شده است. به منظور حل معادلات تعادل با شرایط مرزی انتخاب شده ابتدا این معادلات با استفاده از چندجمله‌ای‌های دوگانه چبیشو گسسته‌سازی می‌شوند. n امین جمله‌ی سری چبیشو طبق رابطه (۱۱) می‌باشد [۱۴].

$$T_n(x) = cos(n\, cos^{-1}(x)) \tag{۱۱}$$

به منظور دستیابی به جملات بالایی این چندجمله‌ای، می‌توان از یک رابطه‌ی بازگشتی نیز بهره برد. این رابطه‌ی بازگشتی به صورت نشان داده شده در معادله‌ی (۱۲) تعریف می‌شود[۱۴]:

$$T_1(x) = 1\ ;\ T_2(x) = x\ ; \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \tag{۱۲}$$

با توجه به معادله‌ی(۱۲)، تابع دلخواه $\phi(x,y)$ را می‌توان با $M+1$ جمله در راستای x و $N+1$ جمله در راستای y به صورت نشان داده شده در معادله‌ی (۱۳) تخمین زد[۱۴]:

$$\phi(x,y) = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\phi_{ij}T_i(x)T_j(y) \tag{۱۳}$$

که در آن δ_{ij} برابر است با :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4}\ if\ i\ and\ j = 0 \\ \frac{1}{2}\ if\ i\ or\ j = 0 \\ 1\quad otherwise \end{cases}$$

با توجه به وجود مشتقات درجات آزادی در معادلات حاکم بر یک صفحه کامپوزیتی، لازم است تا مشتق یک چندجمله‌ای چبیشو نیز تعریف شود. برای یک تابع دومتغیره $\phi(x,y)$، مشتق r ام نسبت به x و مشتق s ام نسبت به y به ترتیب رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود:

$$\phi(x,y)_{x^r y^s} = \sum_{i=0}^{M-r}\sum_{j=0}^{N-s}\delta_{ij}\left(\phi_{ij}\right)^{rs}T_i(x)T_j(y) \tag{۱۴}$$

که در آن $\left(\phi_{ij}\right)^{rs}$ ضرایب مشتق تابع $\phi(x,y)$ از درجه rs است. بین این ضرایب و ضرایب تابع اولیه می‌توان یک رابطه بازگشتی به‌صورت رابطه (۱۵) شکل داد:

$$\left(\phi_{(i-1)j}\right)^{rs} = \left(\phi_{(i+1)j}\right)^{rs} + 2i\left(\phi_{ij}\right)^{(r-1)s} \\ \left(\phi_{i(j-1)}\right)^{rs} = \left(\phi_{i(j+1)}\right)^{rs} + 2j\left(\phi_{ij}\right)^{r(s-1)} \tag{۱۵}$$

درصورتی‌که معادلات و شرایط مرزی با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو گسسته‌سازی شوند، یک دستگاه معادلات غیرخطی ایجاد می‌شود. در نتیجه ضرب متغیرها، ترم‌های غیرخطی در معادلات تعادل حاکم بر صفحه به وجود می‌آید. به منظور حل دستگاه معادلات غیرخطی از یک روند تکرار شونده استفاده شده است. برای خطی سازی ترم‌های غیرخطی ایجاد شده در معادلات، از تکنیک برونیابی درجه ۲[1] استفاده می‌شود[۱۲]. روند تکراری تا زمانی که حد خطای در نظر گرفته شده برای بردار ضرایب مجهول d_i ($\sqrt{\sum \Delta d_i^2/\sum d_{i+1}^2} < 5\times10^{-5}$) اقناع شود، ادامه پیدا می‌کند.

1. Quadratic extrapolation technique

اگر F_k یک ترم غیرخطی دلخواه در مرحله k ام تکرار باشد:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\left(\phi_{ij}\right)_k T_i(x)T_j(y) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\left(\phi_{ij}\right)T_i(x)T_j(y)\right)_k \\ &\times\left(\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\delta_{ij}\left(\phi_{ij}\right)T_i(x)T_j(y)\right)_k \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$\left(\emptyset_{ij}\right)_k$ در هر مرحله از پیشروی، با استفاده از تکنیک برونیابی درجه ۲ به صورت نشان داده شده در معادله‌ی (۱۷) جایگذاری می‌شود.

$$\left(\phi_{ij}\right)_k = t_1\left(\phi_{ij}\right)_{k-1} + t_2\left(\phi_{ij}\right)_{k-2} + t_3\left(\phi_{ij}\right)_{k-3} \tag{۱۷}$$

طبق معادله‌ی (۱۷) برای برونیابی در هر مرحله، از ترکیب سه پاسخ قبلی استفاده می‌شود. نسبت این ترکیب با استفاده از ضرایب t_1, t_2وt_3 در مرحله از تکرار به ترتیب زیر تعیین می‌گردد:

$$1,0,0(k=1);\ 2,-1,0(k=2);\ 3,-3,1(k\geq 3)$$

برای ضرب دو چندجمله‌ای چبیشو نیز از رابطه‌ی (۱۸) استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} T_i(x)T_j(y)T_k(x)T_l(y) &= \frac{1}{4}\left[T_{i+k}(x)T_{j+l}(y)\right. \\ &+ T_{i+k}(x)T_{j-l}(y) \\ &+ T_{i-k}(x)T_{j+l}(y) \\ &\left.+ T_{i-k}(x)T_{j-l}(y)\right] \end{aligned} \tag{۱۸}$$

با استفاده از معادلات (۱۵) تا (۱۸) می‌توان دستگاه غیرخطی گسسته‌سازی شده را به یک دستگاه خطی به شکل $Ax = b$ تبدیل کرد. باید توجه داشت که در این دستگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است، در این حالت دستگاه دارای پاسخ نیست. قبل از حل دستگاه معادلات و با هدف یافتن پاسخی سازگار با این دستگاه، لازم است تا تعدادی از معادلات که داده‌های اضافه ایجاد می‌کنند، حذف شوند این کار کمک می‌کند تا نسبت معادلات به مجهولات کوچک‌تر شود. هر یک از معادلات دستگاه فوق در حقیقت ضریب یک چندجمله‌ای درجه M,N از سری چبیشو هستند که با توجه به معادلات تعادل و شرایط مرزی تعداد متفاوتی از درجات آزادی w_{ij}, v_{ij}, u_{ij} آن را شکل داده‌اند. حال اگر فرض شود هر کدام از میدان‌های جابجایی W,V,U از $(M+1)\times(N+1)$ درجه آزادی تشکیل‌شده‌اند، با هر بار مشتق گرفتن از یک میدان جابجایی نسبت به x، $M+1$ تعداد از درجات آزادی آن حذف می‌شود. به‌طور مثال اگر یک معادله به صورت $F\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}, W\right)$ وجود داشته باشد، همانطور که مشخص است با توجه به این‌که از میدان‌های جابجایی U,V یکبار مشتق گرفته شده است، ضریب چندجمله‌ای از درجه M,N تنها شامل درجات آزادی w_{ij} است. با توجه به حذف درجات آزادی U,V از ضریب چند جمله‌ای درجه M,N، بدیهی است که این معادله نمی‌تواند به‌خوبی رفتار $F\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}, W\right)$ را نشان دهد و در مقابل معادلاتی که دارای درجات آزادی مختلفی از میدان‌های جابجایی W,V,U هستند، داده منحرف حساب می‌شود که می‌تواند پاسخ دستگاه را از پاسخ صحیح دور کند پس بهتر است که این معادله از دستگاه معادلات حذف شود. با توجه به توضیحات فوق، اگر در یک معادله، میدان‌های جابجایی دارای مشتقاتی از درجه r نسبت به x و s نسبت به y باشد برای تشکیل دستگاه معادلات تنها از جملاتی تا درجه $M-r\,,N-s$ استفاده می‌شود. با وجود توضیحات داده شده کماکان تعداد معادلات از تعداد

مجهولات بیشتر است. لذا، به منظور یافتن یک پاسخ سازگار با دستگاه از تکنیک حداقل مربعات [۱۵] استفاده می‌شود. در نهایت و برای یافتن پاسخی با دقت مناسب لازم است تا از یک تکنیک تکرار شونده استفاده گردد، به همین منظور در این مقاله از تکنیک نقطه ثابت[1] برای حل تکرارشونده استفاده شده است. همان‌طور که در معادلات (۵) نشان داده شده است، برای به دست آوردن نیرو و ممان‌های منتجه لازم است تا دو دسته کمیت تعیین شود. دسته‌ی اول کمیت‌های مربوط به ماده است که از اطلاعات صفحات کامپوزیتی به دست می‌آید. دومین دسته کمیت‌های موردنیاز کرنش در هر نقطه است. به‌منظور محاسبه‌ی کرنش‌ها در هر نقطه بر اساس معادله‌ی (۳) لازم است تا میدان‌های جابجایی تعیین گردند. با توجه به اینکه در این مقاله به‌طور مشخص ارتباط نیروی میانگین درون صفحه‌ای در راستای بارگذاری با کوتاه شدگی انتهایی مورد بحث است آن را به شکل انتگرال تنش به وجود آمده بر روی ضلع بارگذاری شده تعریف کرده و از معادله (۱۹) برای یافتن مقدار آن استفاده می‌شود:

$$N_{av} = \frac{\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} N_{xx}(x,y)\,dx\,dy}{2a} \qquad (۱۹)$$

۴- نتایج و تحلیل

در مقاله‌ی حاضر، حل معادلات غیرخطی تعادل تحت کرنش کوتاه‌شدگی انتهایی و شرایط مرزی ساده و گیردار در ضلع بارگذاری شده برای مواد کامپوزیتی متعامد پادمتقارن توسط چندجمله‌ای‌های چبیشو انجام شده است.

در ابتدا، به منظور بررسی صحت و دقت روش، همگرایی این شیوه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۲(الف) همگرایی نیروی محوری میانگین با افزایش تعداد جملات سری چبیشو را برای یک صفحه‌ی ایزوتروپ، با شرایط تکیه‌گاهی خارج صفحه‌ای ساده و درون صفحه‌ای آزاد، و مشخصات مکانیکی ضریب پوآسن $\nu =$ ۱/۳ و نسبت طول به ضخامت ۱۲۰ =2a/h نمایش می‌دهد. با توجه به این مثال می‌توان نشان داد که استفاده از ۱۱ ترم برای رسیدن به پاسخ دقیق مناسب است. برای اطمینان از روند همگرایی در صفحات کامپوزیتی نیز صفحه‌ای با شرایط مرزی مشابه و لایه‌چینی متعامد متقارن با مشخصات مکانیکی به ترتیب زیر:

$$E_L/E_T = 40\,; G_{LT}/E_T = 0.5\,;\ \nu_{LT} = 0.25$$

مورد بررسی قرار گرفته است. بر اساس شکل ۲(ب)، می‌توان دید تعداد ۱۳ ترم برای بررسی این صفحات بسیار مناسب است. بنابراین در ادامه و به منظور اطمینان از همگرایی کامل در تمام مثال‌ها از تعداد ۱۳ ترم برای دستیابی به پاسخ صحیح، استفاده شده است.

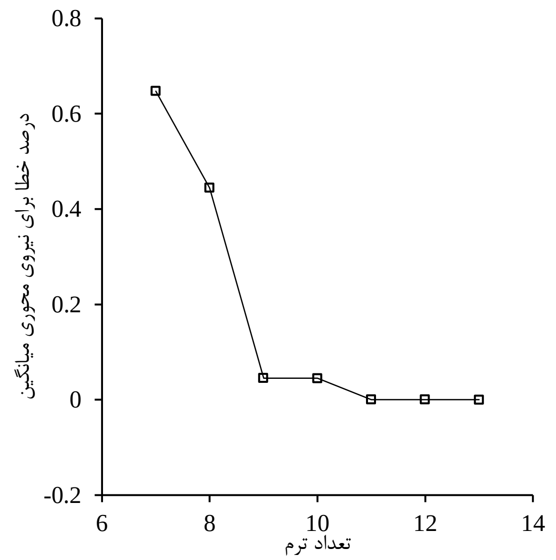
۴-۱- صفحات ایزوتروپیک

در اولین بررسی و به منظور صحت‌سنجی روش مورد استفاده یک صفحه‌ی ایزوتروپ مورد بررسی قرار می‌گیرد. ۵ ترکیب مختلف از شرایط مرزی مورد بررسی قرارگرفته‌اند که شرایط آن‌ها در جدول ۱ ذکر شده است و در ادامه نیز مدل ریاضی آن‌ها بیان می‌شود. پیش از بررسی مدل‌های ریاضی شرایط مرزی لازم به توضیح است که برای تعریف شرط مرزی مستقیم، چندجمله‌ای چبیشو V به دو بخش V_0و V_1 تقسیم شده است که V_0 شامل جملات مستقل از x و V_1 بقیه جملات را شامل می‌شود.

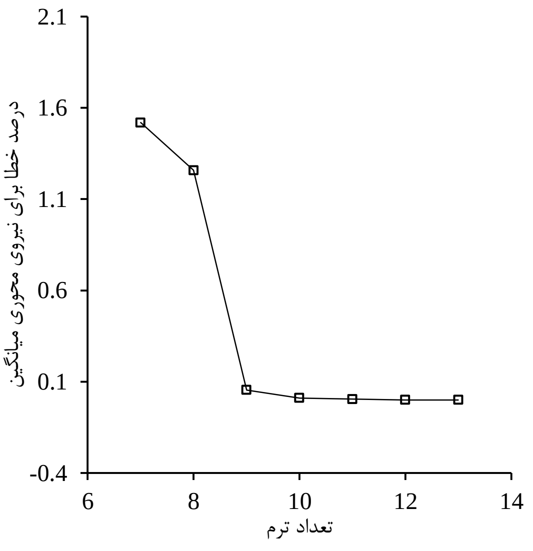
1. Fixed point technique

حالت ۱

$$x = -a\,, a;\ U = w = M_{xx} = N_{xy} = 0\,;$$
$$y = -b\,, b;\ w = M_{yy} = N_{xy} = V_1 = \int_{-a}^{a} N_{yy} = 0 \qquad (۲۰)$$



شکل ۲ (الف) همگرایی نیرو محوری میانگین با تعداد جملات سری چبیشو برای یک صفحه ایزوتروپ



شکل ۲ (ب) همگرایی نیروی محوری میانگین با تعداد جملات سری چبیشو برای یک صفحه کامپوزیتی

حالت ۲

$$x = -a\,, a;\ U = w = M_{xx} = N_{xy} = 0\,;$$
$$y = -b\,, b;\ w = M_{yy} = N_{xy} = N_{yy} = 0\,; \qquad (۲۱)$$

حالت ۳

$$x = -a\,, a;\ U = w = M_{xx} = N_{xy} = 0\,;$$
$$y = -b\,, b;\ w = \frac{\partial w}{\partial y} = N_{xy} = V_1 = \int_{-a}^{a} N_{yy} = 0 \qquad (۲۲)$$

حالت ۴

$$x = -a\,, a;\ U = w = M_{xx} = v = 0\,;$$
$$y = -b\,, b;\ w = M_{yy} = N_{xy} = N_{yy} = 0\,; \qquad (۲۳)$$

حالت ۵

$$x=-a\,,a;\ U=w=M_{xx}=v=0\,;$$
$$y=-b\,,b;\ w=M_{yy}=N_{xy}=v=0\,; \qquad (۲۴)$$

در معادلات شرایط مرزی (۲۰) تا (۲۴)، u,v,w نشان‌دهنده‌ی میدان‌های جابجایی هستند، U تابع چندجمله‌ای تخمین زده شده برای بخشی از میدان جابجایی u است و V_1 تابع چندجمله‌ای تخمین زده شده برای میدان جابجایی v است که ترم ثابت ابتدایی آن حذف شده است تا بتواند رفتار درون صفحه‌ای مستقیم را نمایش دهد.

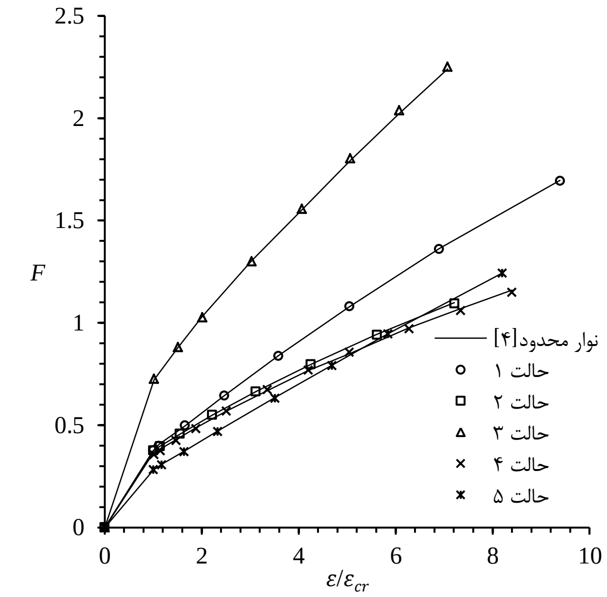
در رابطه با شرایط مرزی درون صفحه‌ای ذکر شده در جدول ۱ منظور از قید آزاد یعنی اینکه ضلع می تواند آزادانه حرکت کرده و شکلی دلخواه به خود بگیرد. منظور از قید مقید این است که ضلع در برابر هرگونه حرکتی مقاوم شده است و در آخر قید مستقیم دلالت بر حرکت باز و بسته‌ای بدون تغییر شکل دارد یعنی لبه کاملاً مستقیم مانده ولی اجازه باز و بسته شدن دارد.

جدول ۱ اطلاعات مربوط به شرایط تکیه‌گاهی

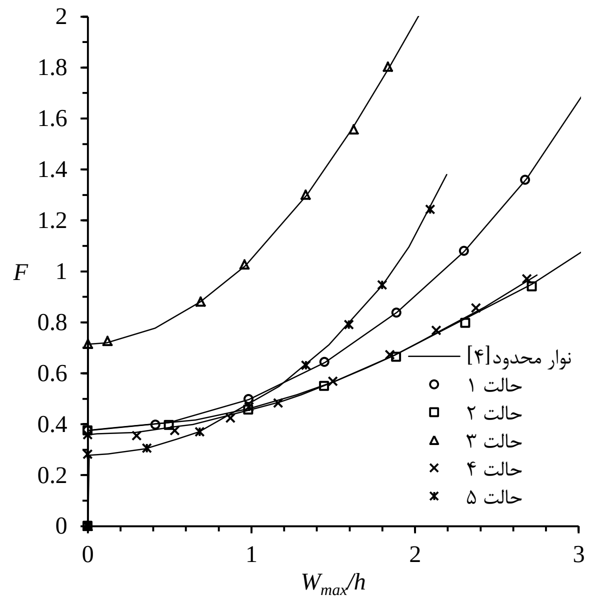
حالت	شرایط مرزی خارج صفحه‌ای		شرایط مرزی داخل صفحه‌ای	
	ضلع‌های بارگذاری نشده	ضلع‌های بارگذاری شده	ضلع‌های بارگذاری نشده	ضلع‌های بارگذاری شده
۱	ساده	ساده	مستقیم	آزاد
۲	ساده	ساده	آزاد	آزاد
۳	گیردار	ساده	مستقیم	آزاد
۴	ساده	ساده	آزاد	مقید
۵	ساده	ساده	مقید	مقید

ضریب پوآسن ماده برابر ν = ۱/۳ و نسبت طول به ضخامت آن ۱۲۰=2a/h در نظر گرفته‌شده‌است. در نمودارها بی‌بعد نیرو استفاده شده است که به‌صورت $F=N_{av}A/\pi^2Eh^3$ تعریف می‌شود و در آن E برابر مدول یانگ است.

نتایج به‌دست‌آمده برای پنج مورد مختلف در شکل ۳ به صورت بی‌بعد نیرو – کرنش کوتاه شدگی انتهایی و در شکل ۴ به‌صورت بی‌بعد نیرو - بیشترین خیز صفحه نشان داده شده است.



شکل ۳ منحنی بی‌بعد نیروی طولی - کوتاه شدگی انتهایی برای ۵ صفحه ایزوتروپ



شکل ۴ منحنی بی‌بعد نیروی طولی - خیز برای ۵ صفحه ایزوتروپ

کرنش انتهایی بی‌بعد به شکل $\varepsilon/\varepsilon_{cr}$ تعریف‌شده، که در آن ε_{cr} کرنش کوتاه‌شدگی در نقطه کمانش است. این مقدار برای حالت‌های ۱ تا ۵ به ترتیب برابر است با $^{-۳}$۱۰×(۰/۲۵۷۰، ۰/۲۵۷۰، ۰/۴۹۴۲، ۰/۲۳۷۵، ۰/۱۷۱۳). شکل‌های ۳ و ۴ تطابق بسیار خوبی با نتایج روش نوار محدود ارائه شده در [۴] را نشان می‌دهد.

۴-۲- صفحه‌ی کامپوزیتی متعامد پادمتقارن

در این بخش صفحات کامپوزیتی متعامد پادمتقارن مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این صفحات دارای خصوصیات مکانیکی به این شرح هستند:

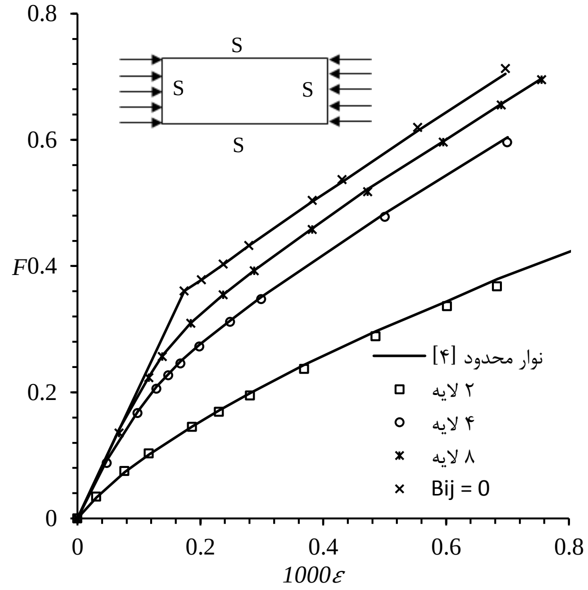
$$E_L/E_T=40\ ;\ G_{LT}/E_T=0.5\ ;\ \nu_{LT}=0.25$$

هر صفحه کامپوزیتی از تعداد متفاوتی لایه تشکیل شده‌است که برای هر صفحه ۱۰۰ =2a/h در نظر گرفته شده است. صفحات کامپوزیتی در تمامی اضلاع خود دارای تکیه‌گاه ساده هستند و در شرایط داخل صفحه‌ای تمام اضلاع می‌توانند آزادانه باز شوند، با توجه به این تعریف حالت تکیه‌گاهی شماره‌ی ۲ برای این صفحات، در نظر گرفته شده است.

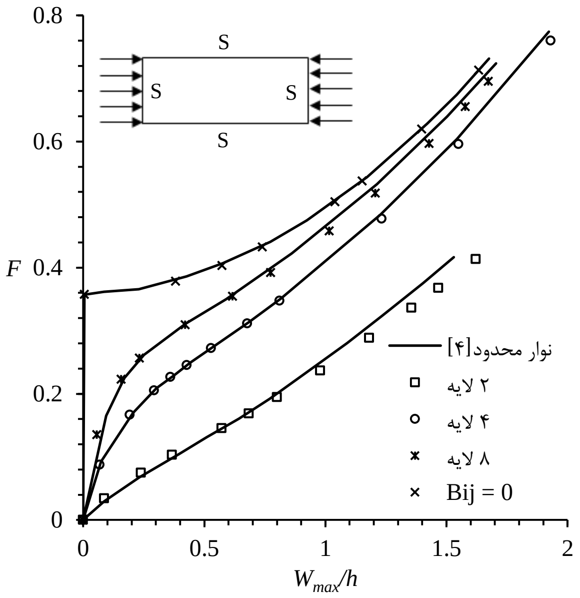
در ماتریس B که ماتریس کوپلینگ است تنها دو درایه‌ی B_{11},B_{22} دارای مقادیر غیر صفر هستند که مقدار آن‌ها $B_{11}=-B_{22}$ است. وجود این درایه‌های غیر صفر سبب می‌شود که در همان ابتدا با ایجاد نیروهای داخل صفحه‌ای به‌وسیله‌ی اعمال کوتاه‌شدگی انتهایی، رفتار خارج صفحه‌ای در کامپوزیت به وجود آید. با توجه به این موضوع و ایجاد خیز از ابتدای شروع بارگذاری، برای این صفحات نقاط کمانش وجود نخواهد داشت. البته باید توجه داشت با میل دادن تعداد لایه‌ها به سمت بی‌نهایت می‌توان نقطه‌ی کمانش را در رفتار صفحه مشاهده کرد.

همان‌طور که نشان داده شد وجود و یا عدم وجود درایه‌های B_{11},B_{22} که سبب کوپل کردن رفتار داخل و خارج صفحه‌ای می‌شوند در بررسی رفتار غیرخطی صفحه تأثیر به‌سزایی دارد. در صورت عدم وجود این ترم‌ها، صفحه دارای دو مسیر تعادل می‌باشد، یکی مسیر بدیهی که در آن صفحه دچار کمانش نشده و مسطح باقی می‌ماند و دیگری آن که صفحه دارای خیز غیر صفر خواهد بود. اما با به وجود آمدن این دو ترم نقطه کمانش از بین رفته و از ابتدا رفتار غیرخطی در صفحه قابل مشاهده است. شکل ۵ منحنی بی‌بعد

نیرو - کرنش انتهایی را نشان می‌دهد. شکل ۶ نیز منحنی بی‌بعد نیرو و خیز را نمایش می‌دهد.



شکل ۵ منحنی بی‌بعد نیرو-کرنش کوتاه‌شدگی برای صفحه متعامد پادمتقارن



شکل ۶ منحنی بی‌بعد نیرو-خیز برای صفحه متعامد پادمتقارن

در هر دو شکل ۵ و ۶ ضریب نیرو به صورت $F = 2N_{av}a/100E_2h^3$. در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از این بخش با نتایج حاصل شده در مرجع [۴] مورد مقایسه قرار گرفته است.

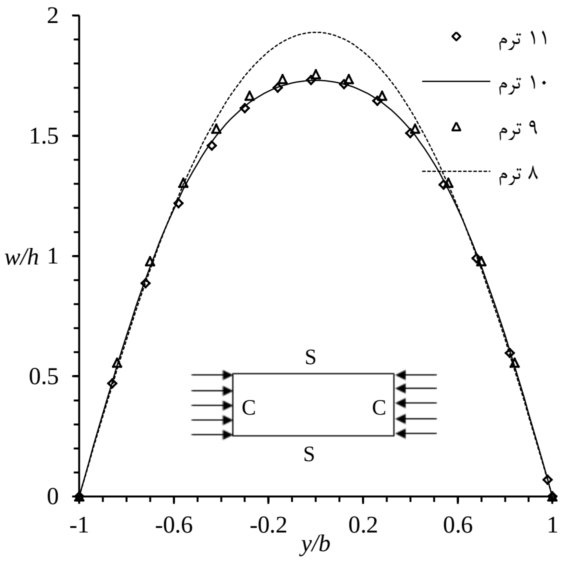
افزایش لایه‌های یک صفحه پاد متقارن سبب می‌شود تا رفتار آن به یک صفحه متقارن نزدیک شود که نمود آن در به سمت صفر میل کردن ماتریس B نمایان می‌شود. با توجه به توضیحات داده شده به منظور نشان دادن حالت بی‌نهایت لایه، مقدار ماتریس B برابر صفر قرار داده شده است.

۴-۳-صفحات کامپوزیتی متعامد با انتهای گیردار

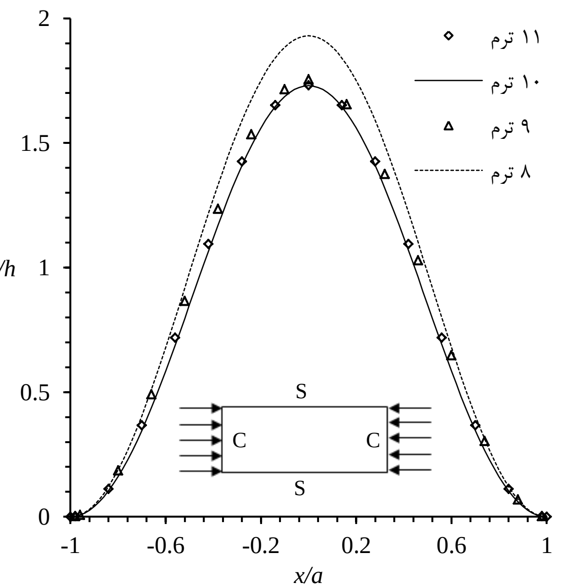
یکی از مهم‌ترین مزیت‌های روش معرفی شده در این مقاله امکان بررسی شرایط مرزی مختلف در لبه صفحات می‌باشد. برای نشان دادن این برتری نسبت به شیوه‌های دیگر معرفی شده مانند روش نوار محدود [۴] در این بخش یک صفحه‌ی مربعی کامپوزیتی متعامد پادمتقارن $[۰/۹۰]_۲$ با دو انتهای بارگذاری شده‌ی گیردار و ضلع‌های غیر بارگذاری شده‌ی ساده مورد بررسی قرار می‌گیرند. این مثال قابلیت روش حاضر را به لحاظ انتخاب شرایط مرزی گوناگون به نمایش می‌گذارد. نسبت طول به ضخامت این مواد ۱۰۰ بوده و مشخصات مکانیکی آن‌ها عبارت است از:

$$E_L/E_T = 14\,;\, G_{LT}/E_T = 0.5\,;\, \nu_{LT} = 0.3$$

در اشکال ۷ و ۸ تغییر شکل بی‌بعد خارج صفحه‌ای برای سازه‌ی مذکور در دو جهت عرضی و طولی در کرنش کوتاه‌شدگی ۰/۰۰۱ نشان داده شده است. همانگونه که قابل مشاهده است شرایط مرزی در لبه‌ها به خوبی اقناع شده است. تاثیر افزایش ترم در همگرایی خارج صفحه‌ای سازه، به خوبی در شکل‌های ۷ و ۸ قابل مشاهده است. در ارائه نتایج نیرو از شکل بی‌بعد به صورت آنچه در بخش قبل ارائه شده، استفاده شده است. همان‌طور که قابل مشاهده است شکل ۹ منحنی بی‌بعد نیرو-کرنش کوتاه‌شدگی و همچنین شکل ۱۰ منحنی بی‌بعد نیرو-خیز را نشان می‌دهد.

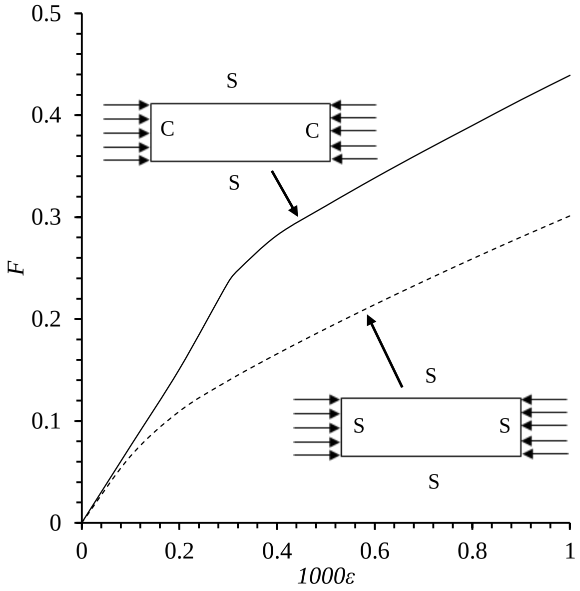


شکل ۷ تغییر شکل بی‌بعد خارج صفحه‌ای در جهت y در ε = ۰/۰۰۱

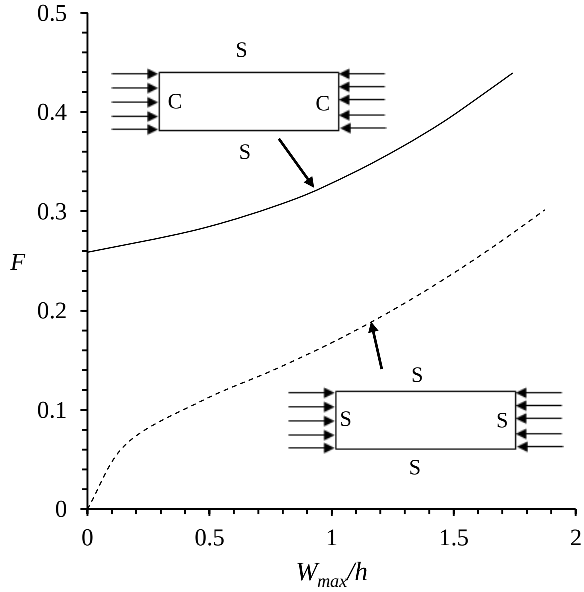


شکل ۸ تغییر شکل بی‌بعد خارج صفحه‌ای در جهت x در ε = ۰/۰۰۱

به‌منظور مقایسه، نتایج مربوط به صفحه کامپوزیتی متعامد پادمتقارن با ۴ لایه و شرایط مرزی چهار طرف ساده نیز در شکل‌های ۹ و ۱۰ آورده شده‌اند. شکل‌های ۹ و ۱۰ تفاوت قابل ملاحظه‌ای را در رفتار غیرخطی ۲ صفحه با لایه‌چینی یکسان و شرایط مرزی متفاوت، نشان می‌دهند. به‌گونه‌ای که صفحه‌ی دارای شرایط مرزی ساده در هر چهار ضلع، از ابتدا دارای جابجایی خارج صفحه است و نقطه‌ی کمانش در رفتار آن قابل مشاهده نیست (همانطور که در بخش ۴-۲ نیز به آن اشاره شد) ولی صفحه با شرایط مرزی گیردار در ضلع‌های بارگذاری شده، دارای نقطه‌ی دوشاخگی است و لذا کمانش در آن دیده می‌شود. دلیل ایجاد این پدیده، وجود ممان‌های معکوس در ۲ ضلع بارگذاری شده است که از جابجایی خارج صفحه‌ی آن جلوگیری می‌کند.



شکل ۹ منحنی بی‌بعد نیرو-کرنش کوتاه‌شدگی صفحه‌های متعامد پادمتقارن ۴ لایه



شکل ۱۰ منحنی بی‌بعد-نیرو-خیز صفحه‌های متعامد پادمتقارن ۴ لایه

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشو برای یافتن رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی تحت کوتاه‌شدگی انتهایی مورد مطالعه قرار گرفته است. این روش برای حل تعدادی از مسائل، شامل انواع مختلفی از صفحات ایزوتروپ و کامپوزیتی بکار گرفته شده است و برای هر صفحه شکل مختلفی از پاسخ‌ها قابل مشاهده است. در مقاله‌ی حاضر از تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده شده است که این موضوع برای صفحات بکار گرفته شده در این مقاله (صفحات بسیار نازک) معقول به نظر می‌رسد. نتایج حاکی از آن است که روش معرفی شده همخوانی بسیار خوبی با روش‌های مرسوم و متداول دارد و در انتخاب شرایط مرزی در لبه های صفحه از توانمندی بالایی برخوردار است.

۶- مراجع

[1] Turvey, G.J. and Marshall, I.H., “Buckling and Postbuckling of Composite Plates”, Springer Science & Business Media, 1995.

[2] Abolghasemi, S. Eipakchi, H.R. and Shariati, M., “Analytical Solution for Buckling of Rectangular Plates Subjected to Non-uniform In-plane Loading Based on First Order Shear Deformation Theory:, In persian, Modares Mechanical Engineering, Vol.14, No.13, pp.37-46, 2015.

[3] Ghannadpour, S.A.M. and Ovesy, H.R., "The Application of an Exact Finite Strip to the Buckling of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates and Prismatic Plate Structures", Composite Structures, Vol. 89, No. 1, pp. 151-158, 2009.

[4] Dawe, D.J. Lam, S.S.E. and Azizian, Z.G., "Non-linear Finite Strip Analysis of Rectangular Laminates Under End-sortening, Using Classical Plate Theory," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, No. 5, pp. 1087-1110, 1992

[5] Wang, S. and Dawe, D.J. "Spline FSM Postbuckling Analysis of Shear-Deformable Rectangular Laminates," Thin-walled Structures, Vol. 34, No. 2, pp. 163-178, 1999.

[6] Ghannadpour, S.A.M. and Ovesy, H.R., "An Exact Finite Strip for the Calculation of Relative Post-buckling Stiffness of I-section Struts," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, No. 9, pp. 1354-1364, 2008.

[7] Ghannadpour, S.A.M. Ovesy, H.R. and Nassirnia, M., "High Accuracy Postbuckling Analysis of Box Section Struts," ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 92, No. 8, pp. 668-680, 2012.

[8] Ghannadpour, S.A.M. and Ovesy, H.R., "High Accuracy Postbuckling Analysis of Channel Section Struts," International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 47, No. 9, pp. 968-974, 2012.

[9] Ovesy, H.R. Ghannadpour, S.A.M. and Morada, G., "Post-buckling Behavior of Composite Laminated Plates Under End Shortening and Pressure Loading, Using Two Versions of Finite Strip Method," Composite Structures, Vol. 75, No. 1, pp. 106-113, 2006.

[10] Nath, Y. and Alwar, R.S., "Application of Chebyshev Polynomials to the Nonlinear Analysis of Circular Plates," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 18, No. 11, pp. 589-595, 1976.

[11] Nath, Y. and Kumar, S., "Chebyshev Series Solution to Non-linear Boundary Value Problems in Rectangular Domain," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 125, No. 1, pp. 41-52, 1995.

[12] Shukla, K.K, and Nath, Y., "Nonlinear Analysis of Moderately Thick Laminated Rectangular Plates," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 126, No. 8, pp. 831-838, 2000.

[13] Reddy, J.N., "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis", CRC Press, 2003.

[14] Mason, J.C., and Handscomb, D.C., "Chebyshev polynomials", New york: CHAPMAN & HALL/CRC, 2003.

[15] Strang, G., "Introduction to Linear Algebra", Wellesley-Cambridge Press, 2009.