جلد ۲، شماره ۱، خرداد ۹٤، ص‌ص ٥۳- ٦٤

نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری **کامپوزیت**

http://jstc.iust.ac.ir

بررسی رفتار غیرخطی پوسته‌های چندلایه نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری جانبی

امیر شربتدار[1]، جمشید فضیلتی[2*]

۱- کارشناس ارشد، مهندسی فضایی، پژوهشگاه هوافضا، تهران

۲- استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۴۶۵۷۷۴۱۱۱، jfazilati@ari.ac.ir

اطلاعات مقاله

دریافت: آبان ۹۳

پذیرش: اردیبهشت ۹۴

کلیدواژگان:

تحلیل غیرخطی هندسی

پوسته نسبتا ضخیم

تغییرشکل‌های بزرگ

المان دوخطی

روش طول کمان

ماده مرکب چندلایه

چکیده

در مقاله حاضر رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های استوانه‌ای و کروی ساخته شده از مواد مرکب چندلایه تحت بارگذاری جانبی با استفاده از روش اجزای محدود مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. به‌دلیل وجود تغییر شکل‌های بزرگ، مسئله با حضور عبارت‌های کرنش غیرخطی در نظر گرفته شده است. خواص مواد چندلایه به‌صورت الاستیک خطی و غیر ایزوتروپ فرض شده است. روابط سازگاری در المان بر اساس فرمول‌بندی پوسته‌های کم‌عمق و بر اساس تئوری مرتبه اول برش عرضی توسعه داده شده است. برای تحلیل پوسته‌ها المان دوخطی (۴ گره‌ای) با هزینه‌ی محاسباتی پایین معرفی شده و کلیه‌ی محاسبات المانی در دستگاه مختصات طبیعی المانی انجام گرفته است. شعاع انحنای هندسه مستقیماً در فرمولاسیون المانی قرار گرفته و اثرات انحنا در دو راستا در محاسبات مربوط به هر المان وارد می‌شود. با توجه به این‌که رفتار نوعی پوسته‌های دارای انحنا با تغییرشکل‌های بزرگ تحت بارگذاری جانبی نیاز به تحلیلی فراتر از نقطه‌ی حدی دارد، الگوریتم طول کمان توسعه داده شده است تا این مسئله و پدیده تبدیل مود قابل پیش‌بینی باشد. کد عددی تهیه شده در زبان برنامه‌نویسی متلب توانایی تحلیل هر نوع پوسته با هندسه فضایی را داراست. پس از صحت‌سنجی، تحلیل حساسیت رفتار غیرخطی پوسته‌های انحنادار نسبت به تغییر در آرایش لایه‌چینی و شرایط مرزی انجام گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که المان توسعه داده شده با وجود درجات آزادی و هزینه محاسباتی کم، دقت مناسبی را ارائه می‌کند.

Geometrically nonlinear analysis of moderately thick curved composite panels under lateral load

Amir Sharbatdar, Jamshid Fazilati*

Aerospace Research Institute (ARI), Tehran, Iran

* P.O.B. 1465774111 Tehran, Iran, jfazilati@ari.ac.ir

Keywords

Geometrically nonlinear analysis

Moderately thick shell

Large deformation

Bilinear element

Arc length method

Laminated composite material

Abstract

In the present paper the geometrically nonlinear analysis of single and doubly curved shells is investigated using finite element method. The finite element formulation includes the nonlinear strain terms in order to take the large deformation effects in to account. The material behavior is assumed to be orthotropic linear elastic. The problem is formulated based on the shallow doubly curved shell theory using first order shear deformation theory of shells. A precise high performance 4-noded bilinear doubly curved element is presented. All FEM calculations carried out in the elemental natural coordinate system. The developed special element have the curvature effects along two main in-plane directions inside its formulation. The full equilibrium path of the geometrically nonlinear problem of shells has been extracted using the arc-length algorithm. Using arc-length algorithm, the method can follow the panel equilibrium path beyond the possible limit points and also is able to anticipate the snap-through phenomena. A MATLAB program code is developed. Some case studies are considered and the results are compared to available ones in the literature. The results show that in spite of its relatively low degrees of freedom, the developed formulation is capable to predict the equilibrium path of thin to moderately thick curved panels precisely.

۱- مقدمه

پوسته‌های انحنادار جدارنازک با توجه به شکل هندسی و نسبت مقاومت به وزن مناسب، کاربرد فراوانی در صنعت هوایی، فضایی و دریایی دارند. نیاز به دست‌یابی به بیشترین حجم محصور همراه با کمترین میزان جرم و در عین حال کاهش بارهای ایرودینامیکی (نیروی پسا) از دلایل مهم گستردگی استفاده از این دست سازه‌ها به شمار می‌رود. پنل‌های ساخته شده با

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Sharbatdar, A. and Fazilati, J "Geometrically nonlinear analysis of moderately thick curved composite panels under lateral load" Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 2, No. 1, pp. 53-64, 2015.

هندسه‌های انحنادار اعم از یک‌انحنا (دارای انحنای غیر صفر حول یک راستا مانند هندسه استوانه‌ای) و دوانحنا (دارای دو انحنای غیر صفر حول دو محور متعامد مانند هندسه کروی) با توجه به قرارگیری در شرایط بارگذاری جانبی و جدارنازک بودن، در معرض شرایط جابه‌جایی‌های عرضی هم‌مرتبه و بیش‌تر از میزان ضخامت هستند. این شرایط در تئوری، در زمره مسایل تغییرشکل‌های بزرگ قرار می گیرد که در آن اثر تنش‌های غشایی در تغییرشکل حایز اهمیت شده و ترم‌های کرنش مرتبه بالاتر در معادلات رفتاری سازه ظاهر می‌شود.

داو و ونگ در سال ۱۹۹۸ [۱] پس‌کمانش صفحات مستطیلی ساخته شده از مواد مرکب را به کمک روش نوار محدود انجام دادند. برای تحلیل صفحه از تئوری کلاسیک بهره گرفتند. آن‌ها صحت سنجی فعالیت خود را برای صفحات با گیر ساده و لایه‌چینی های مختلف مورد ارزیابی قرار دادند. هوساین و همکاران در سال ۲۰۰۴ [۲] حل خطی پوسته‌های ساخته‌شده از مواد مرکب را با بکارگیری روش اجزای محدود انجام دادند. پوسته‌هایی که در نظر گرفتند از نوع دو انحنایی و جدار ضخیم بود. برای فرمول‌بندی اجزای محدود از تئوری مرتبه اول برشی استفاده کردند. برای جلوگیری از پدیده‌ی قفل‌شدگی برشی از روش فرمول‌بندی آمیخته بهره گرفتند. کندو و سینها در سال ۲۰۰۷ [۳] پس‌کمانش پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب را مورد ارزیابی قرار داده‌اند. المان مورد استفاده‌ی آن‌ها المان ۹ گره‌ای با ۵ درجه‌ی آزادی در هر گره بوده است. نتایج این تحقیق برای سه مدل پوسته‌ی استوانه‌ای، کروی و مخروطی ارائه شده است. اوجدا و همکاران در سال ۲۰۰۷ [۴] مساله‌ی تغییرشکل بزرگ صفحات ایزوتروپیک و ساخته شده از مواد مرکب را همراه با سفت کننده به کمک روش اجزای محدود بررسی کردند. برای تحلیل صفحه از المان ۸ گره‌ای استفاده کردند. همچنین به منظور دنبال کردن مسیر تعادلی صفحات، روش نیوتن-رافسون را بکار بردند. ردی و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۵] تحلیل اجزای محدود صفحات و پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب را انجام دادند. آن‌ها در فرمول‌بندی اجزای محدود خود از روش حداقل مربعات بهره گرفتند. از ویژگی‌های مهم این روش کاهش خطای موجود در ساده‌سازی معادلات حاکم است. همچنین المان مورد استفاده‌ی آن‌ها المان دیجنریتد بود. ستکوویچ و وکسانویچ در سال ۲۰۱۱ [۶] حل غیرخطی هندسی صفحات ساخته شده از مواد مرکب را انجام دادند. صفحات مورد نظر آن‌ها دارای هندسه‌ای مستطیلی با شرایط مرزی متفاوت بود. همچنین آن‌ها انواع مختلف جنس ماده از جمله ایزوتروپیک، اورتوتروپیک و انیزوتروپیک را با لایه-چینی‌های متفاوت مورد ارزیابی قرار دادند. چوندهاری و تونگیکار [۷] در سال ۲۰۱۱ تحلیل صفحات ساخته شده از مواد مرکب را به کمک روش اجزای محدود برای لایه‌چینی و شرایط مرزی مختلف انجام دادند. آن‌ها در فعالیت خود از میدان جابه‌جایی مرتبه‌ی بالاتر استفاده کردند. المان مورد نظر آن‌ها المان مستطیلی ۴ گره‌ای با ۱۳ درجه‌ی آزادی در هر گره بود. کاکانی و پراسانتی در سال ۲۰۱۲ [۸] تحلیل غیرخطی صفحه‌ی مورب جدار نازک از جنس مواد مرکب که سوراخی با مقطع دایروی در روی آن وجود دارد را بررسی کردند. صفحه‌ی در نظر گرفته‌شده صفحه‌ای جدار نازک با ۵ لایه بود. لایه‌چینی این صفحه لایه‌چینی متقارن متعامد به صورت [۰/۹۰/۰/۹۰/۰] در نظر گرفته شده است. بارگذاری وارد بر صفحه از نوع جانبی و به شکل گسترده است. همچنین آن‌ها برای تحلیل رفتار صفحه از تئوری کلاسیک به کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس استفاده کردند.

در مقاله حاضر، فرمولاسیون اجزای محدود جهت تحلیل رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های دوانحنا توسعه داده شده است. فرمولاسیون قادر است رفتار هندسه‌های دارای یک انحنا (پوسته‌های استوانه‌ای) و پوسته‌های دارای دو انحنا (مانند پوسته‌های کروی، مخروطی و فضایی) را در معرض بارگذاری جانبی شبیه‌سازی نموده، مسیر تعادلی سازه را استخراج نماید. در این تحلیل از المان چهارگره‌ای دوخطی استفاده شده است و فرمول‌بندی مساله بر مبنای روش لاگرانژ کامل و روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی پوسته کم‌عمق انجام گرفته است. مشخصه این المان کم بودن درجات آزادی و هزینه محاسباتی آن می‌باشد. فرمولاسیون بر مبنای فرضیات مرتبه اول برش عرضی بسط داده شده است تا امکان تحلیل هندسه نسبتاً ضخیم نیز فراهم شود. خواص ماده به صورت الاستیک خطی و غیرایزوتروپ (ارتوتروپ) در نظر گرفته شده است. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی روش طول‌کمان پیاده‌سازی شده است تا شرایط رفتاری گذر از نقاط حدی و برگشت در نمودار مسیر تعادلی سازه قابل پیش‌بینی باشد. کد عددی در نرم‌افزار متلب تهیه شده و با استفاده از آن نمونه‌های مختلف پوسته تحلیل و با نتایج موجود در مراجع مورد مقایسه قرار گرفته است.

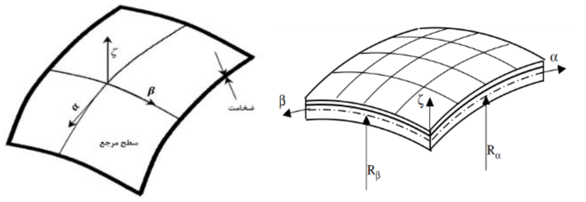
برخلاف سایر روش‌ها و نرم‌افزارهای تجاری محاسبات در کد توسعه داده شده در مختصات طبیعی انجام می‌شود. درنتیجه در انجام محاسبات نیاز به تبدیل دستگاه مختصات وجود نداشته و میزان محاسبات کاهش داده شده است. علاوه بر این در فرمولاسیون توسعه داده شده، انحنای موجود در هندسه مستقیماً در فرمولاسیون المانی اجزای محدود قرار گرفته و در محاسبات مربوط به هر المان حضور دارد. همچنین فرمولاسیون المانی بسیار ساده‌ای با المان دوخطی (۴ گرهی) با هزینه‌ی محاسباتی بسیار پایین برای به‌دست آوردن روابط اجزای محدود استفاده شده است که نتایج نشان می‌دهد روابط ارائه شده دارای دقت مناسب در پیش بینی رفتار غیرخطی و پیچیده نمونه است.

۲- فرمول‌بندی مساله و روابط حاکم

در این بخش روابط کلی کرنش-جابه‌جایی غیرخطی در دستگاه مختصات متعامد فضایی استخراج می‌شود. ابتدا روابط برای پوسته‌ی سه‌بعدی در نظر گرفته شده سپس با استفاده از فرضیات لاو الاستیسیته پوسته‌ی سه‌بعدی به الاستیسیته دوبعدی تبدیل می‌شود. معادلات مربوط به پوسته در حالت عمومی (پوسته با دو شعاع گوسی متغییر) استخراج می‌شود که برای حالت‌های خاص از جمله پوسته‌ی استوانه‌ای و صفحه‌ی تخت نیز معتبر می‌باشد. برای تحلیل پوسته از روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی با احتساب حضور ترم‌های غیرخطی استفاده می‌شود.

دستگاه مختصات برای المان پوسته‌ای دارای دو انحنا در دو راستای متعامد در شکل ۱ ارائه شده است.

سطح مرجع پوسته با دو پارامتر لام[۱] A_1 و A_2 و دو شعاع انحنا R_1 و R_2 توصیف می‌شود. برای وجود سطحی معتبر لازم است دو معادله‌ی (۱) و (۲) که مشهور به شرایط گوس-کودازی هستند، برقرار باشد[۳].



شکل ۱ پوسته و مختصات مرجع آن روی سطح میانی المان

1. Lame

$$\frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A_1}{R_1}\right)\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{A_2}{R_2}\right) \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \beta}\right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \qquad (۲)$$

روابط کرنش-جابه‌جایی خطی و غیرخطی برای هر جسم الاستیک سه‌بعدی در دستگاه مختصات متعامد عبارت است از (رابطه (۳)) [۹]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= e_{11} + \tfrac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{21}^2 + e_{31}^2)\\
\varepsilon_{22} &= e_{22} + \tfrac{1}{2}(e_{22}^2 + e_{12}^2 + e_{32}^2)\\
\varepsilon_{33} &= e_{33} + \tfrac{1}{2}(e_{33}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2)\\
\gamma_{12} &= \gamma_{21} = e_{12} + e_{21} + e_{11}e_{12} + e_{22}e_{21} + e_{31}e_{32}\\
\gamma_{13} &= \gamma_{31} = e_{13} + e_{31} + e_{11}e_{13} + e_{33}e_{31} + e_{21}e_{23}\\
\gamma_{12} &= \gamma_{21} = e_{12} + e_{21} + e_{11}e_{12} + e_{22}e_{21} + e_{31}e_{32}
\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن رابطه (۴) برقرار است.

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} + \frac{U_2}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{W}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \zeta}\\
e_{22} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial U_2}{\partial \beta} + \frac{U_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{W}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \zeta}\\
e_{33} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + \frac{U_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \beta} + \frac{U_1}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha}\\
e_{21} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha} - \frac{U_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta}\\
e_{12} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial U_1}{\partial \beta} - \frac{U_2}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha}\\
e_{13} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial U_1}{\partial \zeta} - \frac{W}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha}\\
e_{31} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{U_1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \zeta}\\
e_{32} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{U_2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \zeta}\\
e_{23} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial U_2}{\partial \zeta} - \frac{W}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \beta}
\end{aligned} \qquad (۴)$$

در این روابط U_1، U_2 و W جابه‌جایی در سه راستای منحنی‌الخط و H_1، H_2 و H_3 به ترتیب ضرایب لام جسم الاستیک در امتداد محورهای α، β و ζ می‌باشند. برای پوسته‌ی جدارنازک ضرایب لام طبق رابطه (۵) می‌باشند.

$$H_1 = A_1(1 + \frac{\zeta}{R_1})\ , H_2 = A_2(1 + \frac{\zeta}{R_2})\ , H_3 = 1 \qquad (۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۴) و استفاده از شرایط گوس-کودازی روابط (۱) و (۲)، رابطه (۶) به‌دست می‌آید.[۹].

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} + \frac{U_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \beta} + \frac{W}{R_1}\right)\\
e_{22} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \beta} + \frac{U_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{W}{R_2}\right)\\
e_{21} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha} - \frac{U_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \beta}\right)\\
e_{12} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_1}{\partial \beta} - \frac{U_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha}\right)\\
e_{31} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{U_1}{R_1}\right)\\
e_{32} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{U_2}{R_2}\right)\\
e_{33} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta}\ ,\ e_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}\ ,\ e_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial \zeta}
\end{aligned} \qquad (۶)$$

مطابق فرضیات تئوری مرتبه اول برش عرضی، در پوسته نسبتا ضخیم میدان جابه‌جایی به صورت رابطه (۷) است.

$$\begin{aligned}
U_1(\alpha,\beta,\zeta) &= u_1(\alpha,\beta) + \zeta\psi_1\\
U_2(\alpha,\beta,\zeta) &= u_2(\alpha,\beta) + \zeta\psi_2\\
W(\alpha,\beta,\zeta) &= w(\alpha,\beta)
\end{aligned} \qquad (۷)$$

از جایگذاری روابط (۷) در (۶) رابطه (۸) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&e_{11} = \varepsilon_1^0 + \zeta\kappa_1 \quad e_{22} = \varepsilon_2^0 + \zeta\kappa_2 \quad e_{33} = 0\\
&e_{21} = \varepsilon_3^0 + \zeta\kappa_3 \quad e_{12} = \varepsilon_4^0 + \zeta\kappa_4 \quad e_{13} = \psi_1\\
&e_{31} = \varepsilon_5^0 + \zeta\kappa_5 \quad e_{32} = \varepsilon_6^0 + \zeta\kappa_6 \quad e_{23} = \psi_2
\end{aligned} \qquad (۸)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۸) در (۳) و صرف‌نظر از ترم‌های مرتبه‌ی بالا شامل ζ^2 و ترم‌هایی که از حاصل‌ضرب کرنش‌ها در انحناها پدید می‌آیند، روابط کلی کرنش-جابه‌جایی برای المانی مانند شکل ۱ در هر نقطه‌ی دلخواه از پوسته را می‌توان به شکل رابطه (۹) نوشت[۹].

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_1^0 + \tfrac{1}{2}\left[(\varepsilon_1^0)^2 + (\varepsilon_3^0)^2 + (\varepsilon_5^0)^2\right] + \zeta\kappa_1\\
\varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_2^0 + \tfrac{1}{2}\left[(\varepsilon_2^0)^2 + (\varepsilon_4^0)^2 + (\varepsilon_6^0)^2\right] + \zeta\kappa_2\\
\gamma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_3^0 + \varepsilon_4^0 + \left[\varepsilon_1^0\varepsilon_4^0 + \varepsilon_2^0\varepsilon_3^0 + \varepsilon_5^0\varepsilon_6^0\right] + \zeta(\kappa_3 + \kappa_4)\\
\gamma_{\alpha\zeta} &= \varepsilon_5^0 + \psi_1\\
\gamma_{\beta\zeta} &= \varepsilon_6^0 + \psi_2
\end{aligned} \qquad (۹)$$

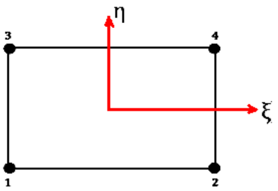
در روابط فوق ε_1^0، ε_2^0، ε_3^0 ، ε_4^0، ε_5^0، ε_6^0 کرنش‌های صفحه‌ی میانی و κ_1، κ_2، κ_3، κ_4 انحناها هستند و از روابط (۱۰) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^0 &= \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha}\\
\varepsilon_2^0 &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta}\\
\varepsilon_3^0 &= \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} \qquad \varepsilon_5^0 = \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha}\\
\varepsilon_4^0 &= \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \qquad \varepsilon_6^0 = \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta}\\
\kappa_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta} \qquad \kappa_3 = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} - \frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\\
\kappa_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} + \frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \qquad \kappa_4 = \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} - \frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

معادلات (۹) به همراه معادلات (۱۰) روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی برای پوسته دارای دو انحنا هستند. به کمک معادلات (۹) و ساده‌سازی ترم‌های غیرخطی آن، معادلات کرنش-جابه‌جایی غیرخطی برای پوسته‌ی دو انحنایی را می‌توان به صورت روابط (۱۱) در دستگاه مختصات المانی منحنی‌الخط ارائه نمود [۳، ۹].

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 + \zeta\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}\\
\varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2 + \zeta\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta}\\
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \zeta\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}\right)\\
\gamma_{\alpha\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha} + \psi_1\\
\gamma_{\beta\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta} + \psi_2
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

برای به دست آوردن روابط اجزای محدود غیرخطی المان چهارگره‌ای دوخطی با مشخصات نمایش‌داده شده در شکل ۲ در نظر گرفته شده است.



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

شکل ۲ هندسه و توابع شکل المان چهارگرهی دوخطی

با توجه به روند موجود در این فعالیت، ماتریس‌های سختی تانژانت و سکانت در این المان محاسبه می‌شود.

المان مورد استفاده شکل ۲ به شکل چهارضلعی با چهار گره راسی است که در هر گره دارای ۵ درجه آزادی (سه درجه آزادی انتقالی و دو درجه آزادی چرخشی) مطابق با فرضیات مرتبه اول برش عرضی است.

از معادله‌ی (۱۱) کرنش غیرخطی به صورت ماتریسی رابطه (۱۲) قابل بیان است.

$$\varepsilon_{nl}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2\\ \left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\\ 2\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial\alpha} & 0\\ 0 & \frac{\partial w}{\partial\beta}\\ \frac{\partial w}{\partial\beta} & \frac{\partial w}{\partial\alpha}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial w}{\partial\beta}\end{Bmatrix} \tag{۱۲}$$

رابطه‌ی (۱۲) به شکل مختصر رابطه (۱۳) قابل بازنویسی است:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{nl}=\frac{1}{2}[A][\theta]=\frac{1}{2}[A][G]\ \delta\\ [\theta]=[G]\ \delta\end{gathered} \tag{۱۳}$$

ماتریس کرنش جابه‌جایی غیرخطی به‌صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{nl}=\tfrac{1}{2}[B_{nl}]\{\delta\}\\ [B_{nl}]=[A][G]\end{gathered} \tag{۱۴}$$

در رابطه‌ی (۱۳) و (۱۴) ماتریس‌های $[A]$ و $[G]$ و بردار درجات آزادی $\{\delta\}$ به شکل رابطه (۱۵) تعریف شده است.

$$\begin{gathered}[A]=\begin{bmatrix}\frac{\partial w}{\partial\alpha} & 0\\ 0 & \frac{\partial w}{\partial\beta}\\ \frac{\partial w}{\partial\beta} & \frac{\partial w}{\partial\alpha}\end{bmatrix},\ [G]=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial\alpha} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial\beta} & 0 & 0\end{bmatrix}_{i=1,2,3,4}\\ \delta = u^0\quad v^0\quad w^0\quad \psi_1^{\,0}\quad \psi_2^{\,0}\ ^T\end{gathered} \tag{۱۵}$$

ماتریس ضرایب $[A]$ شامل مشتقات جابه‌جایی نسبت به دستگاه مختصات منحنی‌الخط است که وابسته به بردار جابه‌جایی و تغییر شکل سازه در گام بارگذاری کنونی است. ماتریس $[G]$ مشتق توابع شکل در هر گره می‌باشد. $\{\delta\}$ نیز بردار درجات آزادی هر گره است. ماتریس کرنش-جابه‌جایی در حالت کلی ترکیبی از ماتریس‌های کرنش-جابه‌جایی خطی و غیرخطی درنظرگرفته می‌شود (رابطه (۱۶)).

$$[B]=[B_l]+[B_{nl}] \tag{۱۶}$$

$[B_l]$ از جداسازی ترم‌های خطی موجود در معادله‌ی (۱۱) به‌صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود.

$$\begin{gathered}[B_l]=\left\langle B_m,B_b,B_s\right\rangle^T \qquad [B_m]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N}{\partial\alpha} & 0 & \frac{N}{R_\alpha} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N}{\partial\beta} & \frac{N}{R_\beta} & 0 & 0\\ \frac{\partial N}{\partial\beta} & \frac{\partial N}{\partial\alpha} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ [B_s]=\begin{bmatrix}\frac{-N}{R_\alpha} & 0 & \frac{\partial N}{\partial\alpha} & N & 0\\ 0 & \frac{-N}{R_\beta} & \frac{\partial N}{\partial\beta} & 0 & N\end{bmatrix} \qquad [B_b]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial\beta}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial\beta} & \frac{\partial N}{\partial\alpha}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{۱۷}$$

در معادله‌ی فوق B_m، B_b و B_s به ترتیب ماتریس‌های کرنش-جابه‌جایی مربوط به ترم‌های غشایی، خمشی و برشی هستند.

معادله تعادل برای جسمی تحت تغییر شکل به‌صورت رابطه (۱۸) قابل بیان است، [۱۰]:

$$\phi = F - f_e = \int [B]^T\ \sigma\ dv - f_e \tag{۱۸}$$

در این رابطه $\{\phi\}$ تفاضل بردارهای نیروی داخلی $\{F\}$ و نیروی خارجی $\{f_e\}$ می‌باشد و $[B]$ ماتریس ضرایب در روابط کرنش-جابه‌جایی است. ماتریس $[B]$ شامل هر دو ترم کرنش خطی و غیرخطی است.

با استفاده از حساب تغییرات رابطه نیروی باقی‌مانده به صورت رابطه (۱۹) تا (۲۲) قابل ارائه است.

$$d\ \phi = \int d[B]^T\ \sigma\ dv + \int [B]^T d\ \sigma\ dv \tag{۱۹}$$

$$\sigma = [D]\ \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} = [D]\ B_l + \tfrac{1}{2}B_{nl}\quad \delta \tag{۲۰}$$

$$d\ \sigma = [D] d\ \varepsilon = [D]\ B_l + B_{nl} = [D][B] \tag{۲۱}$$

$$d[B] = d\ [B_l] + [B_{nl}] = d[B_{nl}] \tag{۲۲}$$

از جایگذاری رابطه‌ی (۲۱) در ترم دوم سمت راست معادله‌ی (۱۹) رابطه (۲۳) به‌دست می‌آید.

$$\int [B]^T d\ \sigma\ dv = \int [B]^T [D][B]\ \delta\ dv \tag{۲۳}$$

ماتریس $[D]$ موجود در روابط فوق، ماتریس صلبیت ماده است و در رابطه رابطه (۲۴) ارائه شده است.

$$\begin{gathered}[D]=\begin{bmatrix}D_m & D_{mb} & 0_{3\times2}\\ D_{mb} & D_b & 0_{3\times2}\\ 0_{2\times3} & 0_{2\times3} & D_s\end{bmatrix}\\ D_m=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16}\\ A_{12} & A_{22} & A_{26}\\ A_{16} & A_{26} & A_{66}\end{bmatrix},\ D_{mb}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ B_{12} & B_{22} & B_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66}\end{bmatrix}\\ D_b=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ D_{12} & D_{22} & D_{26}\\ D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix},\ D_s=\begin{bmatrix}A_{44} & A_{45}\\ A_{45} & A_{55}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{۲۴}$$

۲-۱- ماتریس سختی تانژانت

با جایگذاری روابط اخیر در رابطه (۱۹)، ماتریس سختی تانژانت المانی به‌صورت رابطه (۲۵) قابل ارائه است.

$$\begin{gathered}d\ \phi = [K_T] d\ \delta\\ [K_T] = \int\ K_{LL}+K_{LNL}+K_{NLL}+K_{NLNL}\ \ dA\end{gathered} \tag{۲۵}$$

که در آن رابطه (۲۶) برقرار است.

$$\begin{aligned}K_{LL} &= K_m + K_b + K_s\\ K_{LNL} &= B_m^T D_m B_{nl} + B_b^T D_{mb} B_{nl}\\ K_{NLL} &= B_{nl}^T D_m B_m + B_{nl}^T D_{mb} B_b\\ K_{NLNL} &= B_{nl}^T D_m B_{nl}\\ K_m &= B_m^T D_m B_m + B_b^T D_{mb} B_m\\ K_b &= B_m^T D_{mb} B_b + B_b^T D_b B_b\\ K_s &= B_s^T D_s B_s\end{aligned} \tag{۲۶}$$

از ترم اول سمت راست معادله (۱۹) و روابط (۱۴) و (۲۲) رابطه (۲۷) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\int d[B]^T\ \sigma\ dv &= \int d[B_{nl}]^T\ \sigma\ dv\\ &= \int\ [G]^T[A]^T\ \sigma\ [A][G]dv\ d\ \delta\end{aligned} \tag{۲۷}$$

ماتریس دیگر طبق رابطه (۲۸) تعریف می‌شود.

$$[K_g] = [G]^T [A]^T \{\sigma\} [A][G] \qquad (۲۸)$$

ماتریس به‌دست آمده در رابطه‌ی فوق، ماتریس مربوط به پیش تنش‌ها[1] است که در مساله حاضر مقدار آن به‌طور پیش فرض برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

۲-۲- ماتریس سختی سکانت

در رابطه‌ی تعادل (۱۹) نیروی داخلی را می‌توان به شکل رابطه (۲۹) نوشت[۳].

$$F = \int [B]^T \ \sigma \ dv = [K_s] \ \delta \qquad (۲۹)$$

با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) و (۲۶)، و جایگذاری در رابطه (۲۹) ماتریس ضرایب سکانت به صورت رابطه (۳۰) حاصل می‌شود.

$$[K_s] = \int \ K_{LL} + \tfrac{1}{2}K_{LNL} + K_{NLL} + \tfrac{1}{2}K_{NLNL} \ dA \qquad (۳۰)$$

۳- حل دستگاه معادلات غیرخطی

روش‌های متنوعی برای حل معادله غیرخطی حاکم بر مساله (رابطه ۱۹) وجود دارد. متعارف‌ترین روش در حوزه حل عددی صورت‌های مختلف روش نیوتن-رافسون است. روش نیوتن-رافسون علی‌رغم کارایی مناسب، وابسته به مقدار اولیه است و در صورتی‌که مسیر تعادلی دارای نقاط بازگشت باشد در همسایگی این نقاط قابلیت همگرایی ندارد. روش طول کمان روشی است که قابلیت دنبال‌کردن مسیر تعادلی کامل مسائل فیزیکی را دارد. ایده‌ی اصلی این روش به ریکس[2] در سال ۱۹۷۹ [۱۱] تعلق دارد. پس از ریکس کریسفیلد[3] در سال ۱۹۸۰ [۱۲] این روش را جهت استفاده در اجزای محدود بهبود داده است. می‌توان گفت با آن که محققان زیادی بر بهبود این روش فعالیت کرده‌اند عمدتاً تنها تغییرات جزئی در روش ریکس ایجاد شده است.

معادلات تعادل سیستمی غیرخطی را می‌توان به شکل رابطه (۳۱) نوشت [۱۳]:

$$\phi_i = F_i - \lambda_i f_e \qquad (۳۱)$$

که F_i بردار نیروهای داخلی تابعی از تغییرشکل است. f_e بردار نیروی خارجی وارده، λ_i ضریب تأثیر بار و φ_i بردار نیروی خارج از تعادل است. هدف اصلی در روش طول کمان، استفاده از یک معادله قید اضافه و یافتن مکان هندسی تقاطع معادله‌ی (۳۱) با معادله قید است. قید مورد استفاده عموماً معادله طول کمان Δl است که به فرم دیفرانسیلی رابطه (۳۲) قابل ارائه است.

$$\Delta l = \int \sqrt{\hat{p}^T \hat{p} + d\lambda^2 \eta^2 f_e^T f_e} \qquad (۳۲)$$

معادله قید (۳۲) را به فرم نموی زیر رابطه (۳۳) می‌توان نوشت[۱۲].

$$\hat{p}^T \hat{p} + \Delta\lambda^2 \eta^2 f_e^T f_e - \Delta l^2 = 0 \qquad (۳۳)$$

که $\hat{p}$ نمو بردار جابه‌جایی، $\Delta\lambda$ نمو تأثیر پارامتر بار، Δl شعاع دلخواه و η فاکتور پیمایش[4] است. حضور فاکتور پیمایش، بدین معناست که تکرارها می‌تواند مقید به سطحی کروی $(\eta \neq 0)$ و یا استوانه‌ای $(\eta = 0)$ باشد.

حل هم‌زمان معادلات (۳۲) و (۳۳) مشکل است بنابراین با تغییر ساختار حل به کنترل تغییرات مکانی، معادله قیدی با نمو تغییرمکان به شکل رابطه (۳۴) اضافه می‌شود[۱۴].

$$dp_{i+1} = d\overline{p} + \hat{p} d\lambda_{i+1} \qquad (۳۴)$$

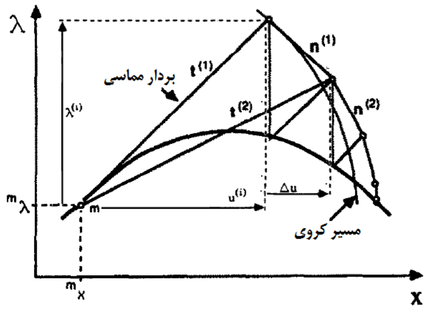
که در رابطه‌ی فوق رابطه (۳۵) برقرار است.

$$d\overline{p} = -K_T^{-1} F_i$$
$$\hat{p} = K_T^{-1} f_e \qquad (۳۵)$$

برای تعیین نموهای بعدی از رابطه (۳۶) استفاده می‌شود.

$$\Delta p_{i+1} = p_i - p^n$$
$$\Delta\lambda_{i+1} = \lambda_i - \lambda^n \qquad (۳۶)$$

برای حل معادلات به دست آمده، روش طول کمان اصلاح‌شده[5] استفاده می‌شود. ایده این روش تجدید شرط تعامد موجود در روش ریکس، در هر تکرار می‌باشد به بیان دیگر مسیر تکرار صفحه‌ای عمود بر تغییرات سکانت را دنبال می‌نماید (شکل ۳).



شکل ۳ روش طول کمان اصلاح شده

با توجه به شکل ۳ دو بردار t و n معرفی می‌شود که بردار t مماس بر نقطه‌ی آغازگر تکرار و بردار n برداری دلخواه است (روابط (۳۷) و (۳۸)).

$$t^i = p^i + \beta\Delta\lambda^i \qquad (۳۷)$$

$$n^i = \Delta p + \beta d\lambda \qquad (۳۸)$$

که β فاکتور کنترل‌کننده‌ای از جنس جابه‌جایی است. ضرب داخلی بردارهای t و n باقی‌مانده‌ی R را نتیجه می‌دهد. به عبارت دیگر بردار R برابر با تصویر بردار n روی بردار t است(رابطه (۳۹)).

$$t^i . n^i = |t^i| |n^i| cos\alpha = |t^i| |r^i| = R^i \qquad (۳۹)$$

با جایگذاری روابط (۳۷) و (۳۸) در سمت چپ معادله (۳۹) و استفاده از رابطه‌ی (۳۷) برای dp_{i+1} برای شرایطی که زاویه دو بردار ۹۰ درجه است، رابطه (۴۰) حاصل می‌شود [۱۵].

$$d\lambda = \frac{-p_i^T d\overline{p}}{\beta^2 \Delta\lambda_i + p_i^T \hat{p}} \qquad (۴۰)$$

۳-۱- پدیده‌ی قفل برشی

در استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل عددی صفحات و پوسته‌ها خطر ایجاد خطای عددی در محاسبات پدید می‌آید. این خطا ناشی از پدیده موسوم به قفل برشی است که به دلیل ثابت فرض شدن مقدار تنش های برشی در ضخامت فیزیک مساله به ویژه در مسایل با نسبت ضخامت به ابعاد کم ایجاد می‌شود. یک راه برای جلوگیری از ایجاد پدیده قفل‌شدگی برشی[6]، انجام انتگرال‌گیری عددی به صورت انتخابی برای ترم‌های انرژی است. برای این منظور چنان‌که در جدول ۱ نیز آورده شده است، برای المان دوخطی توسعه داده شده، ترم‌های انرژی ناشی از کرنش غشائی و خمشی با تعداد دو نقطه‌ی گوسی و ترم‌های متناظر با کرنش برشی با یک مرتبه پایین‌تر انتگرال‌گیری می‌شوند[۱۶].

1. prestress
2. Riks
3. Crisfield
4. scaling factor
5. Improved arc-length method
6. shear locking

جدول ۱ مرتبه نقاط انتگرال‌گیری گوسی استفاده شده

ترم‌های کرنش	تعداد نقطه گوسی
غشایی و خمشی	۲×۲
برشی	۱×۱

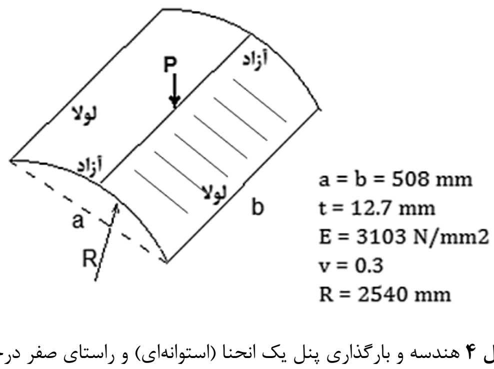
۴- نتایج عددی

در این قسمت با استفاده از کد توسعه داده شده در نرم‌افزار متلب، ابتدا همگرایی برای المان دوخطی بررسی شده است و سپس نتایج با سایر پژوهش‌های محققان پیشین مقایسه و صحت‌سنجی شده است، در نهایت بررسی حساسیت پوسته‌های استوانه‌ای و کروی دو انحنایی نسبت به پارامترهای مؤثر در تعیین رفتار نیرو-جابه‌جایی با شرایط مرزی یکسان، انجام گرفته است. به دلیل تقارن موجود در مسائل، در کلیه‌ی مثال‌هایی که آرایش الیاف به صورت متعامد است، مدلی یک چهارم از هندسه و در سایر مسائل مدل کامل درنظر گرفته شده است. در نمونه استوانه‌ای راستای زاویه صفر درجه محیطی است.

۴-۱- تایید نتایج عددی فرمولاسیون

برای بررسی همگرایی حل در فرمولاسیون توسعه داده شده، پنلی با هندسه استوانه‌ای (دارای یک انحنا) از جنس مواد ایزوتروپ و مشخصات مطابق با شکل ۴ در نظر گرفته شده است. نیروی متمرکز P در وسط پنل و عمود بر سطح آن وارد شده است. در دو لبه‌ی صاف هندسه شرایط لولا اعمال شده و دو لبه‌ی انحنادار آن، آزاد گذاشته شده است.

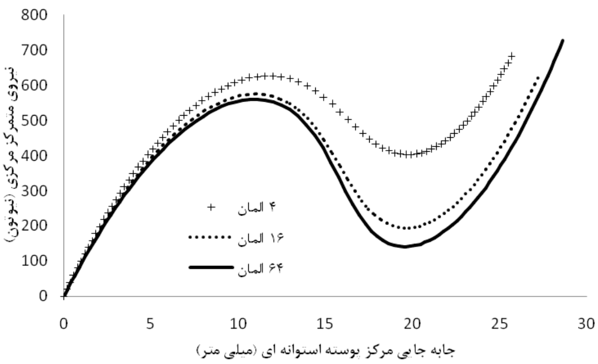
با توجه به تقارن فیزیکی موجود در مساله، یک چهارم آن با تعداد ۴، ۱۶ و ۶۴ المان محدود مدل شده است. با توجه به این‌که مسیر تعادلی دارای نقطه حدی است و تحلیل فراتر از این نقطه نیز مد نظر است، برای دنبال کردن این مسیر الگوریتم طول‌کمان استفاده شده است. در شکل ۵ روند همگرایی پیش‌بینی مسیر تعادلی قابل مشاهده است. با افزایش تعداد المان روند همگرایی مطلوبی قابل مشاهده است.



شکل ۴ هندسه و بارگذاری پنل یک انحنا (استوانه‌ای) و راستای صفر درجه

به نظر می‌رسد استفاده از تعداد ۶۴ المان برای مدل یک‌چهارم در این مسأله، نتایج به قدر کافی همگرا را ارائه کرده است.

برای صحت سنجی نتایج حاصل از فرمولاسیون مربوطه به روش عددی با نتایج تحلیلی موجود، چنان‌که در شکل ۶ مشخص است، نتایج رفتار غیرخطی صفحه‌ی تخت با چهار لبه لولا (simply supported) تحت فشار جانبی ارائه شده است.



شکل ۵ روند همگرایی در محاسبه مسیر تعادلی پوسته استوانه‌ای با استفاده از ۴، ۱۶ و ۶۴ المان

پارامترهای بی‌بعد شده‌ی موجود در نمودار به صورت زیر تعریف شده است.

نیروی فشاری بی‌بعد شده $Q = \frac{pa^4}{E_m h^4}$

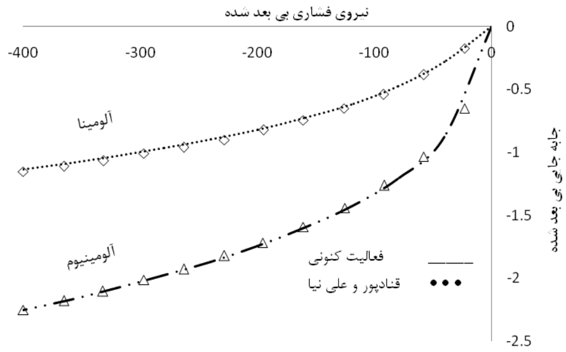
جابه‌جایی بی‌بعد شده $W = \frac{w}{h}$

قنادپور و علی‌نیا [۱۷] معادلات خود برای هندسه‌ای صفحه‌ی تخت ($R_\alpha \to \infty, R_\beta \to \infty$) با استفاده از تئوری ون‌کارمن برای تغییرشکل‌های بزرگ ارائه دادند و نتایج خود را با استفاده از مینیمم نمودن انرژی پتانسیل کلی بدست آوردند. خواص و هندسه‌ی مواد نیز در جدول **۲** آورده شده است. برای نمونه یک پنل کروی ایزوتروپ مربعی از جنس آلومینیم با مشخصات مورد اشاره در جدول ۲ در شرایط بار جانبی گسترده و مرزهای کاملا لولاشده نتایج تغییرات جابه‌جایی نقطه مرکزی با افزایش بارگذاری استخراج و در شکل ۷ با نتایج تحلیلی گزارش شده توسط وو و مگید [۱۸] مقایسه شده است. نتایج مرجع با استفاده از معادلات ون‌کارمن توسعه داده شده است و با استفاده از تقریب سری های فوریه حل شده است. نمودار نشان می‌دهد که دقت مناسبی در پیش بینی مسیر تعادلی سازه به دست آمده است.

در ادامه روند صحت سنجی از نتایج، در شکل ۸ نتیجه حاصل از تحلیل مدل یک چهارم هندسه استوانه‌ای برای ۶۴ المان ارائه و با نتایج گزارش شده مقایسه شده است. با توجه به نمودار، تطابق خوبی بین نتایج پیش‌بینی شده از فرمولاسیون موجود در این فعالیت با نتایج سایر محققان وجود دارد. در انتهای مسیر تعادلی، اختلاف اندکی بین نتایج دیده می‌شود و نتایج حاصل از فرمولاسیون موجود با نتایج مرجع [۳] هم‌خوانی بیشتری داشته است. دلیل این تفاوت اندک به دلیل استفاده از تئوری کلاسیک در استخراج معادلات اجزای محدود در مراجع [۱۲] و [۱۹] است. در فرمولاسیون مورد استفاده مرجع [۳] و فعالیت کنونی تئوری مرتبه اول برشی اعمال شده است.

رفتار نیرو-جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای ساخته شده از ماده‌ی مرکب با لایه‌چینی متعامد[1] تحت بارگذاری متمرکز جانبی وارد بر مرکز سطح پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. داده‌های مربوط به هندسه و شرایط مرزی مطابق با پوسته‌ی استوانه‌ای موجود در شکل ۴ می‌باشد. خواص ماده‌ی غیر ایزوتروپ در جدول ۳ گردآوری شده است. برای هندسه و ماده‌ی مذکور (ماده ۱)، دو لایه‌چینی متفاوت [90/0/90] و [0/90/0] مورد ارزیابی قرار گرفته است. ضخامت چندلایه ۱۲/۶ میلی‌متر و لایه‌ها هم‌ضخامت هستند. منحنی‌های نیرو و جابه‌جایی مربوط به لایه‌چینی‌های فوق به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ ارائه شده است.

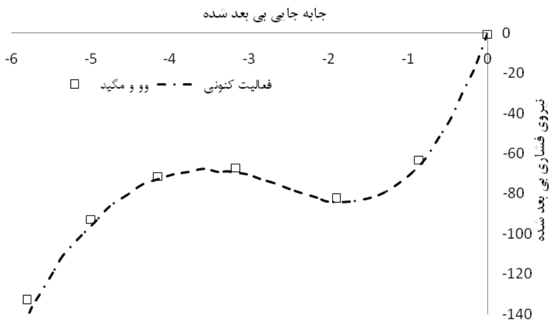
1. cross-ply



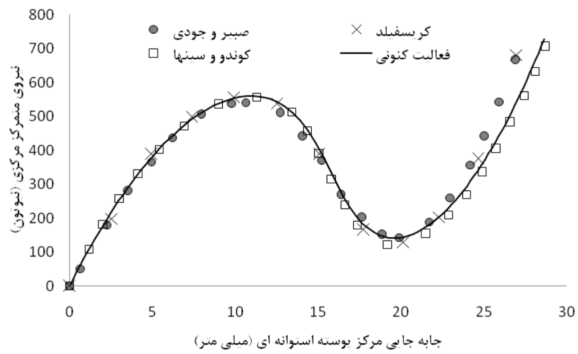
شکل ۶ مسیر تعادلی صفحه تخت ایزوتروپ لولا شده

جدول ۲ مشخصات هندسه و ماده صفحه تخت لولاشده

پارامتر	h/a	a/b	ضریب پواسون	E آلومینیم	E آلومینا
مقدار	۰/۰۵	۱	۰/۳	۷۰ GPa	۳۸۰ GPa



شکل ۷ رفتار مکانیکی پنل کروی ایزوتروپ در برابر فشار جانبی

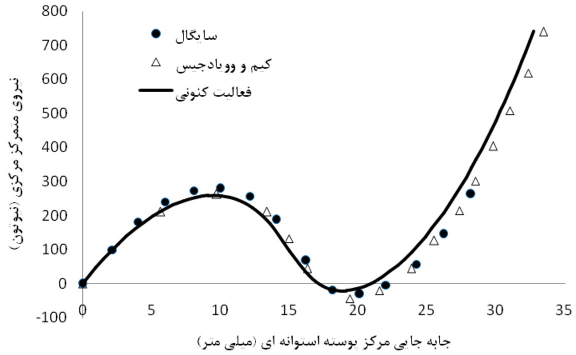


شکل ۸ رفتار مکانیکی پنل استوانه‌ای به ضخامت ۱۲/۷ میلی‌متر

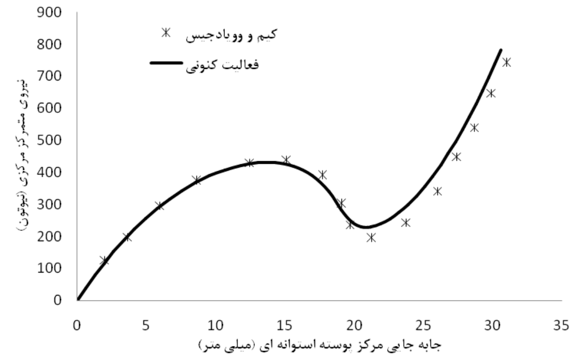
جدول ۳ ثوابت مهندسی ماده‌ی منتخب [۲۰،۳]

پارامتر	E_1	E_2	G_1	G_2	G_1	υ_1
ماده ۱	۳/۳	۱/۱	۰/۶۶	۰/۶۶	۰/۶۶	۰/۲۵
ماده ۲	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۳/۵۸	۷/۱۷	۰/۲۸
واحد			$[kN/mm^2]$			–

نتایج حاصل از فعالیت سایگال و همکاران نیز با استفاده از المان پوسته‌ای ۴ گره‌ای از نوع غیرخطی و با ۱۲ درجه آزادی در هر گره به‌دست آمده است.



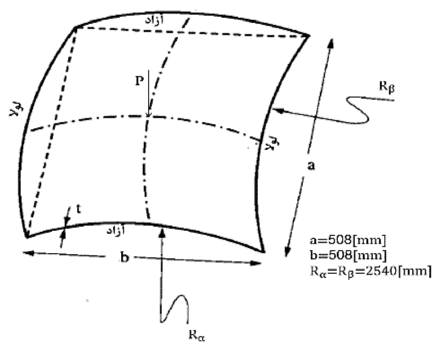
شکل ۹ مسیر تعادلی پوسته‌ی استوانه‌ای مرکب (ماده ۱) با لایه‌چینی [90/0/90]



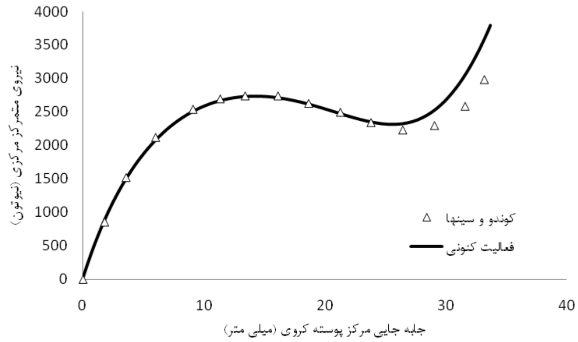
شکل ۱۰ مسیر تعادلی پوسته‌ی استوانه‌ای مرکب (ماده ۱) با لایه‌چینی [0/90/0]

برای لایه چینی $[0/90/0]$ نتایج مجدداً با فعالیت کیم و وویادجیس مقایسه شده است. با توجه به شکل ۹ و شکل ۱۰ در ناحیه‌ی بارگذاری نتایج به‌دست آمده از فعالیت کنونی علیرغم استفاده از المان با درجه آزادی و هزینه محاسباتی کمتر، با سایر نتایج گزارش شده تطابق بسیار خوبی را نشان داده است.

رفتار نیرو جابه‌جایی پوسته‌ای کروی با هندسه و شرایط مرزی مطابق با شکل ۱۱ مورد ارزیابی قرار گرفته است. مطابق شکل ۱۱ شرایط مرزی در دو ضلع مقابل لولا و دو ضلع دیگر آزاد در نظر گرفته شده است. خواص ماده‌ی مورد استفاده (ماده ۲) در جدول ۳ ارائه شده است. ضخامت کلیه‌ی لایه‌ها یکسان و ضخامت کل پوسته برابر با ۶/۲۵ میلی‌متر است. مسیر تعادلی نمونه با لایه‌چینی زاویه‌ای $[\pm45/\mp45]_S$ تحت اثر نیروی جانبی در نمودار شکل ۱۲ ارائه شده است.



شکل ۱۱ شماتیک پوسته‌ی کروی و موقعیت بارگذاری جانبی



شکل ۱۲ مسیر تعادلی پوسته‌ی استوانه‌ای مرکب با لایه‌چینی $[\pm 45/\mp 45]_S$

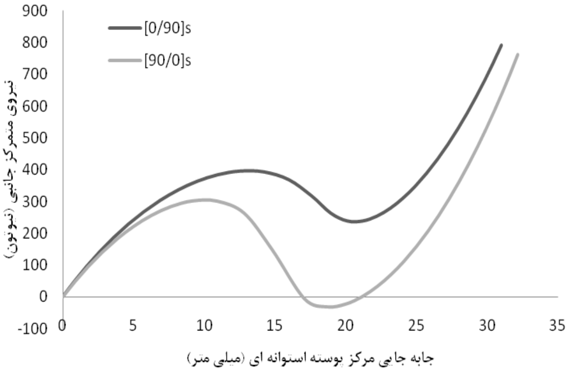
کوندو و سینها [3] برای حل مساله از المان لاگرانژین[1] (۹ گره ای) استفاده کرده‌اند. مقایسه نتایج حاصل از فرمولاسیون حاضر با فعالیت کوندو و سینها تطابق بسیار خوبی رانشان می‌دهد.

۴-۲- نتایج بیشتر

در این بخش تاثیرات تغییر در لایه‌چینی و برخی پارامترهای دیگر بر رفتار نیرو-جابه‌جایی پنل‌های انحنادار فضایی بررسی شده است. تحریک خارجی شامل نیروی متمرکز در نقطه وسط سطح در نظر گرفته شده است و تغییر مکان همین نقطه به عنوان یک مشخصه رفتاری استخراج و استفاده شده است. لازم به ذکر است کلیه‌ی محاسبات موجود در این بخش برای هندسه‌ای با چهار لایه و شرایط مرزی آزاد-لولا-آزاد-لولا مطابق با شکل ۴ انجام گرفته است. همچنین هر جا که تقارن مساله اجازه داده است، مدل یک چهارم از پنل شبیه‌سازی و از قیود تقارنی مناسب استفاده شده است.

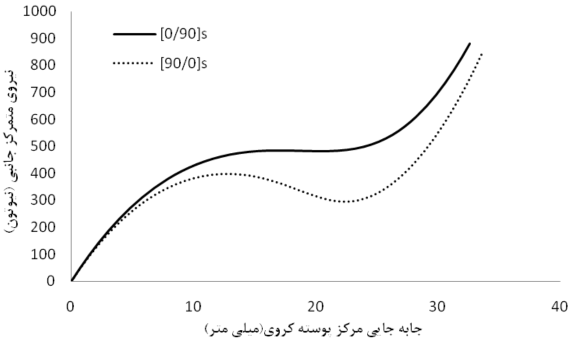
۴-۲-۱-اثرات ترتیب لایه‌چینی در پنل متعامد چهارلایه

پانل با چیدمان $[\alpha/\beta]_S$ مورد نظر است و برای هر یک از دو پارامتر α و β، به ترتیب دو انتخاب ۰ و ۹۰ وجود دارد. نتایج حاصل از هر دو حالت ذکر شده، برای هندسه‌های استوانه‌ای و کروی به ترتیب در شکل ۱۳ و شکل ۱۴ ارائه شده است. مطابق نمودارهای شکل ۱۳ پوسته‌ی استوانه‌ای برای هر دو لایه‌چینی، مسیر تعادلی نسبتا پیچیده‌ای را تجربه می‌کند و در هر دو لایه‌چینی پدیده تغییر مود یا پیشروی ناگهانی[2] به‌وضوح قابل مشاهده است.



شکل ۱۳ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی متعامد-متقارن

1. Lagrangian
2. snap through



شکل ۱۴ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی متعامد-متقارن

مسیر تعادلی پوسته‌ی کروی نیز برای هر دو لایه‌چینی در شکل ۱۴ ارائه شده است. این پوسته برخلاف پوسته‌ی استوانه‌ای مسیر تعادلی هموارتری دارد. در رفتار پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی $[0/90]_S$ پیشروی ناگهانی مشاهده نشده است. با مقایسه نمودارها برای هندسه استوانه‌ای و کروی، در هر دو مورد لایه‌چینی $[0/90]_S$ سفتی بیشتری را در سازه ایجاد کرده است. به علاوه شیب نمودار و سفتی سازه در هندسه‌ی کروی نسبت به هندسه‌ی استوانه‌ای بیشتر است.

پنل چهار لایه با چیدمان لایه‌ای $[\alpha/\beta]_2$ در نظر گرفته شده است. برای هر یک از دو پارامتر α و β، به ترتیب دو انتخاب ۰ و ۹۰ وجود دارد. نتایج حاصل از هر دو لایه‌چینی برای دو هندسه در شکل ۱۵ و شکل ۱۶ آورده شده است.

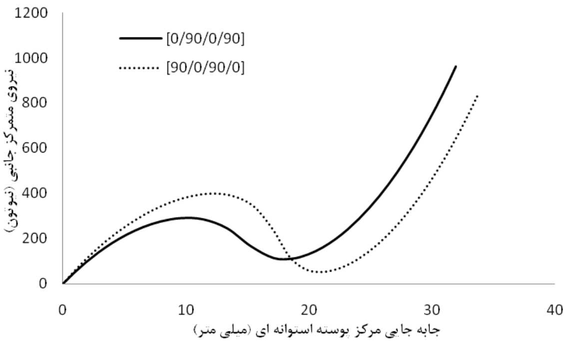
با توجه به شکل ۱۵ و شکل ۱۶ پدیده‌ی پیشروی ناگهانی در هر دو پوسته‌ی استوانه‌ای مشهود است. این در حالی است که پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی $[0/90]_2$ پیشروی ناگهانی آرامی را تجربه می‌کند و این پدیده برای لایه‌چینی $[90/0]_2$ اتفاق نمی‌افتد. همچنین در هر دو پوسته، برای بیش از نیمی از مسیر سفتی سازه در لایه‌چینی $[90/0]_2$ بالاتر بوده اما در ادامه‌ی مسیر، سفتی آن کاهش یافته و سفتی لایه‌چینی $[0/90]_2$ غالب شده است.

برای لایه‌چینی $[\alpha_2/\beta_2]$، با دو انتخاب ۰ و ۹۰ برای هر یک از دو زاویه α و β مسیر تعادلی هندسه استخراج و ارائه شده است. شکل ۱۷ و شکل ۱۸ نتایج را به ترتیب برای لایه‌چینی‌های $[0_2/90_2]$ و $[90_2/0_2]$ نمایش داده است.

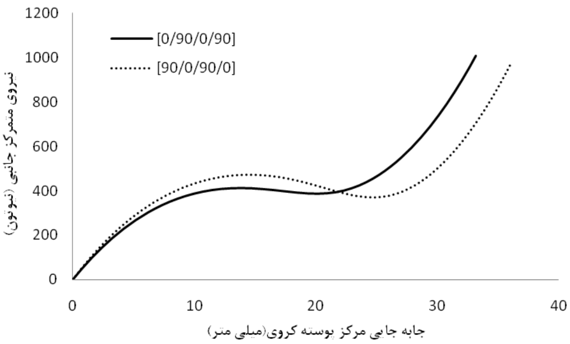
تنها پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی $[0_2/90_2]$ پدیده‌ی پیشروی ناگهانی را تجربه نکرده است. سفتی پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی $[90_2/0_2]$ در ابتدای مسیر بسیار بیش از پوسته با لایه‌چینی $[0_2/90_2]$ است اما در انتهای مسیر این سفتی به شدت کاهش یافته، و سفتی لایه‌چینی $[90_2/0_2]$ بالاتر می‌رود. به‌علاوه تغییر فاز سفتی سازه برای لایه‌چینی $[90_2/0_2]$ دیرتر از لایه‌چینی $[0_2/90_2]$ اتفاق می‌افتد.

۴-۲-۲-اثرات ترتیب لایه‌چینی در پنل زاویه‌ای چهارلایه

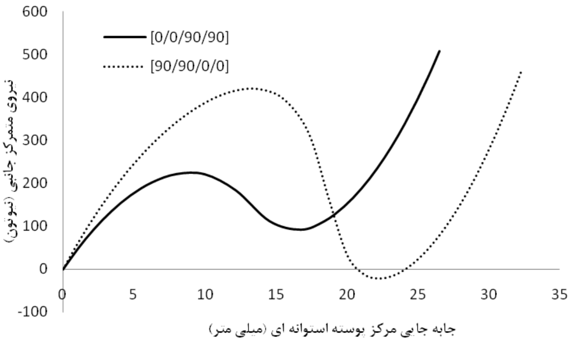
آرایش زاویه‌ای مطابق با چیدمان متقارن $[\pm\alpha]_S$، برای زاویه‌های ۰ تا ۹۰ درجه با اختلاف‌های ۱۵ درجه‌ای درنظر گرفته شده است.



شکل ۱۵ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی متعامد-پادمتقارن

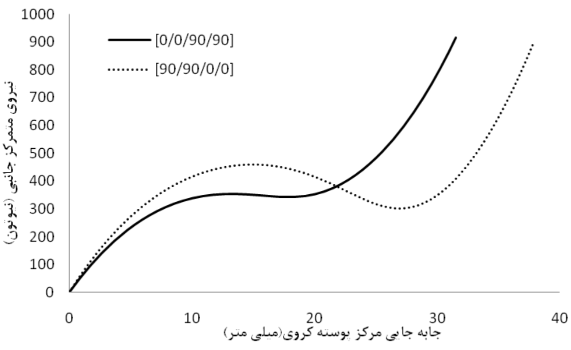


شکل ۱۶ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی متعامد-پادمتقارن



شکل ۱۷ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای دو لایه با تغییر لایه‌چینی متعامد-پادمتقارن

رفتار نیرو جابه‌جایی برای این پانل‌ها با این چیدمان در هندسه‌های استوانه‌ای و کروی به ترتیب در شکل ۱۹ و شکل ۲۰ ارائه شده است.



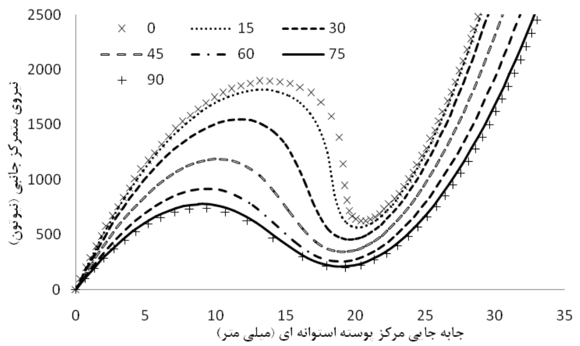
شکل ۱۸ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی کروی دو لایه با لایه‌چینی متعامد-پادمتقارن

با توجه به اینکه این نوع لایه‌چینی تقارن موجود در مسئله را از بین می‌برد، در تحلیل‌های این قسمت از کل مدل استفاده شده است. برای درک بهتر از رفتار پوسته‌ها در کلیه‌ی حالات این قسمت آرایش‌های $[0]_4$ و $[90]_4$ نیز در نمودارها ارائه شده است.

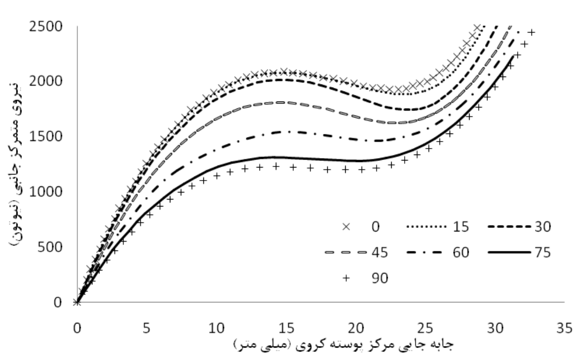
با توجه به رفتار پنل با لایه‌چینی زاویه‌ای متقارن، در هر دو پوسته‌ی استوانه‌ای و کروی با افزایش زاویه‌ی الیاف از ۰ به سمت ۹۰ سختی سازه و قابلیت باربری سازه کاهش یافته است. در پوسته‌ی استوانه‌ای برای مکان هندسی‌ای قبل و بعد از نقطه‌ی حدی آهنگ تغییر مود مسیر تعادلی برای تغییرات زاویه‌ی الیاف بین ۱۵ تا ۶۰ را می‌توان یکسان فرض کرد. این درحالی است که در ابتدا و به‌ویژه در انتهای مسیر تعادلی آهنگ تغییر مود در کلیه‌ی زوایای الیاف ثابت است. در پوسته‌ی کروی با افزایش زاویه‌ی الیاف، مسیر تعادلی پیشروی ناگهانی آرام‌تری را تجربه می‌کند. به‌علاوه برای مکان هندسی‌ای در همسایگی نقطه‌ی حدی، آهنگ تغییر مود مسیر تعادلی برای تغییرات زاویه‌ی بین ۳۰ تا ۷۵ تقریباً ثابت است.

پنل با آرایش ۴ لایه پادتقارنی به شکل $[\pm\alpha]_2$ مد نظر قرار گرفته است. برای پارامتر α، به ترتیب زاویه‌های ۰ تا ۹۰ درجه با فواصل ۱۵ درجه‌ای درنظر گرفته شده و مسیر کامل تعادلی به ترتیب برای هندسه‌های استوانه‌ای و کروی در نمودارهای شکل ۲۱ و شکل ۲۲ ارائه شده است.

در این حالت تغییرات رفتار پوسته‌ها، مشابه رفتار پوسته با آرایش زاویه‌ای متقارن است. به عبارت دیگر رفتار مسیر تعادلی برای تغییرات زاویه‌ی الیاف بین ۱۵ تا ۷۵ محاط به دو نمودار مربوط به زوایای ۰ و ۹۰ شده است. در هر دو پوسته‌ی استوانه‌ای و کروی با افزایش زاویه α از ۰ به ۹۰ سفتی سازه کاهش یافته و قابلیت باربری سازه نیز دچار افت شده است.



شکل ۱۹ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای با تغییر زاویه چیدمان $[\pm\alpha]_S$

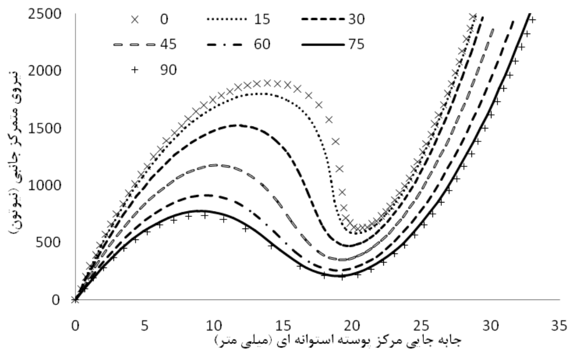


شکل ۲۰ مسیر تعادلی مرکز پوسته‌ی کروی با تغییر زاویه چیدمان $[\pm\alpha]_S$

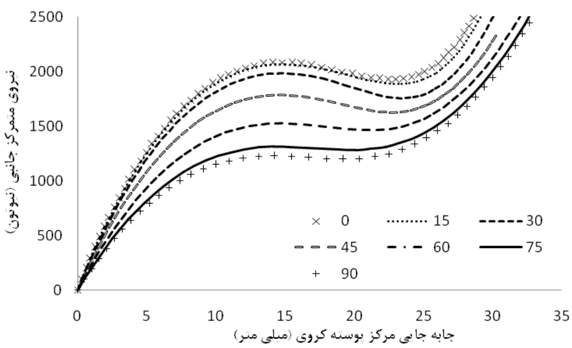
چیدمان لایه‌ای زاویه‌ای و غیرمتقارن $[0_2/\pm\alpha]$ برای زوایای ۰ تا ۹۰ با گام زاویه‌ای ۱۵ درجه در نظر گرفته شده است. شکل ۲۳ و شکل ۲۴ نمودارهای تغییرات نیرو با جابه‌جایی را برای هر دو پوسته ارائه کرده است. برای درک بهتر از نوع رفتار هر دو پوسته، در هر دو گراف آرایش‌های $[0]_4$ و $[90]_4$ نیز آورده شده است.

با افزایش زاویه لایه‌ها از ۰ تا ۹۰ درجه مشخص است که برای هر دو هندسه، سفتی اولیه کاهش و سفتی نهایی افزایش داشته است. در هر دو پوسته‌ی استوانه‌ای و کروی تغییر در سفتی اولیه بسیار بیشتر از اختلاف سفتی نهایی است. علاوه بر این، نرخ تغییر سفتی اولیه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای بیش از پوسته‌ی کروی است.

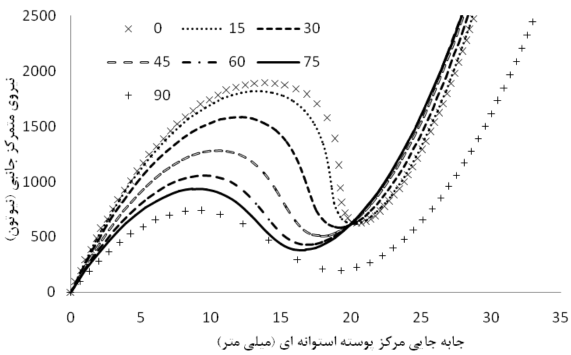
در هر دو پوسته برای قسمت میانی مسیر تعادلی، افتی در انرژی و سختی سازه وجود دارد که با افزایش زاویه‌ی الیاف شدت افت در این قسمت از مسیر کاهش یافته است. همچنین از مقایسه نتایج مشاهده می‌شود که سفتی و قابلیت باربری سازه با هندسه‌ی کروی نسبت به هندسه‌ی استوانه‌ای بالاتر است.



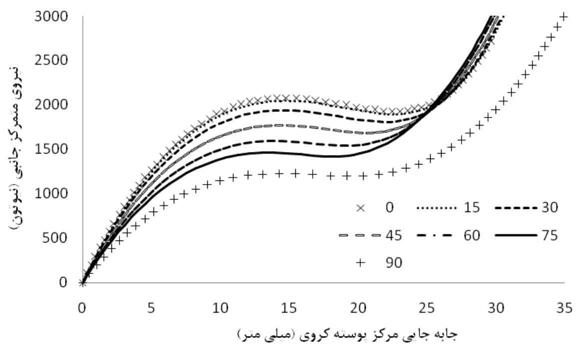
شکل ۲۱ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی زاویه‌ای-پادمتقارن



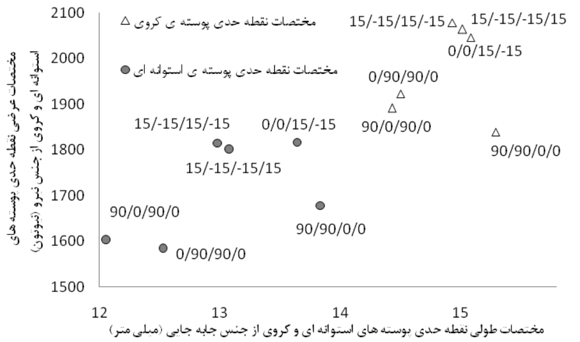
شکل ۲۲ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی زاویه‌ای-پادمتقارن



شکل ۲۳ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی نامتعامد-نامتقارن



شکل ۲۴ جابه‌جایی مرکز پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی نامتعامد-نامتقارن



شکل ۲۵ مختصات نقطه‌ی حدی در پوسته‌ی انحنادار

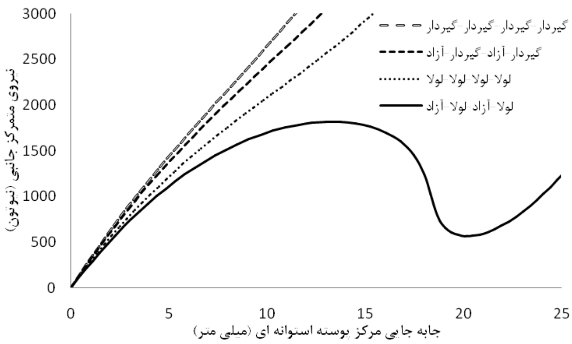
به‌دلیل تعداد زیاد نتایج به‌دست‌آمده برای کلیه‌ی لایه‌چینی‌ها اعم از متعامد و نامتعامد در پوسته‌های استوانه‌ای و کروی، بالاترین نقطه‌ی حدی بدست آمده از هر گراف که سختی بالاتری را در سازه ایجاد می‌کند برای شش حالت لایه‌چینی مختلف بررسی شده، در شکل ۲۵ مقایسه شده است.

چنان‌که از شکل ۲۵ نمایان است، نتایج مربوط به پنل از نوع کروی مقادیر نیروی حدی و جابه‌جایی نظیر بالاتری ارائه کرده است. در میان نتایج پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌چینی زاویه‌ای $[0_2/15/-15]$ علاوه بر این که دارای نقطه‌ی حدی با بیشترین نیرو است، جابه‌جایی نسبتاً بالایی را نیز در این نقطه از خود نشان داده است. به عبارتی می‌توان گفت این لاه‌چینی کندتر به نقطه بازگشت خود رسیده است. سازه با چنین آرایشی سفتی اولیه و مقاومت نسبتاً بالایی دارد. درحالی که پوسته‌ی کروی با لایه‌چینی $[15/-15]_2$ بالاترین نقطه‌ی حدی را از خود نشان می‌دهد. از مقایسه‌ی دو شکل مشخص است سفتی و میزان باربری سازه برای آرایش‌های متعامد پایین‌تر از آرایش‌های زاویه‌دار می‌باشد. به‌علاوه سختی سازه با هندسه‌ای کروی بسیار بالاتر از هندسه‌ی استوانه‌ای است.

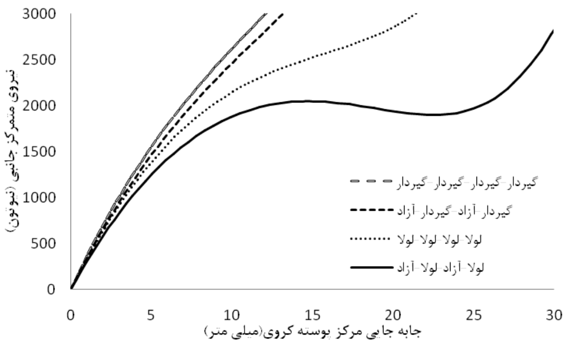
۴-۲-۳- اثرات شرایط مرزی بر رفتار پنل چهارلایه متعامد

در این بخش مسیرتعادلی پوسته‌های استوانه‌ای و کروی برای چهار شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در کلیه‌ی حالات از آرایش زاویه‌ای $[0_2/\mp15]$، که مطابق نتایج قبلی تقریباً بالاترین سفتی را در دو هندسه تامین کرده، استفاده شده است. مشخصات اعمال قیود در مرزها شامل شرایط لولا-آزاد-لولا-آزاد، گیردار-آزاد-گیردار-آزاد، چهارطرف لولا و چهارطرف گیردار، درنظر گرفته شده است. در نمونه استوانه‌ای شرایط مرزی از یک مرز انحنادار اعمال شده است. نتایج مسیر تعادلی نیرو-جابه‌جایی برای

پنل برای دو هندسه استوانه‌ای و کروی به ترتیب در شکل ۲۶ و شکل ۲۷ آورده شده است.



شکل ۲۶ منحنی مسیر تعادلی پوسته‌ی استوانه‌ای در شرایط مرزی مختلف



شکل ۲۷ منحنی مسیر تعادلی پوسته‌ی کروی در شرایط مرزی مختلف

آن طور که مورد انتظار هم هست، با مقیدتر شدن مرزها در هر دو هندسه، رفتار مسیر تعادلی با سفتی بیشتر همراه است و مسیر افزایشی اولیه از شکل غیرخطی به سمت افزایش سهم ترم‌های خطی تمایل دارد. به‌طوری که به جز شرایط مرزی لولا-آزاد-لولا-آزاد، در سایر شرایط قیدی اعمالی اثری از پدیده تغییر مود قابل مشاهده نیست. از مقایسه‌ی دو شکل مشخص است که، رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای نسبت به تغییر در شرایط مرزی حساس‌تر از پوسته‌ی کروی است. علاوه بر این اعمال شرایط قیدی کاملا درگیر در مرزها سفتی را به شدت افزایش داده است به شکلی که برای هر دو نمونه شیب منحنی رفتاری برای مدل‌های دارای مرز درگیر نسبت به مدل‌های لولا شده به‌طور مشخص بالاتر است.

در پوسته‌ی کروی برای شرایط مرزی کاملا لولایی، سختی اولیه‌ی پوسته زیاد می‌باشد اما بعد از یک تغییر مود گذرا که سختی کاهش یافته است، مجدداً در انتهای مسیر سختی سازه افزایش می‌یابد. اما برای این شرایط مرزی در پوسته‌ی استوانه‌ای، این تغییر مود بطور محسوس قابل مشاهده نمی‌باشد. با وجود اینکه در این شرایط مرزی تغییر مود مختصری در مسیر تعادلی مشاهده می‌شود، نمی‌توان برای منحنی رفتار در این حالت نقطه‌ی حدی را درنظر گرفت.

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله‌ی حاضر تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌های استوانه‌ای و کروی ساخته شده از مواد مرکب با توسعه یک المان چهارگره‌ای لاگرانژی انجام گرفت. معادلات کرنش جابه‌جایی مورد استفاده، در دستگاه مختصات منحنی‌گون با قابلیت تعریف دو انحنای متعامد ارائه شد و با در نظر گرفتن ترم‌های غیرخطی کرنش، معادله حاکم بر مساله با استفاده از روش حل طول کمان حل شده است. با استخراج مسیرهای تعادلی نیرو-جابه‌جایی برای نیروی متمرکز جانبی در مرکز هندسه مشاهده شد که هر دو پوسته‌ی استوانه‌ای و کروی سفتی بالایی را در ابتدای مسیر از خود نشان داده ولی در ادامه‌ی مسیرتعادلی سفتی کاهش می‌یابد. در انتهای مسیر نیز رفتار هر دو هندسه مجدداً سفت‌تر می‌شود. از نتایج به‌دست آمده مشخص است که کلیه‌ی پوسته‌های استوانه‌ای به وضوح پدیده‌ی پیش‌روی ناگهانی را تجربه می‌کنند اما پوسته‌های کروی تنها در چیدمان خاصی این پدیده را به‌طور کامل تجربه می‌کنند. به‌علاوه سفتی سازه‌ایی با هندسه‌ی کروی به‌نسبت بالاتر از هندسه استوانه‌ای است. از مقایسه‌ی لایه‌چینی های منتخب مشخص شد که سفتی سازه و قابلیت باربری سازه در هر دو هندسه استوانه‌ای و کروی لایه‌چینی $[0_2/\mp15]$ سطح نیروی حدی بالاتری نشان داده است. همچنین اثر شرایط مرزی درگیر در رفتار سازه انحنادار کاملا متمایز است. توجه به این نکته نیز حائز اهمیت است که برخلاف پوسته‌هایی از جنس مواد ایزوتروپ که مختصات افقی نقطه‌ی حدی در موقعیت جابه‌جایی نزدیک به اندازه عمق[1] پوسته قرار می‌گیرد[۲۱]، در سازه‌های چندلایه مرکب بار حدی در مکان هندسی‌ای از محور جابه‌جایی‌ها قرار می‌گیرد که بسته به لایه‌چینی می‌تواند قبل، بعد و یا دقیقاً منطبق بر مقدار رایز باشد.

۶- مراجع

[1] Dawe, D. J. and Wang, S., “Postbuckling analysis of thin rectangular laminated plates by spline FSM”, Thin-Walled structures, Vol. 30, pp. 159-79, 1998.
[2] Hossain S. J. Sinha P. K. and Sheikh, A.H., “A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells”, Computers & Structures, Vol. 82, pp. 1623-38, 2004.
[3] Kundu C.K. and Sinha P.K., “Post buckling analysis of laminated composite shells”, Composite Structures, VOl. 78, pp. 316-324, 2007.
[4] Ojeda, O. Prusty, B.G. Lawrence, N. and Thomas G., “A new approach for the large deflection finite element analysis of isotropic and composite plates with arbitrary orientated stiffeners”, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 43, pp. 989-1002, 2007.
[5] Reddy, J.N. Arciniega, R.A. and Moleiro F., “Finite element analysis of composite plates and shells”, Encyclopedia of Aerospace Engineering, 2010.
[6] Ćetković, M. and Vuksanović Dj., “Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates using a layerwise displacement model”, Serbian Society for Computational Mechanics, vol 5, no 1, pp. 50-68, 2011.
[7] Choudhary, S.S. and Tungikar V.B., “A simple finite element for nonlinear analysis of composite plates”, Engineering Science and Technology, Vol. 3, No. 6, 2011.
[8] Kakani, G.S. and Prasanthi P.P., “Prediction of nonlinear behavior of thin skew plates with cut-out using finite element analysis”, Engineering Research & Technology, Vol. 1, 2012.
[9] Saad, A.S., “Elasticity: theory and applications”, Ross Publishing, 2009.
[10] Zienkiewicz, O.C. and Taylor R.L., “The finite element method”, Vol. 1-2, 2000.
[11] Riks E., “An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, No. 7, pp. 529-51, 1979.
[12] Crisfield, M.A. “A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through”, Computers & Structures, Vol. 13, No. 1, pp. 55-62, 1981.
[13] Memon, B.A. and Su, X., “Arc-length technique for nonlinear finite element analysis", Journal of Zhejiang University Science, Vol. 5, No. 5, pp. 618-28, 2004.
[14] Calo, E., “Arc-length strategies in structural equilibrium path-following”, MS Thesis, universita’ degli studi di pavia, facolta’ di ingegneria, 2006.
[15] Forde, B.W.R. and Stiemer, S.F., “Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis”, Computers & Structures, Vol. 27, No. 5, pp. 625-30, 1987.

1. rise

[16] Pica, A. Wood, R.D. and Hinton, E., "Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behavior using a mindlin formulation", Computers & Structures, Vol. 11, No. 3, pp. 203-215, 1980.
[17] Alinia, M.M. and Ghannadpour S.A.M., "Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads", J. Composite Structures, Vol. 75, pp. 67-71, 2006.
[18]Woo. J. and Meguid. S.A., "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shells", Int. journal of solids and structures, Vol. 38, pp. 7409-21, 2001.
[19] Sabir, A.B. and Djoudi M.S., "Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates", Thin-walled structures, vol 21, No. 3, pp. 253-67, 1995.
[20] Kim K. and Voyiadjis G.Z., "Nonlinear finite element analysis of composite panels", Composites Part B, Vol. 30, pp. 365–8, 1999
[21] Jones, R.M., "Buckling of Bars, Plates and Shells", Blacksburg, Virginia United States of America, Bull Ridge, 2006.