جلد ۱، شماره ۲، اسفند ۹۳، ص‌ص ۱- ۱۰

نشریه علوم و فناوری

کامپوزیـــت

http://jstc.iust.ac.ir

بررسی ارتعاشات اجباری غیرخطی نامتقارن ورق‌های نازک دایروی از جنس مواد هدفمند

اصغر نثیر[۱]، علی قاهری[۲]*

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۱۱۵۵۹۵۶۷، ghaheri@mech.sharif.edu

اطلاعات مقاله

دریافت: آذر ۹۳

پذیرش: دی ۹۳

کلیدواژگان:

حل تحلیلی

روش اغتشاشات

مواد هدفمند

تئوری ون‌کارمن

چکیده

در تحقیق حاضر ارتعاشات غیرخطی اجباری ورق‌های نازک دایروی از جنس مواد هدفمند با در نظرگرفتن شرایط مرزی کلاسیک گیردار مطالعه شده است. برای وارد کردن جملات غیرخطی هندسی ناشی از جابه‌جایی‌های بزرگ ورق در راستای عرضی (به اندازه ضخامت ورق) از روابط کرنش- جابه‌جایی ون‌کارمن، و برای حل معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم از روش اغتشاشات MMS و مدهای فرضی در دستگاه مختصات قطبی استفاده شده است. خواص مکانیکی در راستای ضخامت ورق طبق رابطه توانی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده ماده هدفمند، تبعیت می‌کند. نیروی عرضی اعمالی به‌صورت هارمونیک، به فرکانس نوسان نزدیک به یکی از فرکانس‌های طبیعی نامتقارن سیستم فرض شده است. پدیده‌های ارتعاشات غیرخطی مانند پرش و رزونانس داخلی مورد بررسی قرار گرفته و اثرات شرایط مرزی، تغییرات کسرحجمی ماده هدفمند، دامنه و فرکانس نیروی خارجی اعمالی بر رفتار دینامیکی مطالعه شده است. نتایج به‌دست آمده از این روش با نتایج موجود در کارهای گذشته و در صورت امکان با نتایج نرم‌افزارهای المان محدود صحت سنجی شده‌اند.

Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates

Asghar Nosier, Ali Ghaheri*

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 111559567, Tehran, Iran, ghaheri@mech.sharif.edu

Keywords

Analytical solution,
Perturbation technique,
Functionally graded materials,
von Karman theory

Nonlinear forced vibrations of thin functionally graded circular plates under classical clamped boundary conditions are investigated based on the classical plate theory. The von Karman strain-displacement relations are employed to include the geometrical nonlinearity caused by large transverse displacements of the order of the plate thickness .Modal expansion in polar coordinate system along with the perturbation method of multiple scales is used to solve the governing equations. The material properties are graded through the plate thickness according to a power-law distribution of the volume fraction of the constituents. Transverse forcing is supposed to be harmonic with the angular frequency near to the natural frequency of one particular asymmetric mode. Nonlinear vibration phenomena such as jump phenomenon and internal resonance are studied and the effects of boundary conditions, power-law distribution, amplitude and frequency of external load on dynamical behavior of circular plate are examined. The validity of results is established by comparison with the existing results in the literature as well as FEM results.

Abstract

۱- مقدمه

در بسیاری از مسائل مهندسی مانند اجزای سازه‌ها، ماشین‌ها، حسگرها، وسایل آکوستیکی، طراحی بدنه و سازه‌ی هواپیما، معماری بناها و سازه‌های عمرانی از ورق‌ها با ضخامت کم استفاده می‌شود و معمولاً این ورق‌ها تحت بارگذاری شدید دینامیکی قرار دارند که باعث ایجاد ارتعاشات با دامنه نوسان بزرگ می‌شود. وقتی که دامنه ارتعاشات از ضخامت ورق بیشتر شود، باعث غیرخطی شدن هندسی مسئله می‌گردد و تئوری‌های خطی دیگر توانایی پیش‌بینی رفتارهای ورق مانند پدیده پرش[۱] و رزونانس داخلی[۲] را ندارند [۱]، بنابراین برای این شرایط دینامیکی معادلات ون‌کارمن (معادلات حرکت غیرخطی حاکم بر ورق‌ها) به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد[۲].

مواد هدفمند با تغییرات تدریجی خواص[۳] اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در ژاپن در سال ۱۹۸۴ [۳] به عنوان مواد تحمل کننده دما معرفی شدند. مواد هدفمند از دو یا چند جزء تشکیل شده‌اند و خواص آن‌ها به طور پیوسته با مکان تغییر می‌کند. این خاصیت با تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی اجزاء تشکیل دهنده ماده در طی ساخت آن، بوجود می‌آید. بنابراین این مواد در زمره مواد غیرهمگن[۴] هستند. از مزایای استفاده از این مواد این

1. Jump phenomenon
2. Internal resonance

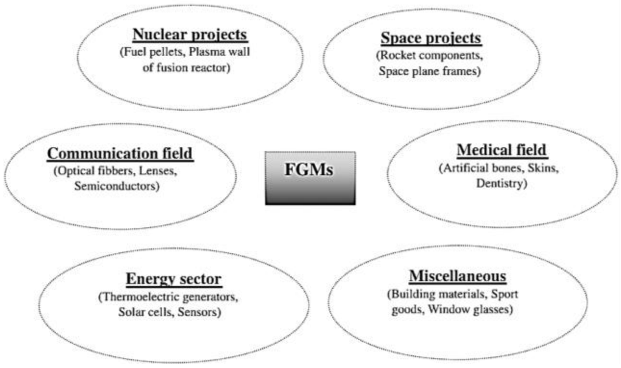
3. Functionally graded materials
4. Nonhomogeneous

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده نمایید:

Please cite this article using:

Ghaheri, A. and Nosier, A., "Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates," Journal of Science and Technology of Composite, Vol. 1, No. 2, pp. 1-10, 2015.

است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش نسبت به مواد مرکب لایه‌ای[1] مرسوم و یا روش‌های پوششی مرسوم برای مقاوم‌سازی ماده بسیار زیاد کاهش می‌یابد. لذا در سال‌های اخیر استفاده از این مواد به زمینه‌های بسیاری گسترش یافته است. مهمترین کاربرد این مواد استفاده از آن‌ها به عنوان سدهای حرارتی در محیط‌هایی با گرادیان دمای بالا مانند سازه‌های فضایی، رآکتورهای هسته‌ای، پره‌های توربین و سیستم‌های احتراقی است. از دیگر کاربردهای این مواد می‌توان به مواد الکترونیکی و نوری، مواد مورد استفاده در تبدیل انرژی، پوشش محافظ در ماشین ابزار و استفاده در تجهیزات پیوندی بیوپزشکی اشاره نمود. شکل ۱ به صورت کلی این کاربردها را نشان می‌دهد. در ادامه به بیان مهمترین پژوهش‌های صورت گرفته بر ارتعاشات غیرخطی ورقهای دایروی ایزوتروپیک و مواد هدفمند پرداخته می‌شود.



شکل ۱ زمینه‌های کاربرد مواد هدفمند [۴]

ارتعاشات خطی ورق‌های دایروی و حلقوی در کتاب لیسا [۵] به طور جامع مورد بررسی مطالعه قرار گرفته است. توبایس [۶] در سال ۱۹۵۷، و ویلیلام و توبایس [۷] در سال ۱۹۶۳ جزء اولین افرادی بودند که ارتعاشات غیرخطی بدون دمپینگ ورق دایروی کامل و ناقص[2] را مطالعه کردند. توز و همکاران [۸] به کمک روش اغتشاشات، ارتعاشات اجباری غیرخطی نامتقارن[3] ورق‌های کامل و ناقص دایروی با شرایط مرزی آزاد را مطالعه کردند و نتایج خود را با نتایج به دست آمده از روش آزمایشگاهی [۹] مقایسه کردند. لی و یو [۱۰] ارتعاشات غیرخطی نامتقارن یک ورق دایروی با شرط مرزی گیردار و روی بستر الاستیک را به کمک روش اغتشاشات حل و پدیده رزونانس داخلی را مطالعه کردند.

مطالعه بر رفتار غیرخطی ورق‌های هدفمند در مقاسیه با پژوهش‌های انجام شده بر رفتار خطی ورق‌های هدفمند مستطیلی و دایروی بسیار کم می‌باشد. گونس و ردی [۱۱] به بررسی غیرخطی هندسی ورق‌های دایروی هدفمند با شرایط مرزی متفاوت تحت بارهای مکانیکی و گرمایی پرداختند. اخیراً، بر اساس تئوری اول برشی، نثیر و فلاح روش تحلیلی برای خمش نامتقارن خطی [۱۲] و غیرخطی [۱۳]، به کمک روش اغتشاشات، ورق‌های دایروی هدفمند با شرایط مرزی ساده و گیردار تحت بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه دادند.

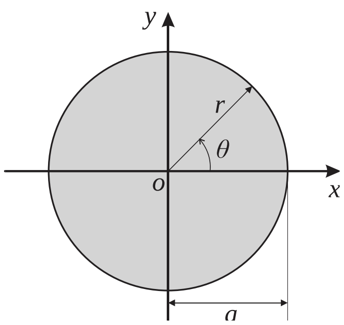
الله وردی زاده و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۰۶ اولین محققینی بودند که روابط حاکم بر ارتعاشات غیرخطی متقارن محوری ورق‌های نازک دایروی هدفمند را بر اساس معادلات دینامیکی ون‌کارمن، فرمول بندی کردند و اثرات دامنه ارتعاش و کسر حجمی را بر تنش اعمالی در ورق بررسی کردند. هو و ژنگ [۱۵] پدیده دوشاخه‌شدن را در ارتعاشات غیرخطی متقارن ورق دایروی هدفمند با در نظر گرفتن اثرات دمایی و نیروی عرضی هارمونیک مطالعه کردند. در نهایت امینی و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی ورق‌های حلقوی ضخیم هدفمند بر اساس تئوری مرتبه اول برشی ورق مورد مطالعه قرار دادند و اثرات دامنه نوسانات و کسرحجمی را بر فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی کردند.

مرور بر ادبیات انجام شده در بالا به خوبی نشان می‌دهد، در حالی که تعداد پژوهش‌های زیادی به کمک روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی یا به شکل تجربی به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری غیرخطی و ورق‌های دایروی و حلقوی ایزوتروپیک و هدفمند با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اثرات گوناگون پرداخته‌اند، هیچ کار تئوری یا تجربی بر ارتعاشات غیرخطی نامتقارن ورق‌های نازک دایروی هدفمند انجام نشده است. از آنجایی که مدهای ارتعاشی نامتقارن دارای نقش مهمتری در ارتعاشات ورق‌ها هستند، هدف اصلی این تحقیق استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و تئوری ون‌کارمن برای به دست آوردن معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی اجباری و استفاده از روش مدهای فرضی و اغتشاشات برای حل این مساله می‌باشد. اثرات تغییرات کسرحجمی ماده هدفمند و دامنه و فرکانس نیروی خارجی اعمالی بر رفتار غیرخطی دینامیکی مطالعه و صحت نتایج با کارهای موجود و نتایج نرم افزار المان محدود سنجیده شده‌اند. در فصل بعد به تبیین اصول و مبانی تئوری و مدل سازی مساله و حل معادلات حاکم در دستگاه مختصات دایروی برای شرایط مرزی گوناگون پرداخته می‌شود.

۲- مدل‌سازی تئوری و حل معادلات غیرخطی

۲-۱- هندسه مساله و خواص مکانیکی ماده هدفمند

در این مرحله یک ورق دایروی از جنس ماده هدفمند با شعاع a و ضخامت h در نظر گرفته می‌شود. هندسه مسئله در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ ورق دایروی و مختصات قطبی

ماده هدفمند به صورت ماده خطی الاستیک غیرهمگن که خواص آن، $\wp$، به شکل پیوسته در راستای ضخامت ورق، که تابعی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده آن است، مدل سازی می‌شود. با فرض اینکه ورق از دو ماده سرامیک و فلز تشکیل شده است و کسر حجمی فلز از قانون توانی پیروی می‌کند، به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود.

1. Laminated composites
2. Imperfect
3. Asymmetric

$$\wp(z) = (\wp_m - \wp_c)\left(\frac{h-2z}{2H}\right)^g + \wp_c, \qquad (۱)$$

که زیروند c و m نشان دهنده سرامیک و فلز هستند و g اندیس توانی است که مقادیر بزرگتر یا برابر صفر را می‌تواند اختیار کند. در این تحقیق، رابطه (۱) برای مدل کردن مدول یانگ (E)، ضریب پواسون (ν) و چگالی (ρ) ورق هدفمند استفاده خواهد شد.

۲-۲- معادلات ارتعاشات غیرخطی

با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک ورق‌ها، جابه‌جایی‌ها به صورت رابطه (۲) بیان می‌شوند [۲].

$$u_1(r,\theta,z) = u(r,\theta) - z w_{,r}(r,\theta),$$
$$u_2(r,\theta,z) = v(r,\theta) - \frac{z}{r} w_{,\theta}(r,\theta),$$
$$u_3(r,\theta,z) = w(r,\theta), \qquad (۲)$$

که در آن u، v و w جابه‌جای‌های نقاط صفحه میانی ورق را در راستاهای r، θ و z نشان می‌دهد، و $w_{,r}$ و $w_{,\theta}$ مشتقات w نسبت به r و θ بیان می‌کند. با جایگذاری معادلات (۲) در روابط الاستیسیته غیرخطی کرنش جابه‌جایی ون‌کارمن [۱۷]، کرنش‌ها به صورت رابطه‌های (۳) و (۴) به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 - z w_{,rr},$$
$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 - z\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right),$$
$$\varepsilon_z = 0,$$
$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}^0 - 2z\left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right),$$
$$\gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0, \qquad (۳)$$

و

$$\varepsilon_r^0 = u_{,r} + \frac{1}{2}\left(w_{,r}\right)^2,$$
$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{r}\left(u + v_{,\theta}\right) + \frac{1}{2r^2}\left(w_{,\theta}\right)^2,$$
$$\gamma_{r\theta}^0 = \frac{1}{r}\left(u_{,\theta} - v\right) + v_{,r} + \frac{1}{r} w_{,r} w_{,\theta}, \qquad (۴)$$

بر اساس روابط (۳) و (۴)، و با استفاده از اصل همیلتون [۱۷]، و نادیده گرفتن اثر اینرسی دورانی و اینرسی داخل صفحه‌ای (به دلیل زیاد بودن فرکانس‌های طبیعی داخل صفحه‌ای)، معادلات حرکت به شکل (۵) به دست می‌آید.

$$\delta u;\quad N_{r,r} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} = 0,$$
$$\delta v;\quad N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} = 0,$$
$$\delta w_{,r};\quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} - Q_r = 0,$$
$$\delta w_{,\theta};\quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} - Q_r = 0,$$
$$\delta w;\quad Q_{r,r} + \frac{1}{r} Q_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} Q_r + N_1 - \mu \dot{w} + P(r,\theta,t) = I\ddot{w}, \qquad (۵)$$

که در آن $P(r,\theta,t)$ نیروی عرضی اعمالی بر سطح صفحه، μ ضریب دمپینگ، I اینرسی عرضی، $\dot{w}$ و $\ddot{w}$ نشان دهنده مشتقات مرتبه اول و دوم زمانی هستند و:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)\, dz,$$

$$N_1 = N_r w_{,rr} + N_\theta\left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}\right) + 2N_{r\theta}\left(\frac{1}{r} w_{,\theta}\right)_{,r} \qquad (۶)$$

نیروها و ممان‌های به دست آمده در معادلات (۵) و (۶) به‌صورت رابطه (۷) معین می‌شوند.

$$(N_r, N_\theta, N_{r\theta}, Q_\theta, Q_r) = \int_{-h/2}^{h/2}$$

$$(M_r, M_\theta, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2}$$

با استفاده از روابط خطی تنش و کرنش در مواد الاستیک [۱۲]، نیروها و ممان‌ها به شکل رابطه (۸) به‌دست می‌آیند.

$$N_r = A_1\varepsilon_r^0 + (A_1 - 2A_2)\varepsilon_\theta^0 - B_1 w_{,rr} - (B_1 - 2B_2)\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right),$$
$$N_\theta = (A_1 - 2A_2)\varepsilon_r^0 + A_1\varepsilon_\theta^0 - (B_1 - 2B_2) w_{,rr} - B_1\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right),$$
$$N_{r\theta} = A_2\gamma_{r\theta}^0 - 2B_2\left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right),$$

$$M_r = B_1\varepsilon_r^0 + (B_1 - 2B_2)\varepsilon_\theta^0 - D_1 w_{,rr} - (D_1 - 2D_2)\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right),$$
$$M_\theta = (B_1 - 2B_2)\varepsilon_r^0 + B_1\varepsilon_\theta^0 - (D_1 - 2D_2) w_{,rr} - D_1\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right),$$
$$M_{r\theta} = B_2\gamma_{r\theta}^0 - 2D_2\left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right), \qquad (۸)$$

که در آن‌ها ضرایب سفتی به شکل رابطه (۹) محاسبه می‌شود.

$$(A_1, B_1, D_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}(1, z, z^2)\, dz,$$
$$(A_2, B_2, D_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))}(1, z, z^2)\, dz, \qquad (۹)$$

که E و ν، مدول یانگ و ضریب پواسون هستند و فرض شده است بر طبق رابطه توانی در (۱) تغییر کنند.

۲-۳- فرمول‌بندی مجدد معادلات حاکم

برای ساده‌تر شده معادلات حرکت (۵)، تابع نیرویی $F(r,\theta)$ را می‌توان به شکل رابطه (۱۰) معرفی کرد.

$$N_r = \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta},\quad N_\theta = F_{,rr},\quad N_{r\theta} = -\left(\frac{1}{r} F_{,\theta}\right)_{,r}, \qquad (۱۰)$$

که با استفاده از تعریف بالا، دو رابطه اول معادلات (۵) به شکل دقیق برقرار می‌شوند. علاوه بر آن رابطه دوم (۶) به شکل رابطه (۱۱) تبدیل می‌شود.

$$N_1 = L(w,F) = \left(\frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta}\right) w_{,rr} + F_{,rr}\left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}\right) - 2\left(\frac{1}{r} F_{,\theta}\right)_{,r}\left(\frac{1}{r} w_{,\theta}\right)_{,r} \qquad (۱۱)$$

رابطه بالا در تمامی معادلات غیرخطی ورق و پوسته ون‌کارمن ظاهر می‌شود [2] و با نام عملگر ون‌کارمن[1] نیز شناخته می‌شود. در ادامه، با حل سه معادله اول (۸) برای ε_r^0، ε_θ^0 و $\gamma_{r\theta}^0$ نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon_r^0 = \frac{A_1}{\bar{A}}(N_r + N_\theta) - \frac{1}{2A_2}N_\theta + \frac{B_2}{A_2}w_{,rr} - \frac{2\bar{C}}{\bar{A}}\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr}\right),$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{2A_2}N_r + \frac{A_1}{\bar{A}}(N_r + N_\theta) + \frac{B_2}{A_2}\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r}\right) - \frac{2\bar{C}}{\bar{A}}\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr}\right),$$

$$\gamma_{r\theta}^0 = \frac{1}{A_2}N_{r\theta} + \frac{2B_2}{A_2}\left(\frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2}\right), \qquad (۱۲)$$

که در آن $\bar{A} = 4A_2(A_1 - A_2)$ و $\bar{C} = A_1B_2 - A_2B_1$.

با جایگذاری معادلات (۱۰) در روابط (۱۲) و جایگذاری نتایج به‌دست آمده از آن در معادله سازگاری کرنش‌ها [۱۸]، $\varepsilon^0_{r,\theta\theta} - r\varepsilon^0_{r,r} - (r\gamma^0_{r\theta})_{,r\theta} + \left(r^2\varepsilon^0_{\theta,r}\right)_{,r} = N_2$، معادله (۱۳) به دست می‌آید.

$$\nabla^2\nabla^2 F - \frac{2\bar{C}}{A_1}\nabla^2\nabla^2 w = \frac{\bar{A}}{A_1 r^2}N_2, \qquad (۱۳)$$

که در آن ∇^2 لاپلاسین[2] در مختصات قطبی بوده و N2 از رابطه (۱۴) به‌دست می‌آید.

$$N_2 = -\frac{r^2}{2}L(w,w) \qquad (۱۴)$$

با محاسبه Q_r و Q_θ از معادلات سوم و چهارم (۵) و جایگذاری در معادله آخر آن، بعد از انجام محاسبات و ساده سازی به کمک معادله (۱۳) معادله حرکت ارتعاشی عرضی به شکل رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

$$D\nabla^2\nabla^2 w + I\ddot{w} = N_1 - \frac{2\bar{C}}{A_1 r^2}N_2 - \mu\dot{w} + P(r,\theta,t), \qquad (۱۵)$$

که در آن $D = D_1 - B_1^2/A_1$. روابط (۱۳) و (۱۵)، معادلات دینامیکی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های نازک هدفمند را در تمامی دستگاه‌های مختصات (به دلیل ظاهر شدن عملگر لاپلاسین) بیان می‌کنند.

۲-۴- بی‌بعد سازی

در این قسمت به مطالعه ارتعاشات ورق‌های هدفمند با ضریب پواسون ثابت پرداخته می‌شود. در نتیجه مقدار $\bar{C} = 0$ می‌شود و معادلات (۱۳) و (۱۵) بعد از اعمال معادله (۱۴) و ساده سازی به شکل رابطه (۱۶) به دست می‌آیند.

$$D\nabla^2\nabla^2 w + I\ddot{w}$$

$$\nabla^2\nabla^2 F = -\frac{\overline{Eh}}{2}$$

که در آن

$$\overline{Eh} = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\,\mathrm{d}z \qquad (۱۸)$$

مناسب‌تر آن است که معادلات (۱۶) و (۱۷) به شکل بی‌بعد نوشته شوند. لذا مولفه‌های مساله به شکل بی‌بعد در رابطه (۱۹) تعریف می‌شود.

$$r = a\bar{r}, \quad t =$$

$$P = \overline{Eh}\,w_0^3/a^4\,\bar{P}, \quad \mu = \left(2\overline{Eh}w_0^2/a^2\right)\sqrt{I/D}\,\bar{\mu} \qquad (۱۹)$$

که w_0 اندازه جابجایی عرضی ورق می‌باشد و با توجه به مساله مورد بررسی انتخاب می‌گردد. با جایگذاری (۱۹) در معادلات (۱۶) و (۱۷)، و حذف علامت بار[3] پس از ساده سازی نتیجه می‌دهد:

$$\nabla^2\nabla^2 w + \ddot{w} = \varepsilon[L(w,F) - 2\mu\dot{w} + P(r,\theta,t)], \qquad (۲۰)$$

$$\nabla^2\nabla^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w), \qquad (۲۱)$$

که در آن $\varepsilon = \overline{Eh}w_0^2/D$ و شرایط مرزی مساله باید در $r = 1$ اعمال شوند. باید توجه داشت که معادلات ون کارمن برای جابجایی‌های عرضی به اندازه ضخامت ورق برقرار هستند. در این صورت باید مقدار $w_0 = h$ را درمعادلات قرار داد. در این حالت مقدار ε نسبت به واحد بزرگتر می‌شود (برای ماده ایزوتروپیک: $\varepsilon = 12(1-\nu^2)$)، پس عبارات غیر خطی در معادله (۲۰) از عبارات خطی بزرگتر می‌شوند. برای استفاده از روش اغتشاشات نیاز است که جملات غیرخطی از جملات خطی کوچکتر باشند. با انتخاب $w_0 = h^2/a$، مقدار ε کوچکتر از واحد می شود (برای ماده ایزوتروپیک: $\varepsilon = 12(1-\nu^2)h^2/a^2$). همانطور که در کارهای گذشته ذکر شده است [۱۹]، این تئوری به عنوان توصعه تئوری خطی برای مطالعه پدیده‌های غیرخطی در ارتعاشات ورق‌ها می‌باشد. این روش برای جابجایی‌های عرضی به اندازه h^2/a، پاسخ ورق را به شکل نسبتاً دقیقی بررسی می‌کند.

۲-۵- شرایط مرزی

در این تحقیق شرایط مرزی گیردار[4] در راستای عرضی و حالت‌های گیردار در راستای داخل صفحه‌ای و همچنین آزاد[5] در راستای داخل صفحه‌ای را مورد مطالعه قرار داده شده است. لذا برای راستای عرضی در $r = 1$ شرایط رابطه (۲۲) باید اعمال شود.

$$w = w_{,r} = 0, \qquad (۲۲)$$

برای حالتی که در راستای داخل صفحه‌ای شرط مرزی آزاد ($N_r = N_{r\theta} = 0$) وجود داشته باشد از معادله (۱۰) نتیجه گرفته می‌شود:

$$F = F_{,r} = 0, \qquad (۲۳)$$

اگر شرط گیردار ($u = v = 0$) در راستای داخل صفحه‌ای وجود داشته باشد، به کمک روابط (۴) و (۱۲) و در نظر داشتن معادلات (۲۲) بعد از ساده سازی رابطه (۲۴) به دست خواهد آمد.

$$F_{,rr} - \nu\left(\frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2}\right) = 0,$$

$$F_{,rrr} + \frac{F_{,rr}}{r} - \frac{F_{,r}}{r^2} + (2+\nu)\frac{F_{,r\theta\theta}}{r^2} - (3+\nu)\frac{F_{,\theta\theta}}{r^3} = 0, \qquad (۲۴)$$

در ادامه ابتدا قسمت خطی معادلات برای شرایط مرزی مفروض حل و سپس پاسخ غیرخطی به صورت جمعی از مدهای خطی فرض خواهد شد.

۲-۶- حل قسمت خطی

با در نظر گرفتن قسمت خطی معادلات (۳-۲۰) و (۳-۲۱) و پاسخ هامونیک ارتعاشاتی، معادلات حرکت به شکل روابط (۲۵) و (۲۶) بیان می‌شوند.

$$\nabla^2\nabla^2\Phi - k^4\Phi = 0, \qquad (۲۵)$$

$$\nabla^2\nabla^2\Psi - \zeta^4\Psi = 0, \qquad (۲۶)$$

1. von Karman operator
2. Laplacian
3. Overbar
4. Clamped
5. Free

که در آن $k^4=\omega^2$ و ω فرکانس طبیعی سیستم است. حل تحلیلی معادلات با مشتقات جزئی بالا در دستگاه مختصات قطبی را بر اساس توابع بسل[1] می‌توان بیان نمود [۲۰]:

$$\begin{aligned}
&\Phi(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m^1(r,\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m^2(r,\theta),\\
&\Phi_m^1(r,\theta)=[a_m\,J_m(kr)+b_m\,I_m(kr)]\cos(m\theta),\\
&\Phi_m^2(r,\theta)=[c_m\,J_m(kr)+d_m\,I_m(kr)]\sin(m\theta),
\end{aligned}\tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_m^1(r,\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}\Psi_m^2(r,\theta),\\
&\Psi_m^1(r,\theta)=[e_m\,J_m(\zeta r)+f_m\,I_m(\zeta r)]\cos(m\theta),\\
&\Psi_m^2(r,\theta)=[g_m\,J_m(\zeta r)+h_m\,I_m(\zeta r)]\sin(m\theta),
\end{aligned}\tag{۲۸}$$

که m نشان دهنده تعداد قطرهای صفر در شکل مد است. حال باید شرایط مرزی مساله اعمال شود تا معادله مشخصه سیستم و همچنین شکل مدها محاسبه گردند. پس از اعمال رابطه مرزی (۲۲) در $r=1$ به پاسخ جابجایی عرضی ورق (۲۷) و ساده سازی معادله مشخصه به شکل رابطه (۲۹) به دست می‌آید.

$$\mathrm{J_m(k)\;I_{m+1}(k)+J_{m+1}(k)\;I_m(k)=0},\tag{۲۹}$$

که با حل آن مقادیر ویژه k_{mn} محاسبه می‌گردند و برای شکل مدهای عرضی نیز نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{mn}^1(r,\theta)=a_{mn}\left[J_m(k_{mn}r)-\frac{J_m(k_{mn})}{I_m(k_{mn})}\,I_m(k_{mn}r)\right]\cos(m\theta),\\
&\Phi_{mn}^2(r,\theta)=c_{mn}\left[J_m(k_{mn}r)-\frac{J_m(k_{mn})}{I_m(k_{mn})}\,I_m(k_{mn}r)\right]\sin(m\theta)
\end{aligned}\tag{۳۰}$$

به همین طریق، برای شرط مرزی آزاد در راستای داخل صفحه‌ای از روابط (۲۳) معادله مشخصه (۳۱) را می‌توان نتیجه گرفت.

$$J_m(\zeta)\,I_{m+1}(\zeta)+J_{m+1}(\zeta)\,I_m(\zeta)=0,\tag{۳۱}$$

که با حل آن مقادیر ویژه ζ_{mn} محاسبه می‌گردند و شکل مدهای داخل صفحه‌ای به شکل رابطه (۳۲) حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\Psi_{mn}^1(r,\theta)=e_{mn}\left[J_m(\zeta_{mn}r)-\frac{J_m(\zeta_{mn})}{I_m(\zeta_{mn})}\,I_m(\zeta_{mn}r)\right]\cos(m\theta),\\
&\Psi_{mn}^2(r,\theta)=g_{mn}\left[J_m(\zeta_{mn}r)-\frac{J_m(\zeta_{mn})}{I_m(\zeta_{mn})}\,I_m(\zeta_{mn}r)\right]\sin(m\theta),
\end{aligned}\tag{۳۲}$$

در نهایت برای شرط مرزی گیردار در راستای داخل صفحه‌ای با استفاده از معادلات (۲۴) و پس از ساده سازی معادله مشخصه (۳۳) برای محاسبه مقادیر ویژه داخل صفحه‌ای به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
I_{m+1}(\zeta)\{J_m(\zeta)[(1+\nu)^2m^4-(1+\nu)(1+\nu+2\zeta^2)m^2\\
+2\zeta^2(1+\nu)m+\zeta^4]\\
-2\zeta^3(1+\nu)J_{m+1}(\zeta)\}\\
+I_m(\zeta)\{J_{m+1}(\zeta)[(1+\nu)^2m^4\\
-(1+\nu)(1+\nu-2\zeta^2)m^2\\
-2\zeta^2(1+\nu)m+\zeta^4]\\
-4m^2\zeta(1+\nu)J_m(\zeta)(m-1)\}=0,
\end{aligned}\tag{۳۳}$$

و در نهایت شکل مدها نیز به صورت رابطه (۳۴) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\Psi_{mn}^1(r,\theta)=e_{mn}\cos(m\theta)\\
&J_m(\zeta_{mn}r)\left[1-\left[\frac{[(1+\nu)(m^2-m)-\zeta_{mn}^2]\,J_m(\zeta_{mn})}{\tilde{U}}\frac{I_m(\zeta_{mn}r)}{J_m(\zeta_{mn}r)}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\left[\frac{(1+\nu)\zeta_{mn}\,J_{m+1}(\zeta_{mn})}{\tilde{U}}\frac{I_m(\zeta_{mn}r)}{J_m(\zeta_{mn}r)}\right]\right]\\
&\Psi_{mn}^2(r,\theta)=g_{mn}\sin(m\theta)\\
&J_m(\zeta_{mn}r)\left[1-\left[\frac{[(1+\nu)(m^2-m)-\zeta_{mn}^2]\,J_m(\zeta_{mn})}{\tilde{U}}\frac{I_m(\zeta_{mn}r)}{J_m(\zeta_{mn}r)}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{(1+\nu)\zeta_{mn}\,J_{m+1}(\zeta_{mn})}{\tilde{U}}\,\frac{I_m(\zeta_{mn}r)}{J_m(\zeta_{mn}r)}\right]\right]\\
&\tilde{U}=[(1+\nu)(m^2-m)+\zeta_{mn}^2]\,I_m(\zeta_{mn})\\
&\qquad-(1+\nu)\zeta_{mn}\,I_{m+1}(\zeta_{mn})
\end{aligned}\tag{۳۴}$$

در پایان نیز برای تعیین ضرایب ثابت a_{mn} و c_{mn} برای شکل مدهای عرضی و همچنین e_{mn} و g_{mn} برای شکل مدهای داخل صفحه‌ای، از روابط نرمال سازی (۳۵) استفاده خواهد شد.

$$\iint_S\left[\Phi_{mn}(r,\theta)\right]^2\mathrm{d}s=1,\ \ \iint_S\left[\Psi_{mn}(r,\theta)\right]^2\mathrm{d}s=1,\tag{۳۵}$$

که در آن $S=\{(r,\theta),0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi;r,\theta\in R\}$، مساحت ورق دایروی است. تا به اینجا قسمت خطی معادلات برای شرایط مرزی مفروض حل و مقادیر ویژه و شکل مدهای عرضی و داخل صفحه‌ای محاسبه شد.

۲-۷- بسط مودال

معادلات (۲۰) و (۲۱) را می‌توان با بسط w و F بر حسب توابع مکانی مناسب به معادلات جدا از هم تبدیل کرد. یکی از مناسب‌ترین توابع فرضی شکل مدهای ارتعاشی قسمت خطی این معادلات است که به شکل دقیق در بخش قبل محاسبه شدند زیرا دارای خاصیت تعامد هستند. در ایجا (ω_{mn},Φ_{mn}) و (ζ_{mn},Ψ_{mn}) به ترتیب شکل مدها و مقادیر ویژه عرضی و داخل صفحه‌ای قسمت خطی معادلات حاکم هستند که از روابط (۳۶) و (۳۷) تبعیت می‌کنند.

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_{mn}-\omega_{mn}^2\Phi_{mn}=0\tag{۳۶}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Psi_{mn}-\zeta_{mn}^4\Psi_{mn}=0\tag{۳۷}$$

حال w و F بر حسب ترکیبی از شکل مدهای عرضی و داخل صفحه‌ای تعریف می‌شوند:

$$w(r,\theta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(r,\theta)\,q_k(t)\tag{۳۸}$$

$$F(r,\theta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(r,\theta)\,\eta_k(t)\tag{۳۹}$$

1. Bessel functions

با جایگذاری معادله (۳۹) در معادله (۲۱) و استفاده از رابطه (۳۷)، با ضرب طرفین در Ψ_k و انتگرال گیری روی مساحت ورق از طرفین معادله و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها، مقادیر η_k به شکل رابطه (۴۰) به دست می‌آید.

$$\eta_k(t) = -\frac{1}{2\xi_k^4}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} H_{pq}^k q_p(t) q_q(t) \tag{۴۰}$$

که در آن

$$H_{pq}^k = \iint_S \Psi_k L\left(\Phi_p, \Phi_q\right) \mathrm{ds} \,/ \iint_S \Psi_k^2 \mathrm{ds}, \tag{۴۱}$$

حال با قرار دادن معادلات (۳۸) و (۳۹) در معادله (۲۰) و استفاده از معادله (۳۶)، با ضرب طرفین در Φ_k و انتگرال گیری روی مساحت ورق از طرفین معادله و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدهای عرضی، معادلات زیر برای ضریب مدهای عرضی حاصل می‌شود:

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \varepsilon\left[\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} E_{pq}^k q_p(t)\eta_q(t) - 2\mu\dot{q}_k(t) + Q_k(t)\right] \tag{۴۲}$$

که در آن

$$Q_k(t) = \iint_S P\Phi_k \mathrm{ds} \,/ \iint_S \Phi_k^2 \mathrm{ds},$$

$$E_{pq}^k = \iint_S \Phi_k L\left(\Phi_p, \Psi_q\right) \mathrm{ds} \,/ \iint_S \Phi_k^2 \mathrm{ds}, \tag{۴۳}$$

پس معادلات غیرخطی به معادلات (۴۰) و (۴۲) تبدیل شده‌اند که معادلات مرتبه ۲[1] بر حسب q_k و η_k هستند. به‌علاوه جایگذاری η_k از رابطه (۴۰) در معادله (۴۲) رابطه (۴۴) را نتیجه می‌دهد.

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \varepsilon\left[\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{pqr}^k q_p(t) q_q(t) q_r(t) - 2\mu\dot{q}_k(t) + Q_k(t)\right], \tag{۴۴}$$

که در آن

$$\Gamma_{pqr}^k = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_{pq}^i E_{ri}^k}{2\xi_i^4}, \tag{۴۵}$$

مشاهده می‌شود که در معادلات (۴۴) ضرایب مرتبط به معادله داخل صفحه‌ای (η_k) ظاهر نشده است. لذا، با حل این معادلات و به دست آوردن ضرایب $q_k(t)$ و جایگذاری در معادله (۳۸)، پاسخ ارتعاشات عرضی سیستم به دست می‌آید.

در ادامه فرض می‌شود که نیروی جانبی $P(r,\theta,t)$ هارمونیک با فرکانس نوسان Ω به ورق وارد شده است به طوری که ترم نیرو در معادله (۴۴) از رابطه (۴۳) به شکل $Q_k(t) = Q_k\cos(\Omega t)$ محاسبه شود. پاسخ دینامیکی ورق را می‌توان بوسیله شکل مدهای که فرکانس طبیعی آنها به فرکانس تحریک نزدیک است و همچنین، به دلیل رابطه غیرخطی، شکل مدهایی که از طریق پدیده رزونانس داخلی تحریک می‌شوند به دست آورد.

۲-۸- ارتعاشات تک مد

در این بخش فرض می‌شود که شرایط رزونانس داخلی وجود نداشته باشد و فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی یکی از شکل مدها نزدیک باشد که در این صورت از معادله (۴۴) نتیجه گرفته می‌شود.

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \varepsilon[\Gamma q^3(t) - 2\mu\dot{q}(t) + Q\cos(\Omega t)], \tag{۴۶}$$

که در آن $\Gamma = -\sum_{i=1}^{\infty}(H^i)^2/2\zeta_i^4$ و $H^i = \iint_S \Psi_i L(\Phi,\Phi)\mathrm{ds} \,/ \iint_S \Psi_i^2\mathrm{ds}$.
حال از تقریب مرتبه اول در روش اغتشاشات MMS[2] [1] استفاده می‌شود.

$$q(t) = q_1(T_0, T_1) + \varepsilon q_2(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2), \tag{۴۷}$$

به طوری که $T_j = \varepsilon^j t$. جایگذاری (۴۷) در (۴۶) و برابر قرار دادن ضرایب با توان برابر ε و استفاده از تعریف $D_j = \partial/\partial T_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} &D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = 0,\\ &D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = -2D_0 D_1 q_1 + \Gamma q_1^3 - 2\mu D_0 q_1 + Q\cos(\Omega t), \end{aligned} \tag{۴۸}$$

که با حل معادله اول رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$q_1 = A(T_1)\exp(i\omega T_0) + cc, \tag{۴۹}$$

که در آن cc نشان دهنده مزدوج مختلط[3] می‌باشد. حال با تعریف پارامتر تنظیم[4] به صورت $\Omega = \omega + \varepsilon\lambda$ و جایگذاری (۴۹) در معادله دوم (۴۸)، شرط حل پذیری[5] زیر منتج می‌شود:

$$-2i\omega(A' + \mu A) + 3\Gamma A^2\bar{A} + Q\exp(i\lambda T_1)/2 = 0, \tag{۵۰}$$

که علامت پریم $()' = \partial/\partial T_1$ را نشان می‌دهد. با تعریف قطبی $A(T_1) = a(T_1)\exp(i\theta(T_1))$ برای حل، سیستم دینامیکی زیر برای دامنه و فاز به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &a' = -\mu a + Q\sin(\gamma)/4\omega,\\ &a\gamma' = a\lambda + 3\Gamma a^3/2\omega + Q\cos(\gamma)/4\omega, \end{aligned} \tag{۵۱}$$

که $\gamma = \lambda T_1 - \theta$. ویژگی‌های معادله (۵۱) در کارهای گذشته بسیار کامل مورد مطالعه قرار گرفته است و در بخش عددی نیز مثال‌هایی با توجه به مساله مورد بررسی ارائه شده‌اند.

۲-۹- رزونانس داخلی

در صورتی که شرایط مورد نیاز برای پدیده رزونانس داخلی در فرکانس‌های سیستم وجود داشته باشد ($\omega_2 \approx \omega_1$ یا $\omega_2 \approx 3\omega_1$)، معادله (۴۴) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \varepsilon[&\Gamma_{11}q_1^3 + \Gamma_{12}q_2^3 + C_{11}q_1q_2^2 + C_{12}q_1^2q_2\\ &- 2\mu\dot{q}_1 + Q_1\cos(\Omega t)],\\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \varepsilon[&\Gamma_{21}q_1^3 + \Gamma_{22}q_2^3 + C_{21}q_1q_2^2 + C_{22}q_1^2q_2\\ &- 2\mu\dot{q}_2 + Q_2\cos(\Omega t)], \end{aligned} \tag{۵۲}$$

که در آن

$$\Gamma_{11} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(H_{11}^i\right)^2}{2\zeta_i^4}, \qquad \Gamma_{22} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(H_{22}^i\right)^2}{2\zeta_i^4},$$

$$\Gamma_{12} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_{22}^i H_{12}^i}{2\zeta_i^4}, \qquad \Gamma_{21} = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_{11}^i H_{12}^i}{2\zeta_i^4},$$

$$C_{11} = C_{22} = -2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(H_{12}^i\right)^2}{2\zeta_i^4} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{H_{11}^i H_{22}^i}{2\zeta_i^4},$$

1. Quadratic
2. method of multiple scale
3. complex conjugate
4. detuning
5. solvability condition

$$C_{12}=3\Gamma_{21},\qquad C_{21}=3\Gamma_{12} \tag{۵۳}$$

حال در روش MMS پاسخ‌های زیر فرض می‌گردند:

$$q_1(t)=q_{11}(T_0,T_1)+\varepsilon q_{12}(T_0,T_1)+O(\varepsilon^2),$$
$$q_2(t)=q_{21}(T_0,T_1)+\varepsilon q_{22}(T_0,T_1)+O(\varepsilon^2), \tag{۵۴}$$

سپس جایگذاری کردن روابط (۵۴) در معادلات (۵۲) و برابر قرار دادن ضرایب با توان برابر ε نتیجه می‌دهد:

$$D_0^2q_{11}+\omega_1^2q_{11}=0,$$
$$D_0^2q_{21}+\omega_2^2q_{21}=0, \tag{۵۵}$$

$$D_0^2q_{12}+\omega_1^2q_{12}=-2D_0D_1q_{11}+\Gamma_{11}q_{11}^3+\Gamma_{12}q_{21}^3+C_{11}q_{11}q_{21}^2+C_{12}q_{11}^2q_{21}-2\mu D_0q_{11}+Q_1\cos(\Omega t),$$
$$D_0^2q_{22}+\omega_1^2q_{22}=-2D_0D_1q_{21}+\Gamma_{21}q_{11}^3+\Gamma_{22}q_{21}^3+C_{21}q_{11}q_{21}^2+C_{22}q_{11}^2q_{21}-2\mu D_0q_{21}+Q_2cos(\Omega t), \tag{۵۶}$$

حل معادلات (۵۵) به شکل زیر می‌شود:

$$q_{11}=A_1(T_1)\exp(i\omega_1T_0)+cc,$$
$$q_{21}=A_2(T_1)\exp(i\omega_2T_0)+cc \tag{۵۷}$$

در ورق‌های دایروی و در حالتی که حداقل یک قطر صفر وجود داشته باشد ($m=1,2,\ldots$)، به ازای هر فرکانس طبیعی دو شکل مد با اختلاف فاز ۹۰ درجه وجود دارد (شکل مدهای عرضی (۳۰)). در حالت ورق واقعی به دلیل وجود اجتناب ناپذیر نقصان[1] در هندسه و ساخت، نشان داده شده که مقادیر فرکانس طبیعی اندکی با هم متفاوت خواهند شد و شکل مدها نسبت به حالت تئوری اندکی چرخیده و دیگر ۹۰ درجه اختلاف فاز را دقیق ایجاد نمی‌کنند [۶]. بنابراین در ادامه حالت $\omega_2\approx\omega_1$ برای بررسی پدیده رزونانس داخلی در نظر گرفته می‌شود. با تعریف پارامتر تنظیم برای اختلاف فرکانس‌ها به صورت $\omega_2=\omega_1+\varepsilon\sigma$، و اگر اختلاف فرکانس نیرو نسبت به فرکانس بزرگتر به شکل $\Omega=\omega_2+\varepsilon\lambda$ تعریف گردد و این دو را همراه با روابط (۵۷) در معادلات (۵۶) قرار داده شوند، شرایط حل‌پذیری (۵۸) حاصل می‌شوند.

$$-2i\omega_1(A_1'+\mu A_1)+3\Gamma_{11}A_1^2\bar{A}_1+3\Gamma_{12}A_2^2\bar{A}_2\exp(i\sigma T_1)+C_{11}A_2[2A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2\exp(2i\sigma T_1)]+C_{12}A_1\exp(-i\sigma T_1)[A_1\bar{A}_2+2\bar{A}_1A_2\exp(2i\sigma T_1)]=0,$$
$$-2i\omega_2(A_2'+\mu A_2)+3\Gamma_{22}A_2^2\bar{A}_2+3\Gamma_{21}A_1^2\bar{A}_1\exp(-i\sigma T_1)+C_{22}A_1[2\bar{A}_1A_2+A_1\bar{A}_2\exp(-2i\sigma T_1)]+C_{21}A_2\exp(-i\sigma T_1)[\bar{A}_1A_2\exp(2i\sigma T_1)+2A_1\bar{A}_2]+Q_2\exp(i\lambda T_1)/2=0, \tag{۵۸}$$

با استفاده از تعریف قطبی $A_1(T_1)=a_1(T_1)\exp(i\theta_1(T_1))$ و $A_2(T_1)=a_2(T_1)\,exp(i\theta_2(T_1))$، و با معرفی $\gamma_1=\sigma T_1+\theta_2-\theta_1$، $\gamma_2=\lambda T_1-\theta_2$ در معادله (۵۸) و انجام عملیات ریاضی در نهایت سیستم دینامیکی طبق رابطه (۵۹) به دست می‌آید.

$$a_1'=-\mu a_1+[3\Gamma_{12}a_2^3\sin(\gamma_1)+C_{11}a_1a_2^2\sin(2\gamma_1)+C_{12}a_1^2a_2\sin(\gamma_1)]/2\omega_1,$$
$$a_1\theta_1'=\{-3\Gamma_{11}a_1^3-3\Gamma_{12}a_2^3\cos(\gamma_1)-C_{11}a_1a_2^2[2+\cos(2\gamma_1)]-3C_{12}a_1^2a_2\cos(\gamma_1)\}/2\omega_1,$$
$$a_2'=-\mu a_2+[-3\Gamma_{21}a_1^3\sin(\gamma_1)-C_{22}a_1^2a_2\sin(2\gamma_1)-C_{21}a_1a_2^2\sin(\gamma_1)+Q_2\,sin(\gamma_2)/2]/2\omega_2,$$
$$a_2\theta_2'=\{-3\Gamma_{22}a_2^3-3\Gamma_{21}a_1^3\cos(\gamma_1)-C_{22}a_1^2a_2[2+\cos(2\gamma_1)]-3C_{21}a_1a_2^2\cos(2\gamma_1)-Q_2\cos(\gamma_2)/2\}/2\omega_2 \tag{۵۹}$$

۳- نتایج عددی

برای آنکه بتوان دید بهتری از ماهیت و چگونگی رفتار پاسخ بدست آمده داشت، در این قسمت به ارائه چند نمونه از نتایج عددی پرداخته می‌شود. هدف اصلی این بخش بررسی اثرات شرایط مرزی داخل صفحه‌ای و تغییرات ماده هدفمند و همچنین دامنه و فرکانس تحریک هارمونیک خارجی بر پدیده رزونانس داخلی است. در ادامه‌ی بحث، ورق دایروی مورد مطالعه از جنس آلومینیوم-آلومینا[2] با خواص مکانیکی و فیزیکی ($a=1$ m, $h=0.01$ m,)، آلومینیوم ($\nu=0.3,\ \rho_m=2700\ \text{kg/m}^3,\ E_m=70\times10^9\text{N/m}^2$)، آلومینا ($\nu=0.3$,) ($\rho_c=3950\ \text{kg/m}^3,\ E_c=380\times10^9\text{N/m}^2$ فرض شده است. کد ریاضی مربوطه در نرم افزار Maple نوشته شده است تا با استفاده از آن مقادیر ویژه و مدهای ارتعاشی عرضی و داخل صفحه‌ای و ضرایب غیرخطی محاسبه و همچنین نقاط سکون[3] و شرایط وجود رزونانس داخلی یافت شود. سپس با معرفی این نتایج و سیستم دینامیکی در نرم‌افزار matcont پاسخ پایدار[4] ورق و اثرات تغییر پارامترهای دامنه و تنظیم نیرو بر دامنه نوسانات مورد مطالعه قرار گرفته است. همگرایی نتایج عددی برای محاسبه ضرایب غیرخطی به شیوه سعی و خطا بررسی شده، و استفاده از حداکثر ۸ فرکانس اول شکل مدهای متقارن محوری و ۸ فرکانس از شکل مدها با تعداد قطرهای صفر دوبرابر فرکانس عرضی مورد مطالعه [۸]، برای محاسبه ضرایب غیرخطی ارائه شده کافی است.

قبل از ارائه نتایج اصلی، باید نتایج این پروژه با سایر تحقیقات انجام شده و یا نرم افزارهای المان محدود مقایسه و صحت سنجی شود. بنابراین، نتایج ۱۰ فرکانس طبیعی (Hz) اول به ازای $g=1.5$ و شرط مرزی گیردار ورق دایروی ($H=0.01$ m, $a=1$ m) و همچنین نتایج به دست آمده از مدل المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس[5] در جدول ۱ آورده شده است. تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی و نتایج محاسبه شده به روش المان محدود دیده می‌شود. قابل توجه است که برای مدل سازی و شبکه بندی ورق هدفمند در نرم افزار آباکوس حداکثر از ۱۵۰۰ المان S8R5 (eight node doubly curved thin shell) و همچنین ۲۰ لایه به صورت ورق کامپوزیت در قسمت section استفاده شده است. برای ورق هدفمند با $g=5$ تغییرات خواص مکانیکی در راستای ضخامت بیشتر از حالت $g=1$ است و به همین دلیل نتایج المان محدود اختلاف بیشتری با نتایج تحلیلی دارد. بنابراین با افزایش نرخ تغییرات ماده، نیاز است که لایه‌های بیشتری فرض شود تا نتایج المان محدود دقت بهتری داشته باشد.

جدول ۱ صحت سنجی نتایج فرکانس طبیعی با نرم افزار المان محدود

m	n	$g=1$		$g=5$	
		محاسبه شده	المان محدود	محاسبه شده	المان محدود
۰	۱	۳۷/۱۳۵	۳۷/۱۴۳	۴۲/۴۸۵	۴۲/۵۴۰

1. Imperfection
2. Aluminum–Alumina
3. Fixed poins
4. Steady state
5. Abaqus

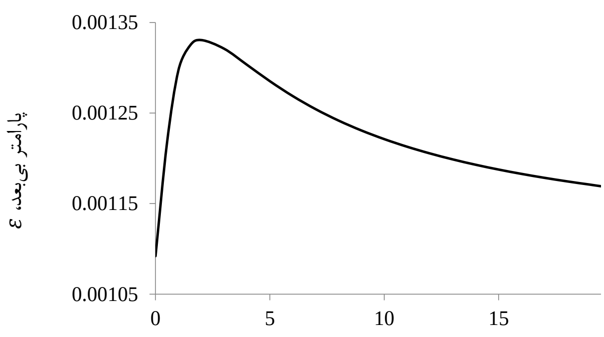
۱	۱	۷۷/۲۸۳	۷۷/۲۸۲	۸۸/۴۱۷	۸۸/۵۱۱
۲	۱	۱۲۶/۷۸	۱۲۶/۷۴	۱۴۵/۰۵	۱۴۵/۱۸
۰	۲	۱۴۴/۵۷	۱۴۴/۵۲	۱۶۵/۴۰	۱۶۵/۵۳
۳	۱	۱۸۵/۵۰	۱۸۵/۴۰	۲۱۲/۲۲	۲۱۲/۳۴
۱	۲	۲۲۱/۱۲	۲۲۰/۹۷	۲۵۲/۹۷	۲۵۳/۰۹
۴	۱	۲۵۳/۲۴	۲۵۳/۰۲	۲۸۹/۷۳	۲۸۹/۸۲
۲	۲	۳۰۷/۴۶	۳۰۷/۱۱	۳۵۱/۷۶	۳۵۱/۸۳
۰	۳	۳۲۳/۹۰	۳۲۳/۵۴	۳۷۰/۵۷	۳۷۰/۵۸
۵	۱	۳۲۹/۸۴	۳۲۹/۴۷	۳۷۷/۳۶	۳۷۷/۳۷

همچنین به منظور صحت سنجی ضرایب غیرخطی Γ، جدول ۲ نتایج محاسبه شده برای ورق ایزوتروپیک ($\nu = 0.3$) و شرایط مرزی داخل صفحه‌ای گیردار (گیردار-گیردار) و آزاد (گیردار-آزاد) را همراه با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۸] نشان می‌دهد. وجود همگرایی خوب در نتایج نشان دهنده صحت مقادیر محاسبه شده در این تحقیق می‌باشد. بعلاوه، از مقایسه نتایج محاسبه شده برای ضرایب غیرخطی دو شرط مرزی داخل صفحه‌ای فرض شده می‌بینیم که با زیاد شدن محدودیت[1] مرزی در حالت گیردار داخل صفحه‌ای، مقادیر این ضرایب نیز زیاد می‌شود. در واقع وجود محدودیت جابجایی در راستای داخل صفحه‌ای موجب افزایش محدودیت برای جابجایی عرضی و در نتیجه افزایش اثر عوامل غیرخطی می‌گردد.

جدول ۲ صحت سنجی ضرایب غیرخطی Γ با مرجع [۱۸]

		گیردار-آزاد	گیردار-گیردار	
m	n	محاسبه شده	محاسبه شده	مرجع [۱۸]
۰	۱	-۲/۸۷۶۸	-۸/۳۳۳۳	-۸/۳۳۱۸
۱	۱	-۱۷/۲۲۴	-۵۹/۸۶۳	-۵۹/۸۶۳
۲	۱	-۴۷/۳۰۴	-۱۵۴/۸۹	-۱۵۴/۹۰
۰	۲	-۱۶۱/۱۲	-۲۸۸/۲۰	-۲۸۸/۲۰
۳	۱	-۱۲۹/۸۹	-۳۶۶/۸۸	-۳۶۶/۸۸
۱	۲	-۳۸۴/۶۸	-۸۱۰/۶۱	-۸۱۰/۶۱
۴	۱	-۳۰۳/۸۳	-۷۵۸/۵۱	-۷۵۸/۵۱

شکل ۳ تاثیر تغییرات اندیس توانی بر پارامتر بی‌بعد ε را نشان می‌دهد. از شکل مشخص است که به ازای $g = 0, \infty$ که ورق به طور کامل ایزوتروپیک (فلز یا سرامیک) می‌شود مقدار $\varepsilon = 0.001092$ کمترین، و برای حالت $g = 2$ بیشترین مقدار $\varepsilon = 0.001331$ را داراست.

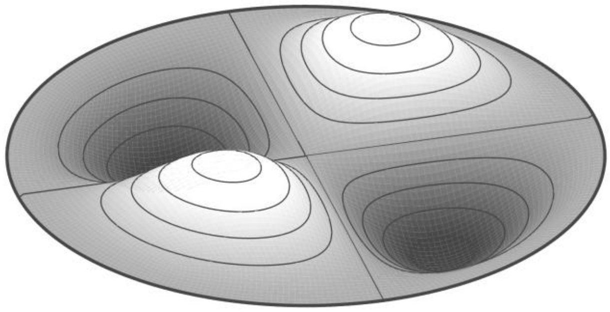


اندیس توانی، g

شکل ۳ تغییرات ε بر حسب اندیس توانی

برای یک ورق با هندسه ثابت اختلاف بین دو فرکانس طبیعی بی‌بعد آن عددی ثابت است (به دلیل حل معادلات بی‌بعد (۲۰) و (۲۱))، که در نتیجه مقدار $\varepsilon\sigma$ به کار رفته در بخش ۲-۹ نیز عددی ثابت می‌شود. بنابراین، تغییر جنس ورق موجب تغییرات در ضریب ε شده و در نتیجه عدد σ به کار رفته برای پارامتر تنظیم عوض خواهد شد. البته این نکته را هم باید در نظر داشت که در حالت با بعد با زیاد شدن اندیس توانی، جنس ورق از فلز ($g = 0$) به سرامیک ($g = \infty$) تبدیل می‌شود و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش خواهند یافت (توجه به جدول (۱) و همچنین روابط بی بعد سازی (۱۹)). بنابراین برای مطالعه اثر تغییرات ماده بر رفتار بی بعد ورق‌های هدفمند ، اثرات تغییر ضریب تنظیم نیز باید بررسی شود.

در ادامه پدیده رزونانس داخلی برای شکل مد ($m = 2, n = 1$) مطالعه خواهد شد (شکل ۴). در چنین وضعیتی که دو فرکانس با هم برابر هستند از روابط بخش ۲-۷ به راحتی می‌توان نشان داد ضرایب غیرخطی $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} =$ $C_{12} = C_{21} = 0$ و همچنین $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = C_{11} = C_{22} = \Gamma$، که مقادیر Γ در جدول ۲ به ازای شرایط مرزی مفروض آورده شده است [۸]. عدد ثابت $\varepsilon\sigma =$ 0.01 برای مدل سازی اختلاف فرکانسی در نظر گرفته شده و تمامی شکل‌های بعدی در این بخش بر اساس چنین فرضی ترسیم شده‌اند.



شکل ۴ شکل مد ($m = 2, n = 1$)

شکل ۵ و ۶ تغییرات دامنه نوسانات و شرایط تحریک شکل مد اول از طریق انتقال انرژی داخلی را بر حسب تغییرات فرکانس و دامنه نیرو نمایش می‌دهند. پاسخ کوپل[2] روی شکل‌ها با علائم ریاضی مربوطه و پاسخ‌های ناپایدار با خط چین مشخص شده‌اند. در همه حالت‌ها ضریب دمپینگ $\mu = 0.05$، و $Q_2 = 60$ در شکل ۵ و $\lambda = 20$ در شکل ۶ فرض گردیده است. از شکل مشخص است که مقادیر جابجایی عرضی ورق برای شرط مرزی گیردار-گیردار کوچکتر از شرط مرزیگیردار-آزاد می‌باشد.

درگیر بودن مرز در راستای داخل صفحه‌ای و کوپل بودن جابجایی عرضی و جابجایی صفحه‌ای علت چنین رفتاری است. در حالت پاسخ کوپل، از طریق انتقال انرژی داخلی از مد با فرکانس بالاتر به مد با فرکانس کوچکتر، شکل مد اول دامنه ارتعاشی بزرگتری نسبت به شکل مد دوم پیدا می‌کند. این خود نشان دهنده اهمیت بسیار بالای بررسی پدیده‌های غیرخطی در سازه‌های مکانیکی می‌باشد. در هر دو حالت تغییرات با فرکانس و دامنه نیرو مقدار جابجایی شکل مد دوم روند افزایشی دارد اما شکل مد اول با افزایش دامنه نیرو روند کاهشی

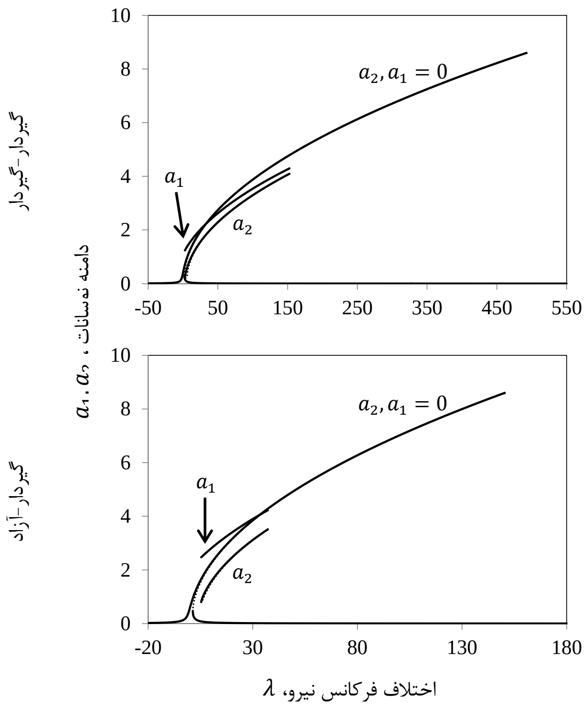
5. Constraint

2. Coupled

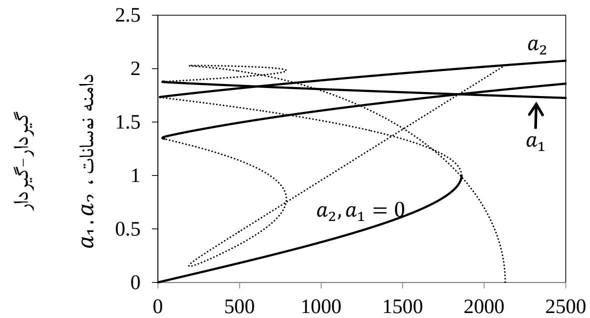
از خود نشان می‌دهد تا اینکه مقدار آن از مقدار دامنه شکل مد دوم کمتر می‌شود.

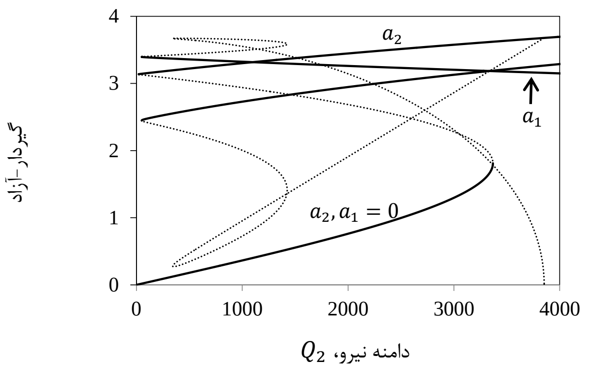
همچنین به ازای Q_2 برابر، شرط مرزی گیردار-گیردار نسبت به شرط مرزی گیردار-آزاد در دامنه وسیع‌تری از اختلاف فرکانس نیرو دارای پاسخ کوپل می‌باشد که در شکل ۷ این قضیه بهتر دیده می‌شود.

شکل ۷ مکان هندسی نقاط حدی[1] را برای ضرایب دمپینگ $\mu = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ مشخص می‌کند. به ازای هر مقدار دامنه نیرو (Q_2) دو مقدار اختلاف فرکانس نیرو (λ) وجود دارد که فاصله فرکانسی بین این دو نقطه پاسخ کوپل برای سیستم وجود دارد.



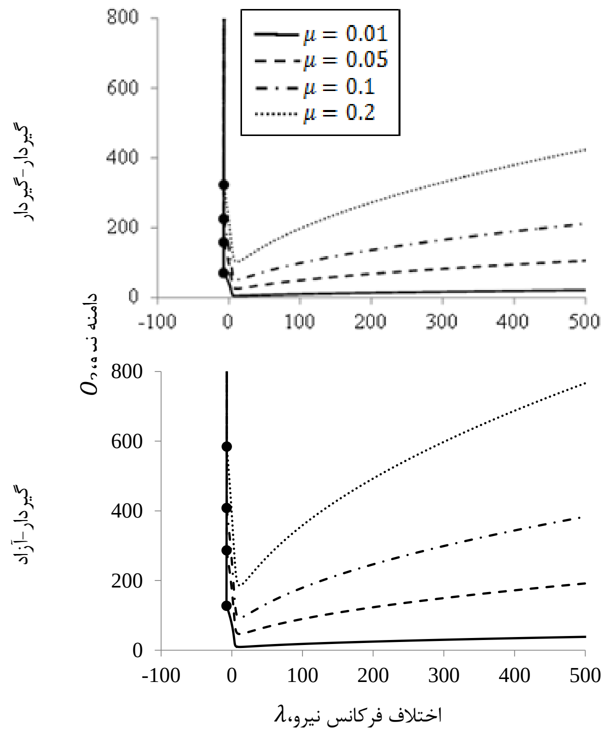
شکل ۵ تغییرات دامنه نوسانات با تغییرات فرکانس نیرو





شکل ۶ تغییرات دامنه نوسانات با تغییرات دامنه نیرو

نقاط دایره‌ای روی نمودارها حداکثر مقدار نیرو و فرکانسی را مشخص می‌کنند که با ازای آن دامنه نوسانات مد تحریک شده از طریق رزونانس داخلی بر روی شاخه سمت چپی منحنی‌ها صفر نشده است. برای دامنه نیروهای بیشتر مکان هندسی شاخه سمت چپ، مقدار جابجایی مد اول را صفر می‌دهد.



شکل ۷ مکان هندسی نقاط حدی

یعنی به ازای دامنه نیروی معین (بالاتر از نقاط) و با افزایش فرکانس نیرو، از مقدار مشخص λ به بعد، دامنه مد اول از صفر شروع به افزایش می‌کند، برخلاف دامنه نیروهای کم (پایین‌تر از نقاط) که در ابتدایی ترین نقطه شروع پدیده رزونانس داخلی مقدار جابجایی عرضی مد اول صفر نمی‌باشد (شکل ۵ و ۶).

علاوه بر این، با افزایش ضریب دمپینگ حداقل نیروی مورد نیاز برای ایجاد رزونانس داخلی افزایش می‌یابد و دامنه فرکانسی که در آن رزونانس داریم نیز کوچکتر می‌شود. با مقایسه دو شرط مرزی دیده می‌شود که احتمال وقوع

1. Limit points

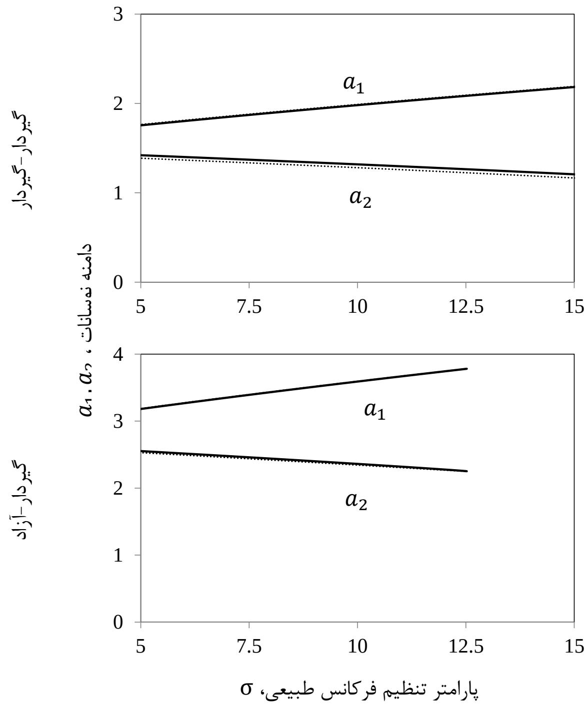
رزونانس داخلی برای حالت گیردار داخل صفحه‌ای به مراتب بیشتر از حالت آزاد داخل صفحه‌ای می‌باشد.

شکل ۸ تغییرات دامنه نوسانات با تغییرات پارامتر تنظیم فرکانس طبیعی (σ) را نشان می‌دهد. همانطور که قبلا ذکر شد، به دلیل ثابت بودن $\varepsilon\sigma$ و تغییر کردن ضریب ε با جنس ماده، پارامتر σ تغییر خواهد کرد. از شکل مشخص می‌شود که با کم شدن σ (افزایش ε) دامنه جابجایی عرضی مد دوم افزایش و مد اول کاهش می‌یابد.

پس برای اندیس توانی $g = 2$، که بیشترین مقدار ε را داراست، پاسخ مد اول و دوم به هم نزدیکتر هستند. این نتیجه از بررسی حالت بی‌بعد به دست آمده است و البته می‌دانیم که افزایش اندیس توانی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی و همچنین با توجه به ثابت فرض کردن Q_2 در این مطالعه، باعث افزایش نیروی خارجی بعد دار (P) خواهد شد. پس در حالت بعد دار عملا دامنه و فرکانس نیروی خارجی وارده نیز تغییر می‌کند.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک مدل ریاضی براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و فرضیات ون‌کارمن برای بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق‌های هدفمند ارائه شد.



شکل ۸ تغییرات دامنه نوسانات با تغییرات پارامتر تنظیم فرکانس طبیعی

سپس قسمت مکانی معادلات غیرخطی حاکم به روش تحلیلی در دستگاه مختصات قطبی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بر اساس توابع بسل حل شدند. از روش اغتشاشات MMS برای حل معادلات زمانی غیرخطی حاصله استفاده گردید و در حالات $\omega_2 \approx \omega_1$ پدیده رزونانس داخلی و شرایط بوجود آمدن آن مورد مطالعه قرار گرفت. تاثیر دامنه و فرکانس نیروی اعمالی و همچنین تغییرات کسرحجمی ماده هدفمند بر رفتار ارتعاشی ورق دایروی و بیضوی مفروض بررسی شد. به طور مشخص مشاهده شد که در حالت پاسخ کوپل از طریق انتقال انرژی داخلی از مد با فرکانس بالاتر به مد با فرکانس کوچکتر، دامنه نوسانات مد اول بزرگتر از دامنه نوسانات مد دوم می‌شود. همچنین، با افزایش ضریب دمپینگ حداقل نیروی مورد نیاز برای ایجاد پدیده رزونانس داخلی افزایش می‌یابد. بعلاوه، احتمال وقوع رزونانس داخلی برای شرط مرزی گیردار-گیردار به مراتب بیشتر از شرط مرزی گیردار-آزاد می‌باشد. درنهایت، با افزایش ε (کاهش σ)، دامنه جابجایی عرضی مد دوم افزایش و مد اول کاهش پیدا می‌کند.

۵- مراجع

[1] Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., “Nonlinear Oscillations,” New York, John Wiley and Sons, 1979.
[2] Chia, C.Y., “Nonlinear Analysis of Plates,” Mc Graw Hill, New York, 1980.
[3] Koizumi, M., “The Concept of FGM,” Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials, Vol. 34, pp. 3-10, 1993.
[4] Miyamoto, Y., “Functionally Graded Materials: Design, Processing, and Applications,” Dordrecht, Netherlands, Kluwer Academic Publications, 1999.
[5] Leissa, A.W., “Vibration of Plates,” NASA SP-160, U.S. Government Printing Office, Washington DC, USA, 1969.
[6] Tobias, S.A., “Free Undamped Non-Linear Vibrations of Imperfect Circular Disks,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 171, No. 1, pp. 691-715, 1957.
[7] Williams, C.J.H. and Tobias, S.A., “Forced Undamped Non-Linear Vibrations of Imperfect Circular Discs,” Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 5, No. 4, pp. 325-335, 1963.
[8] Touze, C. Thomas, O. and Chaigne, A., “Asymmetric Non-Linear Forced Vibrations of Free-Edge Circular Plates. Part I: Theory,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 258, No. 4, pp. 649-676, 2002.
[9] Thomas, O. Touze, C. and Chaigne, A., “Asymmetric Non-Linear Forced Vibrations of Free-Edge Circular Plates. Part II: Experiments,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, No. 5, pp. 1075-1101, 2003.
[10] Lee, W.K. and Yeo, M.H., “Non-Linear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 263, No. 5, pp. 1017-1030, 2003.
[11] Gunes R. and Reddy J.N., “Nonlinear Analysis of Functionally Graded Circular Plates Under Different Loads and Boundary Conditions,” International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 8, No. 1, pp. 131-59, 2008.
[12] Nosier, A. and Fallah, F., “Reformulation of Mindlin–Reissner Governing Equations of Functionally Graded Circular Plates,” Acta Mechanica, Vol. 198, No. (3-4), pp. 209-33, 2008
[13] Fallah, F. and Nosier, A., “Nonlinear Behavior of Functionally Graded Circular Plates with Various Boundary Supports Under Asymmetric Thermo-Mechanical Loading,” Composite Structures, Vol. 94, No. 9, pp. 2834-2850, 2012.
[14] Allahverdizadeh, A., Naei, M.H. and Rastgo, A., “The Effects of Large Vibration Amplitudes on the Stresses of Thin Circular Functionally Graded Plates,” International Journal of Mechanics and Materials in Design, Vol. 3, No. 2, pp. 161-174, 2006.
[15] Hu, Y. and Zhang, Z., “The Bifurcation Analysis on the Circular Functionally Graded Plate with Combination Resonances,” Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 3, pp. 1779-1790, 2012.
[16] Amini, M.H., Soleimani, M., Altafi, A. and Rastgoo, A., “Effects of Geometric Nonlinearity on Free and Forced Vibration Analysis of Moderately Thick Annular Functionally Graded Plate,” Mechanics of Advanced Materials and Structures, Vol. 20, No. 9, pp. 709-720, 2013.
[17] Fung, Y.C. and Tong, P., “Classical and Computational Solid Mechanics,” World Scientific, New Jersey, 2001.
[18] Nayfeh, A.H. and Pai, P.F., “Linear and Nonlinear Structural Mechanics,” John Wiley and Sons Ltd, United Kingdom, 2004.
[19] Sridhar, S. Mook, D.T. and Nayfeh, A.H., “Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 59, No. 22, pp. 159-170, 1978.
[20] Rao, S.S., “Vibration of Continuous Systems,” John Wiley and Sons, Hoboken, 2007.